PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

A Noção de Raciocínio Indutivo em Construções Matemáticas

por

Braian Azael da Silva

Orientador do Trabalho:
Prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Preprint PROFMAT 4 (2015) 30 de Março, 2015

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

A Noção de Raciocínio Indutivo em Construções Matemáticas

Braian Azael da Silva
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
e-mail: braian_matpuc@hotmail.com

Resumo

Este trabalho pretende descrever a ideia do indutivo no ensino de Matemática, propondo uma noção do que entende-se como raciocínio indutivo. Discute-se a maneira como essa noção perpassa as propostas contidas nos documentos oficiais brasileiros e de outros países. Situações para a sala de aula envolvendo padrões geométricos e numéricos são propostas à luz da intencionalidade na explicitação do raciocínio indutivo.

Neste trabalho, é apresentada a noção do que entendo como raciocínio indutivo e proponho situações e contextos significativos para que o professor possa explorar essa noção em sala de aula. Através do estudo de padrões geométricos, numéricos, entre outros, explorando a noção do indutivo, no qual os temas e conceitos das álgebra podem inserir-se como uma generalização de resultados numéricos.

No início trabalho são analisadas as orientações pedagógicas brasileira, americana e portuguesa. Vê-se que enquanto no Brasil não temos uma orientação clara sobre como o indutivo e os padrões devem ser trabalhados, nos Estados Unidos os professores recebem uma orientação sobre como trabalhar com os padrões de modo detalhado e distribuído ao longo dos anos letivos. Em Portugal os padrões, também vistos como regularidades, novamente indicam um trabalho que se inicia com os alunos mais novos, padrões mais simples, e é distribuído ao longo da vida escolar culminando na generalização de padrões através de expressões algébricas.

Claro que ao trabalharmos conteúdos como progressões, estamos trabalhando padrões e o indutivo se faz presente, porém muitas vezes nem mesmo nestes conteúdos o raciocínio indutivo é explorado. São apresentadas fórmulas prontas que o aluno deve saber aplicar.

Na primeira seção são comparados os currículos brasileiro, americano e português, no que diz respeito ao estudo de padrões e regularidades, bem como sobre o indutivo.

Na segunda seção discorre-se sobre os padrões relacionando-os à álgebra. Com base em autores que têm pesquisado sobre o estudo de padrões e regularidades como introdução à generalização algébrica, explicita-se o que entendo por raciocínio indutivo. Ainda nesta seção é diferenciado raciocínio indutivo de *indução matemática* (ferramenta de prova).

Na terceira seção analiso conteúdos que normalmente são estudados em sala de aula, porém que muitas vezes não evidenciam o raciocínio indutivo, mesmo sendo todo o processo fundamentado sobre esta ferramenta. A apresentação destes conteúdos, mostrando explicitamente a presença do raciocínio indutivo, pode trazer subsídios aos professores na introdução de certos conceitos e construções matemáticas. Os alunos terão a oportunidade de descobrir, num processo exploratório, fórmulas matemáticas que generalizam os padrões. Serão explorados os temas: soma dos termos de uma progressão aritmética, números poligonais, soma dos ângulos internos de um polígono, número de diagonais de um polígono e de um prisma e a obtenção do número e, sempre sobre a ótica do raciocínio indutivo.

Concluí-se o trabalho com uma reflexão a respeito do tratamento das diversas construções matemáticas apresentadas, à luz do raciocínio indutivo, enfatizando a necessidade de tratar intencionalmente essa noção nas construções matemáticas.

1 A Noção do Indutivo no Currículo de Matemática

Diante dos desafios do século XXI a sociedade espera que os indivíduos tenham capacidade de tomar decisões, trabalhar em grupo, interpretar e resolver problemas e comunicar-se. Deste modo, em vários países ocorreram reformas curriculares visando a formação deste cidadão versátil, analítico e decidido. Dois países que apresentaram uma proposta concreta no tratamento da noção do indutivo foram Estados Unidos e Portugal. Por isso faremos uma breve discussão comparativa entre as propostas daqueles países e os documentos oficiais brasileiros.

A seguir, serão analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, pois estes “constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País” [4]. Também são analisados alguns pontos do currículo americano e português para a disciplina de Matemática.

Veremos que nestes documentos o desenvolvimento do raciocínio, da imaginação, o uso da indução, da capacidade de formular hipóteses e testá-las são temas abordados com frequência. Tais temas, são necessários para o desenvolvimento do que chamarei de raciocínio indutivo.

Os PCNs [5] enfatizam a formação de alunos capazes de

> questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

É de consenso que para tal, faz-se necessário deixarmos de lado uma educação fundamentada em procedimentos mecânicos, que torna o aluno mero reprodutor de conhecimentos previamente definidos, ou seja, atuando como espectador e reprodutor de fórmulas e ideias prontas. É preciso que os alunos sejam participantes num processo de construção, especialmente no que se refere à Matemática. Segundo [7]

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Acredito que a Matemática ocupa um papel fundamental na formação deste indivíduo e os PCNs [7] colocam que

> em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Segundo a citação anterior, nota-se um esforço de buscar na matemática um incentivo à investigação e a criatividade. Ainda, nas aulas da Matemática "o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução" [5].

O professor como mediador de processos educacionais precisa ter uma postura de quem aprecia resoluções com base no raciocínio, pois

> se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, precisa, então, propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e não a passividade, valorizar o processo e a qualidade, e não apenas a rapidez na realização, e esperar estratégias criativas e originais, e não a mesma resposta de todos [5].

Deste modo, precisamos ter professores engajados na tarefa de fazer os alunos criarem tais hábitos. Segundo [18] "a primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar".

Ainda de acordo com [4], o ensino de Matemática

> prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

Entrando diretamente nas orientações para a disciplina de Matemática, encontra-se, por exemplo, que para cumprir seus objetivos, os PCNs de Matemática [5] "destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações".

Novamente os PCNs [5] falam sobre o uso da indução e da dedução quando dizem que:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Quando são propostas atividades em que a solução das mesmas podem ser obtidas de várias maneiras, damos ao aluno mais autonomia para que ele resolva tal atividade do seu próprio modo, pensando "do seu jeito". Ao fazer isto, o aprendizado pode ser mais significativo, pois o aluno relaciona conteúdos e ideias matemáticas e estabelece caminhos na resolução de problemas. Os PCNs [4] citam que com isto os estudantes

> podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas.

Ainda, quando o texto que está sendo analisado fala sobre competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em Matemática, especificamente sobre investigação e compreensão é preciso que o aluno possa "distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos" [6]. Outro ponto que merece destaque, no mesmo item do texto, é que o aluno deve "fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" [6].

No sistema de educação americano, o correspondente aos nossos PCNs são os *Standards*. O conteúdo dos *Standards* vem sendo organizado pelo NCTM (Conselho Nacional dos Professores de Matemática) desde o ano de 1986.

Nos *Standards* é reconhecida a necessidade de desenvolver um pensamento crítico. Para isso o NCTM levantou a importância da solução de problemas, da comunicação, das conexões e do raciocínio.

É comum nas várias unidades dos *Standards* a ideia de que "o estudo da matemática deve enfatizar o raciocínio para que os alunos acreditem que a matemática faz sentido" [15].

O NCTM lista os objetivos para cada faixa etária, e já nos alunos mais novos é incentivado o reconhecimento de padrões e enfatizada a importância da aplicação da matemática.

Na reforma americana do currículo da Matemática foram incluídos alguns novos temas entre eles *padrões e relações*. Estes permeiam todo o currículo desde os anos iniciais, iniciando com classificação e ordenação de objetos, até alunos do ensino médio com generalização de padrões e uso da Álgebra.

Na tabela a seguir, traduzida de [8], é possível visualizar a distribuição do tema *padrões e relações* ao longo dos anos letivos no sistema de educação americano:

Grades Pré K-2	Ordenar e classificar objetos por tamanho, número e outras propriedades.
	Reconhecer, descrever e estender padrões tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e traduzir de uma representação para outra.
	Analisar como padrões de repetição e padrões de crescimento são gerados.
Grades 3-5	Descrever, estender e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos.
	Representar e analisar os padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.
Grades 6-8	Representar, analisar e generalizar uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas.
	Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação.
	Identificar as funções como linear ou não linear e contrastar suas propriedades a partir de tabelas, gráficos ou equações.
Grades 9-12	Generalizar padrões usando funções definidas explicitamente e definidas de forma recursiva.
	Compreender as relações e funções e escolher, de forma flexível, a melhor representação para elas.
	Analisar funções de uma variável, investigando as taxas de variação, raízes, assíntotas e comportamento local e global.
	Compreender e executar transformações tais como combinação aritmética, compondo, e invertendo as funções mais usadas, usando a tecnologia para realizar estas operações quando em expressões simbólicas mais complicadas.
	Compreender e comparar as propriedades de classes de funções, incluindo a exponencial, polinomial, racional, logarítmica e funções periódicas.
	Interpretar representações de funções de duas variáveis.

Segundo [17] a investigação de padrões permitem aos estudantes:

- resolver problemas;

- desenvolver a compreensão e as relações de importantes conceitos matemáticos;
- investigar as relações entre quantidades (variáveis) de um padrão;
- generalizar padrões usando palavras ou variáveis;
- estender e conectar padrões;
- construir a compreensão de função.

Em Portugal o documento oficial semelhante aos PCNs é o *PMEB*, *Programa de Matemática do Ensino Básico*, que recentemente passou por atualizações. Além de fazer uma unificação dos ciclos da Educação Básica, foi acrescentado o conceito de *exploração de padrões*, como um primeiro passo para a generalização. O documento entende que a generalização é um dos componentes mais importantes do conhecimento matemático. Deste modo o *PMEB* sugere uma abordagem através de múltiplas representações utilizando para isto conceitos visuais/figurativos.

Para formar alunos com tais capacidades foram pensadas tarefas divididas em diferentes graus de dificuldade. Num primeiro momento são propostas atividades chamadas de "Contagens Visuais Básicas" nas quais é desenvolvida no aluno a partir da contagem e observação a chamada capacidade de ver instantaneamente, neste ponto são feitas atividades direcionadas tais como a composição e decomposição de números, relações numéricas, orientação espacial, figuras geométricas e simetria. Num segundo momento são trabalhados os chamados problemas de sequências em que, além de reconhecer o padrão, também deve ser feita a generalização. O objetivo é descobrir os padrões presentes numa determinada sequência e para cada caso fazer generalizações. O texto do documento fala sobre a regra do "Ver-Descrever-Registrar". São colocadas ainda duas formas de generalização: a generalização próxima e a generalização distante, utilizando como ferramentas o raciocínio recursivo e o funcional. Existe ainda um terceiro momento, no qual o aluno deve resolver problemas. Nesta etapa espera-se que o aluno desenvolva suas próprias sequências, descubra o padrão e estabeleça relações de modo a encontrar a solução do problema proposto. Por se tratar de um assunto relativamente novo, o governo de Portugal disponibilizou alguns manuais para a capacitação dos professores, para que eles possam fazer uma abordagem direcionada em suas práticas pedagógicas.

A seguir é acrescentada uma outra tabela, agora com alguns pontos do Programa Curricular de Matemática de Portugal que nos remetem aos estudo de regularidades ou padrões:

1º ciclo	Classificar e ordenar de acordo com um dado critério.
	Realizar contagens progressivas e regressivas, representando os números envolvidos.
	Identificar e dar exemplos de números pares e ímpares.
	Resolver problemas envolvendo relações numéricas.
	Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números. Investigar regularidades numéricas.
	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.
	Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.
	Estabelecer relações entre fatos e ações que envolvam noções temporais e reconhecer o caráter cíclico de certos fenômenos e atividades.
	Relacionar entre si hora, dia, semana, mês e ano.
	Identificar a hora, a meia-hora e o quarto-de-hora.
	Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões.
	Organizar os dados em tabelas de frequências absolutas e representá-los através de pictogramas.
	Calcular o perímetro de polígonos e determinar, de modo experimental, o perímetro da base circular de um objeto.
	Estimar a área de uma figura por enquadramento.
	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada. Formular questões, recolher e organizar dados qualitativos e quantitativos (discretos) utilizando tabelas de frequências, e tirar conclusões.
	Explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos.
	Formular e testar conjecturas relativas a situações matemáticas simples.
	Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
	Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.
	Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios.
	Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

2º ciclo	Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
	Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
	Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.
	Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.
	Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente.
	Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las.
	Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade.
	Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões.
	Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta.
	Determinar um valor aproximado de π.
	Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos.
	Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais.
	Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
	Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.
	Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa.
	Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios.
	Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.
3º ciclo	Resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais.
	Deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.
	Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
	Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
	Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra.
	Formular, testar e demonstrar conjecturas.
	Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples.
	Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo.
	Compreender o papel das definições em matemática.
	Distinguir uma argumentação informal de uma demonstração.
	Selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração.
	Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
	Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.
	Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios.
	Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

Os PCNs apenas sinalizam uma abordagem que contemple o desenvolvimento de padrões, enquanto outros países como Estados Unidos e Portugal, através do *Standards* ou do *PMEB*, respectivamente, possuem propostas adaptadas para que o estudo dos padrões e a noção do indutivo sejam distribuídos, levando em consideração os graus de dificuldade, ao longo dos anos escolares. Por outro lado, amparados pelos PCNs, os professores podem desenvolver o tema em sala de aula. Ao longo do trabalho serão apresentados alguns caminhos para tratar o tema em diversas situações escolares.

2 Raciocínio Indutivo

Como observado na seção anterior os PCNs, em todos os níveis, sinalizam as ideias de *indutivo* e *indução*, mas o que estes termos querem dizer? Segundo [2], o adjetivo indutivo tem quatro significados que são:

1. Que procede por indução.
2. Relativo a indução.
3. Em que há indução.
4. Que induz.

No mesmo dicionário temos que o adjetivo indução significa

1. Ato ou efeito de induzir.
2. Forma de raciocínio que consiste em inferir de fatos particulares uma conclusão geral.
3. Conclusão tirada a partir desse raciocínio.
4. *fig.* Incentivo, estímulo, sugestão, instigação.

Nesta seção trata-se da indução como o processo de reconhecer um padrão ou uma sequência e descobrir os termos seguintes mesmo que eles não estejam representados. Acredito que um estudo intencional de padrões pode ser útil para a compreensão da álgebra, por exemplo, que muitas vezes é vista como sem significado para os alunos e um conteúdo com elevado grau de dificuldade.

O entendimento dos padrões é importante na Matemática mas não é enfatizado nos PCNs e muitas vezes não chega à sala de aula. Na continuidade deste trabalho destacam-se diversos conteúdos escolares que podem ser introduzidos através da análise de padrões, permitindo ao aluno compreender como certos resultados foram encontrados e entender a relação entre o conteúdo matemático e sua aplicação no mundo real. A abordagem do estudo dos padrões através do raciocínio indutivo ainda permite reconstruir o contexto histórico em que dada fórmula ou resultado foi descoberto e portanto insere a História da Matemática na contextualização dos temas. O raciocínio indutivo ainda permite relacionar áreas e conteúdos matemáticos até que seja possível compreender o padrão em questão e por isto muitas vezes não tem uma única solução, dando assim certa liberdade ao aluno e ao mesmo tempo promove uma revisão de conhecimentos adquiridos.

Alguns autores como Mason [13], Serra [20], Lee [12], Devlin [9], Steen [19] e Vale [21] assim como as diretrizes citadas anteriormente colocam o estudo de padrões como uma possibilidade de iniciar a álgebra, já que para generalizar padrões é preciso comunicar o que ocorre, e para isto usam-se as variáveis.

Mason [13] defende que “o coração do ensino da matemática é o despertar da sensibilidade dos alunos para a natureza da generalização matemática” e que a álgebra “como entende-se na escola é a linguagem para a expressão e manipulação de generalidades”.

Este autor ainda defende que a generalização não é apenas o culminar de investigações matemáticas, mas a generalização é natural e onipresente. Por ser tão central para toda a Matemática, o autor acredita que muitos profissionais já não se atentam para este fato. Mason é favorável à ideia de que o pensamento algébrico enquanto passar do particular para o geral deve ser cultivado e pode ser desenvolvido. Para ele, este passar do particular para o geral é a generalização.

Bednarz, Kieran e Lee [3] citam que a comunidade internacional têm se interessado bastante pelas abordagens de ensino da álgebra. Segundo estes autores, agora é percebido que a álgebra não é “apenas uma ferramenta para resolver específicos problemas mas é também uma ferramenta para expressar soluções”. Sendo assim, o estudo de regularidades encontrado em certas relações pode dar uma abordagem de que “a álgebra é o centro das generalizações”. Desta maneira, o entendimento da álgebra pode ser ampliado ao pensarmos nela como ferramenta de generalização, de provar e validar as generalizações.

Lee [12] também defende o trabalho de padrões que são generalizados através de representações algébricas e que a compreensão dos padrões e a generalização é ampliada na medida em que os alunos passam a ter um estudo intencional sobre padrões e generalizações. Ele entende que existem outros modos de introduzir a álgebra enquanto ferramenta, mas que somente a generalização pode iniciar os estudantes na cultura algébrica.

Esta abordagem sobre a álgebra mostra que é possível, através das variáveis, modelar certas situações em que regularidades são observadas, fazendo conjecturas sobre a generalização, e verificar se a modelagem foi feita de modo correto. Como existem várias situações, escolares ou não, em que podemos observar padrões, isto pode ajudar a tornar o ensino de álgebra mais acessível e levar os alunos a compreender as relações entre quantidades numéricas conhecidas e quantidades numéricas representadas pelas variáveis.

OS PCNs indicam que é possível desenvolver alguns aspectos da álgebra desde as séries iniciais. Estes aspectos são justamente sobre a generalização dos padrões. Nos PCNs [5] lemos que:

> embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação.

O texto segue observando que:

> esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função no terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.

De modo semelhante, Mendes e Delgado [14] afirmam que desde o jardim de infância as crianças devem ser iniciadas no trabalho com padrões e regularidades. As autoras ainda defendem este pensamento ao observar que:

> o trabalho com padrões é um dos alicerces do pensamento algébrico, pois a ideia de variável começa a formar-se ao longo da exploração de situações associadas à identificação de regularidades. Também a oportunidade de estabelecer generalizações, ainda que de uma forma intuitiva, partindo da identificação de padrões, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O estudo da álgebra culmina no cálculo literal, mas muitas vezes o cálculo literal é utilizado nas salas de aula como princípio, meio e fim do estudo da álgebra. A álgebra é ensinada desta maneira, ou ao menos vista desta maneira por grande parte dos alunos. Talvez seja este o motivo de que a álgebra seja um dos conteúdos em que os alunos apresentam mais dificuldade.

No capítulo que discutem sobre a álgebra, estas autoras [14] ainda observam que:

> O uso de situações significativas para o ensino da álgebra é particularmente interessante porque existem muitos professores de matemática que consideram a álgebra uma situação muito abstrata, sem qualquer correspondente em situações concretas. Quando é introduzida a simbolização algébrica, nota-se no ensino de matemática, uma verdadeira ruptura do progresso de certos alunos, que pareciam, até então, muito capazes de lidar com operações aritméticas"

Mas o que é Raciocínio Indutivo?

Serra afirma que "o raciocínio indutivo é o processo de observar padrões e fazer generalizações sobre esses padrões" [20]. O autor comenta que os matemáticos usam o raciocínio indutivo para fazer descobertas e em seguida verificam tais descobertas de modo lógico.

O mesmo autor descreve experiências que enfrentamos na nossa infância, como aprender a andar, a falar, a andar de bicicleta, como aprendizagens que se deram por observação, por tentativa e erro, e deste modo Serra coloca o raciocínio indutivo no cotidiano de todas as pessoas, ao mencionar que a maioria do que aprendemos se deu "por um processo chamado raciocínio indutivo" [20].

Ele então entende que o "raciocínio indutivo é o processo de observação de dados, reconhecimento de padrões, e generalizações a partir destas observações" [20].

Polya, no seu livro “A Arte de Resolver Problemas” [18] também discute o raciocínio indutivo. Para ele “a indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática”. Polya ainda explica que “a indução procura encontrar a regularidade e coerência nos fatos observados” [18].

Polya lembra “que muitos fatos matemáticos foram encontrados por indução”. Estes fatos à que ele se refere, hoje fazem parte do conteúdo que é trabalhado em sala de aula, como veremos mais adiante.

Lembrando que na Matemática um fato só é dado como certo após ser provado, então tais fatos após serem descobertos por indução foram provados posteriormente. Esta prova é o que Serra coloca como verificação das descobertas de modo lógico, como citado anteriormente. Polya ao falar sobre a aceitação dos resultados encontrados por indução coloca que na “Matemática há uma tal autoridade: a demonstração rigorosa” [18]. O autor segue afirmando que “a Matemática apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva e experimental”. Com isto ele quer dizer que quando um matemático está criando ou desenvolvendo Matemática ele passa por um processo de estudo de casos, de observação de padrões, de conexão de ideias matemáticas e que este é um processo indutivo.

Ao final do que se acredita ser uma nova descoberta é preciso rever os passos e prová-los de modo sistematizado.

Entendo como Raciocínio Indutivo o processo (habilidade) de analisar, reconhecer padrões significativos e a partir dos casos particulares observados, construir processos que permitam estender e generalizar as regularidades para proposições mais gerais.

Assim, o raciocínio indutivo muitas vezes está presente na resolução de uma equação ou na modelagem e resolução de um problema. Em muitos casos conseguimos reconhecer os padrões com muita facilidade, como no estudo das progressões aritméticas e geométricas, porém em outros casos o raciocínio indutivo não se faz explícito, pois enxergamos o produto final e não o processo.

Vale ressaltar que o termo indução não está sendo usado como método de prova. Em Matemática existe um método de prova chamado de *Método da Indução Matemática* [10] ou *Princípio da Indução Finita* [11] que muitas vezes é chamado somente de *Indução.* Este método de prova não deve ser confundido com o raciocínio indutivo, como alerta Polya ao dizer que “a indução Matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo” [18]. Fica claro que Polya falava sobre o Princípio de Indução Finita. O autor ainda diz que “é de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos”. Polya citou teoremas, mas a prova por Indução Matemática pode ser usada para provar algumas igualdades, desigualdades, critérios de divisibilidade, fórmulas, entre outros.

Em seu livro Polya apresenta um exemplo no qual uma lei geral de uma sequência é encontrada pelo raciocínio indutivo e em seguida provada pela Indução Matemática. Neste caso a descoberta da lei geral se deu pelo raciocínio indutivo e "a demonstração aparece como um complemento matemático à indução" [18], e assim Polya atribui a isto a denominação de *Indução Matemática*.

3 Raciocínio Indutivo em Construções Matemáticas

A análise dos PCNs sugere o trabalho com padrões, mas na prática são encontradas poucas indicações de como o tema pode ser trabalhado em sala de aula. Por outro lado, em outros países já existem currículos organizados para que o estudo de padrões acompanhe o desenvolvimento do aluno de forma sistemática. Acredito ser necessária a intencionalidade no tratamento do assunto, discutindo-se ajustes no currículo. A seguir será feita uma abordagem de alguns tópicos específicos sobre construções matemáticas para sala aula, em que é evidenciado o raciocínio indutivo. Os tópicos aqui abordados podem ajudar o professor no direcionamento de suas aulas, a fim obter uma generalização à partir da observação de regularidades.

3.1 Soma dos Termos de uma Progressão Aritmética

Inicialmente será descrito como obter a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, uma vez que vamos utilizar esse resultado ao longo do trabalho. A ideia da demonstração é escrever os termos da sequência em ordem crescente e, abaixo, escrevê-los em ordem decrescente. Depois somar ambas, concluindo a expressão que fornece a soma dos termos de uma progressão aritmética. Contasse que Gauss aplicou este racíocinio ainda criança criança, para obter a soma S_{100} dos 100 primeiros naturais.

$$\begin{array}{rcl} S_{100} & = & 1+2+3+4+\cdots+97+98+99+100 \\ S_{100} & = & 100+99+98+97+\cdots+4+3+2+1 \\ \hline 2S_{100} & = & (1+100)\cdot 100 \\ S_{100} & = & 5050 \end{array}$$

Considere uma progressão aritmética de termos, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$, aplicando a mesmo princípio temos que a soma dos n primeiros termos é dada por:

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \\ S_n & = & a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1 \\ \hline 2S_n & = & (a_1+a_n)\cdot n \end{array}$$

Dessa forma,

$$S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}.$$

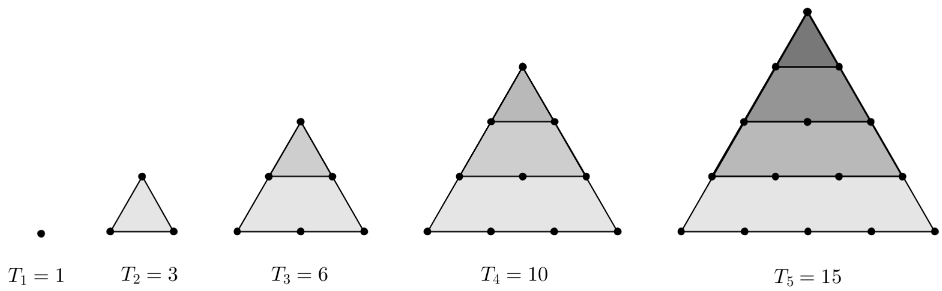
3.2 Números Poligonais

Desde a antiguidade entender a natureza associada a certos números e sequências vem intrigando diversos pensadores. Os pitagóricos já trabalhavam no desenvolvimento dos chamados *números poligonais* ou *números figurados*, números estes que são expressos como uma reunião de pontos que atendem a uma determinada configuração geométrica.

Para o desenvolvimento desta tarefa eles podem ter utilizado a observação de padrões, fazendo uso de raciocínio indutivo. Com essas habilidades torna-se possível conjecturar tais números. Não há dúvidas que a notação utilizada na época é bem diferente da atual, não faremos aqui um resgate histórico, apenas uma abordagem que evidencie o raciocínio indutivo nesses processos de construção.

3.3 Números Triangulares

A sequência 1, 3, 6, 10, 15, 21,... é uma progressão aritmética de segunda ordem em que o enésimo termo pode ser determinado por um polinômio do segundo grau. No entanto, essa sequência também forma os chamados números triangulares, uma vez que associamos cada unidade a um ponto temos a sequência dada pela figura abaixo;



$$
\begin{aligned}
T_1 &= 1 \\
T_2 &= T_1 + 2 \\
T_3 &= T_2 + 3 \\
T_4 &= T_3 + 4 \\
&\vdots \\
T_{n-1} &= T_{n-2} + n - 1 \\
T_n &= T_{n-1} + n
\end{aligned}
$$

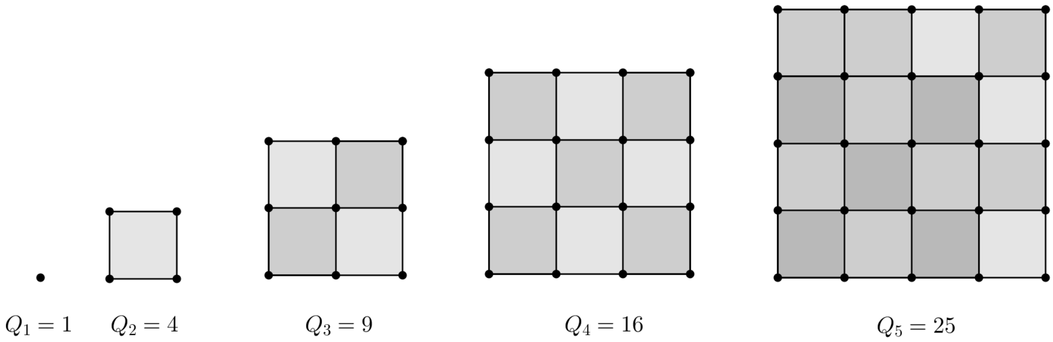
A capacidade de escrever T_n indutivamente a partir dos primeiros termos é uma característica que permite reconhecer e identificar padrões para obter uma generalização. Ao somarmos todas as equações temos:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + n \\
T_n &= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo método de Gauss é possível obter uma expressão que fornece qualquer número triangular para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Números Quadrangulares

Assim como nos números triangulares os números quadrangulares também seguem um determinado padrão e a generalização passa pela utilização do raciocínio indutivo. Observe a sequência abaixo ilustrando os primeiros números quadrangulares.



Utilizando Q_n como representação de um número quadrangular com $n \in \mathbb{N}^*$.

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= 1 \\
Q_2 &= Q_1 + 3 \\
Q_3 &= Q_2 + 5 \\
Q_4 &= Q_3 + 7 \\
&\vdots \\
Q_{n-1} &= Q_{n-2} + 2n - 3 \\
Q_n &= Q_{n-1} + 2n - 1
\end{aligned}
$$

Somando as equações temos:

$$
Q_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 3 + 2n - 1
$$

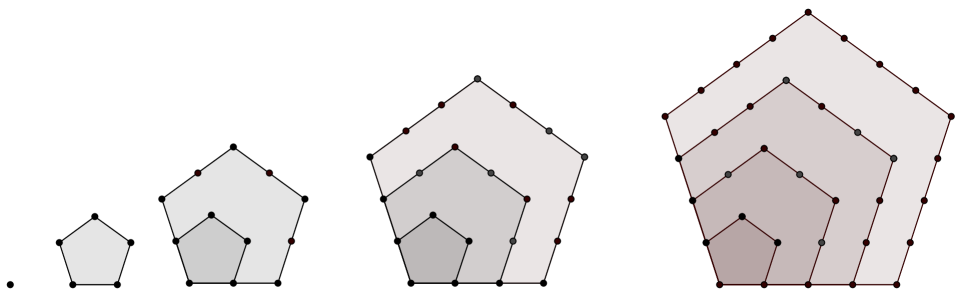
Novamente recaímos em um soma de P.A., deste modo temos

$$
\begin{aligned}
Q_n &= \frac{(1+2n-1)n}{2} \\
Q_n &= n^2
\end{aligned}
$$

Neste caso a disposição dos pontos pode ajudar a perceber que um número quadrangular n é dado por n^2. O raciocínio indutivo por detrás dessa construção naturalmente se estende ao caso de *números retangulares* mais gerais.

3.5 Números Pentagonais

Assim como nos modelos anteriores vou mostrar uma generalização para a sequência dos números pentagonais. Seja P_n um número pentagonal com $n \in \mathbb{N}$, deste modo temos que:



$P_1 = 1$ $P_2 = 5$ $P_3 = 12$ $P_4 = 22$ $P_5 = 35$

Com base na observação e no reconhecimento de padrões descritos anteriormente temos que:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= 1 \\
P_2 &= P_1 + 4 \\
P_3 &= P_2 + 7 \\
P_4 &= P_3 + 10 \\
&\vdots \\
P_n &= P_{n-1} + 3n - 2
\end{aligned}
$$

Novamente ao somarmos as equações encontramos uma expressão para P_n:

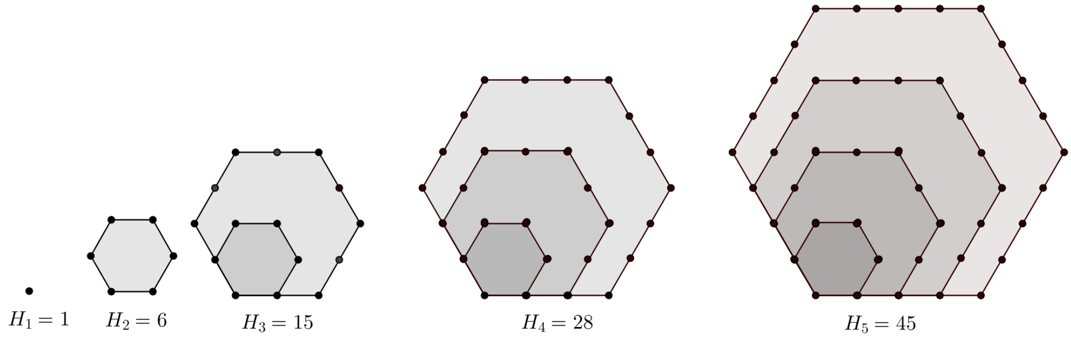
$$
P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 3n - 5 + 3n - 2
$$

Deste modo temos que:

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{(1+3n-2)n}{2} \\ P_n &= \frac{(3n-1)n}{2} \end{aligned}$$

3.6 Números Hexagonais

Considere a sequência H_n, com $n \in \mathbb{N}$, a sequência dos n primeiros números hexagonais, sendo assim temos:



Escrevendo a sequência recursivamente temos:

$$\begin{aligned} H_1 &= 1 \\ H_2 &= H_1 + 5 \\ H_3 &= H_2 + 9 \\ H_4 &= H_3 + 13 \\ &\vdots \\ H_{n-1} &= H_{n-2} + 4n - 7 \\ H_n &= H_{n-1} + 4n - 3 \end{aligned}$$

Somando as equações temos:

$$H_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + 4n - 7 + 4n - 3$$

Logo H_n é dado por:

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{(4n-2)n}{2} \\ H_n &= 2n^2 - n \end{aligned}$$

3.7 Generalização dos Números Poligonais

Observando os padrões e as sequências apresentadas pode-se conjecturar qual seria a expressão para o n-ésimo termo de um número poligonal M com k lados. Para isso observemos as generalizações já obtidas:

Triangulares	Quadrangulares	Pentagonais	Hexagonais
$T_1 = 1$	$Q_1 = 1$	$P_1 = 1$	$H_1 = 1$
$T_2 = T_1 + 2$	$Q_2 = Q_1 + 3$	$P_2 = P_1 + 4$	$H_2 = H_1 + 5$
$T_3 = T_2 + 3$	$Q_3 = Q_2 + 5$	$P_3 = P_2 + 7$	$H_3 = H_2 + 9$
$T_4 = T_3 + 4$	$Q_4 = Q_3 + 7$	$P_4 = P_3 + 10$	$H_4 = H_3 + 13$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$T_n = T_{n-1} + n$	$Q_n = Q_{n-1} + 2n - 1$	$P_n = P_{n-1} + 3n - 2$	$H_n = H_{n-1} + 4n - 3$

Nesta tarefa torna-se indispensável a identificação de um padrão, pois somente deste modo podemos determinar de que forma ocorre a generalização. Ao fazermos isso estamos utilizando e desenvolvendo o raciocínio indutivo. Considere M_n o n-ésimo número poligonal de um polígono com k lados, deste modo temos que:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 1 \\
M_2 &= M_1 + k - 1 \\
M_3 &= M_2 + 2k - 3 \\
M_4 &= M_3 + 3k - 5 \\
M_5 &= M_4 + 4k - 7 \vdots \\
M_n &= M_{n-1} + (n-1)k + (-2n + 3)
\end{aligned}
$$

Somando as equações temos:

$$
\begin{aligned}
M_n &= 1 + k(1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n - 1) - (1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 2n - 3) \\
M_n &= k\frac{(1 + n - 1)(n - 1)}{2} - \frac{(3 + 2n - 3)(n - 2)}{2} \\
M_n &= k\frac{n(n - 1)}{2} - \frac{2n(n - 2)}{2} \\
M_n &= \frac{kn^2 - kn - 2n^2 + 4n}{2} \\
M_n &= \frac{(k - 2)n^2 + (4 - k)n}{2}
\end{aligned}
$$

A construção das ideias e o desenvolvimento da expressão só foram possíveis a partir da observação, identificação e generalizações de padrões, atributos estes diretamente relacionados ao raciocínio indutivo.

3.8 Número de diagonais de um Polígono

A expressão que fornece o número de diagonais de um polígono também é ensinada no ensino fundamental e pode ser mais uma oportunidade de desenvolver o raciocínio indutivo. Chamamos de diagonal de um polígono convexo um segmento cujas extremidades sao vértices não consecutivos do polígono. Deste modo dado um triângulo ABC a quantidade de diagonais é zero pois dado um dos vértices os outros dois são consecutivos a ele.

Considere agora um quadrilátero convexo $ABCD$. A partir do vértice A podemos traçar a diagonal $\overline{AC}$, com o vértice B a diagonal $\overline{BD}$, a partir de C a diagonal $\overline{CA}$ e partindo de D a diagonal $\overline{DB}$. No entanto notemos que os segmentos $\overline{AC} = \overline{CA}$ e $\overline{BD} = \overline{DB}$, ou seja, o número de diagonais do quadrilátero $ABCD$ é igual a 2.

Seja um pentágono convexo $ABCDE$ traçando todas as diagonais a partir de cada vértice temos os segmentos: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CA}, \overline{CE}, \overline{DB}, \overline{DA}, \overline{EC}, \overline{EB}$. Porém notemos que $\overline{AC} = \overline{CA}$, $\overline{AD} = \overline{DA}$, $\overline{BD} = \overline{DB}$, $\overline{CE} = \overline{EC}$, $\overline{BE} = \overline{EB}$, sendo assim o número de diagonais de um pentágono convexo é igual a 5.

Do mesmo modo analisemos um hexágono convexo $ABCEDF$. Traçando todas as diagonais a partir de cada vértice temos os segmentos: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CA}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{DB}$, $\overline{DA}$, $\overline{DF}$, $\overline{EC}$, $\overline{EB}$, $\overline{EA}$, $\overline{FB}$, $\overline{FC}$, $\overline{FD}$. Notemos que $\overline{AC} = \overline{CA}$ e $\overline{AD} = \overline{DA}$, $\overline{AE} = \overline{EA}$, $\overline{BD} = \overline{DB}$, $\overline{BE} = \overline{EB}$ e $\overline{BF} = \overline{FB}$, $\overline{CE} = \overline{EC}$ e $\overline{CF} = \overline{FC}$, $\overline{DF} = \overline{FD}$. Deste modo verificamos que um hexágono convexo $ABCDEF$ tem 9 diagonais. Analisando os resultados obtidos em uma tabela temos:

Qt. de lados	Qt. diagonais
3	0
4	2
5	5
6	9

Novamente para obter a generalização é necessário encontrarmos um padrão para os termos da sequência. Para o aluno do ensino fundamental provavelmente não será possível obter a generalização a partir de progressão aritmética de segunda ordem. Deste modo deixaremos outra opção de abordagem. A partir de cada vértice, quantas diagonais podemos traçar em um polígono de n lados?

Qt. lados	Qt. diagonais a partir de cada vértice
3	0
4	1
5	2
6	3
$\vdots$	$\vdots$
n	$n-3$

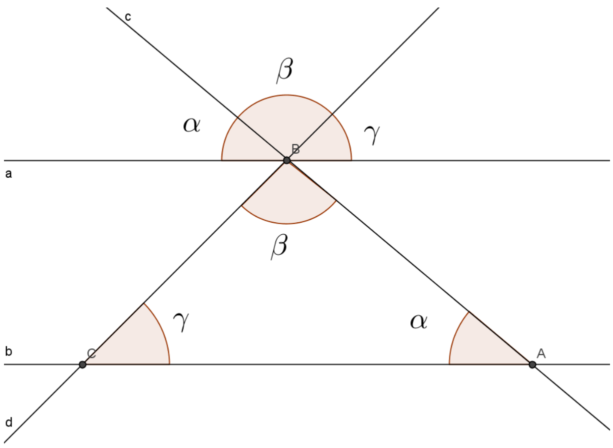
Deste modo observamos que em um polígono de n lados podemos traçar $n-3$ diagonais a partir de cada vértice. O produto de n por $n-3$ fornece o dobro do número de diagonais em um polígono de n lados, uma vez que cada diagonal foi duplicada na contagem, sendo assim a quantidade de diagonais D de um polígono convexo de n lados é dada pela expressão:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

3.9 Soma dos Ângulos Internos de um Polígono

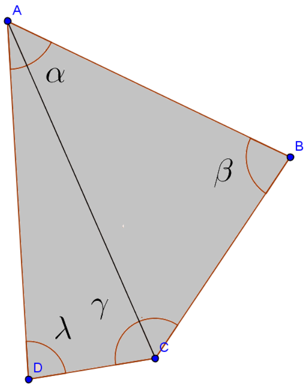
A soma dos ângulos internos de um polígono é uma expressão muito conhecida e ensinada no ensino fundamental, porém simplesmente dizer aos alunos que esta soma para um polígono convexo é dada pela expressão $S_i = (n-2) \cdot 180^{\circ}$ onde $n \geq 3$ com $n \in \mathbb{N}$ pode ser pouco significativa.

Será feita uma abordagem que permite obter a generalização a partir de casos particulares, utilizando como ferramenta o raciocínio indutivo. Por meio do conhecimento de retas paralelas cortadas por transversais e pelo axioma das paralelas primeiramente verificamos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.



$\alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$

Considere agora um quadrilátero convexo $ABCD$ representado abaixo. Qual o valor da soma dos ângulos internos?



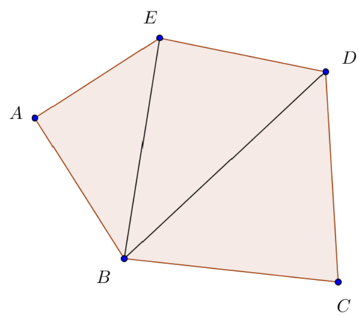
$$\alpha + \beta + \gamma + \lambda = 360^o$$

Se traçarmos a diagonal $\bar{AC}$ dividimos o quadrilátero nos triângulos ADC e ACB sendo assim temos que:

$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d} = 180^{\circ} + 180^{\circ} = 360^{\circ}$$

Dado um quadrilátero convexo qualquer temos que a soma dos ângulos internos é igual a 360º.

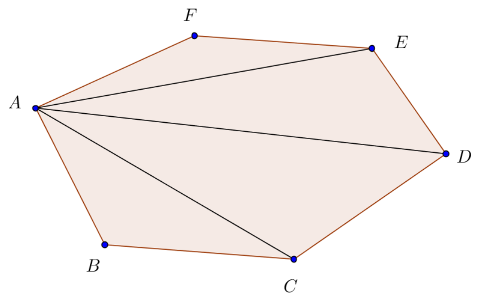
Seja um pentágono convexo $ABCDE$. Para determinarmos a soma dos ângulos internos novamente aplicaremos a estratégia de reduzir em triângulos. Traçando as diagonais $\overline{BE}$ e $\overline{BD}$ conseguimos formar os triângulos ABE, BED e BCD deste modo temos:



$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d} + \widehat{e} = 180^{\circ} + 180^{\circ} + 180^{\circ} = 540^{\circ}$$

Dado um pentágono convexo qualquer temos que soma dos ângulos internos é igual a 540º.

De modo análogo faremos para o hexágono convexo, seja um hexágono convexo $ABCDEF$ vamos obter o valor da soma dos ângulos internos.



Traçando as diagonais $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$ obtemos os triângulos AFE, AED, ADC, ABC sendo assim temos que:

$$\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d} + \widehat{e} + \widehat{f} = 180^{\text{o}} + 180^{\text{o}} + 180^{\text{o}} + 180^{\text{o}} = 720^{\text{o}}$$

Sendo assim a soma dos ângulos internos de um hexágono regular é igual a 720^{o}. Observe os resultados obtidos na tabela abaixo:

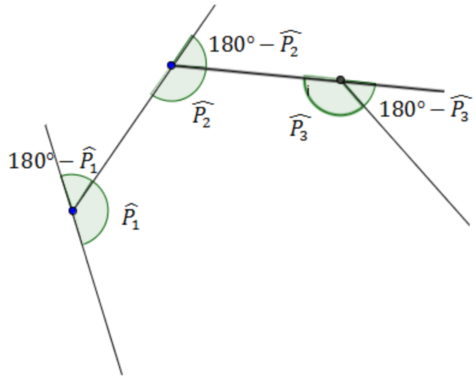
Qtd. de lados	Qtd. Triângulos	Soma dos ângulos internos
3	1	180^{o}
4	2	360^{o}
5	3	540^{o}
6	4	720^{o}

Analisando a tabela identificamos um padrão e uma relação entre o número de lados, número de triângulos e a soma dos ângulos internos. Este padrão permite conjecturarmos que um polígono convexo de 100 lados terá 98 triângulos e a soma dos ângulos internos será igual a 17640^{o}. Pensando agora num polígono de n lados verificamos que este possui $n-2$ triângulos, a soma dos ângulos internos será dada por:

$$S_i = (n-2) \cdot 180^{\text{o}}$$

Na demonstração o raciocínio indutivo surge no momento em que passamos do particular para o caso geral, ou seja, quando entendemos o comportamento da sequência a ponto de obtermos um termo qualquer.

Uma outra possibilidade para a verificarmos que a soma dos ângulos internos de um poligono é igual a $(n-2) \cdot 180°$ é pensarmos em um polígono com vértices P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_n e ângulos internos $\widehat{P_1}$, $\widehat{P_2}$, $\widehat{P_3}$, $\cdots$, $\widehat{P_n}$. Traçando o segmento $\overline{P_1P_2}$, temos a primeira aresta do polígono. Ao traçarmos a aresta $\overline{P_2P_3}$, está formará um ângulo de $180^{\text{o}} - \widehat{P_2}$ com o prolongamento de $\overline{P_1P_2}$, ao traçarmos a aresta $\overline{P_3P_4}$ está formará um ângulo de $180^{\text{o}} - \widehat{P_3}$ com o prolongamento de $\overline{P_2P_3}$. Observe a figura abaixo que ilustra o modelo:



Fazendo o processo para todos os ângulos $\widehat{P_1}$, $\widehat{P_2}$, $\widehat{P_3}$, $\cdots$, $\widehat{P_n}$, a soma de todos os giros totaliza uma volta completa ao chegar em P_1. Deste modo vale a igualdade:

$$(180^o - \widehat{P_1}) + (180^o - \widehat{P_2}) + (180^o - \widehat{P_3}) + \cdots + (180^o - \widehat{P_n}) = 360^o$$

Isolando a soma dos ângulos internos em um lado da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} \widehat{P_1} + \widehat{P_2} + \widehat{P_3} + \cdots + \widehat{P_n} &= n. \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o \\ &= (n-2) \cdot 180^o \end{aligned}$$

Assim, a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por:

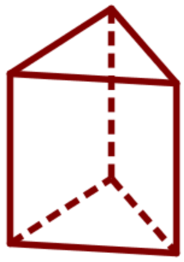
$$S_i = (n-2) \cdot 180^o$$

De modo análogo à primeira demonstração o raciocínio indutivo se faz presente exatamente quando aplicamos o procedimento para triângulos, quadriláteros, pentágonos e figuras com uma quantidade finita de lados, ou seja, no triângulo serão 3 prolongamentos que totalizaram 360^o, já no quadrilátero fazemos 4 prolongamentos para obter $360°$, do mesmo modo para pentágonos, hexágonos até obtermos a generalização apresentada.

3.10 Número de diagonais de um Prisma

Consideremos um polígono convexo (região poligonal convexa) $ABCD...MN$ situada num plano α e um segmento de reta $\overline{PQ}$, cuja a reta suporte intercepta a plano α. Chama-se de prisma à reunião de todos os segmentos congruentes e paralelos a $\overline{PQ}$, com uma extremidade nos pontos do polígono e situados num mesmo semi-espaço dos determinados por α. Um prisma será triangular, quadrangular, pentagonal, etc, conforme a base for um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

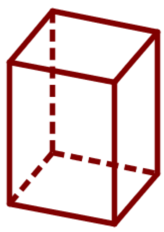
Para determinarmos o número de diagonais de um prisma, não levamos em consideração as diagonais das bases e das faces laterais do prisma. Deste modo considere um prisma de base triangular:



O número de segmentos distintos pode ser dado pela combinação simples da quantidade de vértices tomados 2 a 2, neste caso temos:

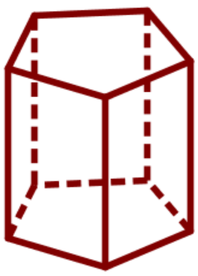
$$C_6^2 = 15$$

No entanto o número de arestas é 9 e o número de diagonais das faces é 6. Logo o número de diagonais do prisma triangular é $15 - 9 - 6 = 0$. Considere agora um prisma quadrangular, deste modo temos Vértices=8 e Arestas=12;



O número de segmentos possíveis é $C_8^2 = 28$, porém estão contabilizadas as 12 arestas e as 12 diagonais das faces. Portanto o número de diagonais do prisma quadrangular é igual a 4.

Seja um prisma pentagonal, logo temos Vértices=10 e Arestas=15;



O número de segmentos possíveis é $C_{10}^2 = 45$, deste valor precisamos descontar as 15 arestas e as 20 diagonais das faces, portanto o número de diagonais de um prisma pentagonal é igual a 10. De maneira análoga se tomarmos um prisma hexagonal teremos Vértices=12, Arestas=18, o número de segmentos é dado por $C_{12}^2 = 66$. Deste valor temos que subtrair as 18 arestas e as 30 diagonais das faces, portanto o número de diagonais de um prisma hexagonal é 18. Organizando os valores obtidos em uma tabela temos:

Qtd. Vértices	Qtd. Segmentos	Qtd. Arestas	Diagonais Faces	Diagonais Prisma
6	15	9	6	0
8	28	12	12	4
10	45	15	20	10
12	66	18	30	18

E se tomarmos um prisma com V vértices, qual será a quantidade de diagonais deste prisma?

Para provarmos esse resultado podemos utilizar a ideia de progressão aritmética de segunda ordem. Considere o número de diagonais P_3, P_4, P_5, $\cdots$, P_n de prismas de base triangular, quadrangular, pentagonal, e assim por diante, em que n é o número de arestas da base, $n \geq 3 \in \mathbb{N}$. Temos então

$$\begin{aligned}
P_3 &= 0 \\
P_4 &= P_3 + 4 \\
P_5 &= P_4 + 6 \\
P_6 &= P_5 + 8 \\
&\vdots \\
P_n &= P_{n-1} + 2n - 4
\end{aligned}$$

Somando as equações temos:

$$P_n = 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n - 4$$

Logo P_n é dado por:

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{(4 + 2n - 4)(n - 3)}{2} \\
P_n &= n \cdot (n - 3)
\end{aligned}$$

Em um prisma, o número A de arestas é igual a 3 vezes o número n de arestas de sua base, isto é, $A = 3n$. Por outro lado, o número F de faces desse prisma é dado por $F = n + 2$. Dessa maneira, a relação de Euler $V + F = A + 2$ fornece

$$\begin{aligned} V + F &= A + 2 \\ V + n + 2 &= 3n + 2 \\ V &= 2n \end{aligned}$$

Substituindo então $n = \dfrac{V}{2}$ na expressão $P_n = n \cdot (n - 3)$ temos:

$$P_n = \frac{V}{2} \cdot \left(\frac{V}{2} - 3 \right) = \frac{V}{2} \cdot \left(\frac{V - 6}{2} \right)$$

Deste modo o número D de diagonais de um prisma com V vértices será dado por:

$$D = \frac{V(V - 6)}{4}$$

3.11 O número e

Durante as aulas de matemática no ensino médio os alunos têm contato com um número real positivo, que chamamos usualmente de e. Tal número é utilizado para definir a função $f(x) = \log_e x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Indicamos $\log_e x$ por $\ln x$ e dizemos que trata-se do logaritmo natural de x. É fato que o número e é um número irracional, e uma aproximação para essa constante usualmente utilizada é $e = 2,718281828459$. Não é difícil encontrarmos autores que atribuem ao logaritmo natural o nome de "logaritmo neperiano", em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logaritmos, datada do ano de 1614. Uma das possibilidades para obtenção da constante é calcular o limite da expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito, todavia tal estratégia não vai ao encontro ao entendimento de um aluno de ensino médio, uma vez que nesta etapa ele possivelmente desconheça conceitos do cálculo infinitesimal.

Utilizando raciocínio indutivo e modelagem matemática deixo uma sugestão de abordagem para a sala de aula, que possibilite o aluno encontrar a constante e por meio de uma situação problema.

Considere um lago com uma população de 2 milhões de peixes, em que essa população cresce a uma taxa de 1% ao ano. Imaginamos inicialmente que a população aumente, nessa taxa, uma vez no ano. Isso nos dá:

$$\begin{aligned} 2 \text{ milhões} \xrightarrow{\text{1 ano}} \; & 2 \text{ milhões } + 1\% \text{ de } 2 \text{ milhões} \\ & 2 + 0,01 \cdot 2 \\ & 2(1,01) \end{aligned}$$

Podemos raciocinar de maneira diferente, imaginando que a taxa de crescimento anual de 1% seja igualmente distribuída em dois períodos de 6 meses (1/2 ano), assim:

$$2 \text{ milhões} \xrightarrow[0{,}5\%]{1/2 \text{ ano}} \xrightarrow[0{,}5\%]{1/2 \text{ ano}}$$

Nesse caso, temos:

$$2 \text{ milhões} \xrightarrow[0{,}5\%]{1/2 \text{ ano}} \begin{array}{c} 2 + 0,005 \cdot 2 \\ 2(1,005) \end{array} \xrightarrow[0{,}5\%]{1/2 \text{ ano}} \begin{array}{c} 2(1,005) + 0,005 \cdot 2(1,005) \\ 2(1,005)^2 \end{array}$$

Dessa maneira, ao final do ano teríamos então uma população de $2 \cdot (1,005)^2$ milhões de peixes.

Continuando com essa forma de raciocínio, imaginamos que a população aumente em 1%, só que esse percentual ocorra distribuído igualmente em n-vezes no ano, assim:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{4cm} 1 \text{ ano} \hspace{4cm}} \\ \xrightarrow[1/n]{\hspace{1cm}} \xrightarrow[1/n]{\hspace{1cm}} \cdots \xrightarrow[1/n]{\hspace{1cm}} \end{array}$$

Em termos de percentual, lembrando que $\dfrac{1\%}{n} = \dfrac{0,01}{n}$, temos

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{4cm} 1\% \hspace{4cm}} \\ \xrightarrow[\frac{0,01}{n}]{\hspace{1cm}} \xrightarrow[\frac{0,01}{n}]{\hspace{1cm}} \cdots \xrightarrow[\frac{0,01}{n}]{\hspace{1cm}} \end{array}$$

Consequentemente, em 1 anos teremos

$$2 \text{ milhões} \xrightarrow[\frac{0,01}{n}]{\frac{1}{n} \text{ ano}} 2\left(1 + \tfrac{0,01}{n}\right) \xrightarrow[\frac{0,01}{n}]{\frac{1}{n} \text{ ano}} 2\left(1 + \tfrac{0,01}{n}\right)^2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 2\left(1 + \tfrac{0,01}{n}\right)^n$$

Vamos comparar os resultados do crescimento de 1% ao ano, em termos do número de aumentos da população para alguns casos:

Número de aumentos na população durante o ano	1	2	3	4
Total de peixes ano final do ano	$2 \cdot (1,01)$	$2 \cdot \left(1 + \frac{0,01}{2}\right)^2$	$2 \cdot \left(1 + \frac{0,01}{3}\right)^3$	$2 \cdot \left(1 + \frac{0,01}{4}\right)^4$
Valor numérico	$2,02$	$2,02005$	$2,0200667$	$2,020075125$

Pelo que acabamos de observar, se a população de peixes cresce a uma taxa de 1% ao ano e esse aumento ocorre igualmente distribuído n-vezes ao ano, ao final de 1 ano a população será dada pela expressão

$$2 \cdot \left(1 + \frac{0,01}{n}\right)^n$$

Observe que a parte significativa está entre os parênteses, onde ocorre a variação quando n aumenta. Vamos então manipular a expressão $\left(1+\frac{0,01}{n}\right)^n$. Observe que

$$\left(1+\frac{0,01}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{0,01}}\right)^n$$

Colocando $s = \dfrac{n}{0,01}$ temos $n = 0,01 \cdot s$ e a expressão fica

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{0,01}{n}\right)^n &= \left(1+\frac{1}{\frac{n}{0,01}}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{s}\right)^{0,01\cdot s} \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right]^{0,01}
\end{aligned}$$

Agora observe que, como $n = 0,01 \cdot s$, aumentando (diminuindo) n, s aumenta (ou diminui). Com isso podemos considerar a seguinte situação:

> Se a população de peixes cresce a uma taxa de 1% ao ano e esse aumento ocorre distribuído continuamente ao longo do ano, qual será a população ao final do ano?

Dizer que a população aumenta continuamente, matematicamente, significa fazer $n \to \infty$ ou, o que significa o mesmo, fazer $s \to \infty$, já que essas grandezas são diretamente proporcionais. Isso pode ser analisado observando o que ocorre com a população à medida que se aumenta s (ou n). Esquematicamente, podemos escrever assim

$$\left(1+\frac{0,01}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right]^{0,01} \xrightarrow[n\to\infty]{s\to\infty} ?$$

Estudando a expressão $\left(1+\dfrac{1}{s}\right)^s$, quando s aumenta temos

s	$\left(1+\dfrac{1}{s}\right)^s$
1	2
2	2,25
3	2,37037
4	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1 000	2,71692
10 000	2,71815
100 000	2,71827
1 000 000	2,71828

Neste ponto, é importante destacar que o raciocínio indutivo nos permite observar que a tabela de valores parece se estabilizar. De fato, isso ocorre, e à medida que s aumenta a expressão $\left(1+\dfrac{1}{s}\right)^s$ aproxima-se do número 2,718 281 828 459. Esse número possui diversas propriedades matemáticas importantes, inicialmente estudadas por John Nepper. Costuma-se indicá-lo pela letra e.

Retomando a discussão sobre a população de peixes, se esta aumentar a uma taxa de 1% sendo esse percentual distribuído continuamente ao longo do ano, a população ao final do ano será dada por

$$\left(1+\frac{0,01}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right]^{0,01} \xrightarrow[s\to\infty]{n\to\infty} 2\cdot e^{0,01}$$

Raciocinando de maneira semelhante, se imaginamos que a população P de peixes aumenta continuamente a uma taxa de 1% ao ano, ao final de t anos a população será dada por

$$P = 2\cdot e^{0,01\cdot t}.$$

Fenômenos que apresentam um comportamento exponencial contínuo, tais como o crescimento populacional, o aquecimento e resfriamento, o decaimento radioativo (dentre outros) podem ser modelados por funções exponenciais. Estas funções apresentam a distribuição contínua de uma dada taxa de variação, cujo comportamento é regido pelo número e.

Tal como o número π está intimamente relacionado ao estudo de fenômenos cíclicos, o número e está ligado diretamente ao estudo de fenômenos exponenciais.

4 Conclusão

Neste artigo procurei apresentar o que entendo por raciocínio indutivo e como este pode ser uma ferramenta para o ensino, visto que não encontra-se nas diretrizes brasileiras uma proposta ou orientação para o trabalho com padrões e regularidades enfatizando o raciocínio indutivo.

Ainda foi exposto que o raciocínio indutivo pode dar significado à álgebra na sala de aula, já que a álgebra generaliza resultados particulares e permite manipular estas generalizações mantendo a veracidade dos resultados.

Foram apresentados alguns exemplos aos professores para trabalhar alguns conteúdos já presentes no currículo brasileiro, mas com uma outra abordagem, explicitando o "pensar indutivamente" nos processos. Estes exemplos são uma modesta parte do todo em que o raciocínio indutivo se faz presente na matemática, apresentando aos professores um novo olhar para os conteúdos escolares.

Na obtenção da soma dos termos de uma progressão aritmética, o raciocínio indutivo está presente na capacidade de somar uma sequência de n termos a partir de uma quantidade finita de termos. Os números poligonais representam uma possibilidade de trabalhar com generalizações a partir de progressões aritméticas de segunda ordem, com o incremento do raciocínio indutivo. O número de diagonais de um polígono convexo ilustra mais uma possibilidade de desenvolvimento do raciocínio indutivo em sala de aula, pois uma vez entendido o que é uma diagonal, apresentamos uma sequência de polígonos com o respectivo número de diagonais de cada um, estabelecendo assim uma sequência que precisa ser generalizada para um polígono convexo com n lados. Acrescentei ainda dois modos para obtermos a soma dos ângulos internos de um polígono convexo, por entender que trata-se de uma expressão muito estudada que pode ser desenvolvida com o recurso do raciocínio indutivo. Dentro da geometria espacial obtive uma expressão que fornece o número de diagonais de um prisma a partir da quantidade de vértices, na qual identificamos uma progressão aritmética de segunda ordem, em que sua generalização utiliza raciocínio indutivo. Finalizo com a obtenção do número e, um número irracional presente fenômenos continuos modelado por uma exponencial. Mostramos isso com um problema de crescimento de uma população de peixes, utilizando uma generalização a partir do raciocínio indutivo.

Por fim, o raciocínio indutivo perpassa diversos conteúdos e construções matemáticas, permitindo ao professor organizar situações investigativas que insiram o estudante em um processo de construção e descoberta matemática.

Referências

[1] ALMEIDA, M. C. *Platão Redimido: A Teoria Dos Números Figurados Na Ciência Antiga E Moderna.* Curitiba: Editora Champagnat, 2003.

[2] BECHARA, E. (Org.). *Dicionário Escolar da Academia Brasileira de Letras.* São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2011.

[3] BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. *Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching.* Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 3-11.

[4] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília: MEC, 2000.

[7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (PCN+ Ensino Médio). *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.* Brasilia: MEC/Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2002.

[8] CSSU *Math Frameworks 2004.* Disponível em: http://staff.najah.edu/sites/default/files/NCTM%20standards.pdf (acesso em 19/01/2015)

[9] DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões.* Porto: Porto Editora, 2002.

[10] FOMIN, D. *Círculos Matemáticos.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[11] HEFEZ, A. *Indução Matemática.* Rio de Janeiro: Impa, 2009.

[12] LEE, L. *An initiation into algebraic culture through generalization activittes.* In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

[13] MASON, J. *Expressing Generality and Roots of Algebra.* In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

[14] MENDES, M. F.; DELGADO, C. C. *Geometria: textos de apoio para educadores de infância*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2008. http://www.livescience.com/38242-why-honeybee-honeycombs-are-perfect.html. Acessado em janeiro, 29, 2015.

[15] National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[16] OSVALDO, D. *Fundamentos de Matemática Elementar - vol. 9: Geometria Plana*. São Paulo: Atual, 1993.

[17] PHILLIPS, E. et. al. *Patterns and functions from Addenda Series, Grades 5-8: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

[18] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1994

[19] STEEN, L. A. *The Science of Patterns*. Science 240 (1988), no. 4852, 611-616.

[20] SERRA, M. *Discovering Geometry: An Inductive Approach*. California: Key Curriculum Press, 1997.

[21] VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. *Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra*. In: VALE, I.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Ed.) Número e Álgebra. Lisboa: SEM-SPCE, 2007, p.193-211.