



Bruna Mayara Batista Rodrigues

O estudo das Cônicas através do Origami

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientadora: Prof^a. Christine Sertã Costa

Rio de Janeiro
Fevereiro 2015



Bruna Mayara Batista Rodrigues

O estudo das Cônicas através do Origami

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Profa. Christine Sertã Costa

Orientadora

Departamento de Matemática PUC-Rio

Prof. Marcos Craizer

Departamento de Matemática PUC-Rio

Prof. Sinésio Pesco

Departamento de Matemática PUC-Rio

Profa. Gabriela dos Santos Barbosa

Fundação Educacional Unificada Campograndense – FEUC

Prof. José Eugênio Leal

Coodenador Setorial do Centro Técnico Científico PUC-Rio

Rio de Janeiro, 26 de fevereiro de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Bruna Mayara Batista Rodrigues

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela FEUC (Fundação Educacional Unificada Campograndense) em 2009. Especializou-se em Matemática para professores do Ensino Fundamental e Médio pelo programa de Pós-graduação do CEPOPE/FEUC em 2010. Atua como professora de Ensino Fundamental na Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro e no curso de graduação em Matemática na FEUC.

Ficha Catalográfica

Rodrigues, Bruna Mayara Batista

O estudo das Cônicas através do Origami / Bruna Mayara Batista Rodrigues ; orientadora: Christine Sertã Costa. – 2015.

132 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2015.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Origami. 3. Cônicas. 4. Geometria Axiomática. 5. Ensino. I. Costa, Christine Sertã. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Às pessoas mais importantes da minha vida: meus familiares.

Agradecimentos

A Deus, por me proporcionar força e fé em todos os momentos.

Aos meus pais, avó e irmãos que são verdadeiros presentes de Deus em minha vida.

À minha orientadora Professora Christine Sertã Costa pela dedicação e carinho. Sua conduta me motiva a ser uma professora melhor.

Aos colegas e professores do curso que tornaram nossos encontros mais prazerosos e produtivos. Em especial, agradeço ao Igor Alex, à Érica Barboza e à Thais Sales que hoje são amigos que pretendo levar por toda a minha vida.

Aos meus colegas de trabalho por todo o apoio que me ofertaram nesta trajetória.

Aos meus amigos Rafael Lázaro, Karine Melquíades, Josiane Branco, Regina Tieppo, Nelson Coutinho, Rafael Cunha, Thiago Cunha e Rayane Queiroz pelo companheirismo, preocupação e mão estendida.

Aos responsáveis pela minha decisão de ser professora, meus queridos e inspiradores mestres: Gabriela dos Santos Barbosa, Alzir Fourny, Cleber Amaral e Lúcio Coelho.

Resumo

Rodrigues, Bruna Mayara Batista; Costa, Christine Sertã (Orientadora). **O estudo das Cônicas através do Origami**. 132 p. Rio de Janeiro, 2015. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O estudo das Curvas Cônicas tem sido cada vez menos abordado no Ensino Médio e, nos poucos casos em que tal abordagem é apresentada, verifica-se uma prioridade indevida à memorização de equações. Por outro lado, embora a eficiência do Origami não seja divulgada com frequência no ensino de assuntos matemáticos de maior complexidade, existe uma geometria axiomática consistente por trás desta arte de dobrar papéis que a torna um instrumento de ensino capaz de explorar, com clareza, propriedades e definições de assuntos matemáticos. O presente trabalho pretende unir esses dois elementos, curvas cônicas e origami, com o intuito de desenvolver conceitos do primeiro a partir de construções do segundo.

Desta forma, faz-se um relato histórico e conceitual sobre as Curvas Cônicas; descreve-se a importância do Origami e seu uso no ensino da Matemática; apresenta-se o estudo das sete possibilidades para uma única dobragem no Origami conhecidas como os axiomas de Huzita-Hatori com o objetivo de sugerir o uso das dobraduras no estudo da elipse, da parábola e da hipérbole no Ensino Médio das escolas do país.

A fim de divulgar o Origami como um recurso eficiente e interessante no ensino das Cônicas e validar a pesquisa apresentada, uma oficina foi desenvolvida, aplicada, avaliada e aprimorada num pequeno grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática e seus resultados estão aqui expostos.

Palavras-chave

Origami; Cônicas; Geometria Axiomática; Ensino.

Abstract

Rodrigues, Bruna Mayara Batista; Costa, Christine Sertã (Advisor). **The study of Conic Curves by Origami**. Rio de Janeiro, 2015.132 p. MSc. Dissertation - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The study of Conic Curves has been each time less approached at High School and, in those few cases it is presented, it's possible to verify an improperly prioritized of equation memorizations. On the other hand, although the efficiency of the Origami is not often divulged at teaching mathematical subjects of greater complexity, there is a consistent axiomatic geometry behind this art of folding papers that makes it an a teaching tool able to explore, clearly, the properties and definitions of mathematical subjects. This study aims to join these two elements, conic curves and origami, in order to develop concepts from the first to building the second one.

This way, it can make a historical and conceptual essay about the Conic Curves; describing the importance of the Origami and its use in Mathematics teaching; presenting the study of the seven possibilities for a single folding in Origami known as Huzita-Hatori's axioms in order to suggest the use of the folding in the study of ellipse, parable and hyperbole at High Schools all over the country.

Divulging the Origami as an efficient and interesting resource in the teaching of the Conics and validate this research, a workshop was developed, applied, evaluated and improved in a small group of students of Degree in Mathematics and its results are exposed here.

Key words

Origami; Conics; Axiomatic Geometry; Teaching.

Sumário

1 . Introdução	14
2 . As cônicas	16
2.1. Elipse	18
2.1.1. Definição	18
2.1.2. Notações usuais	19
2.1.3. Forma canônica da Elipse centrada na origem	20
2.2. Hipérbole	22
2.2.1. Definição	22
2.2.2. Notações usuais	22
2.2.3. Forma canônica da hipérbole centrada na origem	23
2.3. Parábola	26
2.3.1. Definição	26
2.3.2. Notações usuais	26
2.3.3. Forma canônica da parábola centrada na origem	27
2.4. Transformações de coordenadas	29
2.4.1. Translações de eixos coordenados	30
2.4.2. Rotações de eixos coordenados	31
2.5. Tangentes a uma cônica	32
3 . O Origami	37
3.1. Contexto histórico do Origami	37
3.2. A Matemática e o Origami	42
3.3. Tipos e símbolos do Origami	45
4 . Descrição axiomática do Origami	50
4.1. Os axiomas de Huzita-Hatori	51

4.2. A reta e o ponto	54
4.2.1. A reta	55
4.2.2. O ponto	56
4.2.3. Explicação analítica dos axiomas	56
5 . A construção das curvas cônicas através do Origami	69
5.1. A elipse	69
5.1.1. Construção da curva através das dobraduras	70
5.1.2. A matemática do método utilizado	72
5.1.3. Identificação dos elementos através das dobraduras	73
5.2. A hipérbole	76
5.2.1. Construção da curva através das dobraduras	76
5.2.2. A matemática do método utilizado	78
5.2.3. Identificação dos elementos através da dobradura	79
5.3. A parábola	83
5.3.1. Construção da curva através das dobraduras	84
5.3.2. A matemática do método utilizado	85
5.3.3. Identificação dos elementos através das dobraduras	86
6 . Descrição da oficina: Construindo as cônicas através do Origami	89
7 . Conclusão	97
8 . Referências Bibliográficas	98
Apêndice I	100
Anexo I	102
Anexo II	103
Anexo III	104

Lista de figuras

Figura 1: Seções Cônicas	17
Figura 2: A elipse	18
Figura 3: Elementos da elipse	19
Figura 4: Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX	20
Figura 5: Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY	21
Figura 6: A hipérbole	22
Figura 7: Elementos da hipérbole	23
Figura 8: Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX	24
Figura 9: Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY	25
Figura 10: A parábola	26
Figura 11: Parábola de foco à direita da diretriz	27
Figura 12: Parábola de foco à esquerda da diretriz	28
Figura 13: Parábola de foco acima da diretriz	28
Figura 14: Parábola de foco abaixo da diretriz	29
Figura 15: Translação de eixos	30
Figura 16: Rotação de eixos	31
Figura 17: Tangente à elipse	33
Figura 18: Tangente à hipérbole	34
Figura 19: Tangente à parábola	35
Figura 20: Retrato de Friedrich Froebel	38
Figura 21: Foto de Sadako Sasaki	39
Figura 22: “Monumento das Crianças à Paz” em Hiroshima	40
Figura 23: Registro de uma aula ministrada pela professora Koda	41
Figura 24: Painel solar construído por pesquisadores da NASA	42
Figura 25: Imagens do livro Wakoku Chiyekurabe	43
Figura 26: Gravura retirada do livro de T. Sundara	44

Figura 27: Barquinho de Origami Simples	46
Figura 28: Buquê de Origami Composto	46
Figura 29: Personagens construídos com Origami Modular	47
Figura 30: Exemplo de Kirigami	47
Figura 31: Retrato de Humiaki Huzita	50
Figura 32: Axioma de Huzita	51
Figura 33: Axioma de Huzita	52
Figura 34: Axioma de Huzita	52
Figura 35: Axioma de Huzita	53
Figura 36: Axioma de Huzita	53
Figura 37: Axioma de Huzita	54
Figura 38: Axioma de Hatori	54
Figura 39: Distância entre dois pontos	56
Figura 40: Reta definida por dois pontos	57
Figura 41: Mediatriz	58
Figura 42: Reta de dobragem	59
Figura 43: Reta de dobragem	60
Figura 44: Reta dada pela bissetriz	61
Figura 45: Reta r	62
Figura 46: Nenhum ponto de interseção	63
Figura 47: Um ponto de interseção	63
Figura 48: Dois pontos de interseção	64
Figura 49: Aplicação do axioma 5	64
Figura 50: Formação de uma parábola	65
Figura 51: Tangente comum a duas parábolas	66
Figura 52: Construção do sétimo axioma	67
Figura 53: O centro F_1 do círculo	70
Figura 54: Escolha do ponto F_2	70
Figura 55: Construção da curva	71

Figura 56: A curva através das dobraduras	71
Figura 57: Construção da reta t	72
Figura 58: Unicidade do ponto G	73
Figura 59: Aplicação dos axiomas	74
Figura 60: Os elementos da elipse	74
Figura 61: Excentricidade da elipse	75
Figura 62: Construção de uma circunferência	75
Figura 63: Translação e rotação de elipses	76
Figura 64: O centro F_1 do círculo	76
Figura 65: Escolha do ponto F_2	77
Figura 66: Construção da curva	77
Figura 67: A curva através das dobraduras	78
Figura 68: Formação da reta tangente à hipérbole	78
Figura 69: Aplicação dos axiomas	79
Figura 70: Aplicação dos axiomas	80
Figura 71: Os elementos da hipérbole	80
Figura 72: Aplicação do axioma 4	81
Figura 73: Retângulo da base	81
Figura 74: Aplicação do axioma 1	82
Figura 75: As assíntotas da hipérbole	82
Figura 76: Excentricidade da hipérbole	83
Figura 77: Translação e rotação da hipérbole	83
Figura 78: O ponto F	84
Figura 79: Aplicação do axioma	84
Figura 80: A parábola através do Origami	85
Figura 81: Segmento PF'	85
Figura 82: O ponto pertencente à parábola	86
Figura 83: Aplicação do axioma 4	86
Figura 84: Os elementos da parábola	87

Figura 85: Parábolas semelhantes	87
Figura 86: Translação e rotação da parábola	88
Figura 87: Gráfico mostrando os períodos dos alunos	89
Figura 88: Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico	90
Figura 89: Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico	91
Figura 90: Folhas para a construção da elipse, hipérbole e parábola	92
Figura 91: Aluno realizando as dobraduras referentes à elipse	93
Figura 92: Aluno realizando as dobraduras referentes à hipérbole	93
Figura 93: A parábola através do Origami	94
Figura 94: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95
Figura 95: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95
Figura 96: Gráfico mostrando a opinião dos alunos	95

Lista de tabela

Tabela 1: Modelos de símbolos universais utilizados no Origami	48
--	----

1 Introdução

Ensinar Matemática é algo bastante desafiador. O desafio se torna ainda maior quando este ensino está relacionado com as escolas públicas. As dificuldades são de diversas naturezas e as mesmas movem diferentes pesquisas no meio acadêmico. No entanto, com a presença de alunos entusiasmados, curiosos e interessados, qualquer cenário impróprio para a aprendizagem se transforma em um ambiente de grandes descobertas.

Segundo Lorenzato (2006), educadores ilustres como Rousseau, Pestalozzi e Froebel ressaltaram nos últimos séculos a eficácia do apoio visual e/ou visual-tátil para a percepção de conhecimentos matemáticos. Tal destaque não foi dado em vão. Afinal, uma aula completamente expositiva nem sempre oferecerá suporte para que o aluno possa alcançar a real aprendizagem. Em especial, para aquele que enxerga a Matemática de maneira limitada.

Uma forma de garantir tal apoio ocorre por meio dos materiais manipuláveis. Muitos resultados positivos podem ser obtidos, quando tais recursos são utilizados com objetivos matemáticos bem definidos pelo professor, uma vez que este é o mediador para que o discente possa adquirir os conhecimentos desejados neste processo. Diante dos diversos instrumentos que podem ser utilizados, o trabalho se concentra em um modesto recurso: o papel.

Antiga e ao mesmo tempo tão atual, “a arte de dobrar papéis”, mais conhecida como “Origami”, transcende os limites de uma simples arte com a sua capacidade de conduzir ao aprendizado matemático, seja pelo visual harmônico ou pela Geometria Axiomática inerente às dobras. Desta maneira, sua simplicidade e riqueza são capazes de surpreender aos leigos e estudiosos.

Unindo esta importante arte e a Matemática, o foco do trabalho busca mostrar uma maneira de ensinar um assunto muito pouco abordado no Ensino Médio: as Curvas Cônicas. Abandonando o tradicional método da memorização excessiva de equações algébricas, procura-se dar ênfase às construções

geométricas por meio das dobraduras, explorando os lugares geométricos e definições das curvas de maneira atrativa.

O desenvolvimento desta dissertação está dividido em cinco capítulos, em que o segundo menciona os aspectos históricos das Curvas Cônicas, mostrando as definições destas, as propriedades, as notações usuais para os seus elementos, as transformações de coordenadas e o estudo das retas tangentes às mesmas.

O terceiro capítulo aborda as relações históricas e educacionais do Origami, assim como sua conexão com a Matemática e a simbologia adotada para o uso das dobraduras.

O quarto capítulo, por sua vez, refere-se de maneira mais específica à relação que as dobraduras têm com a Matemática por meio dos Axiomas de Huzita-Hatori. Mostra-se, ainda, uma explicação analítica dos referidos axiomas.

No quinto capítulo unem-se os conceitos das Cônicas e as dobraduras expondo o passo a passo para as construções e a Matemática presente no método utilizado.

No sexto capítulo é apresentado o relato sobre a oficina denominada de “Construindo as cônicas através do Origami”. A mesma foi realizada com um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática oferecido pela Fundação Educacional Unificada Campograndense, faculdade situada na Zona Oeste do Rio de Janeiro.

Nas conclusões são retomados pontos relevantes em que se discute a importância do ensino das Curvas Cônicas, assim como a utilidade do método de abordagem das mesmas, descrito no capítulo cinco. Além disso, no apêndice são relatadas algumas sugestões para o professor que pretende utilizar a metodologia sugerida em sala de aula.

2 As Cônicas

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), historiadores creditam ao matemático grego Menaecmus (380 a. C – 320 a.C.) a descoberta do estudo das Curvas Cônicas. Acredita-se que o referido geômetra tenha usado as curvas como mecanismo para resolução do clássico Problema Deliano¹.

Contudo, a principal associação histórica às curvas em questão é dada ao matemático e astrônomo grego Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.). Apolônio é o autor da importantíssima obra chamada “As Cônicas”, composta por oito livros, dos quais os quatro primeiros foram escritos em grego e os três seguintes traduzidos em árabe, sendo, infelizmente, o oitavo volume perdido. Segundo Boyer (1974), a obra de Apolônio é considerada a mais completa no que se refere ao presente estudo.

De acordo com Eves, o “Grande Geômetra”² utilizou pela primeira vez os nomes “Parábola”, “Elipse” e “Hipérbole” para designar as seções descritas. O autor, ainda, afirma:

Antes de Apolônio os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que, igual a ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, uma parábola e uma hipérbole. Só se considerava um ramo da hipérbole. Apolônio, porém, no Livro I de seu tratado, obtinha todas as seções cônicas da maneira hoje familiar, ou seja, a partir de um cone circular duplo, reto ou oblíquo. (Eves, 2011, p. 199)

¹ Conhecido também como problema da duplicação do cubo, este é um dos três problemas geométricos, a saber: a trisseção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo. Dada a aresta de um cubo, o objetivo neste problema é construir, com o auxílio da régua e do compasso, a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do inicial.

² Assim era conhecido o matemático Apolônio de Perga que, por sua importância nos estudos da Geometria, tornou-se um dos mais originais matemáticos gregos.

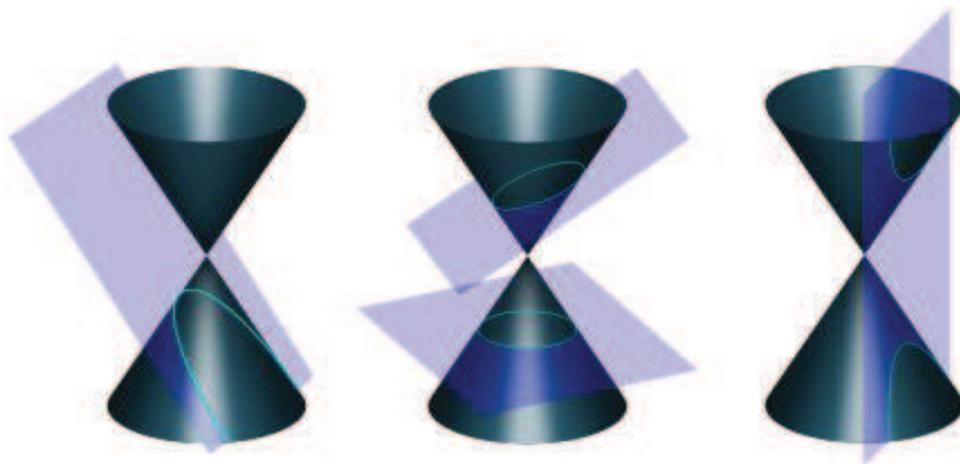


Figura 1 - Seções Cônicas³

Como se pode observar na figura fornecida acima, quando o plano é paralelo a uma geratriz do cone, a curva obtida é uma parábola. Se o plano secciona apenas uma das folhas do cone e, além disso, intercepta todas as geratrizes, a curva gerada é uma elipse. A hipérbole, por sua vez, é obtida por meio da interseção entre o plano e ambas as folhas do cone.

Ainda, neste estudo, existem as cônicas degeneradas, tais como uma reta (parábola), um ponto (elipse) e um par de retas (hipérbole). Estas também são obtidas por meio de intersecções entre um plano e um cone circular duplo.

Segundo Delgado, Frensel e Crissaff (2013), em 1636, ao elaborar a obra “*Ad locos planos et solidos isagoge*” (Introdução aos lugares planos e sólidos), Pierre de Fermat (1601 – 1665) estabeleceu um sistema de coordenadas na Geometria Euclidiana. Com isso, o matemático e cientista francês mostrou que as curvas cônicas podem ser descritas por equações algébricas de duas variáveis combinadas com os conceitos dos lugares geométricos⁴ discutidos por Apolônio. Em sua linguagem atual, as equações são descritas por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

De acordo com Venturi:

Coube a Pierre de Fermat (1601 – 1665) a descoberta das equações da reta e da circunferência e as equações mais simples da elipse, da parábola e da hipérbole.

³ Disponível em: <http://www.galileu.esalq.usp.br/mostra_topico.php?cod=73>. Acesso em 30 de dezembro de 2014.

⁴ De acordo com Machado (1982), denominamos lugar geométrico a um conjunto de pontos tais que todos eles e só eles possuem uma dada propriedade.

Aplicou a transformação equivalente à atual rotação de eixos para reduzir uma equação do 2º grau à sua forma mais simples. (Venturi, 1949, p. 21)

As contribuições de Fermat foram primordiais para o estudo destas curvas. Segundo o referido autor, muitos historiadores acreditam que tal manuscrito tenha sido o marco zero da Geometria Analítica.

A seguir, serão mostradas as definições dos lugares geométricos representados pelas curvas cônicas, além dos seus elementos e equações mais simples conforme proposto no Ensino Médio. É dado destaque, ainda, às transformações de coordenadas e retas tangentes às curvas.

2.1. Elipse

2.1.1. Definição

Machado traz a seguinte definição para a elipse: “A elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano, F_1 e F_2 , é uma constante $2a$ (maior do que a distância $\overline{F_1F_2}$)”. (Machado, 1982, p. 116)

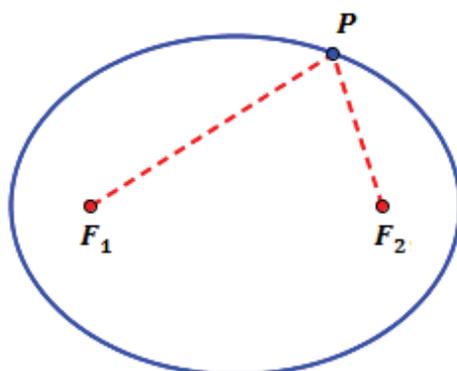


Figura 2 - A elipse

Desta maneira, seja E uma elipse, tem-se que:

$$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

2.1.2. Notações usuais

É comum encontrar as seguintes notações⁵ para os elementos da elipse:

- A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 da elipse é chamada de reta focal.

Além disso, $|\overline{F_1F_2}| = 2c$;

- Os pontos de interseção entre a curva e a reta focal são chamados de vértices A_1 e A_2 ;

- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de eixo focal, em que $|\overline{A_1A_2}| = 2a$;

- O ponto médio do eixo focal é chamado de centro C ;

- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro C é chamada de reta não focal;

- Os pontos de interseção entre a curva e a reta não focal são chamados de vértices B_1 e B_2 ;

- O eixo não focal é determinado pelo segmento $\overline{B_1B_2}$ cuja notação usual para seu comprimento é $2b$;

- A excentricidade da elipse é determinada pelo número $e = \frac{c}{a}$, em que $0 \leq e < 1$.

Observe que $|\overline{F_1B_1}| = |\overline{B_1F_2}| = |\overline{F_1B_2}| = |\overline{F_2B_2}|$ e $|\overline{F_1B_1}| + |\overline{B_1F_2}| = 2a$.

Portanto, $|\overline{F_1B_1}| = |\overline{B_1F_2}| = |\overline{F_1B_2}| = |\overline{F_2B_2}| = a$. Além disso, $a^2 = b^2 + c^2$.

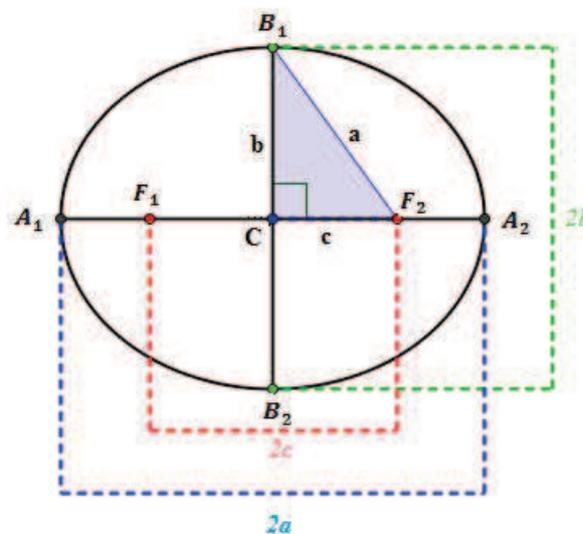


Figura 3 - Elementos da elipse

⁵ Estas notações são utilizadas para efeito de simplificação.

2.1.3.

Forma canônica da Elipse centrada na origem

Podem-se relacionar as definições enunciadas a um sistema de eixos ortogonais XOY, em que $P \in \mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da elipse centrada na origem nos seguintes casos:

1º caso: seja E uma elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo OX, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$.

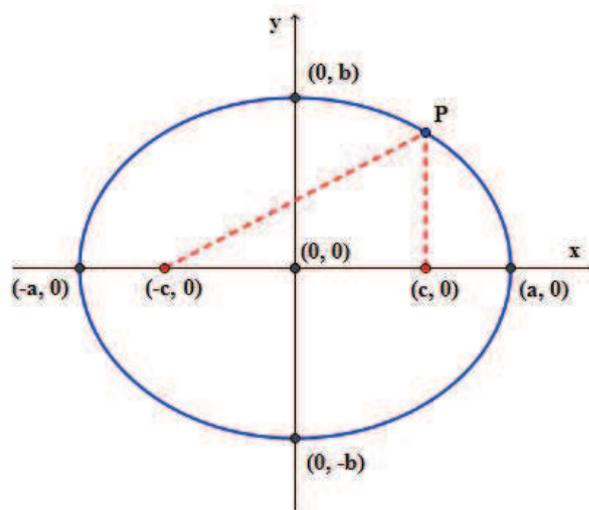


Figura 4 - Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX

A partir da definição do lugar geométrico da elipse, encontra-se a equação que a define por meio do cálculo da distância entre dois pontos.

Por definição, se $P = (x, y)$ pertence à elipse, então $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(x+c)^2 + 2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + 2y^2 = 4a^2$$

$$2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - (x+c)^2 - (x-c)^2$$

$$2 \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2c^2$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a^2 - y^2 - x^2 - c^2$$

Ou ainda:

$$\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx) \cdot (x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} = 2a^2 - y^2 - x^2 - c^2$$

$$(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 = [2a^2 - (x^2 + c^2 + y^2)]^2$$

$$-4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

$$-c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + c^2 + y^2)$$

Substituindo $c^2 = a^2 - b^2$:

$$-(a^2 - b^2)x^2 = a^4 - a^2(x^2 + a^2 - b^2 + y^2)$$

$$-a^2x^2 + b^2x^2 = a^4 - a^2x^2 - a^4 + a^2b^2 - a^2y^2$$

$$b^2x^2 = a^2b^2 - a^2y^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

Conclui-se, assim, que a equação da elipse é dada por: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2º caso: seja E uma elipse centrada na origem cuja reta focal coincide com o eixo OY, tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

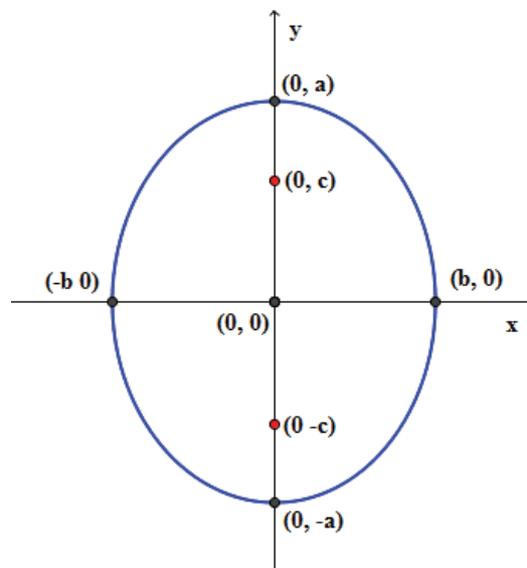


Figura 5 - Elipse centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY

Utilizando os mecanismos expostos no primeiro caso, encontra-se a seguinte

equação: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

2.2. Hipérbole

2.2.1. Definição

Machado traz a seguinte definição para a hipérbole: “A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano para os quais a diferença, em valor absoluto, das distâncias a dois pontos fixos desse plano, F_1 e F_2 , é uma constante $2a$ (menor do que a distância $\overline{F_1F_2}$)”. (Machado, 1982, p. 121)

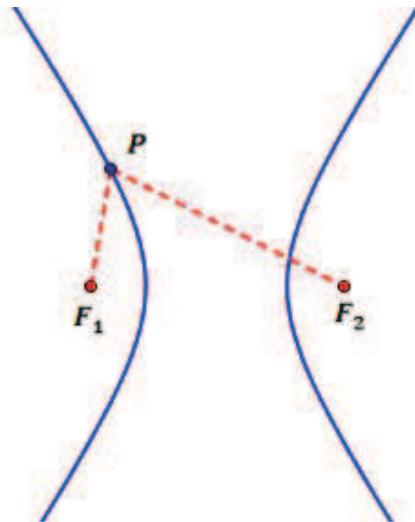


Figura 6 - A hipérbole

Desta maneira, seja H uma hipérbole, tem-se que:

$$H = \{P \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a\}.$$

2.2.2. Notações usuais

É comum encontrar as seguintes notações para os elementos da hipérbole:

- A reta determinada pelos focos F_1 e F_2 da hipérbole é chamada de reta focal. Além disso, $|\overline{F_1F_2}| = 2c$;
- Os pontos de interseção entre a curva e a reta focal são chamados de vértices A_1 e A_2 ;
- O segmento $\overline{A_1A_2}$ é chamado de eixo focal, em que $|\overline{A_1A_2}| = 2a$;
- O ponto médio do eixo focal é chamado de centro C ;

- A reta perpendicular à reta focal que passa pelo centro C é chamada de reta não focal;

- O eixo não focal da hipérbole é determinado pelo segmento $\overline{B_1B_2}$ cujo comprimento é $2b$ e o seu ponto médio é o centro C , em que $b^2 = c^2 - a^2$.

- Os pontos B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole;

- A excentricidade da curva é determinada pelo número $e = \frac{c}{a}$, em que $c > a$ e conseqüentemente, $e > 1$.

- O retângulo da base de H tem os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 como os respectivos pontos médios dos seus lados e as retas que contêm as diagonais do retângulo da base da hipérbole são as assíntotas⁶ de H . Desta maneira, as assíntotas da hipérbole são as retas que passam pelo centro C da curva e têm inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação à reta focal.

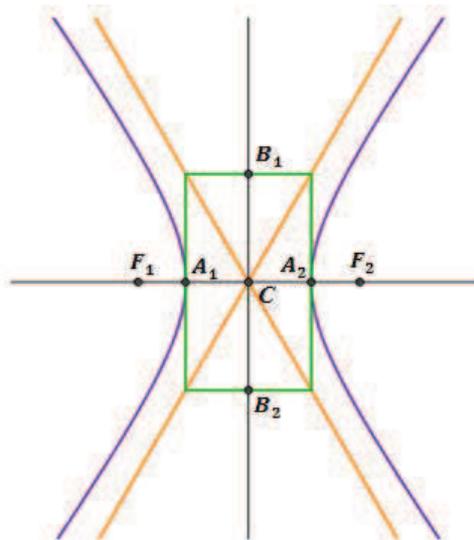


Figura 7 - Elementos da hipérbole

2.2.3.

Forma canônica da hipérbole centrada na origem

Conforme feito no estudo da elipse, utilizam-se as definições enunciadas em um sistema de eixos ortogonais XOY , em que $P \in \mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da hipérbole centrada na origem nos seguintes casos:

⁶ As assíntotas não interceptam a hipérbole.

1º caso: seja H uma hipérbole centrada na origem, cuja reta focal coincide com o eixo OX , tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por: $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$.

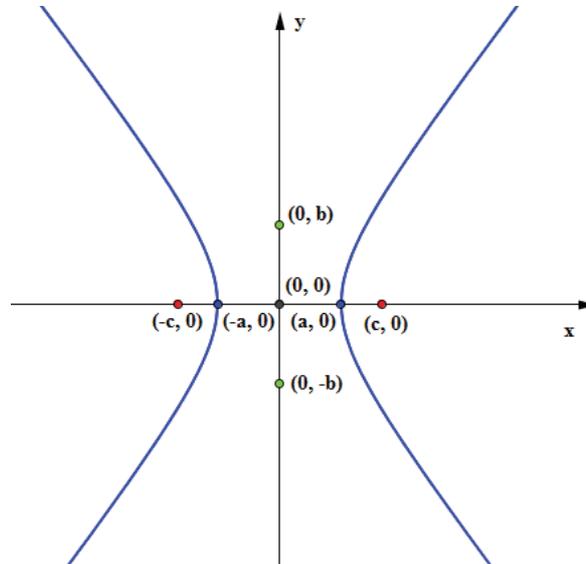


Figura 8 - Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OX

A partir da definição da hipérbole, encontra-se a equação que a define através do cálculo da distância entre dois pontos.

Por definição, se $P = (x, y)$ pertence à hipérbole, então:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a.$$

Logo,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\begin{aligned} (x+c)^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + 2y^2 &= 4a^2 \\ -2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 2y^2 - (x+c)^2 - (x-c)^2 \\ -2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 4a^2 - 2y^2 - 2x^2 - 2c^2 \end{aligned}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x^2 + c^2 + y^2 + 2cx) \cdot (x^2 + c^2 + y^2 - 2cx)} &= -2a^2 + y^2 + x^2 + c^2 \\ (x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2 &= [-2a^2 + (x^2 + c^2 + y^2)]^2 \\ -4c^2x^2 &= 4a^4 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2) \\ -c^2x^2 &= a^4 - a^2(x^2 + c^2 + y^2) \end{aligned}$$

Substituindo $c^2 = a^2 + b^2$:

$$-b^2x^2 = -a^2b^2 - a^2y^2$$

Dividindo ambos os membros por $-a^2b^2$:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

Encontra-se, assim, a equação da hipérbole dada por: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2º caso: seja H uma hipérbole centrada na origem, cuja reta focal coincide com o eixo OY , tem-se que os focos e vértices da mesma são dados por:

$F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

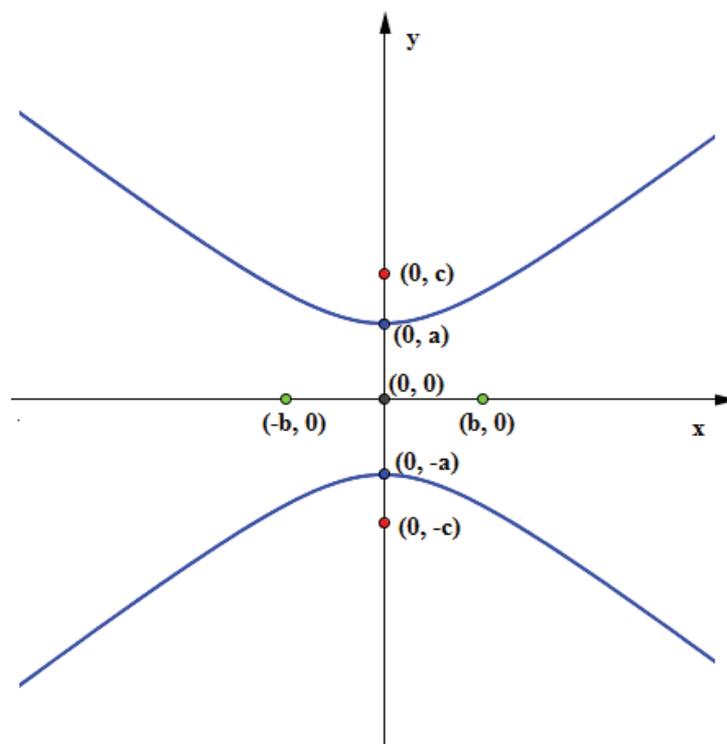


Figura 9 - Hipérbole centrada na origem cuja reta focal é o eixo OY

Utilizando os mecanismos expostos no primeiro caso, obtém-se a seguinte

equação: $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

2.3. Parábola

2.3.1. Definição

Machado traz a seguinte definição para a parábola: “A parábola é o lugar geométrico dos pontos de um plano que são equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta dada d , $F \notin d$, deste plano. O ponto F chama-se foco e a reta d chama-se diretriz da parábola”. (Machado, 1982, p. 109)

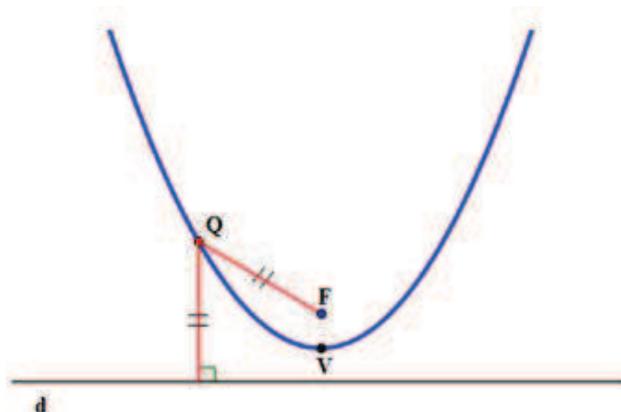


Figura 10 - A parábola

Desta maneira, seja P uma parábola, tem-se que:

$$P = \{Q \mid d(Q, F) = d(Q, d)\}.$$

2.3.2. Notações usuais

É comum serem encontradas as seguintes notações para os elementos da parábola:

- A reta que contém o foco F e é perpendicular à diretriz é chamada de reta focal da parábola.
- O ponto da parábola P que pertence à reta focal é chamado de vértice⁷ V ;
- A distância entre o foco e a diretriz da parábola, chamada de parâmetro, é usualmente notada por $2p$ (note que $d(V, F) = d(V, d) = p$);

⁷ Se D é o ponto de interseção entre a reta focal e a diretriz, então V é o ponto médio do segmento \overline{FD} .

- A excentricidade da parábola é o quociente entre $d(Q, F)$ e $d(Q, r)$. Como estes valores são iguais, a excentricidade da parábola é igual a 1.

2.3.3.

Forma canônica da parábola centrada na origem

Conforme feito no estudo das curvas, anteriormente apresentadas, utilizam-se as definições enunciadas em um sistema de eixos ortogonais XOY , em que $Q \in \mathbb{R}^2$. Divide-se o estudo da forma canônica da parábola centrada na origem nos seguintes casos:

1º caso: considerando a parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX , tem-se duas situações:

- Seja P a parábola de foco F à direita da diretriz d , os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (p, 0)$ e diretriz: $d: x = -p$.

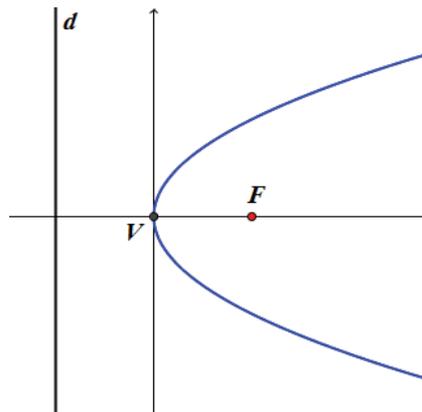


Figura 11 - Parábola de foco à direita da diretriz

Conhecendo a definição do lugar geométrico da parábola, pode-se encontrar a equação que a define por meio do cálculo da distância entre dois pontos e distância entre ponto e reta.

Seja $Q = (x, y)$, por definição, tem-se que $d(Q, F) = d(Q, d)$. Além disso, $d(F, d) = 2p$.

Tem-se que:

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2$$

$$x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

$$y^2 = 4xp.$$

- Seja P a parábola de foco F à esquerda da diretriz d , os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (-p, 0)$ e diretriz $d: x = -p$.

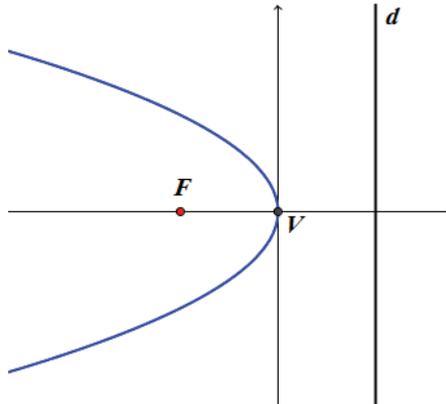


Figura 12 - Parábola de foco à esquerda da diretriz

De forma análoga à parábola de foco F à direita da diretriz d , encontra-se:
 $y^2 = -4xp$.

2º caso: considerando a parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY , têm-se duas situações:

- Seja P a parábola de foco F acima da diretriz d , os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (0, p)$ e diretriz $d: y = -p$.

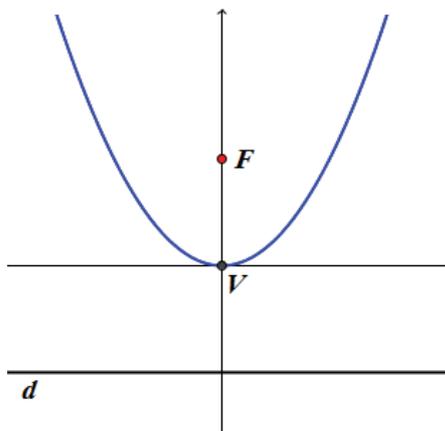


Figura 13 - Parábola de foco acima da diretriz

Conforme feito anteriormente, encontra-se a equação que a define por meio dos cálculos de distância entre dois pontos e entre reta e ponto.

Tem-se que:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$

$$x^2 = 4yp$$

- Seja P a parábola de foco F abaixo da diretriz d , os seus elementos são dados pelo vértice $V = (0, 0)$, foco $F = (0, -p)$ e diretriz $d: y = p$.

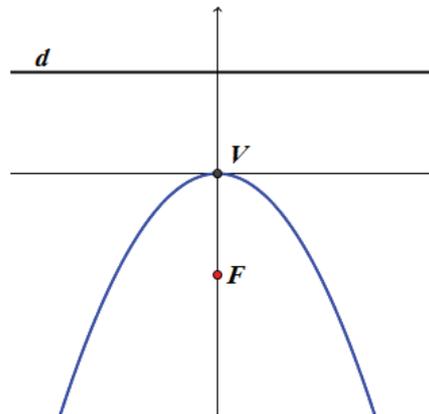


Figura 14 - Parábola de foco abaixo da diretriz

De forma análoga à parábola de foco F à direita da diretriz d , obtém-se:

$$x^2 = -4yp.$$

2.4. Transformações de coordenadas

Algumas vezes, as equações de curvas cônicas ou as coordenadas de um ponto em relação a certo sistema de referência serão tratadas em relação a um novo sistema. Desta maneira, a cônica cuja equação é referida a um sistema de eixos coordenados XOY transformar-se-á em uma equação relacionada a um novo sistema $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ obtido por meio de uma translação e/ou rotação de eixos. Estas

transformações não modificam o gráfico ou forma da curva, alterando apenas sua equação.

A seguir, será feita a dedução de fórmulas capazes de relacionar as coordenadas de um ponto qualquer do plano referidas a um sistema original com as coordenadas do mesmo ponto relacionadas ao segundo sistema. Algebricamente, o objetivo da aplicação das fórmulas que serão apresentadas é eliminar um ou mais termos da equação do segundo grau com duas variáveis, dada por: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.4.1. Translações de eixos coordenados

Em relação às translações dos eixos coordenados, Cattai (2010) apresenta a seguinte definição:

A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos sejam paralelos aos antigos eixos, respectivamente e semelhantemente orientados, é denominada translação dos eixos coordenados. (Cattai, 2010, p. 6).

Seja XOY o sistema original de eixos ortogonais, o sistema transladado $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ possui eixos ortogonais paralelos aos primeiros e origem dada por (x_0, y_0) . Além disso, seja P um ponto qualquer do plano, cujas coordenadas no sistema de eixos ortogonais original são dadas por (x, y) , tem-se que no sistema transladado de eixos ortogonais tais coordenadas são expressas por (\bar{x}, \bar{y}) , conforme se pode observar na figura a seguir.

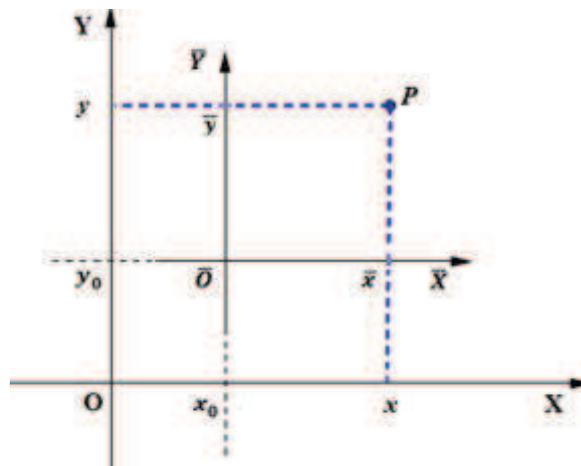


Figura 15 - Translação de eixos

Pode-se perceber que as coordenadas do ponto P nos sistemas XOY e $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$$

A partir destas relações de translação é possível obter as equações da elipse, hipérbole e parábola transladadas. Além disso, é válido destacar que por meio das referidas fórmulas é possível eliminar os termos do primeiro grau da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.4.2. Rotações de eixos coordenados

No que se refere ao estudo das rotações dos eixos coordenados, Cattai (2010) apresenta a seguinte definição: “A operação de mover os eixos coordenados no plano coordenado para uma posição diferente de maneira que os novos eixos e os antigos eixos possuam a mesma origem, é denominado rotação dos eixos coordenados”. (Cattai, 2010, p. 8)

Portanto, rotacionar os eixos coordenados implica em manter a origem fixa e “girar” os eixos em um determinado ângulo α . Considerando XOY , o sistema original de eixos ortogonais e $\bar{X}\bar{O}\bar{Y}$ o sistema rotacionado, em que: P é um ponto do plano tal que $P = (x, y)$ no sistema original, $P = (\bar{x}, \bar{y})$ no sistema rotacionado e O é a origem de ambos os sistemas, tem-se a seguinte ilustração:

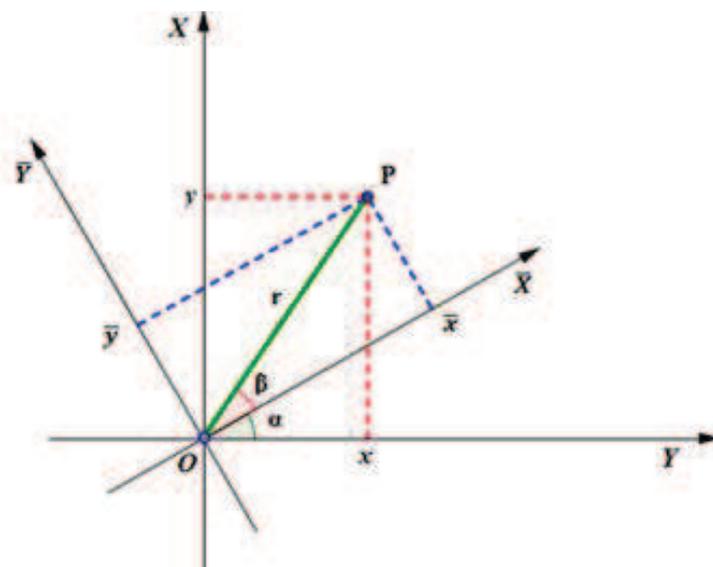


Figura 16 - Rotação de eixos

Utilizando as informações fornecidas na figura e as razões trigonométricas, têm-se as seguintes igualdades:

$$x = \cos(\alpha + \beta)r$$

$$\text{Além disso, } r = \frac{\bar{x}}{\cos\beta} = \frac{\bar{y}}{\sin\beta}$$

Sabendo que $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$, tem-se:

$$x = \frac{\bar{x}}{\cos\beta} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - \frac{\bar{y}}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Conclui-se então que: $x = \bar{x} \cdot \cos\alpha - \bar{y} \cdot \sin\alpha$

De forma análoga, encontra-se:

$$y = \sin(\alpha + \beta)r$$

Seja $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$, tem-se:

$$y = \frac{\bar{x}}{\cos\beta} \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta + \frac{\bar{y}}{\sin\beta} \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

Conclui-se, desta maneira, que $y = \bar{x} \cdot \sin\alpha + \bar{y} \cdot \cos\alpha$

Por meio de artifícios semelhantes se podem encontrar as fórmulas referentes à \bar{x} e \bar{y} . É importante destacar que por meio das fórmulas de rotação aqui apresentadas, é possível eliminar os termos em xy da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

2.5. Tangentes a uma cônica

Seja uma curva cônica C , cuja equação é dada por $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ e uma reta t em que sua equação é expressa por $y = mx + n$, obtém-se os pontos de interseção entre ambas por meio da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + n \end{cases}$$

Por substituição, encontra-se: $Ax^2 + Bx(mx + n) + C(mx + n)^2 + Dx + E(mx + n) + F = 0$. Ou ainda: $(A + Bm + Cm^2)x^2 + (Bn + 2Cmn + D + Em)x + Cn^2 + En + F = 0$. Desta maneira, esta equação possui zero, uma, ou duas soluções.

Neste caso, Siqueira e Costa fornecem a seguinte definição para a tangência: “As retas que têm somente um ponto em comum com uma cônica e que não contém pontos interiores da mesma são denominadas tangentes à cônica”.

(Siqueira e Costa, 2012, p. 21). Logo, é necessário e suficiente que todos os pontos da reta, com exceção do ponto P , pertençam à região exterior da curva.

A seguir, mostram-se as propriedades das retas tangentes às cônicas considerando seus respectivos focos e diretrizes⁸.

Sobre as tangentes à elipse, Sato fornece a seguinte propriedade: “Seja uma elipse C de diretriz d e focos F_1 e F_2 e P um ponto de C . Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pela semirreta \overrightarrow{PE} , oposta a semirreta $\overrightarrow{PF_1}$, e pela semirreta $\overrightarrow{PF_2}$, então t é a tangente à elipse no ponto P ”. (Sato, 2005, pg. 26).

De acordo com a definição do lugar geométrico já apresentada, $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$, em que $2a$ é uma constante positiva. Para garantir que t é a reta tangente à elipse C , mostra-se que o ponto P é a única interseção entre ambas.

Considera-se um ponto Q (distinto de P) pertencente à t e, além disso, faz-se o prolongamento dos segmentos $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$ de forma que existam as seguintes igualdades: $|\overline{PF_1'}| = |\overline{PF_1}|$ e $|\overline{PE}| = |\overline{PF_2}|$, conforme indicado na figura a seguir:

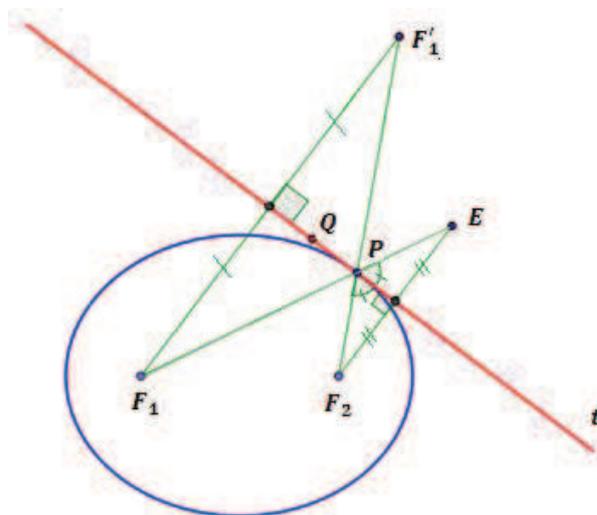


Figura 17 - Tangente à elipse

Portanto, a reta t é, além de bissetriz do ângulo $F_2\hat{P}E$, mediatriz dos segmentos $\overline{F_1F_1'}$ e $\overline{F_2E}$ pois o triângulo PF_2E é isósceles⁹, ou seja, as igualdades $|\overline{QF_1'}| = |\overline{QF_1}|$ e $|\overline{QE}| = |\overline{QF_2}|$ também são válidas.

⁸ Geralmente, no estudo das cônicas a diretriz é apresentada apenas quando se refere à parábola. No entanto, a diretriz de uma cônica é uma reta fixa onde, juntamente com um ponto fixo não pertencente à curva (que chamamos de foco), define a mesma como o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias ao foco e à diretriz possuem uma razão constante.

Utilizando a desigualdade triangular relacionada ao triângulo $PF_1'F_2$, encontra-se que:

$$|\overline{QF_1'}| + |\overline{QF_2}| > |\overline{F_2F_1'}|. \text{ Ou ainda, } |\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| > |\overline{F_2F_1'}|.$$

Ora, se $|\overline{PF_1'}| = |\overline{PF_1}|$, então $|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = |\overline{F_2F_1'}| = 2a$. Logo, $|\overline{QF_1'}| + |\overline{QF_2}| > 2a$.

Conclui-se, assim, que Q pertence à reta, mas não pertence à curva, pois $|\overline{QF_1}| + |\overline{QF_2}| \neq 2a$. Logo, o ponto P é a única interseção entre ambas.

Com relação às tangentes à hipérbole, Sato fornece a propriedade a seguir: “Seja uma hipérbole C de diretriz d e focos F_1 e F_2 e P um ponto de C . Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$, então t é a tangente à hipérbole no ponto P ”. (Sato, 2005, pg. 26).

De acordo com a definição do lugar geométrico dos pontos pertencentes à hipérbole, se P é um ponto de C , então $||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a$, em que $2a$ é uma constante positiva.

Para garantir que t é a reta tangente à hipérbole C , mostra-se que o ponto P é a única interseção entre ambas. Considera-se um ponto Q (distinto de P) pertencente à t e, além disso, determina-se no segmento $\overline{PF_1}$ um ponto R tal que $|\overline{PR}| = |\overline{PF_2}|$, conforme indicado na figura a seguir:

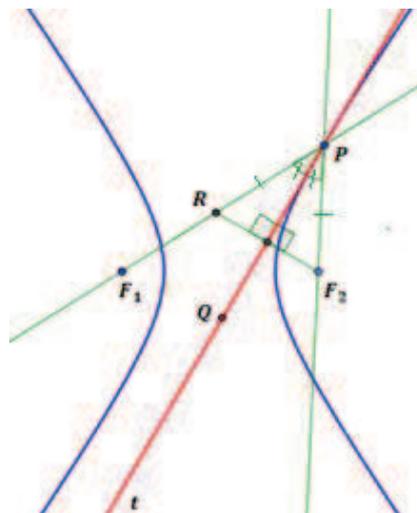


Figura 18 - Tangente à hipérbole

⁹ No triângulo isósceles, a mediana, a altura e a bissetriz em relação à base (de medida diferente das demais) são coincidentes. Portanto, este segmento é também mediatriz da mesma.

Portanto, a reta t é, além de bissetriz do ângulo $F_1\hat{P}F_2$, mediatriz do segmento $\overline{F_2R}$, pois o triângulo PRF_2 é isósceles. Obtém-se também as seguintes igualdades: $|\overline{QR}| = |\overline{QF_2}|$ e $|\overline{RF_1}| = 2a$ (pois $|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a$). Aplicando a desigualdade triangular ao triângulo QF_1R , encontra-se que:

$$|\overline{QR}| < |\overline{QF_1}| + |\overline{RF_1}|. \text{ Em que se segue que } |\overline{QF_2}| - 2a < |\overline{QF_1}|$$

$$|\overline{QF_1}| < |\overline{RF_1}| + |\overline{QR}|. \text{ Ou ainda, } |\overline{QF_1}| < 2a + |\overline{QF_2}|$$

$$|\overline{QF_2}| - 2a < |\overline{QF_1}| < 2a + |\overline{QF_2}|$$

$$\text{Consequentemente, } ||\overline{QF_1}| - |\overline{QF_2}|| < 2a.$$

Conclui-se, assim, que Q pertence à reta, mas não pertence à hipérbole. Logo, o ponto P é a única interseção entre ambas.

Por fim, em relação às tangentes à parábola, o mesmo autor ainda concede a seguinte propriedade: “Sejam P um ponto da parábola de foco F e diretriz d e t a reta bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, em que D é pé da perpendicular à reta d passando por P . Temos que t é reta tangente à parábola C no ponto P sendo também a mediatriz do segmento FD ”. (Sato, 2005, pg. 25).

Se P é um ponto da curva, então $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$. Assim, sendo t a bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$ em que FPD é um triângulo isósceles se tem que t é também uma mediatriz do mesmo.

Para mostrar que o ponto P é a única interseção entre a reta t e a curva, considera-se um ponto Q pertencente à t , além do segmento $\overline{QD'}$ perpendicular à diretriz, conforme se pode observar na ilustração a seguir:

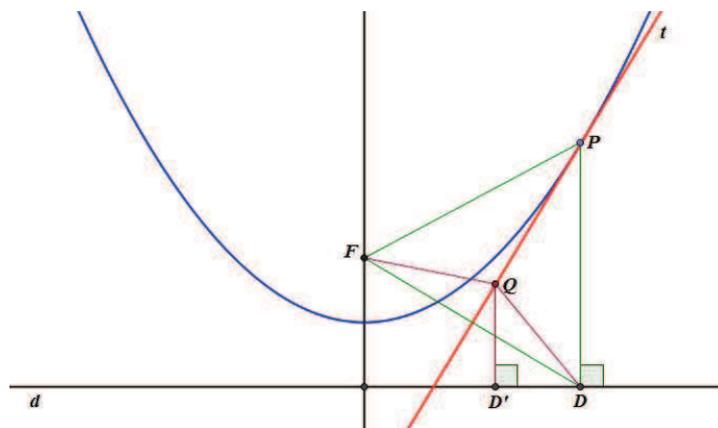


Figura 19 - Tangente à parábola

A reta t , além de bissetriz do triângulo FPD , é mediatriz do segmento \overline{FD} , pois o referido triângulo é isósceles. Portanto, $|\overline{QF}| = |\overline{QD}|$.

Considerando o triângulo retângulo $QD'D$ de hipotenusa \overline{QD} , tem-se que $|\overline{QD'}| < |\overline{QD}|$, em que se conclui que $|\overline{QF}| > |\overline{QD'}|$. Desta maneira, Q pertence à reta, mas não pertence à parábola. Logo, o ponto P é a única interseção entre ambas.

Não é comum ver a apresentação dos estudos sobre translação, rotação e tangentes às curvas no Ensino Médio. Aliás, os conceitos destacados neste capítulo estão cada vez mais extintos nas salas de aula, ora por serem considerados complexos, ora por não serem considerados tão relevantes.

No entanto, o referido tema ocupa um grande e rico capítulo tanto da história da Matemática como de desenvolvimentos teóricos e aplicações práticas importantes. Cabe ao professor estabelecer métodos para que estes conhecimentos sejam apresentados aos discentes, uma vez que o uso de materiais concretos pode fazer toda a diferença no processo de aprendizagem.

3 O Origami

3.1. Contexto histórico do Origami

A palavra “*Origami*” surgiu a partir da junção do verbo “*oru*” (dobrar) com o substantivo “*kami*” (papel), sendo conhecida como “a arte de dobrar papel”. Apesar de a palavra ter origem japonesa, Kanegae e Imamura (2002) afirmam que suas técnicas foram introduzidas no Japão, aproximadamente, no século VI d.C, quando um monge budista chinês levou o método de fabricação do papel ao país.

Os referidos autores afirmam, ainda, que o uso das dobraduras teve início em cerimônias religiosas, através de ornamentações feitas em papel chamadas “*katashiro*”. Estas ornamentações são utilizadas, ainda, nos dias atuais em templos xintoístas¹⁰.

O mais antigo *katashiro* de origami se encontra no Ise Jingu, província de Mie, portanto se diz que a história do origami é tão antiga quanto a história do Japão. Entre os origamis utilizados em cerimônias, temos a representação de duas borboletas (feminino e masculino) expostas em casamentos. Temos também um ornamento que é colocado na boca da garrafa de *sakê*. Outro origami formal, muito utilizado até os dias de hoje é o *noshi*, um ornamento colocado sobre o embrulho de presente, cujo significado é de que a pessoa oferece o presente deseja fortuna ao receptor. Costumava-se dizer que quando se dá um presente a alguém, embrulha-se com um puro papel branco. E o *noshi* seria a abreviação deste costume. A confecção deste *noshi* pelas donas de casa provavelmente fez com que houvesse interesse em criar outros origamis. (Kanegae & Imamura, 2002, p. 1)

Com o passar do tempo, a dimensão desta arte não se limitou ao Japão e muito menos à China, seu provável país de origem. A cultura de dobrar papel, de alguma maneira, é até hoje disseminada em diversos lugares. Na Europa, por exemplo, houve a recepção de conceitos parecidos com o Origami tradicional através do Oriente, nas invasões muçulmanas iniciadas em 771 na Península Ibérica e findadas em 1492 na Espanha.

¹⁰ Espiritualidade politeísta tradicional do Japão que une diferentes práticas espirituais de diversas tradições pré-históricas japonesas.

Segundo Oliveira (2004), foi o educador alemão, chamado Friedrich Froebel (1782-1852), o responsável pelo início do uso das dobraduras no ensino, introduzindo estas técnicas nas atividades pré-escolares em 1837.



Figura 20 - Retrato de Friedrich Froebel¹¹

Friedrich descreveu as dobras dividindo-as em três estágios:

1) Dobras de verdade: este estágio do Origami tinha o objetivo de fazer com que as crianças descobrissem aspectos da Geometria Euclidiana de forma autônoma.

2) Dobras da vida: apesar deste não ter sido um estágio muito valorizado pelos seguidores de Froebel, tinha o objetivo de utilizar as dobraduras para construir animais e plantas, dando ênfase à memorização de dobras tradicionais.

3) Dobras da beleza: este estágio tinha como objetivo incentivar a criatividade da criança e relacioná-la à arte.

Oliveira (2004) afirma, ainda, que a importância das dobraduras na Espanha cresceu exponencialmente. Na inauguração da torre Eiffel¹² em 1889, Miguel de Unamuno¹³ teve seu primeiro contato com esta arte. Ocasão que o fez incentivar a criação de uma escola de Origami no país europeu.

Rego, Rego e Gaudêncio (2003) evidenciam que no Ocidente a arte das dobraduras teve maior destaque entre os anos de 1950 e 1960 por meio dos norte-americanos. Em 1958 surgiu o “*The Origami Center New York*”, cuja fundadora

¹¹ Disponível em: < <http://froebel-museum.de/pages/de/friedrich-froebel.php>>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

¹² Estrutura metálica localizada em Paris, capital da França.

¹³ Ensaísta, romancista, dramaturgo, poeta e filósofo espanhol.

foi Lillian Oppenheimer¹⁴. Entretanto, é impossível relatar a história do Origami neste período e não mencionar a trajetória de Sadako Sasaki (1949-1954).



Figura 21 - Foto de Sadako Sasaki¹⁵

Oliveira (2004) relata que Sadako foi uma sobrevivente da primeira bomba atômica do mundo jogada sobre Hiroshima no dia 6 de agosto de 1945. Dez anos depois deste fato, quando completou doze anos de idade, Sadako precisou lutar contra a leucemia. Havia uma lenda que dizia: “Se fizer mil grous¹⁶ de papel, seu desejo se tornará realidade” e estas palavras deram esperanças para a jovem que, por um ato de fé, decidiu construir os grous com o desejo de alcançar a cura desta devastadora enfermidade. No entanto, a jovem não teve força para dobrar os mil pássaros e faleceu em 25 de outubro de 1955.

Os amigos de classe de Sadako Sasaki formaram um clube de arrecadação de dinheiro, e em 5 de maio de 1958 foi obtido o capital necessário para a construção de um monumento em homenagem à menina e para as outras crianças, que sofreram com esta doença na época. Este monumento chamado de

¹⁴ Origamista americana.

¹⁵ Disponível em: < <http://www.japaoemfoco.com/historia-e-significado-do-monumento-da-paz-das-criancas/>>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

¹⁶ No Japão, acredita-se que o grou seja uma ave sagrada que representa longevidade, paz, felicidade e fidelidade.

“Monumento das Crianças à Paz” foi construído no lugar em que a bomba atômica foi lançada.



Figura 22 - “Monumento das Crianças à Paz” em Hiroshima¹⁷

Na década de 50, outros acontecimentos marcaram a história do Origami. Dentre eles, o destaque a Akira Yoshizawa: o grande patriarca do Origami Moderno. Akira deixou seu legado, em 1956, criando regras para a representação gráfica das dobraduras no sistema Yoshizawa-Randlett: padrão internacional que permite desenhar diagramas capazes de descrever os passos necessários para construir um Origami. Segundo Rego, Rego e Gaudêncio:

O crescimento do Origami no Ocidente teve início na década de 1950. Em sua viagem pelo mundo o Origami recebeu diversos nomes. No Brasil é mais conhecido como “dobradura”; nos países de língua inglesa recebe também o nome de “*paperfolding*”; em espanhol esta arte é conhecida como “*papiroflexia*”; em alemão como “*faltenpapier*” e, em francês, “*pliage*”. (Rego et al., 2003, p. 25)

Nos anos 80, duas correntes de Origami Moderno foram formadas: Oriental e Ocidental.

- Oriental: tinha como característica o uso de poucas dobras, cujo objetivo era enfatizar a essência, expressão e desapego à perfeição. Esta corrente foi adotada por artistas e filósofos.

¹⁷ Disponível em: <<http://thumbs.dreamstime.com/t/monumento-da-paz-das-crian%C3%A7as-25720226.jpg>>. Acesso em 29 de novembro de 2014.

- Ocidental: era praticada por engenheiros, físicos, matemáticos e arquitetos. Diferente da primeira, o uso das dobras tinha como objetivo destacar a perfeição, proporção e cálculos exatos. Esta corrente possibilitou o início da utilização de técnicas geométricas e recursos computacionais aliados aos conceitos do Origami.

Esta distinção não é salientada nos dias atuais, visto que as dobraduras são estudadas por cientistas e artistas no Oriente e no Ocidente.

De acordo com Aschenbach, Fazenda e Elias (1990), o uso das técnicas das dobraduras teve início no Brasil por meio de colonizadores portugueses e preceptores europeus, quando os mesmos chegaram ao país para orientar crianças da alta sociedade. Entretanto, a professora origamista Mari Kanegae relata, em seu site¹⁸, que a chegada do Origami ao Brasil se deu a partir de 1908 por meio da imigração japonesa e por intermédio da Argentina, que possui influências culturais espanholas. Inclusive, a de dobrar papel.

Ainda, no Brasil, a professora Yachiyo Koda foi a responsável pelo incentivo ao uso do Origami no Ensino Fundamental na década de 60. Koda é considerada a pioneira no ensino das dobraduras em São Paulo, além de ter oferecido diversas oficinas para educadores por meio da Aliança Cultural Brasil e Japão¹⁹.



Figura 23 - Registro de uma aula ministrada pela professora Koda²⁰

¹⁸ Disponível em: <<http://www.kamiarte.com.br/>>. Acesso em 30 de novembro de 2014.

¹⁹ É uma associação sem fins lucrativos, cujo objetivo é desenvolver o intercâmbio cultural entre o Brasil e o Japão.

²⁰ Disponível em: <http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm>. Acesso em 30 de novembro de 2014.

Atualmente, existem pesquisas que relatam a interação entre o Origami e várias áreas tais como: Arte, Pedagogia, Ciências Biológicas, História, Matemática, Saúde e Arquitetura. É válido destacar os seguintes artigos: “O DNA em Origami”²¹, “Educação Matemática dos Surdos: uma experiência com o Origami”²² e “Gestão de pacientes dermatológicos graves: impacto da terapia do Origami”²³. Além disso, esta arte conquistou um importante espaço entre os pesquisadores da NASA²⁴, quando se tornou uma solução viável para a construção de painéis solares.



Figura 24 - Painel solar construído por pesquisadores da NASA²⁵

²¹ Disponível em:

<http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Artigos/DNA/Estutura%20do%20DNA...%20origami.pdf>. Acesso em 10 de dezembro de 2014.

²² Disponível em:

<http://portalines.ines.gov.br/ines_portal_novo/wpcontent/uploads/2014/04/arqueiro_11.pdf#page=49>, página 49. Acesso em 13 de dezembro de 2014.

²³ Disponível em:

<<https://repositorio.uninove.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/489/597-1093-1-RV%20-%20gestao%20de%20pacientes.pdf?sequence=1>>. Acesso em 13 de dezembro de 2014.

²⁴ National Aeronautics and Space Administration (Administração Nacional de Aeronáutica e Espaço): agência do Governo dos Estados Unidos, responsável pela pesquisa e desenvolvimento de tecnologias e programas de exploração espacial.

²⁵ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=3E12uju1vgQ#t=60>>. Acesso em 20 de dezembro de 2014.

3.2. A Matemática e o Origami

Apesar de nos anos 80 ter surgido uma corrente do Origami Moderno, que enfatizava a Matemática por meio das dobraduras, historiadores creditam o envolvimento mais antigo entre o Origami e os cálculos aos árabes. Rego, Rego e Gaudêncio (2003) relatam que a religião dos mouros²⁶ não permitia a representação simbólica de animais e homens por meio das dobraduras. Desta forma, o Origami era utilizado entre eles somente para a construção de figuras geométricas e estudo dos elementos presentes nas mesmas.

A prova de que o Origami já era relacionado aos conceitos matemáticos antes mesmo dos anos 80, é que em 1721 foi lançado um livro japonês chamado “*Wakoku Chiyekurabe*” (Competições matemáticas) de Kan Chu Sen. Este livro tinha como principal característica a relação de dobras e cortes envolvendo problemas que forçavam o leitor a desenvolver seu raciocínio lógico.

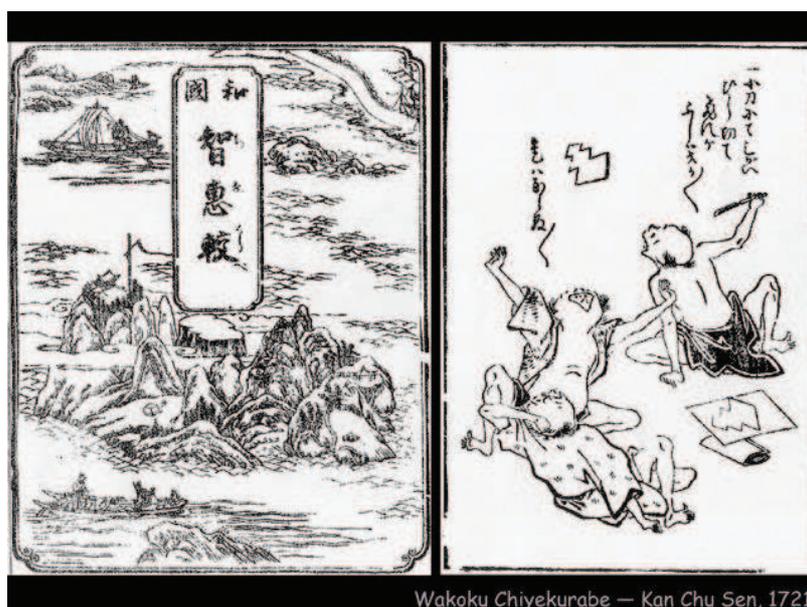


Figura 25: imagens do livro *Wakoku Chiyekurabe*²⁷

Os livros sobre Origami não se restringiram em apenas abordar raciocínio lógico. Em 1893 foi publicado, na Índia, o livro de T. Sundara: “*Row Geometric*

²⁶ Povos provenientes do Norte da África, praticantes do Islão.

²⁷ Disponível em: <http://courses.csail.mit.edu/6.849/fall10/lectures/L07_images.pdf>. Acesso em 29 de novembro de 2014.

Exercises in paper folding” (Exercícios de Geometria em dobradura de papel). Neste livro foram mostradas as dobraduras que originavam polígonos regulares.

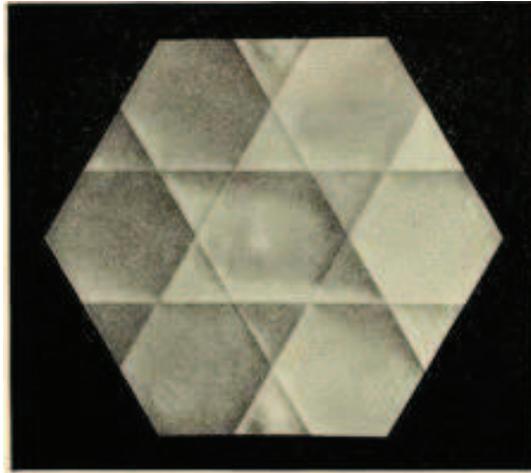


Figura 26: gravura retirada do livro de T. Sundara²⁸

Segundo Rego, Rego e Gaudêncio (2003), o uso do Origami na Matemática é eficiente em atividades cujos objetivos são:

- Construir conceitos matemáticos;
- Discriminar forma, posição e tamanho;
- Exercitar a leitura e interpretação de diagramas através da linguagem simbólica que o Origami oferece;
- Construir figuras planas e espaciais com abundância em possibilidades de construção;
- Apresentar termos geométricos por meio da descrição oral dos passos para uma dobradura;
- Desenvolver a percepção e discriminação de relações planas e espaciais;
- Desenvolver o senso de localização espacial por meio dos elementos de linguagem usados nas construções;
- Desenvolver o raciocínio do tipo passo a passo, através do processo de sequenciamento de etapas presente nas dobraduras;
- Permitir a exploração de padrões geométricos.

Do simples ao complexo, as dobraduras cobrem diversos conteúdos e têm alcançado seu merecido espaço nas pesquisas referentes à Educação Matemática.

²⁸ Disponível em: < <https://archive.org/details/tsundararowsgeo00rowrich> >. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

Afinal, diante da riqueza histórica e metodológica, as descobertas sobre a utilização das dobraduras não têm cessado ao longo dos anos, apesar de ainda não serem usadas com muita frequência nas aulas do Ensino Básico no Brasil.

Atualmente, existem obras que abordam os sólidos geométricos, poliedros, ângulos, polígonos, frações, proporcionalidade, etc. Por meio do Origami é possível, ainda, resolver alguns problemas²⁹ que desafiaram gerações de matemáticos como: a duplicação do cubo, trisseção do ângulo e a construção do heptágono regular.

A maioria das pesquisas e materiais que relacionam a Matemática e o Origami tem como foco os assuntos geométricos. Esta relação é de grande relevância, pois diante do abandono do campo geométrico nos programas escolares, o uso de materiais concretos pode contribuir, de forma significativa, para que haja a compreensão dos mesmos. Rego, Rego e Gaudêncio afirmam:

(...) a manipulação de modelos concretos e de objetos que fazem parte do dia a dia do aluno auxiliará o processo de construção dos modelos mentais dos diversos elementos geométricos, através da identificação e generalização das propriedades e do reconhecimento de padrões, em uma estrutura formal. (Rego et al., 2003, p. 18).

Existem diversos recursos facilitadores para o ensino da Geometria. Entretanto, nenhum recurso é mais simples e de fácil acesso do que o papel. Ainda, em virtude da riqueza que as dobraduras podem proporcionar, os mesmos autores evidenciam:

O Origami pode representar para o processo de ensino/aprendizagem de Matemática um importante recurso metodológico, através do qual os alunos ampliarão os seus conhecimentos geométricos formais, adquiridos inicialmente de maneira informal por meio da observação do mundo, de objetos e formas que o cerca. Com uma atividade que integra, dentre outros campos do conhecimento, Geometria e Artes. (Rego et al., 2003, p.18)

²⁹ Disponível em:

<https://www.academia.edu/541055/CONSTRU%C3%87%C3%95ES_GEOM%C3%89TRICAS_POR_DOBRADURAS_ORIGAMI>. Acesso em 13 de dezembro de 2014.

3.3. Tipos e símbolos do Origami

O Origami tradicional não permite o uso de tesoura e cola. As dobras são feitas em papéis na forma de um quadrado, podendo gerar diversos tipos de dobraduras de duas ou três dimensões. Entretanto, por ser uma arte praticada durante muito tempo, diversas técnicas novas foram desenvolvidas. Diferente do Origami tradicional, algumas técnicas permitem o uso da cola e da tesoura. Estas serão mostradas a seguir:

- Origami simples: é feito por meio de diversas dobragens feitas em um único papel, não utilizando recortes e cola.



Figura 27 - Barquinho de Origami Simples³⁰

- Origami composto: é feito através da união de diferentes origamis simples. Neste caso, é permitido o uso de cola.



Figura 28 - Buquê de Origami Composto³¹

³⁰ Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=4VxpFnsFt50>>. Acesso em 24 de novembro de 2014.

- Origami modular: é feito pela composição de peças geometricamente iguais.



Figura 29 - Personagens construídos com Origami Modular³²

- *Kirigami*: De “*Kiri*” (cortar) e “*gami*” (papel), esta é uma arte influenciada pelo Origami tradicional, recebendo recortes além das dobras.



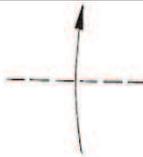
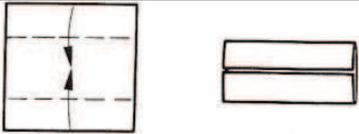
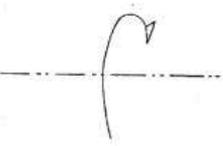
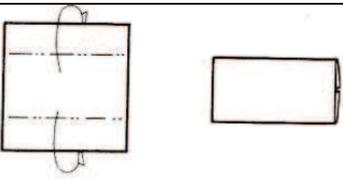
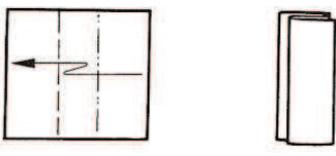
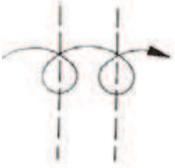
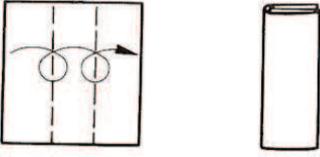
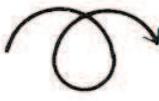
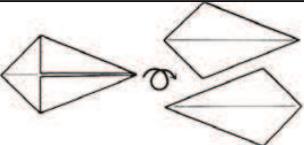
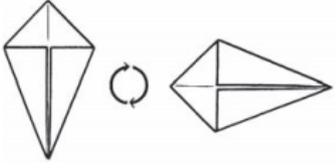
Figura 30 - Exemplo de Kirigami³³

³¹ Disponível em: <<http://mulher.uol.com.br/casamento/album/2014/04/16/de-origami-perolas-ou-ate-conchas-veja-50-buques-sem-flores-naturais.htm>>. Acesso em 24 de novembro de 2014.

³² Disponível em: <<http://esmeraldaaribas.deviantart.com/art/3D-Origami-Minions-386714811>>. Acesso em 10 de dezembro de 2014.

³³ Disponível em: <<http://www.19nueve.com/wp-content/uploads/2013/05/Kirigami-Fortress.jpg>>. Acesso em 10 de dezembro de 2014.

Nas bibliografias, que têm como objetivo ensinar diferentes dobraduras, existe uma simbologia universal. Abaixo, seguem alguns dos modelos destes símbolos:

Símbolo	Significado	Exemplos
	Dobrar e vincar	
	Voltar ao passo anterior	
	Dobrar em vale	
	Dobrar em montanha	
	Dobrar em escada	
	Dobrar e voltar a dobrar	
	Virar o modelo ao contrário	
	Mudar de direção	

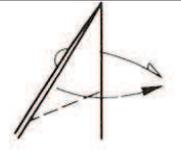
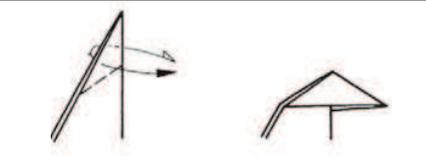
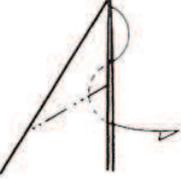
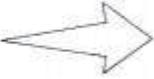
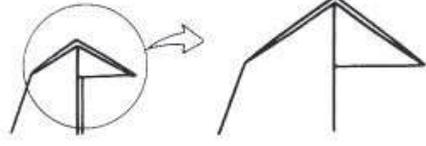
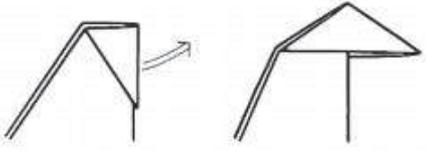
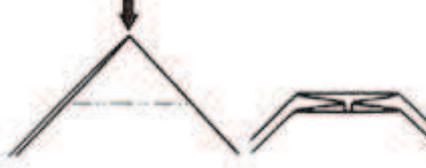
	Dobrar para fora	
	Dobrar para dentro	
	Desenho aumentado	
	Puxar	
	Empurrar	

Tabela 1: modelos de símbolos universais utilizados no Origami ³⁴

Com as instruções listadas acima, diferentes Origamis tradicionais podem ser reproduzidos.

³⁴ Disponível em:

<http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1309/1/19575_ulfc091371_tm_Origami_Historia_de_um_a_Geometria_Axiomatica.pdf>. Acesso em 20 de novembro de 2014.

4 Descrição axiomática do Origami

Os primeiros estudos sobre as combinações de dobras no Origami começaram na década de 1970. Segundo Lang (2004), em 1989 Humiaki Huzita – matemático ítalo-japonês – apresentou diversos documentos na “*First International Meeting of Origami Science and Technology*”³⁵ (Primeira Reunião Internacional de Origami, Ciência e Tecnologia). Dentre eles, havia um estudo sobre as seis operações básicas capazes de alinhar retas e pontos pré-existentes em uma folha de papel por meio de uma única dobra. Este foi o primeiro registro de construções interligando as dobraduras à Geometria.



Figura 31 - Retrato de Humiaki Huzita³⁶

Lang (2004) afirma ainda que, em 1989, o matemático francês Jacques Justin publicou um artigo, no qual foram descritas sete combinações possíveis de alinhamentos. Todavia, segundo Rafael (2011), o sétimo axioma foi formalizado apenas em 2001, pelo matemático japonês Koshiro Hatori.

³⁵ Conferência científica internacional organizada por Humiaki Huzita e realizada na Itália.

³⁶ Disponível em:

<http://www.thaigoodview.com/library/contest2552/type2/dev01/01/origami/math_en.html>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

As descobertas foram feitas por pesquisadores e em períodos diferentes. Entretanto, esta lista de axiomas é mundialmente conhecida como “Axiomas de Huzita-Hatori”.

Este estudo tomou proporções grandes o suficiente para que o Origami começasse a assumir seu merecido espaço no meio científico. Um exemplo que ilustra este fato é que Hatori (2003) cita problemas matemáticos, que podem ser resolvidos, com eficiência, por meio destas operações, tais como equações de segundo, terceiro e quarto grau com coeficientes racionais; trisseção de um ângulo e a duplicação do cubo.

Os estudiosos, no entanto, levantaram a seguinte questão: “será que não existe mais nenhum axioma além destes que constam na lista?”. Graças ao físico americano Robert Lang (2004), esta dúvida foi sanada. Em seu artigo: “*Origami and Geometric Constructions*”³⁷ (Origami e construções geométricas), Lang demonstrou que a lista dos sete axiomas é completa.

4.1. Os axiomas de Huzita-Hatori

A seguir, serão mostrados os axiomas de Huzita-Hatori juntamente com os diagramas³⁸ que ilustram as dobragens.

Axioma 1: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra que os contém.

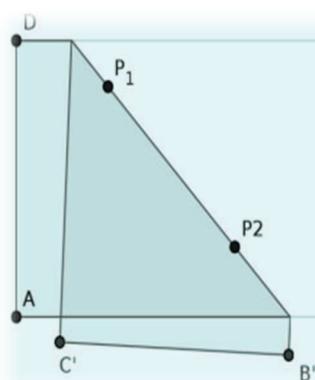


Figura 32 - Axioma de Huzita

³⁷ Demonstração disponível em: <http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf>. Acesso em 24 de dezembro de 2014

³⁸ Diagramas disponíveis em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila11_yolanda.pdf>. Acesso em 21 de dezembro de 2014.

Axioma 2: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 , existe apenas uma dobra capaz de torná-los coincidentes.

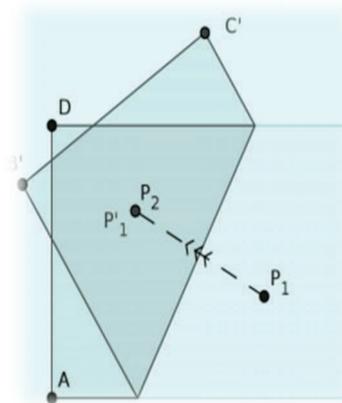


Figura 33 - Axioma de Huzita

Axioma 3: Dadas duas retas distintas, r_1 e r_2 , existem no máximo duas dobras capazes de colocar uma reta sobre a outra. Se r_1 e r_2 são paralelas ou o ponto de interseção encontra-se fora do papel, então, a dobra é única.

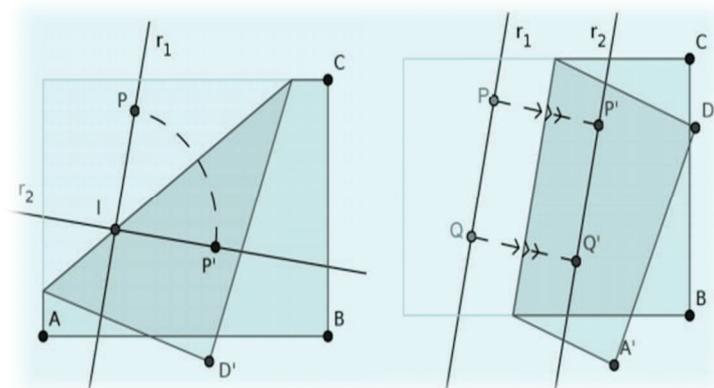


Figura 34 - Axioma de Huzita

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r , existe apenas uma dobra perpendicular a r que passa por P .

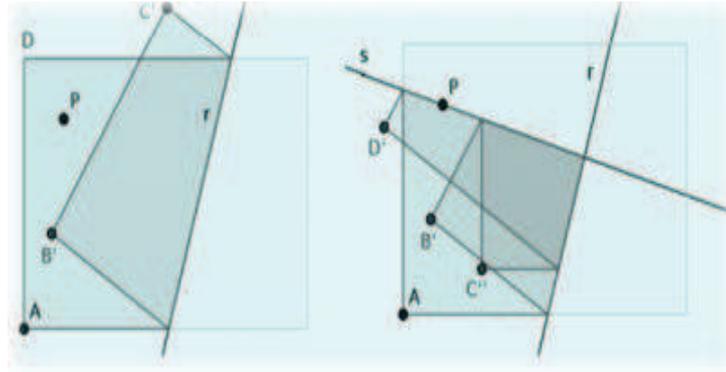


Figura 35 - Axioma de Huzita

Axioma 5: Dados dois pontos P_1 e P_2 , e uma reta r , se a distância entre P_1 e P_2 for maior ou igual à distância de P_2 à r , existe pelo menos uma dobra capaz de fazer com que P_1 incida em r de forma que a mesma passe pelo ponto P_2 . Se a distância de P_1 a P_2 for igual a distância de P_2 a r , então, a dobra é única, caso contrário, existem duas dobras possíveis.

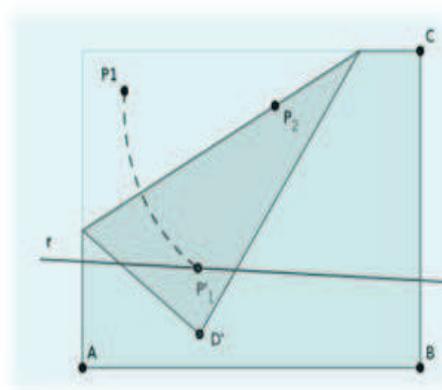


Figura 36 - Axioma de Huzita

Axioma 6: Dados dois pontos distintos, P_1 e P_2 e duas retas não paralelas r_1 e r_2 (se paralelas, a distância entre as mesmas não deve ser superior à distância entre os pontos) existe uma dobra que faz, simultaneamente, com que P_1 incida em r_1 e P_2 em r_2 .

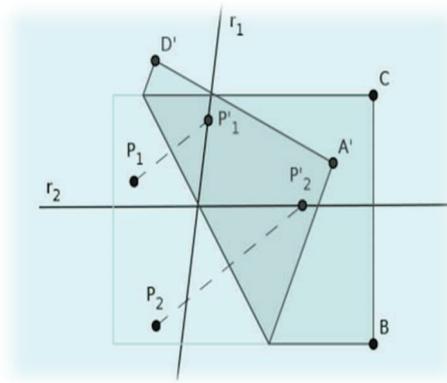


Figura 37 - Axioma de Huzita

Axioma 7: Dadas duas retas r_1 e r_2 não paralelas e um ponto P não pertencente a r_1 , existe uma dobragem que faz P incidir em r_1 de forma que o vinco gerado pela dobra seja perpendicular a r_2 .

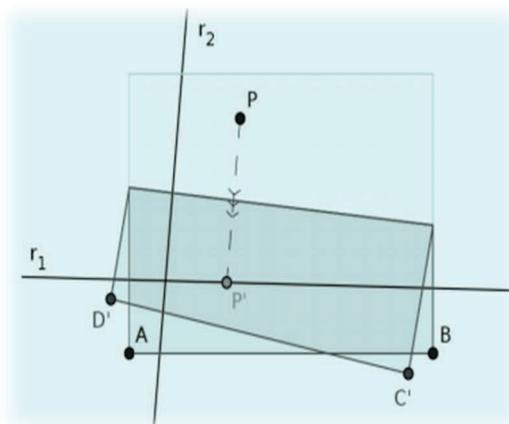


Figura 38 - Axioma de Hatori

4.2. A reta e o ponto

A fim de que a apresentação e explicação dos “Axiomas de Huzita-Hatori” sejam de fato compreendidas, a seguir, serão mostrados alguns conceitos de reta e ponto no plano \mathbb{R}^2 .

4.2.1. A reta

De acordo com um dos axiomas elencados pela Geometria Euclidiana, tem-se que, por dois pontos passa uma única reta. Esta informação permite definir a referida equação, utilizando diferentes artifícios, tais como: vetores e produto interno.

Entretanto, será focado neste texto o estudo da equação reduzida de uma reta no plano que, por sua vez, possui lei de formação dada por $y = mx + n$, em que: x e y são as coordenadas do ponto pertencente à reta, m é o seu coeficiente angular³⁹ (ou declividade) e n é o coeficiente linear da mesma.

Seja r uma reta pertencente ao plano \mathbb{R}^2 , será visto a seguir, uma maneira de encontrar sua equação reduzida.

Dados dois pontos A e B pertencentes à reta r , em que $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $x_1 \neq x_2$, para encontrar a equação que passa por tais pontos, resolve-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Ou seja:

$$n = y_1 - mx_1 = y_2 - mx_2$$

$$m(x_2 - x_1) = y_2 - y_1$$

Logo:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$n = y_1 - x_1 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \text{ ou } n = y_2 - x_2 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

Desta maneira, a equação reduzida da reta r é dada por:

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x + y_1 - x_1 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

$$\text{Equivalentemente, } y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \cdot x + y_2 - x_2 \cdot \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)$$

É válido observar que os dois valores m e n são suficientes para descrever praticamente qualquer reta, uma vez que a mesma é definida pelo conjunto dos pares ordenados (x, y) que satisfazem a equação. As retas paralelas ao eixo das ordenadas são definidas com equações do tipo $x = a$.

³⁹ O coeficiente angular da reta é a tangente do seu ângulo de inclinação.

4.2.2. O ponto

Um ponto é representado em \mathbb{R}^2 por meio do par ordenado (x, y) . Tem-se, ainda, que interseção de duas retas não paralelas e não coincidentes no \mathbb{R}^2 é um ponto.

A distância entre dois pontos no plano pode ser encontrada da seguinte maneira:

Seja $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ pontos do plano \mathbb{R}^2 .

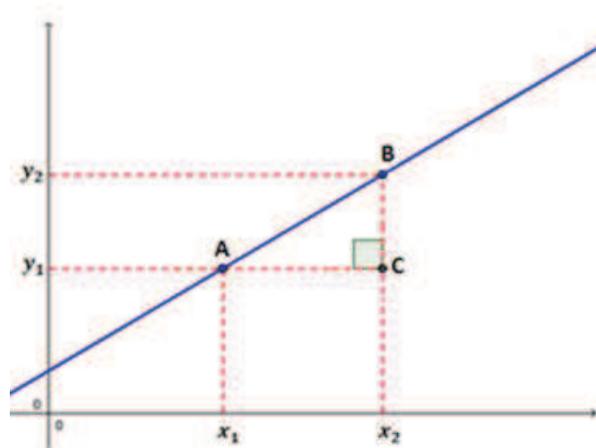


Figura 39 - Distância entre dois pontos

A distância do ponto A ao ponto B é dada pela hipotenusa do triângulo ABC , em que $C = (x_2, y_1)$. Se $|AC| = |x_1 - x_2|$ e $|CB| = |y_1 - y_2|$, utilizando o Teorema de Pitágoras, encontra-se que a distância entre os pontos A e B , representada por $d(A, B)$ é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

4.2.3. Explicação analítica dos axiomas

Segundo Oliveira (2008), na axiomática apresentada, admite-se um referencial ortonormado em um papel de tamanho suficiente para conter as construções necessárias. Além disso, a garantia da existência das dobras está relacionada às soluções geométricas que a seguir serão apresentadas. Prova-se a existência das referidas dobras encontrando as equações das retas que as definem.

Cavacami e Furuya (2009) salientam que:

- As dobras geram vincos que representam retas;
- Se P é um ponto da folha a ser dobrada, então P é levado ao seu simétrico P' em relação ao vinco (reta gerada pela dobra);
- O vinco gerado pela dobra é a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$;
- Tal vinco é também a bissetriz de cada ângulo $P\hat{Q}P'$, em que Q é um ponto qualquer pertencente à reta de dobragem.

Como se pode observar, as mediatrizes, bissetrizes, perpendiculares e paralelas são construções essenciais no Origami. Sendo assim, é necessário que estes conceitos sejam previamente conhecidos.

Axioma 1: Dobragem única através de dois pontos

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, prova-se a existência desta dobragem, encontrando a equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 .

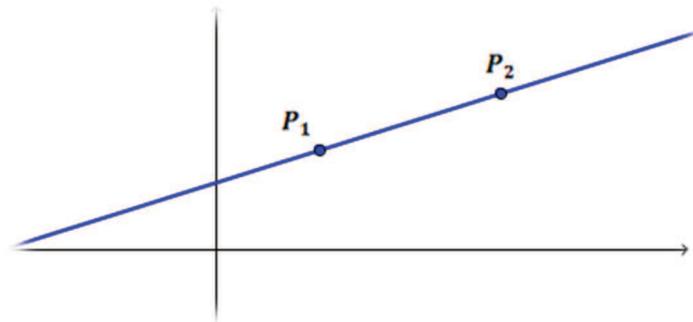


Figura 40 - Reta definida por dois pontos

De fato, seja $r: y = mx + n$, a reta gerada pela dobragem. Tem-se:

$$\begin{cases} y_1 = mx_1 + n \\ y_2 = mx_2 + n \end{cases}$$

Ao resolver o sistema, encontra-se a equação reduzida da reta conforme mostrado na seção anterior, cujos coeficientes são dados por:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e } n = y_1 - mx_1 \text{ ou } n = y_2 - mx_2.$$

Axioma 2: Uma única dobragem que torna dois pontos coincidentes

Sejam os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a dobra que os torna coincidentes é a mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$. Ou seja, o vinco gerado pela dobra passa pelo ponto médio M do segmento $\overline{P_1P_2}$ dado por $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$.

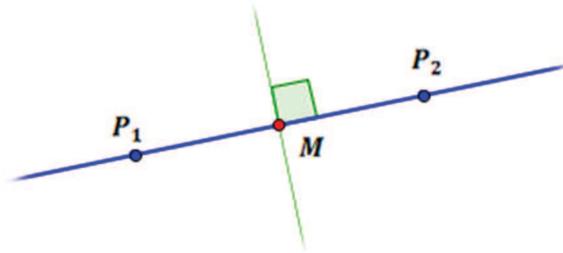


Figura 41 - Mediatriz

Ao serem utilizados os resultados obtidos na explicação do axioma 1, conclui-se que o coeficiente angular da reta definida pelos pontos P_1 e P_2 é dado por: $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Desta maneira, o coeficiente angular⁴⁰ da reta perpendicular à reta definida pelos pontos P_1 e P_2 e que passa pelo ponto M é dado por: $m_2 = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}$.

Efetuada as devidas substituições, conclui-se que o coeficiente linear da reta definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_2}$ é dado por:

$$n_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} - \left(\frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \right) \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2y_2 - 2y_1}.$$

Ou seja, a reta pretendida é expressa por: $y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1}x + \frac{x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2}{2y_2 - 2y_1}$.

Axioma 3: Dobragem capaz de colocar uma reta sobre a outra

Sejam $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_2x + n_2$ duas retas não coincidentes, tem-se que as mesmas podem ser paralelas ou concorrentes. Analisam-se, a seguir, três casos:

(I) Ao considerar r_1 e r_2 paralelas, em que $m_1 = m_2 = 0$ e $n_1 \neq n_2$, encontra-se $r_1: y = n_1$ e $r_2: y = n_2$. Para se encontrar a reta de dobragem se faz a média aritmética entre os valores n_1 e n_2 . Logo, a reta pretendida é dada por: $y = \frac{n_1 + n_2}{2}$, conforme se pode ver na ilustração abaixo.

⁴⁰ Duas retas com coeficientes angulares m_1 e m_2 , respectivamente, são perpendiculares se e somente se $m_1 \cdot m_2 = -1$.

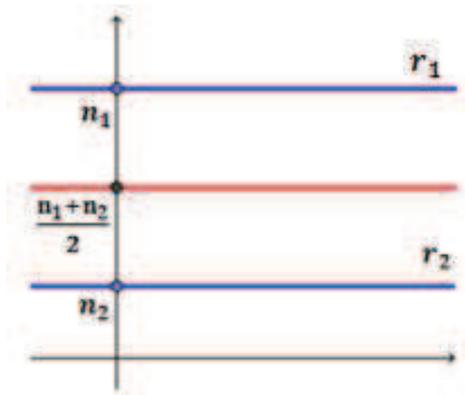


Figura 42 - Reta de dobragem

(II) Ao considerar r_1 e r_2 paralelas em que $m_1 = m_2 \neq 0$ e $n_1 \neq n_2$, obtém-se $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_1x + n_2$, tal que $P = (x_1, m_1x_1 + n_1)$ é um ponto pertencente à reta r_1 e $t: y = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1}$ é a equação da reta perpendicular à r_1 que passa por P . Chama-se de P' o ponto de interseção entre as retas r_2 e t .

Desta maneira, as coordenadas de P' serão dadas por meio da resolução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1} \\ y = m_1x + n_2 \end{cases}$$

$$m_1x + n_2 = -\frac{x}{m_1} + m_1x_1 + n_1 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$m_1x + \frac{x}{m_1} = m_1x_1 + n_1 - n_2 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$x \left(m_1 + \frac{1}{m_1} \right) = m_1x_1 + n_1 - n_2 + \frac{x_1}{m_1}$$

$$x \left(\frac{m_1^2 + 1}{m_1} \right) = \frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1}$$

$$x = \frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}$$

$$y = m_1 \left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1} \right) + n_2$$

$$\text{Segue que: } P' = \left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1}, m_1 \left(\frac{m_1^2x_1 + n_1m_1 - n_2m_1 + x_1}{m_1^2 + 1} \right) + n_2 \right)$$

A reta pretendida possui coeficiente angular igual a m_1 e passa por M : o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$, conforme ilustra a figura a seguir.

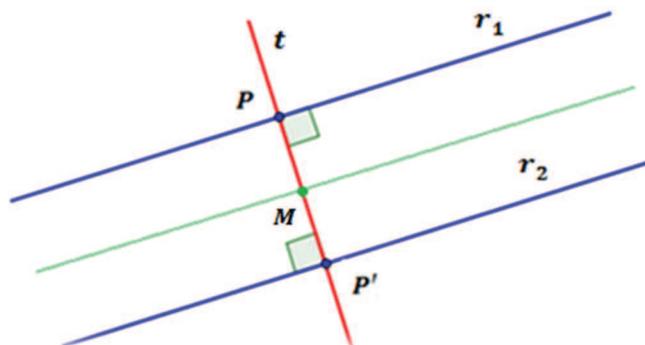


Figura 43 - Reta de dobragem

A reta desejada poderia ter sido encontrada, ainda, por meio do método utilizado no estudo do axioma 2.

(III) Para r_1 e r_2 concorrentes, tem-se que uma reta de dobragem é determinada pela bissetriz de um dos ângulos formados pelas retas r_1 e r_2 , em que $m_1 \neq m_2$ e, conseqüentemente, $m_1 - m_2 \neq 0$.

A fim de se encontrar o ponto I de interseção entre as retas r_1 e r_2 , resolve-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + n_2 \end{cases}$$

$$m_1x + n_1 = m_2x + n_2$$

$$m_1x - m_2x = n_2 - n_1$$

$$x(m_1 - m_2) = n_2 - n_1$$

$$x = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$$

Substituindo na segunda equação:

$$y = \frac{m_2n_2 - m_2n_1 + m_1n_2 - m_2n_2}{m_1 - m_2}$$

$$y = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{m_1 - m_2}$$

$$\text{Logo, } I = \left(\frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{m_1 - m_2} \right)$$

Considerando uma circunferência auxiliar de centro I e raio arbitrário d , sua equação será expressa por: $\left(x - \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}\right)^2 + \left(y - \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1 - m_2}\right)^2 = d^2$

Considera-se, ainda, que as retas r_1 e r_2 intersectam a circunferência em quatro pontos distintos:

- A reta r_1 intersecta nos pontos: $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$.

- A reta r_2 intersecta nos pontos: $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_4 = (x_4, y_4)$.

Neste caso, a reta que determina a bissetriz de um dos ângulos formados passa pelos pontos médios M_1 e M_2 dos segmentos $\overline{P_1 P_3}$ e $\overline{P_2 P_4}$, respectivamente, em que $M_1 = \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right)$ e $M_2 = \left(\frac{x_2 + x_4}{2}, \frac{y_2 + y_4}{2}\right)$, conforme se pode verificar na ilustração a seguir.

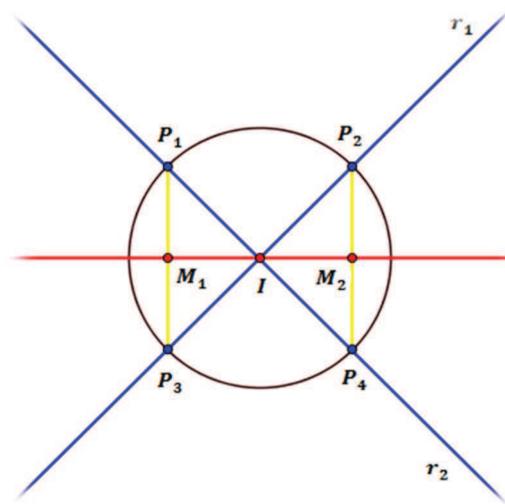


Figura 44 - Reta dada pela bissetriz

Para determinar a equação da reta, basta utilizar o mesmo processo de resolução sugerido na explicação do primeiro axioma. Este problema pode, ainda, ser resolvido por meio da adição de vetores. A dobra que pode ser obtida neste caso encontra-se por meio dos pontos médios dos segmentos $\overline{P_1 P_2}$ e $\overline{P_3 P_4}$, respectivamente.

Axioma 4: Única dobragem perpendicular a uma reta, em que o vinco gerado pela dobra passa por um ponto dado

Seja o ponto $P = (x, y)$ e a reta $r: y = mx + n$, para que seja definida a equação da reta obtida por meio da dobra, é necessário considerar uma circunferência auxiliar de centro P , cujo raio é maior do que a distância entre a

reta r e o centro P da circunferência. Sendo assim, a reta intersecta a circunferência em dois pontos chamados P_1 e P_2 .

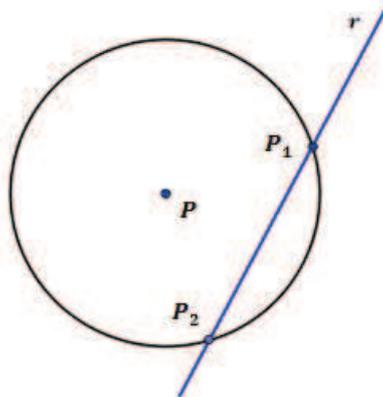


Figura 45 - Reta r

A reta pretendida passa pelo ponto médio do segmento $\overline{P_1P_2}$ e o centro P da circunferência ou, ainda, se poderia utilizar a demonstração do segundo axioma em relação aos pontos P_1 e P_2 .

Axioma 5: Dobra capaz de fazer um ponto incidir em uma reta, de forma que o vinco gerado pela dobra passe por outro ponto

Dados os pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ e a reta $r: y = mx + n$, para que se obtenha a equação pretendida, encontra-se a interseção entre a referida reta e a circunferência auxiliar de centro P_2 e raio $\overline{P_1P_2}$, designado por d . Seja a equação da circunferência dada por $(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d^2$, determinam-se as coordenadas do(s) ponto(s) de interseção entre ambas resolvendo o sistema a seguir:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = d^2 \end{cases}$$

Substituindo:

$$(x - x_2)^2 + (mx + n - y_2)^2 = d^2$$

$$(1 + m^2)x^2 + (2mn - 2x_2 - 2my_2)x + (x_2^2 + n^2 - 2ny_2 + y_2^2 - d^2) = 0$$

Pode-se observar que este problema carece da solução de uma equação do segundo grau. Portanto, pode-se obter zero, uma ou duas soluções para a mesma.

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for menor do que a distância entre o ponto P_2 e a reta r , o discriminante da equação acima será negativo, ou seja, não existirá ponto de interseção entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r .

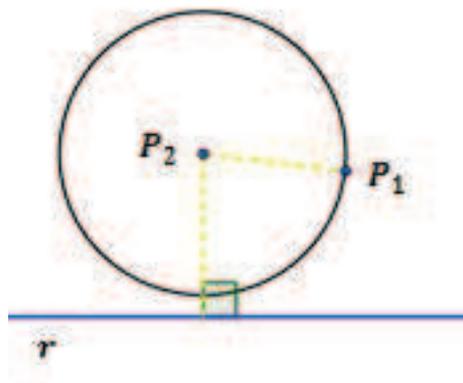


Figura 46 - Nenhum ponto de interseção

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for igual à distância entre o ponto P_2 e a reta r , o discriminante da equação acima será igual a zero, ou seja, haverá apenas um ponto de interseção P'_1 entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r . Neste caso, a equação da reta pretendida é dada pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P'_1}$.

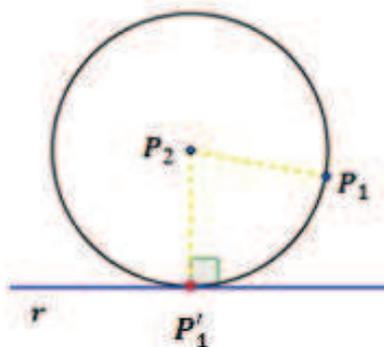


Figura 47 - Um ponto de interseção

Se a distância entre os pontos P_1 e P_2 for maior do que distância entre P_2 e a reta r , o discriminante da equação será positivo, ou seja, existirão dois pontos de interseção entre a circunferência de raio $\overline{P_1P_2}$ e a reta r que será chamada de P'_1 e P''_1 .

Dados M_1 e M_2 , os pontos médios dos segmentos $\overline{P_1P'_1}$ e $\overline{P_1P''_1}$ respectivamente, serão efetuadas duas dobras distintas determinadas pelos segmentos $\overline{P_2M_1}$ e $\overline{P_2M_2}$.

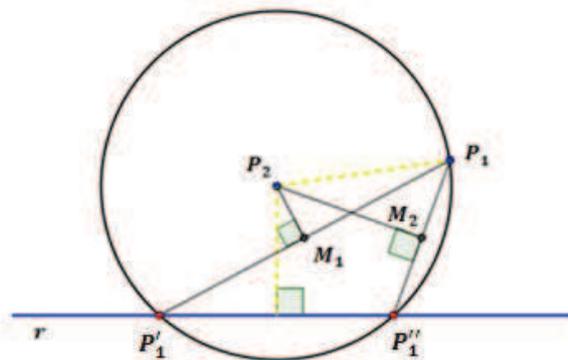


Figura 48 - Dois pontos de interseção

Cabe a observação de que por meio deste axioma é possível determinar a reta tangente à parábola de foco P_1 e diretriz r , em que a referida reta passa por P_2 .

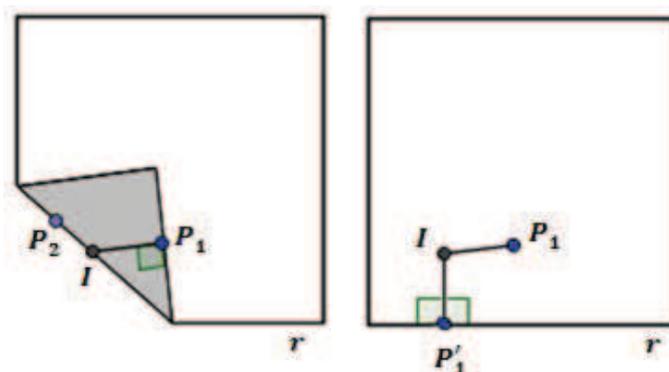


Figura 49 - Aplicação do axioma 5

Conforme a ilustração acima sugere, ao ser efetuada a dobra, se fará com que P_1 incida em um ponto P'_1 da parte da diretriz dobrada (em uma direção diferente da inicial). Encontra-se, ainda, um ponto I de interseção entre um segmento perpendicular à parte diretriz que passa por P'_1 e a reta de gerada pela dobra. Por construção, os segmentos $\overline{IP'_1}$ e $\overline{IP_1}$ têm o mesmo comprimento. Sendo assim, por definição, o ponto I pertence à parábola de foco P_1 e diretriz r , cuja reta de dobragem é tangente à curva pelo ponto I .

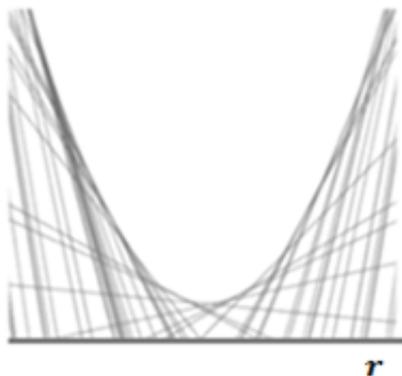


Figura 50 - Formação de uma parábola

Axioma 6: Dobra que faz dois pontos distintos incidirem em duas retas distintas

Com relação aos axiomas apresentados anteriormente, não há garantia de independência entre os mesmos, já que todos geram construções que dependem apenas de régua e compasso. Todavia, o axioma agora referido gera uma construção que não pode ser feita por meio destes instrumentos, o que mostra que o sexto axioma não é consequência dos cinco primeiros.

Conforme visto na explicação do axioma anterior, dados os pontos P_1 e P_2 e as retas r_1 e r_2 , ao ser feita uma dobragem de forma que P_1 incida em r_1 , se estará determinando com o vinco, uma reta tangente à parábola de diretriz r_1 e foco P_1 . O mesmo ocorre para o ponto P_2 e a reta r_2 . “Deste modo, este axioma consiste em encontrar uma reta simultaneamente tangente a duas parábolas distintas.” (Monteiro, p.18, 2008).

Sem perda de generalidade, é tomado $r_1: y = -1$ e $P_1 = (0,1)$. Seja P_1' um ponto pertencente à diretriz r_1 , se tem que $P_1' = (t, -1)$ é o ponto em que P_1 incide na reta r_1 através da dobragem. Por construção, esta dobragem é dada pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$. M_1 , sendo este o ponto médio do segmento $\overline{P_1P_1'}$, portanto $M_1 = \left(\frac{t}{2}, 0\right)$.

A equação da reta que passa pelos pontos P_1 e P_1' é dada por $y = -\frac{2x}{t} + 1$. Portanto, o coeficiente angular a da reta definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1P_1'}$ é dado por $a = \frac{t}{2}$ e o coeficiente linear b da mesma é dado por $b = -\frac{t^2}{4}$.

Assim, $y = \frac{tx}{2} - \frac{t^2}{4}$ é a equação da reta representada pelo vinco gerado por meio da dobra.

A fim de ser definida esta reta, se quer que o ponto médio de $\overline{P_2 P_2'}$ também pertença ao vinco gerado pela dobra anteriormente descrita, em que $P_2 = (x_1, y_1)$ e $P_2' = (x, y)$, ou seja, se quer que o ponto $M_2 = \left(\frac{x_1+x}{2}, \frac{y_1+y}{2}\right)$ pertença à reta de dobragem definida pela mediatriz do segmento $\overline{P_1 P_1'}$.

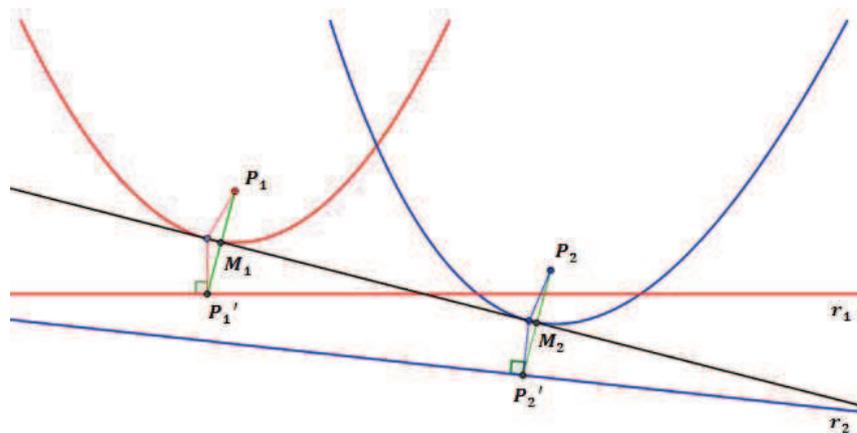


Figura 51 - Tangente comum a duas parábolas

Desta maneira, será feita a seguinte substituição:

$$\frac{y_1 + y}{2} = \frac{t(x_1 + x)}{4} - \frac{t^2}{4}$$

Mostra-se que as retas definidas por P_1 e P_1' e P_2 e P_2' , respectivamente, têm a mesma inclinação, visto que a reta de dobragem é mediatriz dos segmentos $\overline{P_1 P_1'}$ e $\overline{P_2 P_2'}$. Em virtude disso, encontra-se a seguinte equação: $-\frac{2}{t} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$.

Fazendo substituições por meio das duas equações anteriormente mostradas, se tem como resultado a seguinte equação:

$$(y_1 + y)(y_1 - y)^2 = (x_1^2 - x^2)(y_1 - y) - 2(x_1 - x)^2$$

Pode ser encontrado zero, uma, duas ou três dobras que satisfaçam este axioma. Se as retas r_1 e r_2 forem paralelas e a distância entre elas for maior do que distância entre os dois pontos P_1 e P_2 será impossível resolver este problema, pois não existirá tangente comum às parábolas descritas.

Axioma 7: Única dobragem capaz de fazer um ponto incidir em uma reta, por meio de uma dobragem perpendicular a uma outra reta não paralela à inicial

O referido axioma foi acrescentado por Koshiro Hatori apenas em 2001, cuja demonstração é consequência dos axiomas 4 e 2. Apesar deste fato, a sua importância na lista não é invalidada, pois sua construção é feita por meio de um movimento único.

Dados o ponto $P = (x_1, y_1)$, e as retas $r_1: y = m_1x + n_1$ e $r_2: y = m_2x + n_2$, é necessário determinar uma dobragem que faça com que o ponto P seja levado à P' pertencente à reta r_1 e, simultaneamente, seja perpendicular a r_2 . Para isso, a reta r_3 que passa por P e P' deverá ser paralela à reta r_2 e, conseqüentemente, a reta desejada será determinada pela mediatriz do segmento $\overline{PP'}$.

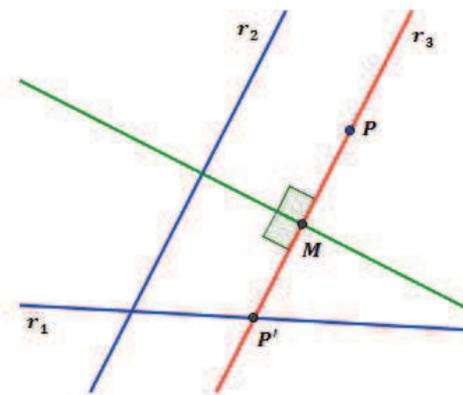


Figura 52 - Construção do sétimo axioma

Seja $r_3: y = m_2x + (y_1 - m_2x_1)$ a reta paralela à r_2 que passa por P , encontram-se as coordenadas do ponto P' por meio de interseção entre as retas r_1 e r_3 resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + n_1 \\ y = m_2x + (y_1 - m_2x_1) \end{cases}$$

Logo:

$$m_1x + n_1 = m_2x + (y_1 - m_2x_1).$$

$$x(m_1 - m_2) = y_1 - m_2x_1 - n_1$$

$$x = \frac{y_1 - m_2x_1 - n_1}{m_1 - m_2}$$

Substituindo x na primeira equação:

$$y = m_1 \left(\frac{y_1 - m_2 x_1 - n_1}{m_1 - m_2} \right) + n_1$$

Conclui-se, assim, que $P' = \left(\frac{y_1 - m_2 x_1 - n_1}{m_1 - m_2}, m_1 \left(\frac{y_1 - m_2 x_1 - n_1}{m_1 - m_2} \right) + n_1 \right)$

Agora, basta realizar a dobragem, pelo axioma 2, que torna os pontos P e P' coincidentes.

5

A construção das Curvas Cônicas através do Origami

Anteriormente foi visto que as curvas cujas equações são do segundo grau podem ser obtidas por meio da interseção entre um cone duplo e um plano. Além disso, foi possível observar as definições e as propriedades importantes neste estudo. Entretanto, no Ensino Médio, a abordagem do referido assunto, na maioria das vezes é, excessivamente, relacionada à memorização das equações e uso de artifícios algébricos.

Este método, por sua vez, desencadeia um rápido esquecimento das definições e propriedades muito importantes, além de se propiciar que o discente desconheça o conceito essencial de lugar geométrico.

Existem diversos recursos pedagógicos, que são capazes de facilitar a aprendizagem não apenas do tema exposto, mas de diversos assuntos matemáticos. Dentre eles, se tem os Softwares, jogos e diferentes materiais concretos. No entanto, existe um recurso que sobressai no quesito acessibilidade e que em nada perde no quesito eficiência: o papel. Em virtude disso, neste capítulo faz-se a união entre o estudo das Curvas Cônicas e o Origami.

Segundo Oliveira (2004), o método das dobraduras utilizado para a construção destas curvas também é chamado de método de Van Schooten. No ano de 1657, o referido matemático holandês publicou o “*Exercitationum mathematicarum libri quinque*” (Os cinco livros de exercícios matemáticos), em que o mais famoso dentre os cinco manuscritos é dedicado à descrição de diferentes instrumentos para traçar cônicas.

A seguir, mostra-se um modelo para o uso do Origami, cujas construções das curvas são dadas por meio da formação de retas tangentes às mesmas representadas por vincos gerados pelas dobras. Este modelo pode ser reproduzido nas aulas de Ensino Médio, a fim de incrementar o desenvolvimento do assunto em questão.

5.1. A elipse

Nesta seção será mostrado o passo a passo da construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos por meio do uso dos axiomas de Huzita-Hatori.

5.1.1. Construção da curva através das dobraduras

Para a construção é preciso uma folha de papel vegetal quadrada com uma circunferência já construída.

Seguem os passos necessários para a obtenção da curva:

- Tome dois pontos distintos da circunferência e faça uma dobra de maneira que os mesmos tornem-se coincidentes (axioma 2).

- Repita o processo descrito no item anterior, a partir de um par de pontos diferentes dos utilizados inicialmente.

- Marque o ponto de interseção entre os vincos gerados pelas dobras descritas anteriormente. Este ponto é o centro da circunferência, ao qual se chama de F_1 .



Figura 53 - O centro F_1 do círculo

- No interior da circunferência, marque o ponto fixo F_2 .

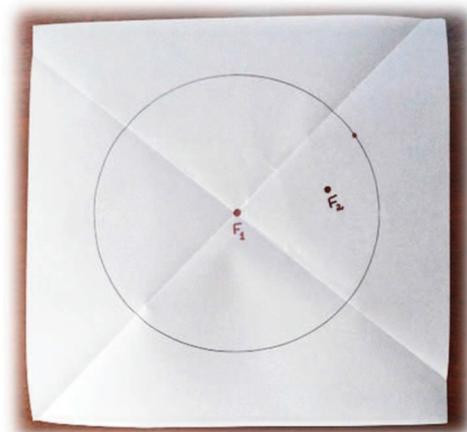


Figura 54 - Escolha do ponto F_2

- Escolha um “ponto de partida” pertencente à circunferência e efetue uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto (axioma 2). Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda a circunferência.

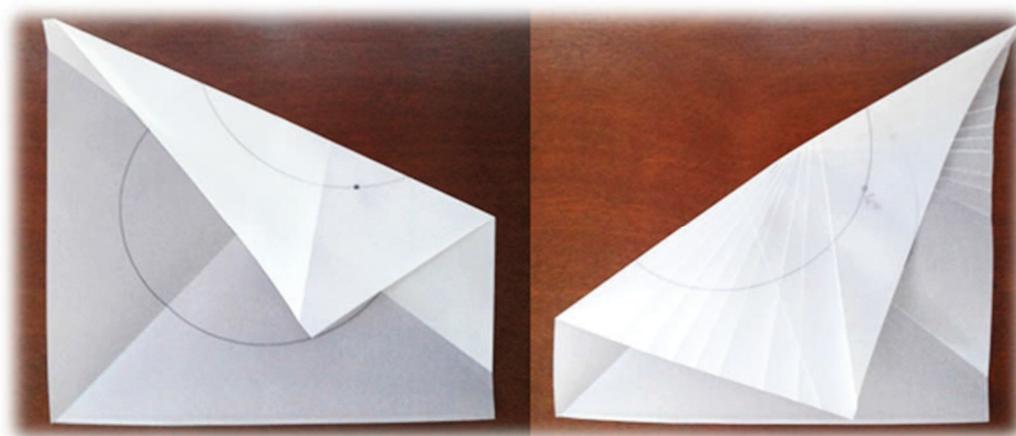


Figura 55 - Construção da curva

Será visto, a seguir, que a curva obtida é uma elipse.

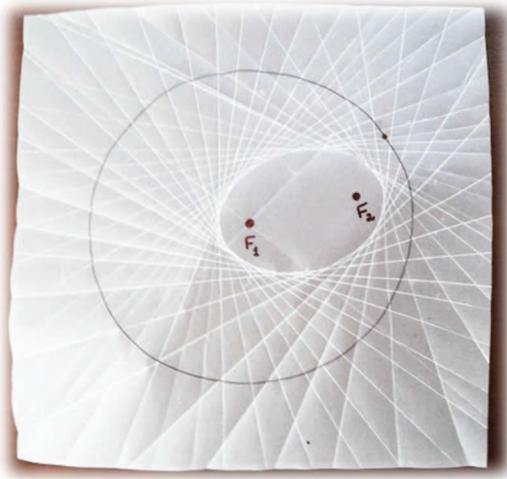


Figura 56 - A curva através das dobraduras

5.1.2. A matemática do método utilizado

Observe que os vincos criados para a obtenção do centro da circunferência são mediatrizes dos segmentos determinados pelos pontos escolhidos.

A escolha do ponto F_2 é feita por meio de uma única restrição: este ponto fixo deve ser localizado no interior da circunferência. Observa-se adiante que esta condicionante está relacionada à definição do lugar geométrico da elipse. Desta maneira, os pontos fixos F_1 e F_2 são os focos da curva.

Quando se escolhe um ponto P pertencente à circunferência de raio r e se faz com que o mesmo coincida com o foco F_2 , o vinco obtido é uma reta que é chamada de t . Além disso, será denominado o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1P}$ e a reta t de ponto G .

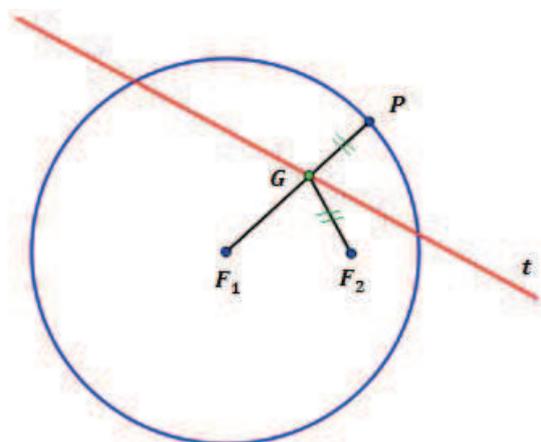


Figura 57 - Construção da reta t

Por construção, $|\overline{PG}| = |\overline{GF_2}|$. Como $|\overline{F_1G}| + |\overline{GP}| = r$, de igual forma $|\overline{F_1G}| + |\overline{GF_2}| = r$. Portanto, o ponto G pertence à elipse.

Pode-se mostrar, ainda, que o ponto G é o único na reta de dobragem no qual a soma das distâncias aos focos F_1 e F_2 é igual ao comprimento do raio da circunferência, ou seja, será mostrado que o vinco gerado pela dobra representa a reta tangente à curva que passa por G .

Seja Q um ponto pertencente à circunferência e I o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1Q}$ e a reta t . Suponha-se que I pertence à elipse. Assim, $|\overline{F_1I}| + |\overline{IF_2}| = r$. Ocorre que $|\overline{F_1I}| + |\overline{IQ}| = r$. Logo, $|\overline{IQ}| = |\overline{IF_2}|$. Como I pertence à reta de dobragem que fez com que P incidisse em F_2 , conclui-se que $|\overline{IP}| = |\overline{IF_2}|$. Daí segue que $|\overline{IP}| = |\overline{IQ}|$.

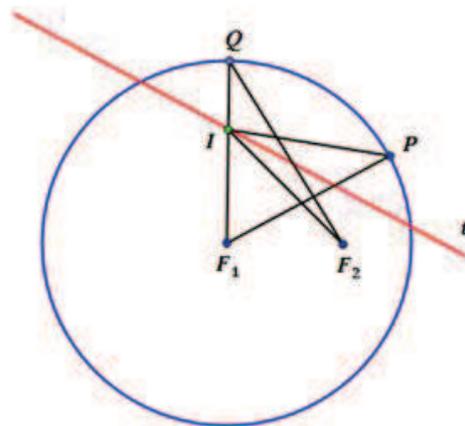


Figura 58 - Unicidade do ponto G

Portanto, se $|\overline{F_1I}| + |\overline{IP}| = r = |\overline{F_1P}|$, conclui-se que I pertence ao segmento $\overline{F_1P}$, ou seja, os pontos I e G são coincidentes. Desta maneira, a reta de dobragem que é chamada de reta t é tangente à curva, pois intersecta a mesma em um único ponto.

5.1.3. Identificação dos elementos através das dobraduras

Identifica-se a seguir a reta focal, os vértices A_1 e A_2 , o eixo focal, a reta não focal, os vértices B_1 e B_2 , o eixo não focal e o centro C da elipse a partir dos Axiomas de Huzita-Hatori. Vejam-se os passos necessários:

- Reta focal: realize a dobra que passa pelos focos F_1 e F_2 (axioma 1) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértices A_1 e A_2 : para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.

- Eixo focal: segmento $\overline{A_1A_2}$.

- Reta não focal: efetue a dobra que faz com que F_1 e F_2 tornem-se coincidentes (axioma 2) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértices B_1 e B_2 : para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta não focal.

- Eixo não focal: segmento $\overline{B_1B_2}$.

- Centro C : para obtê-lo, marque o ponto de interseção entre os vincos gerados (reta focal e não focal).

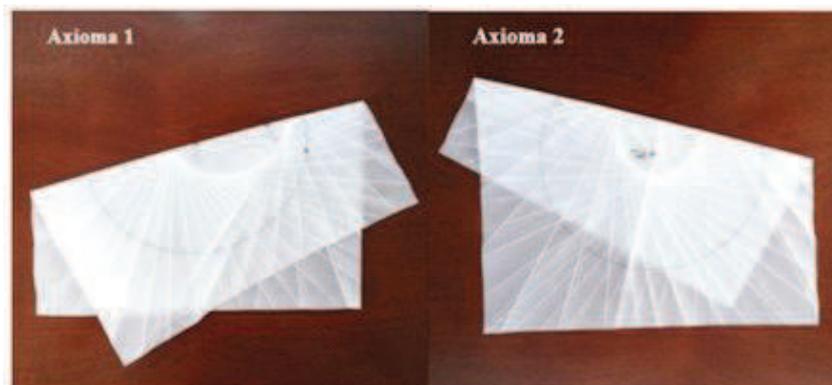


Figura 59 - Aplicação dos axiomas

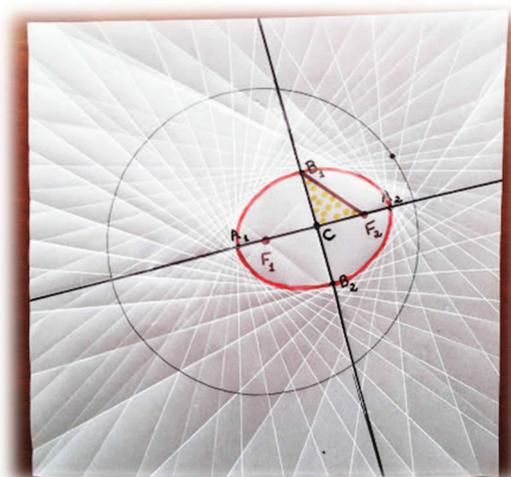


Figura 60 - Os elementos da elipse

Tem-se, ainda, a excentricidade da elipse. Analisa-se a mesma medindo a distância entre o centro C da curva e os focos F_1 e F_2 , além da distância entre o centro C e os vértices A_1 e A_2 . Ao serem divididos os respectivos valores, se encontra um resultado menor do que um (considerando F_1 e F_2 não coincidentes).

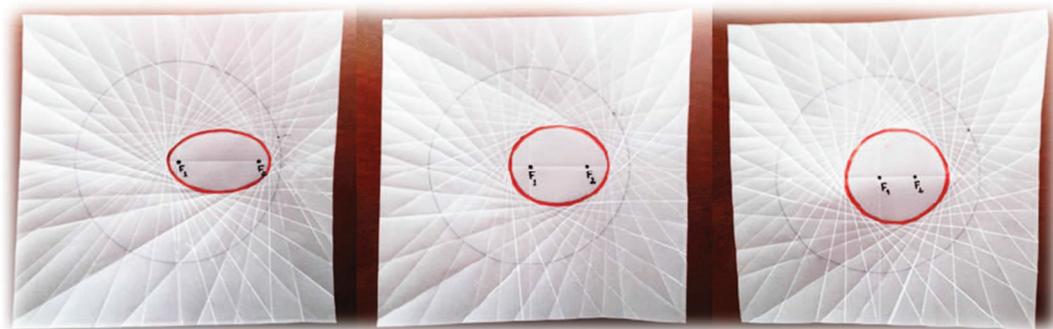


Figura 61 - Excentricidade da elipse

Quanto maior for a distância entre os focos, a curva terá aspecto mais “achatado”. Desta maneira, o estudante poderá notar que quando os focos coincidem, obtém-se uma circunferência, ou seja, a circunferência é um caso especial de elipse.

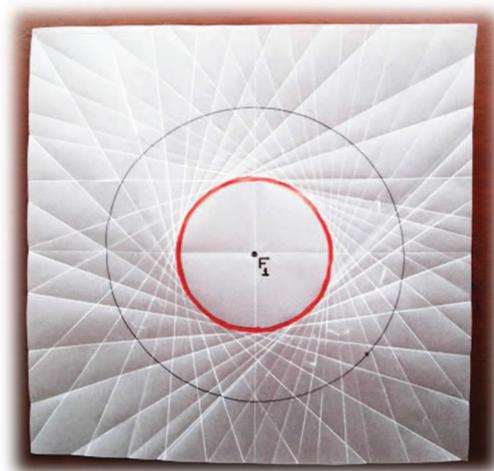


Figura 62 - Construção de uma circunferência

No Ensino Médio, as Curvas Cônicas, em geral, são mostradas quase sempre centradas na origem com focos pertencentes ao eixo das ordenadas. Esta

limitação de abordagem induz o aluno a entender que as curvas existem apenas daquela maneira.

Uma aula conduzida com o auxílio das construções do Origami pode auxiliar a percepção do aluno sobre a existência das transformações de coordenadas, desde que, previamente, seja estabelecido um sistema original de eixos ortogonais XOY .

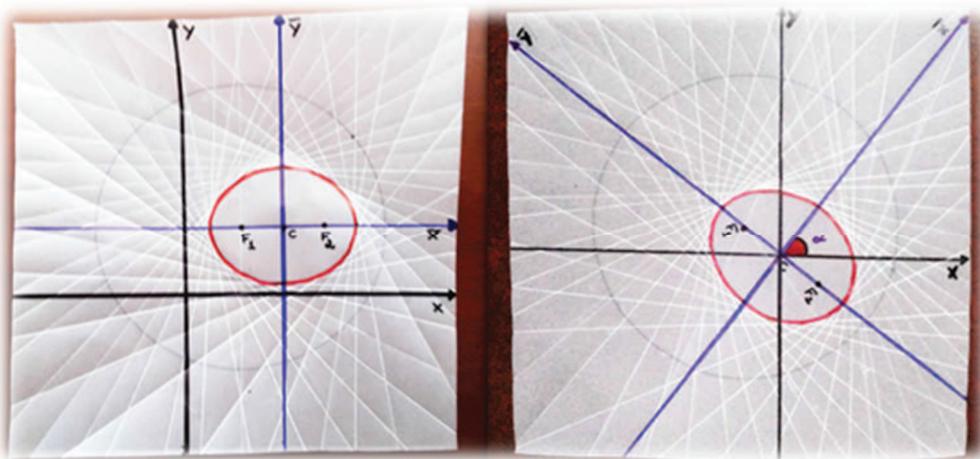


Figura 63 - Translação e rotação de elipses

5.2. A hipérbole

Nesta seção serão mostrados o passo a passo da construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos por meio do uso dos axiomas de Huzita-Hatori.

5.2.1. Construção da curva através das dobraduras

Conforme feito na construção da elipse, para se iniciar a construção da curva pretendida, é preciso uma folha de papel vegetal quadrada com uma circunferência já construída. A seguir são mostrados os passos para tal construção:

- Para se encontrar o centro F_1 da circunferência se seguem os mesmos passos descritos na construção da elipse.



Figura 64 - o centro F_1 do círculo

- No exterior da circunferência, marque o ponto fixo F_2 .

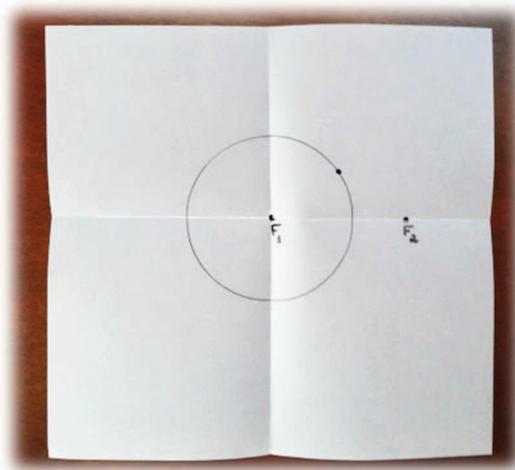


Figura 65 - escolha do ponto F_2

- Escolha um “ponto de partida” pertencente à circunferência e efetue uma dobra de forma que F_2 coincida com o referido ponto (axioma 2). Faça o mesmo processo com o máximo de pontos possíveis, percorrendo por toda a circunferência.

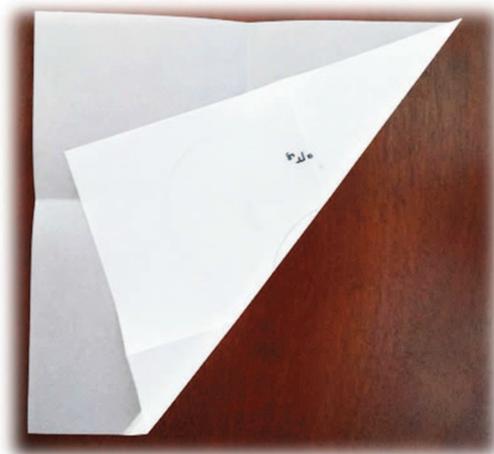


Figura 66 - Construção da curva

Será visto a seguir que a curva obtida é uma hipérbole.

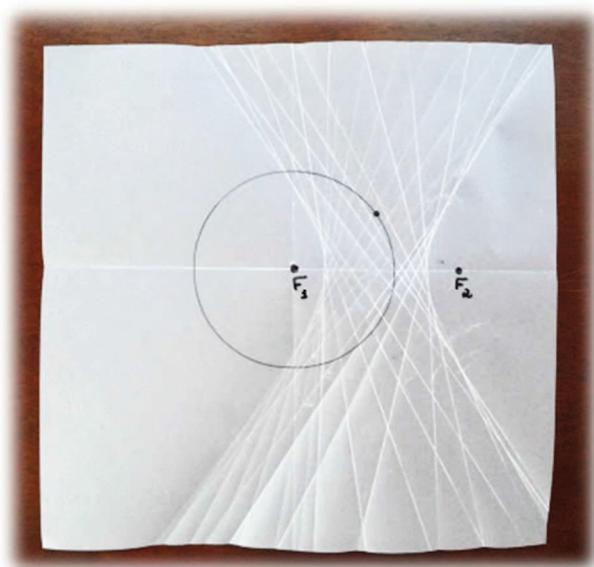


Figura 67 - A curva através das dobraduras

5.2.2. A matemática do método utilizado

Quando se escolhe um ponto P pertencente à circunferência de raio r e se faz com que o mesmo coincida com o foco F_2 , o vinco obtido é uma reta que será chamada de t . Além disso, será denominado o ponto de interseção entre o raio $\overline{F_1P}$ e a reta t de ponto G e pontos fixos F_1 e F_2 que são os focos da curva.

Por construção, $|\overline{PG}| = |\overline{GF_2}|$. Ora, se $|\overline{F_1G}| - |\overline{PG}| = r$, tem-se de igual forma, que $|\overline{F_1G}| - |\overline{GF_2}| = r$ e, portanto, o ponto G pertence à hipérbole.

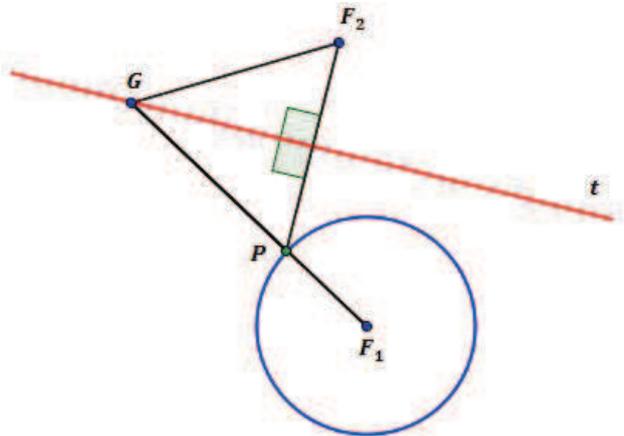


Figura 68 - Formação da reta tangente à hipérbole

A prova da unicidade do ponto G é análoga à mostrada na explicação da elipse.

5.2.3. Identificação dos elementos através da dobradura

Identifica-se a seguir: a reta focal, os vértices A_1 e A_2 , o eixo focal, a reta não focal, os vértices B_1 e B_2 , o eixo não focal e o centro C da hipérbole a partir dos Axiomas de Huzita-Hatori. Vejam-se os passos necessários para identificação de cada elemento:

- Reta focal: realize a dobra que passa pelos focos F_1 e F_2 (axioma 1) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.
- Vértices A_1 e A_2 : para obtê-los, marque os pontos de interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.
- Eixo focal: segmento $\overline{A_1A_2}$.
- Reta não focal: efetue a dobra que faz com que F_1 e F_2 tornem-se coincidentes (axioma 2) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

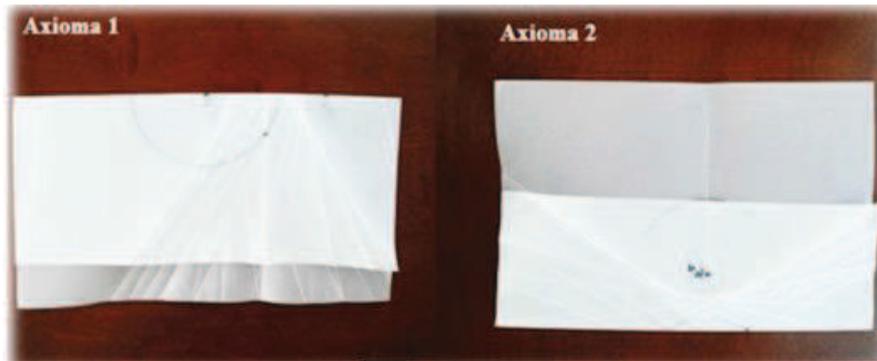


Figura 69 - Aplicação dos axiomas

- Vértices B_1 e B_2 : faça uma dobra de forma que o centro C coincida com o vértice A_1 (axioma 2), marque o ponto em que o foco F_2 incide na reta focal, faça duas possíveis dobras que passam por A_1 e fazem com que, simultaneamente, o ponto marcado encoste-se à reta não focal (axioma 5) e marque os pontos pertencentes à reta não focal, que coincidem com o ponto, anteriormente marcado, obtendo os vértices B_1 e B_2 .

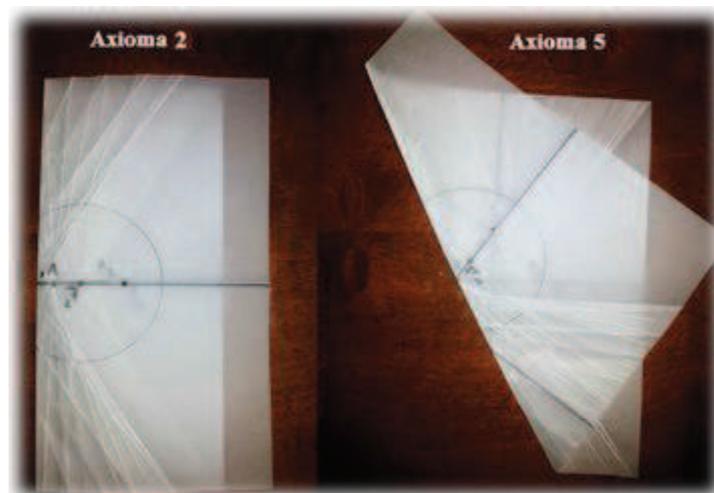


Figura 70 - Aplicação dos axiomas

Observe que as dobras podem ser feitas considerando o vértice A_2 .

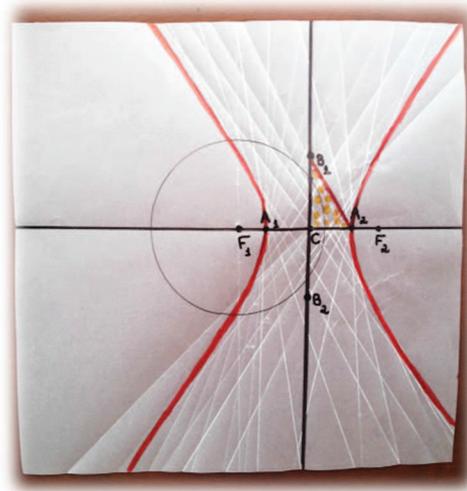


Figura 71 - Os elementos da hipérbole

A fim de se encontrar as assíntotas da hipérbole construída, obtém-se o retângulo da base por meio das seguintes instruções:

- Realize as dobras perpendiculares à reta focal que passam pelos vértices A_1 e A_2 (axioma 4).
- Realize as dobras perpendiculares à reta não focal que passam pelos vértices B_1 e B_2 (axioma 4).

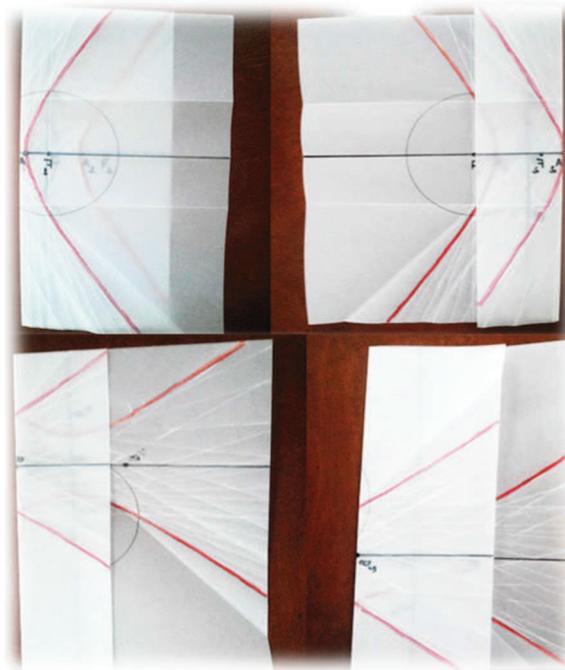


Figura 72 - Aplicação do axioma 4

- Obtenha os vértices do retângulo da base marcando os pontos de interseção entre os vincos criados.

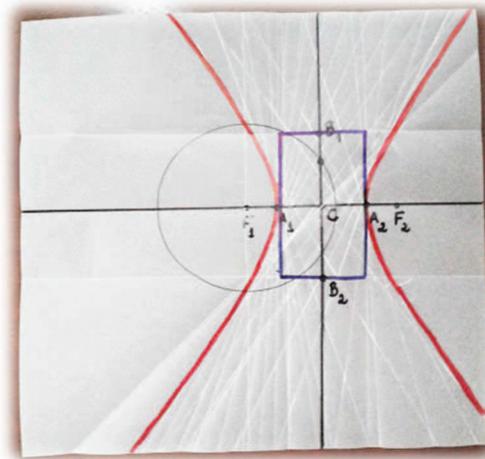


Figura 73 - Retângulo da base

- Obtenha as assíntotas da hipérbole efetuando as dobras que passam pelo centro C da curva e os vértices do retângulo da base (axioma 1). Note que estes vincos definem as diagonais do retângulo.

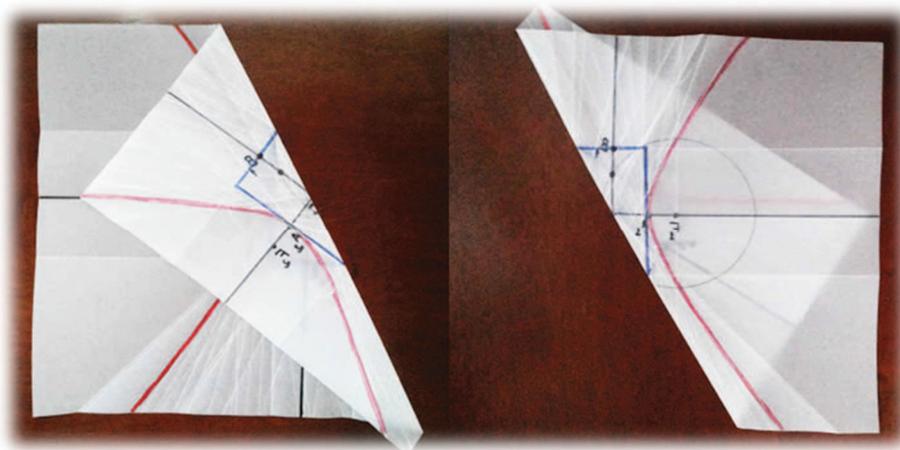


Figura 74 - Aplicação do axioma 1

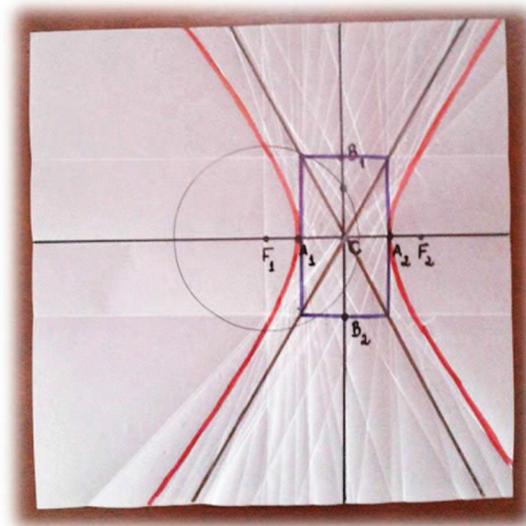


Figura 75 - As assíntotas da hipérbole

Tem-se, ainda, a excentricidade da hipérbole. Analisa-se a mesma medindo a distância entre o centro C da curva e os focos F_1 e F_2 , além da distância entre o centro C e os vértices A_1 e A_2 . Ao serem divididos os respectivos valores, encontra-se um resultado maior do que um (considerando F_1 e F_2 não coincidentes).

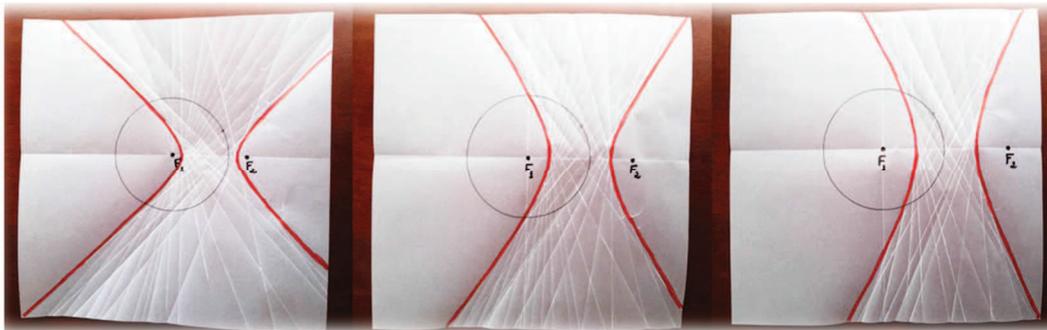


Figura 76 - Excentricidade da hipérbole

Com as construções se pode perceber que quanto mais os focos estão próximos, as curvas ficam mais acentuadas. No caso dos focos mais afastados, as curvas tornam-se menos acentuadas.

As transformações de coordenadas poderão ser abordadas da mesma maneira que foram apresentadas no estudo da elipse.

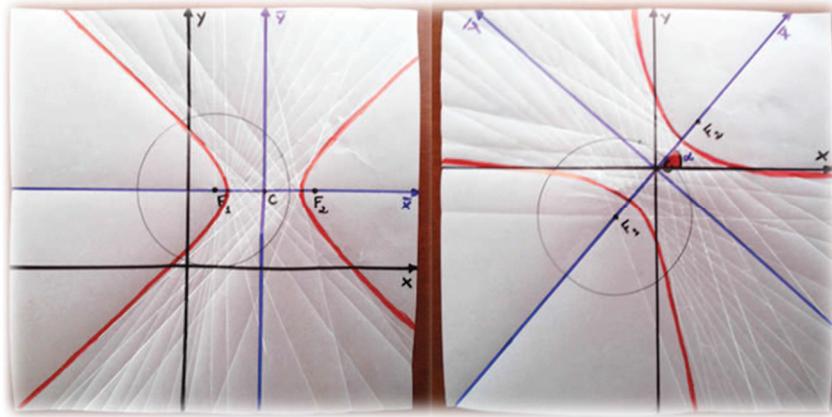


Figura 77 - Translação e rotação da hipérbole

5.3. A parábola

A seguir, apresenta-se a construção da curva, a matemática presente no método utilizado e a identificação dos seus elementos.

5.3.1. Construção da curva através das dobraduras

Precisa-se de uma folha de papel vegetal quadrada com uma reta (que será chamada de d) já construída. A seguir, serão mostrados os passos para tal construção:

- Marque um ponto F qualquer na folha não pertencente à reta d .

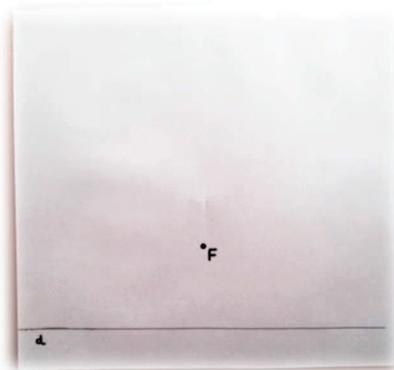


Figura 78 - O ponto F

- Escolha um ponto qualquer pertencente à reta d e faça uma dobra de maneira que tal ponto torne-se coincidente ao ponto F (axioma 2).

- Repita o passo anterior considerando o máximo de pontos “percorrendo” por toda a reta.



Figura 79 - Aplicação do axioma

Ao serem realizadas as dobras, se encontra uma curva formada pelos vincos gerados. Percebe-se a seguir que esta curva é uma parábola.



Figura 80 – A parábola através do Origami

5.3.2. A matemática do método utilizado

Seja F o foco da parábola e d a sua diretriz e, dado um ponto F' pertencente à reta d , ao se fazer uma dobragem de maneira que F e F' coincidam, constata-se que parte da diretriz ficará dobrada em outra direção diferente da inicial.

Considere, ainda, o segmento $\overline{PF'}$ perpendicular à parte “dobrada” da diretriz, em que F' é o pé da perpendicular e P é o ponto de interseção entre o segmento e o vinco gerado pela dobra.

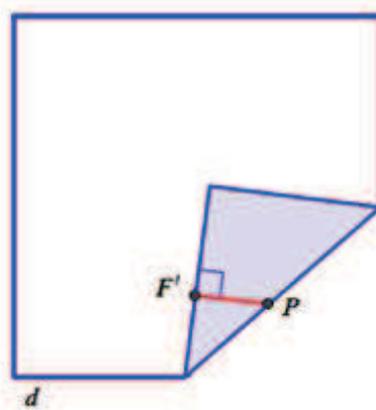


Figura 81 - Segmento $\overline{PF'}$

Por construção, $|\overline{PF}| = |\overline{PF'}|$. Logo, P pertence à parábola.

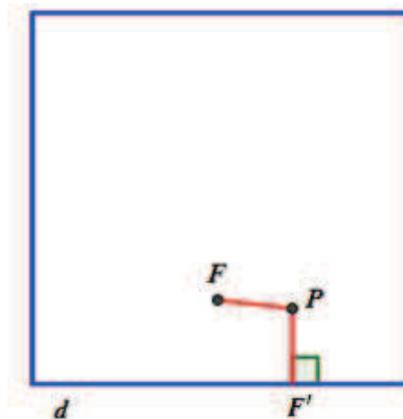


Figura 82 - O ponto pertencente à parábola

A prova da unicidade do ponto P é análoga à mostrada no estudo da elipse. Além disso, pode-se observar que, como o triângulo FPF' é isósceles, o vinco gerado é a bissetriz do ângulo $F\hat{P}F'$. Portanto, esta é a reta tangente à parábola que passa por P (conforme demonstrado no capítulo 2).

5.3.3. Identificação dos elementos através das dobraduras

Identifica-se, a seguir, a reta focal e o vértice V da parábola a partir das seguintes instruções:

- Reta focal: efetue a dobra perpendicular à diretriz d que passa pelo foco F (axioma 4) e observe que a reta pretendida é representada pelo vinco gerado pela dobra.

- Vértice V : obtenha-o marcando a interseção entre a curva e o vinco que representa a reta focal.



Figura 83 - Aplicação do axioma 4

Para identificar o parâmetro⁴¹ da curva, deve-se efetuar uma dobra fazendo com que o foco F e o ponto de interseção entre a reta focal e a diretriz d coincidam (axioma 2) e observe que o vinco gerado pela dobra passa pelo vértice V . Por construção, $d(F, V) = d(V, d)$.

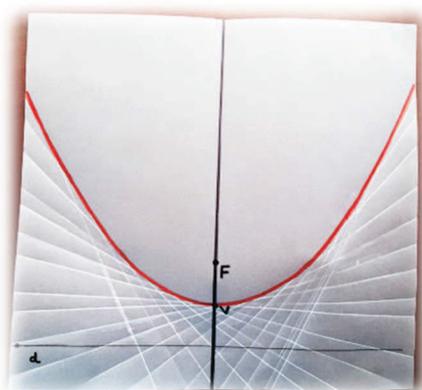


Figura 84 - Os elementos da parábola

⁴¹ A notação usual para o parâmetro da parábola é o número $2p = d(F, d)$.

É comum que o estudante acredite que, como nas curvas anteriores, a excentricidade da parábola seja a responsável por deixá-la mais “aberta” ou “fechada”.

Ao ser comparada a distância entre o foco F e um ponto P qualquer da parábola e a distância entre o mesmo ponto P e a diretriz da parábola, nota-se que estas distâncias são iguais. Ao se dividirem esses valores, encontram-se sempre o número um como resultado. Portanto, a excentricidade de uma parábola é sempre igual a um, o que nos faz perceber que, na verdade, todas as parábolas são semelhantes entre si.

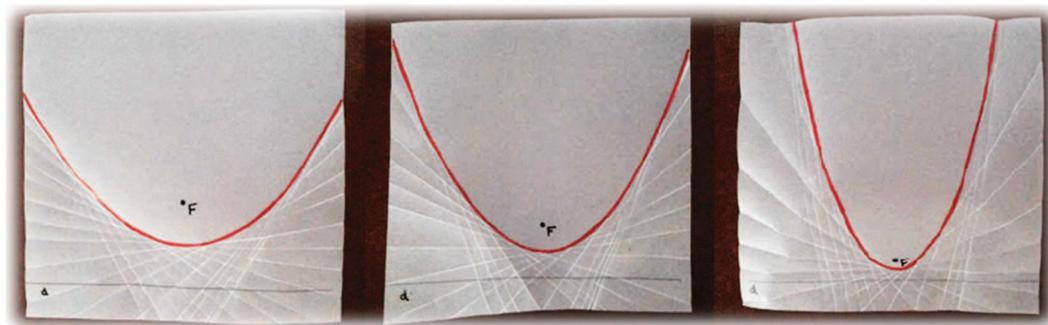


Figura 85 - Parábolas semelhantes

Assim como nas curvas apresentadas anteriormente, a existência da translação e rotação da parábola também pode ser mostrada na atividade com o Origami, conforme se pode observar na imagem a seguir.

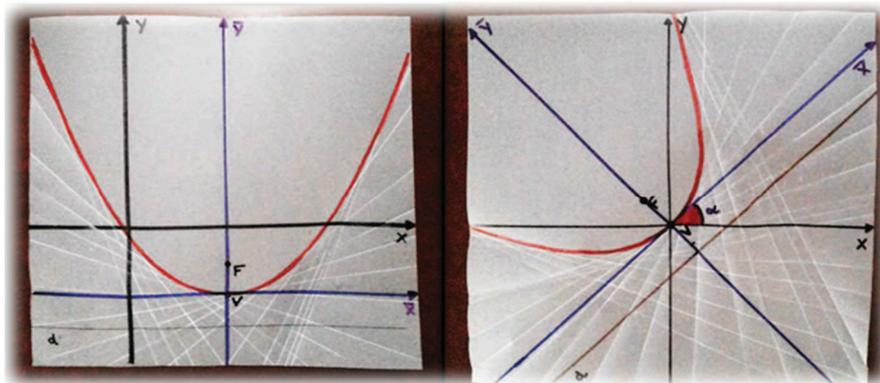


Figura 86 - Translação e rotação da parábola

6

Descrição da Oficina: Construindo as Cônicas através do Origami

A atividade detalhada neste capítulo foi realizada com graduandos do curso de Licenciatura em Matemática da Fundação Educacional Unificada Campograndense, localizada na Zona Oeste do Rio de Janeiro. A atividade consistiu na execução de uma oficina no evento anual de Matemática da instituição chamado Octobermática, organizado pelos professores e alunos do curso. Neste evento são feitas diversas exposições de trabalhos, palestras e oficinas de diferentes assuntos matemáticos com o objetivo de expandir o conhecimento dos discentes.

O curso de Licenciatura em Matemática nesta instituição é dado ao longo de sete períodos. No decorrer do evento, com programações divididas em cinco dias, existe um dia destinado para apresentações de palestras, minicursos e oficinas, nas quais os alunos se inscrevem nas atividades que mais lhes interessam.

Na oficina detalhada neste trabalho, intitulada: “Construindo as cônicas através do Origami”, houve a participação de 17 alunos de diferentes períodos, conforme pode ser visto no gráfico abaixo:

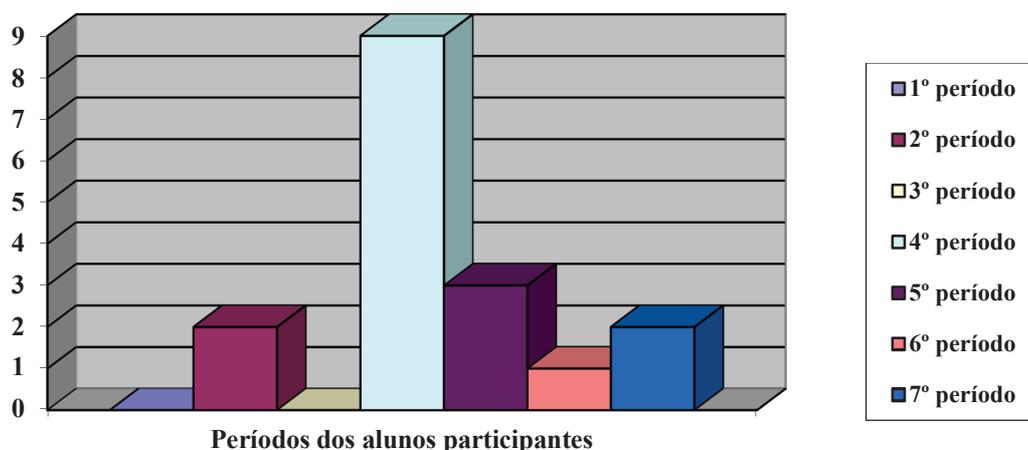


Figura 87 - Gráfico mostrando os períodos dos alunos

Todas as etapas presenciais da oficina puderam ser realizadas em um único dia do evento ocorrido em Outubro de 2014.

Na primeira etapa foi aplicado um questionário, apresentado no Anexo 1, com o objetivo de identificar o conhecimento dos alunos sobre as Curvas Cônicas.

Na segunda etapa foram apresentados os aspectos históricos e conceituais das Curvas Cônicas, além de ter sido feita uma abordagem axiomática do Origami.

Nas terceira, quarta e quinta etapas foram feitas as construções da elipse, hipérbole e parábola, respectivamente.

A sexta etapa consistiu no envio de um questionário online para que os alunos que quisessem participar da pesquisa avaliassem a oficina e os conhecimentos adquiridos por meio da mesma.

O questionário aplicado na primeira etapa, mostrado no Anexo 1, teve o objetivo de analisar os conhecimentos prévios dos discentes sobre as definições das Cônicas e, inclusive, investigar se esses conceitos já haviam sido ensinados no Ensino Médio.

As respostas dos participantes demonstraram que o conhecimento sobre o assunto era escasso, pois a maioria justificou que não havia aprendido o conteúdo no Ensino Médio. Abaixo, podem ser vistas as respostas ao questionário de alguns dos participantes da oficina.

Questionário diagnóstico

- 1) Os conceitos de Curvas Cônicas foram introduzidos no período em que você cursou o Ensino Médio? ~~não~~ Sim, uma pincelada sobre o assunto.
- 2) Você saberia explicar por que a Elipse, Hipérbole e Parábola são chamadas de Curvas Cônicas? não
- 3) Você saberia definir a Elipse, a Hipérbole e a Parábola? Se sim, escreva a definição de cada uma destas curvas.
não.

Figura 88 - Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico

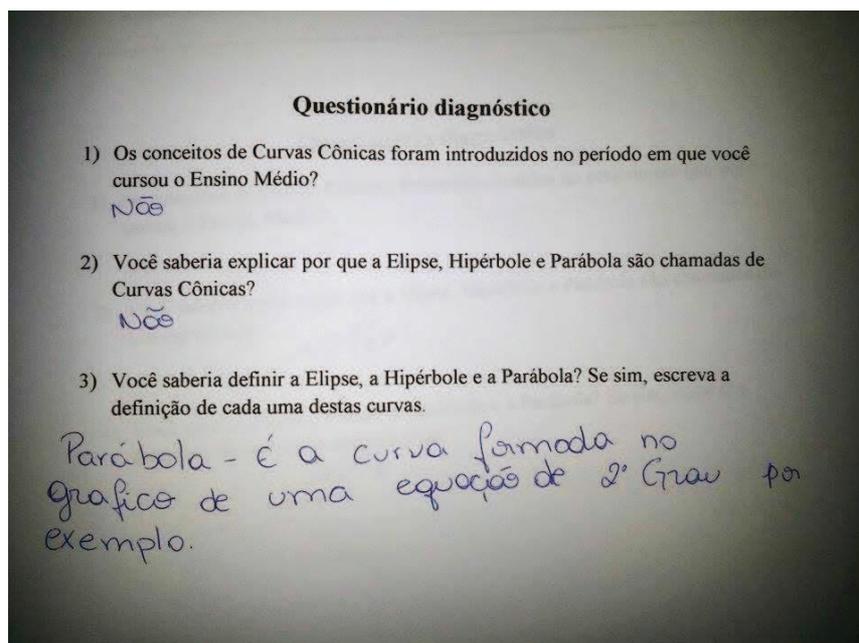


Figura 89 - Respostas dos alunos ao questionário diagnóstico

As dúvidas e ausência de entendimento que os alunos apresentaram evidenciam o abandono do ensino das Curvas Cônicas no Ensino Médio, além de mostrar que, quando existe a abordagem, a mesma é feita de forma superficial o suficiente para não ser completamente compreendida pelos discentes.

Desta forma, as etapas referentes às construções das curvas foram elaboradas com o objetivo de compartilhar com os futuros professores as definições que não foram vistas ou que foram esquecidas, mostrar um método lúdico para o ensino das Cônicas e, ainda, evidenciar a versatilidade do Origami no ensino da Matemática.

Com o intuito de esclarecer como as curvas em questão são geradas e por que são chamadas de “Cônicas”, na segunda etapa, com o uso de slides, apresentados no Anexo 3, foram explicadas as possíveis interseções entre um plano e um cone, mostrando, assim, a elipse, a hipérbole e a parábola.

Ainda, nesta etapa, foram apresentados aspectos históricos do Origami e sua utilidade no ensino da Matemática, justificada pela existência dos sete axiomas de Huzita-Hatori. Para que o entendimento sobre os axiomas fosse suficiente para iniciar as construções foram antes apresentados conceitos de ponto, reta e plano, além da demonstração da fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos. No momento em que foram apresentados os axiomas, todos informaram não saber da existência de tal profundidade matemática no uso do Origami.

A partir destes esclarecimentos conceituais, as construções das Curvas Cônicas puderam ser iniciadas.

Para a realização das etapas de construção das Cônicas foram distribuídas folhas de papel vegetal, pois é necessário que o papel utilizado para as dobraduras desta atividade seja translúcido. Com o objetivo de otimizar o tempo para a construção, as folhas distribuídas já continham desenhos essenciais para o desenvolvimento, tais como circunferência e reta, conforme pode ser visto abaixo:

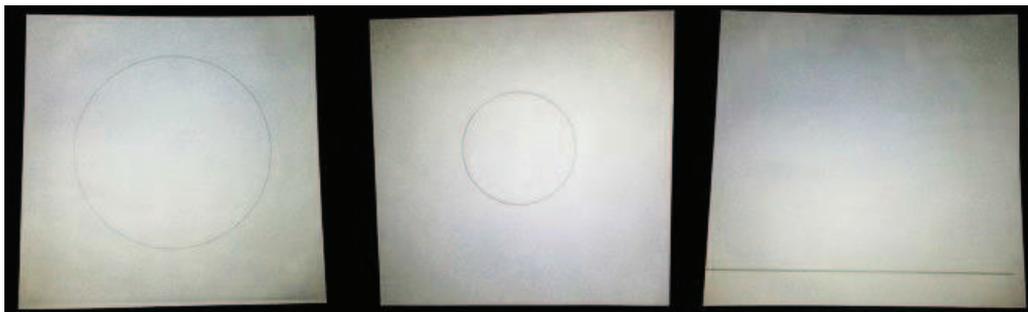


Figura 90 - Folhas para a construção da elipse, hipérbole e parábola

Ao serem distribuídos os materiais necessários foi mostrado um vídeo⁴² com o passo a passo das dobragens e, assim, os alunos puderam iniciar a terceira etapa, ou seja, construir a elipse, em que para explorar conceitualmente a construção foi pedido para que os discentes escolhessem focos de diferentes distâncias e posições. Apenas com esta observação puderam ser explorados aspectos como: translação, rotação e excentricidade da curva.

Após a construção foi feita uma análise dos passos da mesma e, assim, pôde ser identificada a definição da elipse. É importante ressaltar que a identificação foi feita pelos próprios alunos, apenas observando fatos geométricos obtidos através das dobragens.

Construída a elipse, novas dobragens foram feitas com o intuito de identificar os elementos da curva e, assim, ser possível escrever a definição formal da cônica e concluir a equação.

⁴² Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=DCunviXULuU>>.



Figura 91 - Aluno realizando as dobraduras referentes à elipse

O processo realizado na quarta etapa foi similar, inclusive, com a exibição de um vídeo⁴³, diferindo apenas em algumas regras de construção para a curva e para a identificação dos elementos da hipérbole. No entanto, as rotações, translações, excentricidade, definição e equação da hipérbole foram aspectos explorados de igual forma.



Figura 92 - Aluno realizando as dobraduras referentes à hipérbole

⁴³ Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=jQrmqzpRQrA>

Na quinta etapa, que consistiu em construir a parábola e estudar seus respectivos elementos e equações foram distribuídas folhas de papel vegetal com uma reta fixa já desenhada, a saber, a diretriz da parábola. Assim como nas atividades anteriores, foi exibido, inicialmente, um vídeo⁴⁴, mostrando os passos a serem dados para a construção da curva em questão.

Foi proposto que os discentes escolhessem focos de diferentes distâncias em relação à diretriz para que fosse ressaltada a semelhança entre as parábolas. Além disso, com base nos axiomas, foram feitas dobragens para que os elementos da curva pudessem ser estudados e a seguir, as equações pudessem ser provadas.



Figura 93 - A parábola através do Origami

Dessa forma, as etapas presenciais foram encerradas com a exposição de diversas curiosidades e demonstração de interesse por materiais que desenvolvessem outros conteúdos matemáticos por meio das dobraduras, como conceitos geométricos trabalhados no Ensino Fundamental.

A sexta etapa consistiu na colaboração dos participantes da oficina ao responderem um questionário avaliativo⁴⁵ da mesma, conforme mostrado no Anexo 2. A participação nesta etapa foi online, em que 14 alunos deram suas opiniões quanto ao desenvolvimento da oficina e eficiência dos métodos apresentados. Assim como no questionário aplicado no início na oficina, não houve identificação dos participantes para que não houvesse constrangimento, sendo possível a apresentação de opiniões com mais clareza.

Seguem os gráficos representando as respostas dos participantes relativas às seguintes perguntas:

⁴⁴ Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=zAVJbm_I0wM

⁴⁵ Disponível em: <https://docs.google.com/forms/d/1FUsem0r4jPs7MUBKTxjVuxn9Yi17KWGlM6e21Rort0/viewform>.

1) Ao longo da oficina sobre o estudo das Cônicas através do Origami foi apresentado algum conceito que você ainda não conhecia?

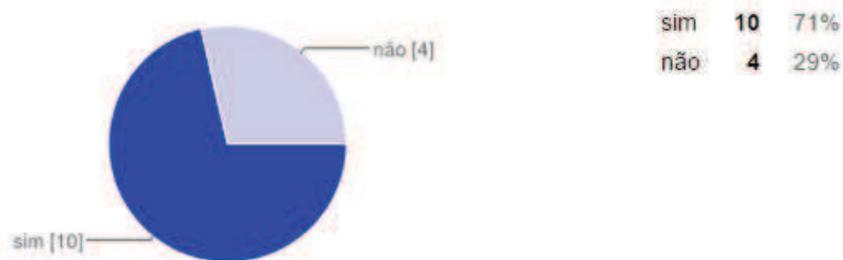


Figura 94 - Gráfico mostrando a opinião dos alunos

2) Você considera o Origami um instrumento útil para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos?



Figura 95 - Gráfico mostrando a opinião dos alunos

3) As construções da Elipse, Hipérbole e Parábola foram claras para que pudessem ser entendidas as definições destas curvas?



Figura 96 - Gráfico mostrando a opinião dos alunos

Como pôde ser visto por meio das perguntas avaliativas, a aplicação da oficina, de modo geral, foi de grande utilidade para os participantes, pois além de mostrar conceitos que, talvez, pudessem ter sido esquecidos, houve a

oportunidade de mostrar que com um material tão simples como o papel, podem ser trabalhados inúmeros conceitos matemáticos. Inclusive um assunto pouquíssimo explorado e entendido no Ensino Médio e, por vezes, até mesmo no Ensino Superior: as Curvas Cônicas. No entanto, o objetivo principal da realização desta oficina com futuros professores foi fazer com que os mesmos se tornassem elementos multiplicadores desta metodologia. Dando assim subsídios para que possam, futuramente, desenvolver melhor este tema com suas turmas da Educação Básica.

7

Considerações finais

Não é por acaso que as Curvas Cônicas fazem parte do currículo da Matemática no Ensino Médio. Presentes na Engenharia, Arquitetura, na Tecnologia e até mesmo na órbita dos planetas, as referidas curvas são ricas em propriedades e definições que moveram ilustres matemáticos ao seu estudo.

Por outro lado, o Origami é uma arte que detém uma Geometria Axiomática de grande consistência, sendo motivo de diversas pesquisas. Por isso, sua utilidade no ensino pode ser de tanta valia.

Portanto, a dissertação em tela fornece ao professor uma alternativa consistente de ensinar tais propriedades e definições destas curvas explorando, simultaneamente, esta importante arte de transformar papel.

A oficina que foi desenvolvida se mostra apenas como um exemplo de como fazer esta união entre o ensino das Cônicas e as dobraduras, uma vez que com a aplicação da mesma é possível perceber que muitos alunos terminam o Ensino Médio sem conhecer as propriedades e definições da elipse, hipérbole e parábola.

Espera-se, na verdade, que este trabalho seja uma fonte de motivação para que o professor do Ensino Básico valorize o ensino de tais curvas e, além disso, encontre no Origami, uma possibilidade de ministrar diversos temas matemáticos de maneira mais atraente e enriquecedora para o aluno.

Referências Bibliográficas

ASCHENBACH, M; FAZENDA, I; ELIAS, M. **A arte-magia das dobraduras**. São Paulo: Scipione, 1995.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília, 2006.

CATTAI, A. P. **Matemática Básica**, Universidade do Estado da Bahia, 2010.

Disponível em: <<http://cattai.mat.br>>. Acesso em 01 de janeiro de 2015

CAVACAMI, E. e FURUYA, Y. K. S.. **Explorando Geometria Euclidiana com Origami**. Departamento de Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo – SP, 2009. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/~yolanda/origami/origami.pdf>>

DELGADO, J., FRENSEL, K. e CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: 1ª ed. SBM, 2013.

EVES, H. **Introdução a História da Matemática**/Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011.

KANEGAE, M. e IMAMURA, P. **Origami: Arte e técnica da dobradura de papel**. São Paulo: Aliança Cultural Brasil-Japão, 2002.

HATORI, K. **Origami versus Straight Edge and Compass**, 2003. Disponível em: <<http://www.jade.dti.ne.jp/~hatori/library/conste.html>>. Acesso em 10 de janeiro de 2015.

LANG, R. J. **Origami and geometric constructions**, disponível em: <<http://www.langorigami.com>, 2004>. Acesso em 20 de dezembro de 2014.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MACHADO, A. dos S. **Álgebra linear e geometria analítica**. 2ª ed. São Paulo: Atual, 1982.

MONTEIRO, L. C. N. **Origami: História de uma Geometria Axiomática**. (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, 2008.

OLIVEIRA, F. F. **Origami: Matemática e Sentimento**, 2004. Disponível em: <<http://nilsonjosemachado.net/20041008.pdf>>. Acesso em 15 de novembro de 2014.

RAFAEL, I. **Origami**, 2011. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_EM114_pp16-22_4e6489d4d25fc.pdf>. Acesso em 10 de janeiro de 2014.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. e GAUDÊNCIO, S. J. **A Geometria do Origami**. João Pessoa: Editora Universitária/ UFPB, 2003.

SATO, J. **Cônicas e suas aplicações**. Uberlândia – MG, 2004. Disponível em: <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/Curso_ConicasAplicacoes.pdf>. Acesso em 17 de janeiro de 2015.

SIQUEIRA, P. H. e COSTA, A. M. **Cônicas**. Universidade Federal do Paraná, 2^a ed., 2012. Disponível em: <www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/conicas.pdf>. Acesso em 17 de janeiro de 2015.

VENTURI, J. J. 1949 – **Cônicas e Quádricas** – 5^a ed. Curitiba. 243 p.

Apêndice I

No quinto capítulo justificamos os passos das construções através dos Axiomas de Huzita-Hatori e fornecemos a demonstração matemática do processo utilizado. Contudo, cabem algumas observações específicas ao professor para a realização da oficina sugerida.

A referida oficina para alunos do Ensino médio é dividida em três atividades: o estudo da elipse, o estudo da hipérbole, o estudo da parábola. A seguir, apresentaremos tais sugestões:

- O professor deverá seguir os passos explicados no capítulo 5, não havendo a necessidade de demonstração dos axiomas utilizados. Entretanto, é interessante que o aluno saiba da existência dos mesmos para que percebam a presença de uma matemática consistente no estudo realizado.

- Com relação ao material, sugerimos que sejam utilizadas folhas de papel vegetal, pois o mesmo é translúcido, o que facilita a realização vários passos necessários. Além disso, é essencial o uso de um lápis e uma régua.

- A organização dos alunos em sala pode ser feita em trios para que os mesmos possam observar juntos alguns aspectos como a excentricidade e transformações de coordenadas. Para isso, é primordial que o professor sinalize a necessidade de diferentes escolhas de localização dos focos no plano.

- Além do estudo das cônicas, esta é uma boa oportunidade para trabalhar conceitos provavelmente esquecidos e elementares nas construções, tais como os de: mediatriz, bissetriz, perpendicularidade e paralelismo. Este é, também, um momento favorável para explorar as noções de coeficiente angular ao construir as assíntotas da hipérbole, verificando a tangente do seu ângulo de inclinação.

- Ao invés de apresentar as definições dos lugares geométricos de cada curva e depois dar início à oficina, pode ser interessante inverter o processo. Ou seja, através das construções, induzir o aluno à compreensão das definições através da explicação matemática dos métodos utilizados nas dobras.

- Levar o aluno a utilizar a régua em todas as construções torna a compreensão mais acessível. Seu uso é importante inclusive nas construções que

se referem à formação das curvas. Um exemplo desta utilização é pedir para que o discente escolha um ponto qualquer da elipse construída e, em seguida, para que some as distâncias do mesmo aos focos da curva e compare com o raio da circunferência inicial.

- Ao efetuar as dobras que definem as retas focal e não focal, é interessante evidenciar que as mesmas também definem os eixos de simetria das curvas (no caso da parábola, este eixo é único).

As construções através das dobraduras são ricas em muitos detalhes. Por isso, o professor deve explorar cada passo com clareza, criatividade e principalmente associando os mesmos às definições das curvas.

Anexo I

Oficina: Estudando as Curvas Cônicas através do Origami.

Período do aluno participante:

Caro aluno:

As Curvas Cônicas apresentadas através do Origami são instrumentos de uma pesquisa que tem por intuito construir um método de ensinar os conceitos de Cônicas de forma lúdica, enfatizando ainda, a versatilidade que o Origami possui na construção de conceitos matemáticos. Portanto, este questionário tem como objetivo apenas analisar conhecimentos prévios sobre o assunto, onde não será necessária a identificação dos participantes da oficina.

Atenciosamente,

Bruna Mayara Batista Rodrigues

Questionário diagnóstico

- 1) Os conceitos de Curvas Cônicas foram introduzidos no período em que você cursou o Ensino Médio?

- 2) Você saberia explicar por que a Elipse, Hipérbole e Parábola são chamadas de Curvas Cônicas?

- 3) Você saberia definir a Elipse, a Hipérbole e a Parábola? Se sim, escreva a definição de cada uma destas curvas.

Obrigada pela colaboração.

Anexo II



Deixe aqui a sua avaliação!

Sua opinião é muito importante. Portanto, responda aqui apenas três questões sobre a oficina envolvendo o estudo das Cônicas através do Origami.

1) Ao longo da oficina sobre o estudo das cônicas através do Origami, foi apresentado algum conceito que você ainda não conhecia?

- sim
- não

2) Você considera o Origami um instrumento útil para facilitar a compreensão de conceitos matemáticos?

- sim
- não

3) As construções da Elipse, Hipérbole e Parábola foram claras para que pudessem ser entendidas as definições destas curvas?

- sim
- não

Enviar

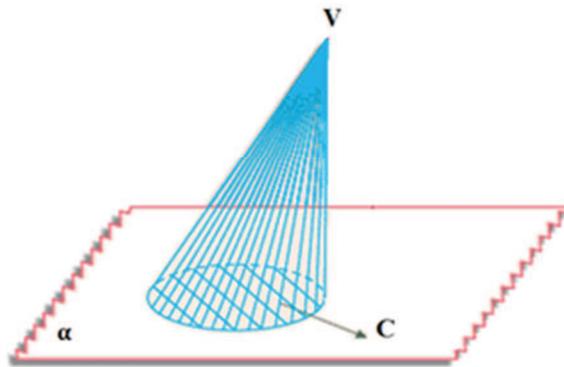
Anexo III

O estudo das Curvas Cônicas através do Origami

Certamente todos aqui já conhecem a Elipse, a Hipérbole e a Parábola. Mas vocês já pararam para pensar como essas curvas são obtidas?

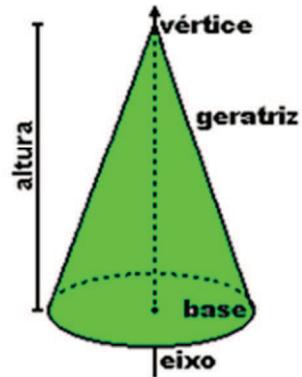
É essencial relembrarmos alguns conceitos de cone para que possamos compreender como as seções cônicas são geradas.

Cone



Fonte: <http://loadinginformations.blogspot.com.br/2012/09/cone-circular.html>

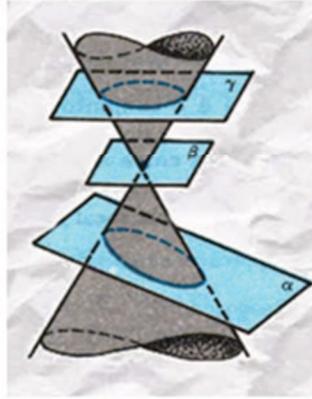
Elementos de um cone



Fonte:
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm>

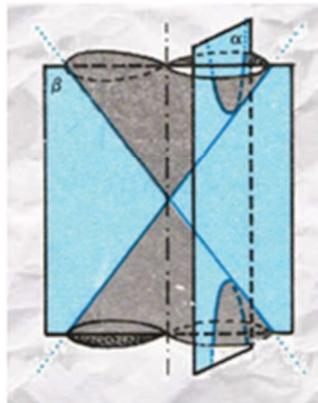
De posse dessas informações,
poderemos ver como as seções
cônicas são geradas.

➤ Quando o plano secante intersectar todas as posições da geratriz e o eixo, a curva gerada será uma elipse.



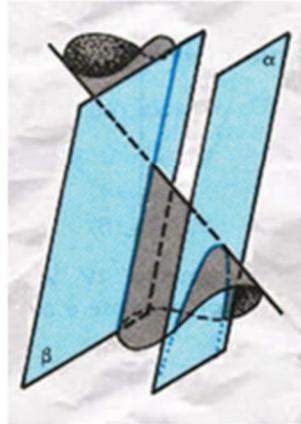
Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/conicas.htm>

➤ Quando o plano secante for paralelo ao eixo, a curva obtida será uma hipérbole.



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm>

➤ Quando o plano secante for paralelo a uma única posição da geratriz, a curva gerada será uma parábola.



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm>

O origami

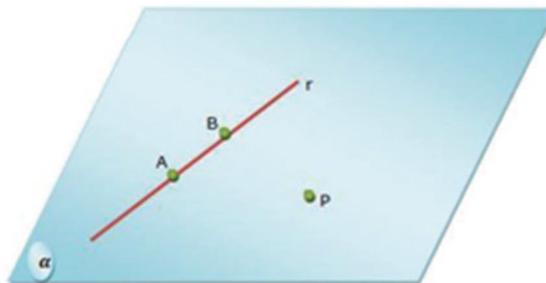
- 
- O que é origami?
 - Em quais aspectos o origami pode auxiliar no ensino da Matemática?



Existem sete axiomas que definem o que se pode construir para que retas e pontos incidam através de uma única dobragem. Estes axiomas são chamados de “axiomas de Huzita-Hatori” e todos eles possuem belas e ricas demonstrações matemáticas.

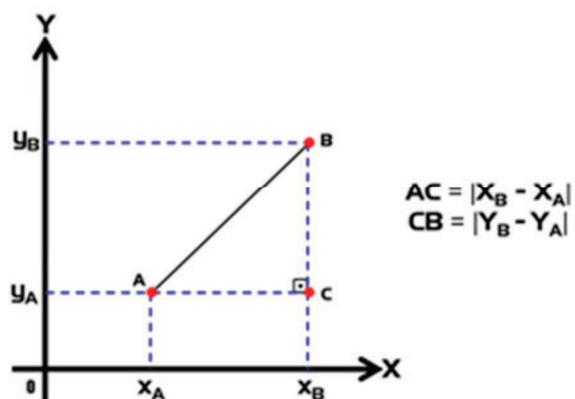
Ponto, reta e plano

São conceitos primitivos e não definidos na Geometria.



Fonte: <http://www.colegioweb.com.br/trabalhos-escolares/matematica/retas-e-planos-no-espaco/determinacao-de-planos.html>

Distância entre dois pontos



Fonte: <http://geometrianodiadia.blogspot.com.br/2012/09/geometria-analitica-distancia-entre.html>

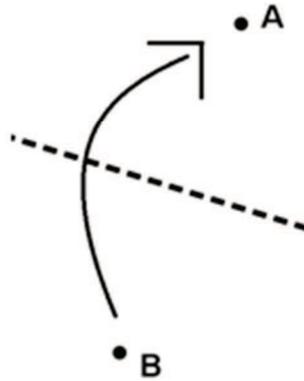
Axiomas de Huzita-Hatori

Axioma 1: Dados dois pontos A e B, existe apenas uma dobragem que passa pelos dois pontos.



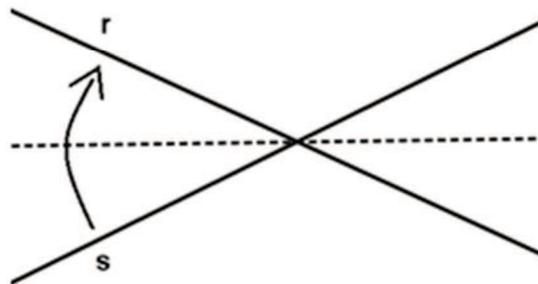
Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am112-16-Ax.pdf>

Axioma 2: Dados dois pontos A e B, existe uma única dobragem capaz de torná-los coincidentes.



Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf>

Axioma 3: Dadas as retas r e s, existe uma dobragem que coloca uma reta sobre a outra.



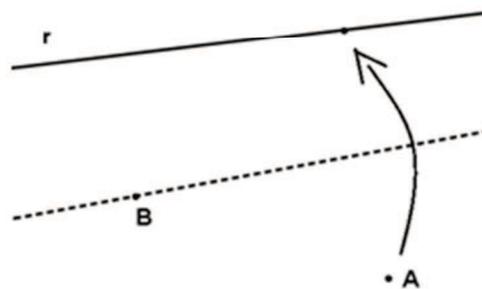
Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf>

Axioma 4: Dados um ponto A e uma reta r, existe uma dobragem perpendicular a r que passa por A.



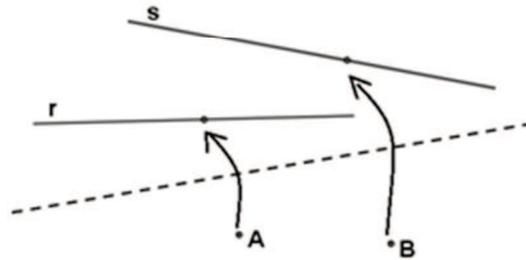
Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/ami112-16-Ax.pdf>

Axioma 5: Dados dois pontos A e B, e uma reta r, se a distância entre A e B for maior ou igual à distância de B à reta r, existe uma dobragem capaz de fazer com que A incida em r de forma que a dobragem passe pelo ponto B.



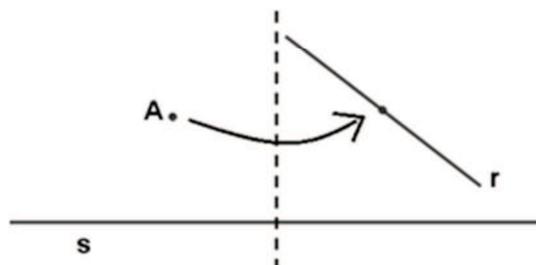
Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/ami112-16-Ax.pdf>

Axioma 6: Dados dois pontos A e B, e duas retas r e s não paralelas, pode ser feita uma dobragem de forma que A incida em r e B em s.



Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf>

Axioma 7: Dado um ponto A, e duas retas, r e s, se as retas não forem paralelas, existe uma dobragem que faz A incidir em r, de maneira que a dobragem seja perpendicular à reta s.



Fonte: <http://www.matematicarecreativa.uac.pt/am1112-16-Ax.pdf>



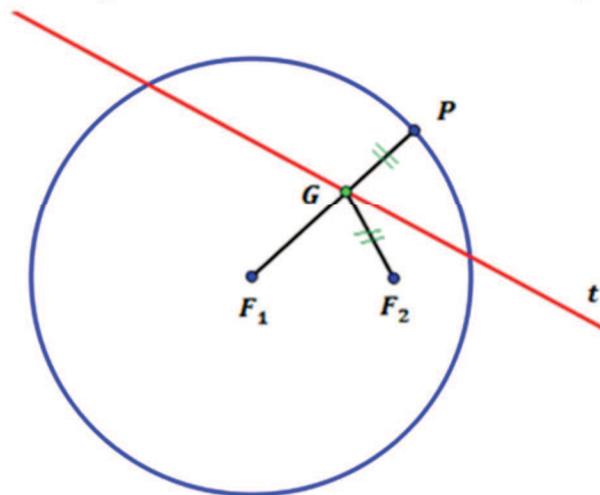
Agora que já conhecemos os axiomas de Huzita-Hatori e percebemos que o origami pode se tornar uma forte ferramenta para o ensino de vários temas matemáticos, começaremos as construções propostas nesta oficina.



A construção da Elipse através do Origami

Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Elipse



Definição do Lugar Geométrico da Elipse através da construção com Origami

Definição da Elipse

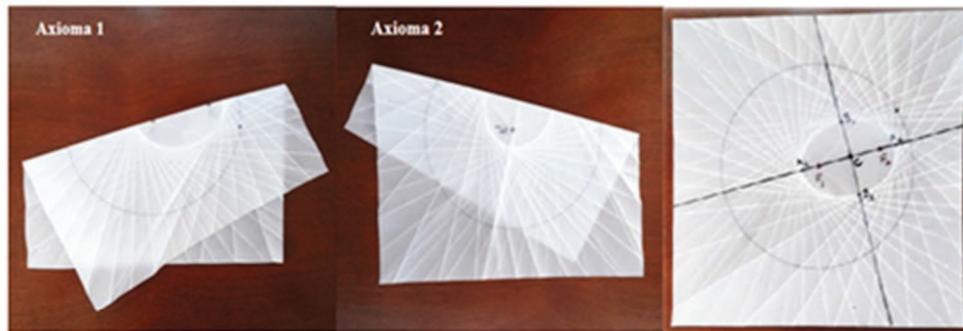
$$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\},$$

onde $P \in \mathbb{R}^2$.

Os elementos da Elipse dados através da construção com Origami

Elementos da Elipse:

- Centro;
- Reta focal;
- Vértices A_1 e A_2 ;
- Eixo focal;
- Reta não focal;
- Vértices B_1 e B_2 ;
- Eixo não focal;
- Excentricidade.



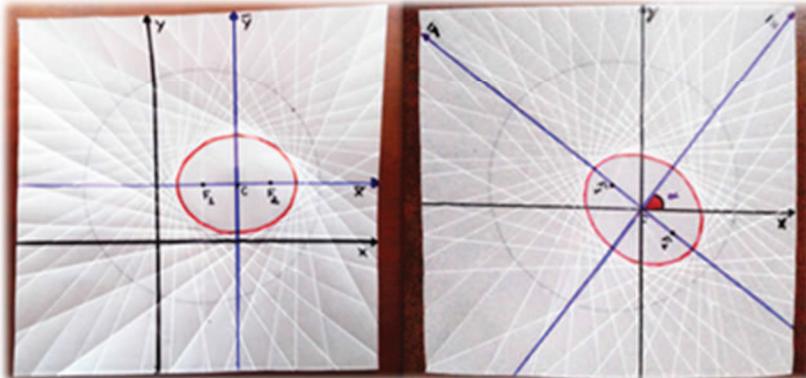
- 1) Utilize a construção do axioma 1 dados os focos F_1 e F_2 ;
- 2) Utilize a construção do axioma 2 dados os focos F_1 e F_2 ;
- 3) Marque todos os elementos da Elipse citados que surgiram a partir destas dobragens.

**Exibição de uma animação
referente à excentricidade
da elipse**

Considerando uma Elipse centrada na origem, cujo eixo focal é o eixo das abscissas e, através do aprendizado referente ao seu Lugar Geométrico e alguns cálculos algébricos, temos que sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Translação e rotação da elipse



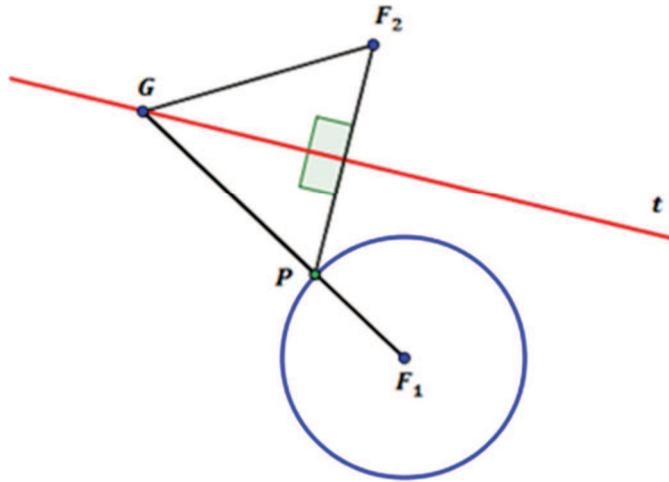


A construção da Hipérbole através do Origami



Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Hipérbole



Definição do Lugar Geométrico da Hipérbole através da construção com Origami

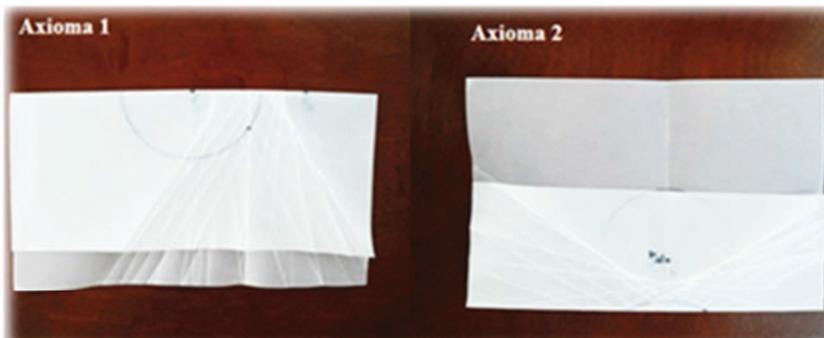
Definição da Hipérbole

$$H = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\},$$

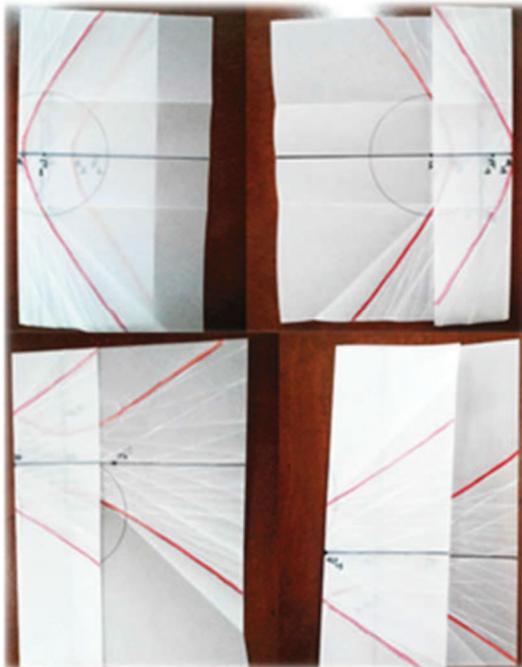
onde $P \in \mathbb{R}^2$.

Elementos da Hipérbole:

- Centro;
- Reta focal;
- Vértices A_1 e A_2 ;
- Eixo focal;
- Reta não focal;
- Vértices imaginários B_1 e B_2 ;
- Eixo não focal;
- Retângulo da base;
- Assíntotas;
- Excentricidade.

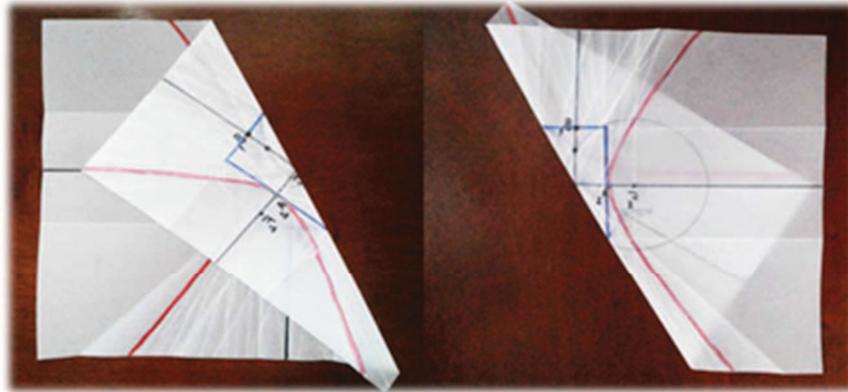


- 1) Utilize a construção do axioma 1 dados os focos F_1 e F_2 ;
- 2) Utilize a construção do axioma 2 dados os focos F_1 e F_2 ;
- 3) Marque as retas focal e não focal, o centro da curva e os vértices A_1 e A_2 .



5) Utilize o axioma 4 em relação aos vértices A_1 e A_2 e a reta focal e em relação aos vértices B_1 e B_2 e a reta não focal.

6) Marque os pontos de interseção entre os vincos. Estes são os vértices do retângulo de base.



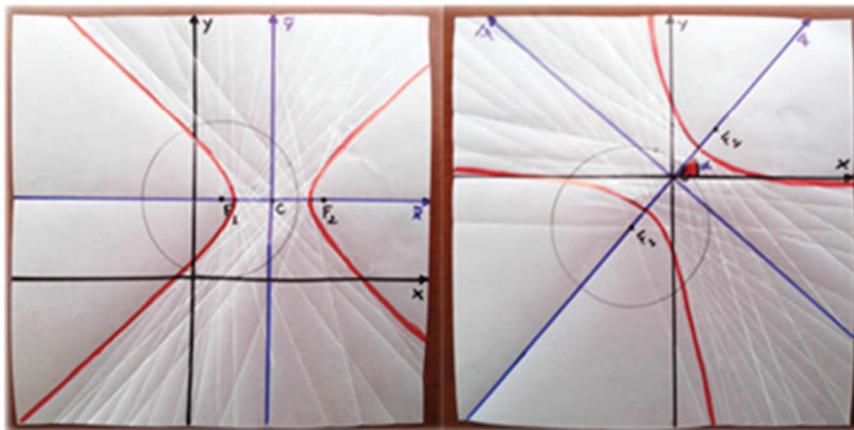
6) Utilizando o axioma 1 em relação ao centro da curva e os vértices do retângulo da base, marque as assíntotas da hipérbole.

**Exibição de uma animação
referente à excentricidade
da hipérbole**

Considerando uma Hipérbole centrada na origem, cujo eixo focal é o eixo das abscissas, através do aprendizado referente ao seu Lugar Geométrico e alguns cálculos algébricos, temos que sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Translação e rotação da hipérbole



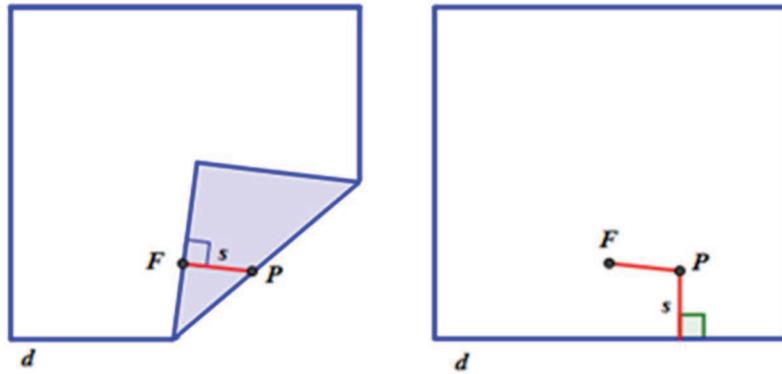


A construção da Parábola através do Origami



Exibição do vídeo

Os pontos pertencentes à Parábola.



Definição do Lugar Geométrico da Parábola através da construção com Origami

Definição da Parábola

$$P = \{Q \mid d(Q, F) = d(Q, d),$$

onde $Q \in \mathbb{R}^2$.

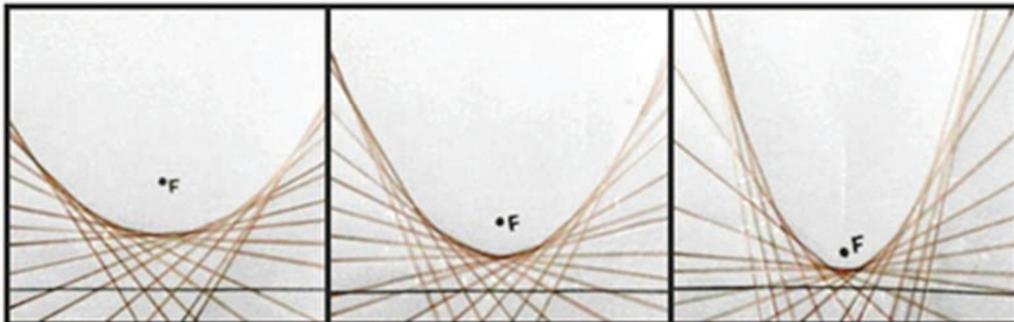
Elementos da Parábola

- Diretriz;
- Foco;
- Reta focal;
- Vértice;
- Parâmetro;
- Excentricidade.



Utilize o axioma 4 a partir do foco F e a diretriz da Parábola. Com esta dobragem, encontraremos a reta focal e o vértice da Parábola.

“Parábolas: quem viu uma, viu todas.”



Referência: <http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/75/parabolas1.pdf>

Considerando a diretriz paralela ao eixo das abscissas e foco acima da diretriz, temos as seguintes informações sobre os elementos da Parábola:

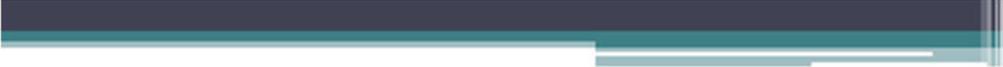
Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Foco: $F = (x_0, y_0 + \frac{p}{2})$

Diretriz: $r: y = y_0 - \frac{p}{2}$

A partir destes dados e dos conhecimentos obtidos a respeito do Lugar Geométrico da Parábola é possível encontrar a seguinte equação:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$



Vimos que o estudo das equações das Curvas Cônicas não está relacionado ao acúmulo de fórmulas decoradas. Mas sim à demonstração das mesmas através do conhecimento do Lugar Geométrico de cada uma delas.



Além disso, vimos que um pedaço de papel pode ser muito mais do que um instrumento de escrita. O papel pode se tornar um eficiente espaço para incríveis descobertas e construções matemáticas.