2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

A Hipótese de Riemann: uma Perspectiva Generosa

César Augusto Moreira [1]
Jorge Andrés Julca Avila[2]

Resumo: Este trabalho estuda uns dos grandes problemas matemáticos: *a distribuição dos números primos*. Nesse contexto, apresentamos, estudamos e elucidamos a Hipótese de Riemann e sua conexão com a quantidade de números primos, através do Teorema do Número Primo.

Palavras-chave: Teoria de Números. Números Primos. Distribuição dos Números Primos. A Função Zeta de Riemann. Teorema do Número Primo. Produto de Euler. A Hipótese de Riemann. Análise Complexa.

1 Introdução

Muito tem se questionado entre os profissionais de matemática do ensino fundamental e médio a respeito do estudo dos números primos com os alunos dessas referidas etapas de escolarização. De acordo com [1], para alguns, esses estudos servem somente para o conhecimento da existência dos números primos, para o cálculo do m.m.c. e do m.d.c. Historicamente, num passado não tão distante, não há muitas informações sobre a importância dos referidos números no contexto escolar, uma vez que esse tema era tratado de forma bem mais complexa, priorizando mais a quantidade do que a qualidade durante os estudos.
Nos tempos modernos sabemos que a utilidade dos números primos vai além de cálculos em sala de aula, conforme [2] a sua utilidade torna-se responsável pela proteção de nossos cartões de crédito, pois quando fazemos compras pela internet, nossos computadores empregam um sistema de segurança que depende da existência de números primos com 100 algarismos, o sistema RSA. Outra importância matemática dada aos números primos é a capacidade de gerar os demais números naturais, começando pelo número 1.
Diante da divergência quanto a importância do ensino desses números e à sua aplicabilidade nos dias atuais, muitos são os mistérios que os cercam. Na lista de números primos, dada na Figura 1, percebemos que não é possível saber qual seria o próximo número.
Grandes estudiosos defendem que tais números não seguem uma sequência ordenada onde seria possível determinar qualquer número desta natureza. Porém, Bernhard Riemann, em seu artigo escrito em 1859, intitulado “Sobre o número de números primos que não excedem uma grandeza dada”, defende por intuição, que existe uma distribuição onde se possa encontrar o próximo número primo.

[1] Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: cesar_arts@yahoo.com.br

[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: avila_jaj@ufsj.edu.br

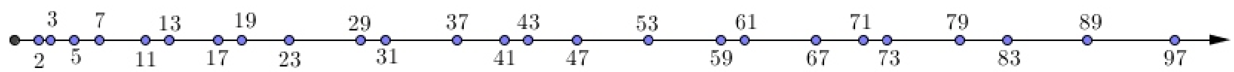

Figura 1: Números primos no intervalo de 1 a 100.

Diante de tal artigo, a hipótese defendida por Riemann tornou-se um grande desafio para os matemáticos do século passado perdurando até os dias atuais. Dessa forma, a hipótese de Riemann, como é conhecida no mundo matemático, é o mais famoso problema matemático em aberto. Como explicita [2], em 1900, o professor David Hilbert, da Universidade de Göttingen, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, realizado na Sorbonne, em Paris, lançou uma lista de 23 problemas que ocupariam o tempo dos matemáticos do século XX. Desses desafios a hipótese de Riemann permaneceu sem solução. Em 24 de maio de 2000, os matemáticos e a imprensa se reuniram no Collège de France, em Paris, onde foi anunciada uma nova lista de problemas como desafio para o novo milênio. Tal lista continha apenas sete problemas, dentre eles a hipótese de Riemann, onde foi oferecido um milhão de dólares para a solução de cada um dos problemas, mais informações no Instituto de Matemática Clay, [3].
Portanto, tendo como metodologia de trabalho a pesquisa bibliográfica realizada em teses, dissertações, vídeo aulas, artigos e livros pretende-se com este trabalho, estudar um pouco superficialmente sobre a grande hipótese de Riemann, que tem intrigado vários matemáticos durante esses séculos. Para isto, este trabalho está organizado em seções.
Na seção 2, apresentamos resultados preliminares que consiste em algumas definições, teoremas e corolários da Teoria de Números e da Análise Complexa. Na subseção 2.1 apresentamos dois casos particulares de números primos, que são os números primos de Fermat e os números primos de Mersenne.
A seção 3 vem mostrar a distribuição dos números primos, ou seja, estudamos a quantidade de Números Primos, Teoremas dos Números Primos e Zeros da Função Zeta de Riemann.
A seção 4 estudamos a hipótese de Riemann.
Com este trabalho se pretende mostrar um dos grandes problemas do milênio, que solucionado, abrirá um leque para os teoremas e problemas que poderão ser comprovados. Espera-se que algum grande matemático consiga fazer a Hipótese de Riemann se tornar um Teorema.

2 Resultados Preliminares

Nesta seção enunciaremos definições e resultados que serão necessários para as próximas seções. A bibliografia utilizada é de [4], [5], [6], [11] e [12].

Definição 2.1 (Conjunto dos Números Naturais) O conjunto dos números naturais é definido por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Denotaremos por $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definição 2.2 (Conjunto dos Números Inteiros) O conjunto dos números inteiros é definido por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Denotaremos por $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^\star$, o conjunto dos números inteiros positivos.

Definição 2.3 (Número Primo) Seja $p \in \mathbb{Z}^+$. Dizemos que p é um número primo, se tem somente dois divisores positivos: 1 e ele mesmo.

Exemplo 2.1 Como exemplo temos os cinco primeiros números primos: $2, 3, 5, 7$ e 11.

Definição 2.4 (Número Composto) Um número composto n é um número inteiro positivo que tem mais de dois divisores positivos.

Exemplo 2.2 Como exemplo temos os números $4 = 2 \cdot 2$ e $15 = 3 \cdot 5$.

***Observação* 2.1** O número 1 não é composto nem primo.

Teorema 2.1 (Teorema Fundamental da Aritmética) *Todo número natural maior do que 1, ou é primo, ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

Demonstração: Essa demonstração encontra-se em [4]. □

Corolário 2.1 *Dado $n \in \mathbb{N}^\star$, $n > 1$, existem números primos $p_1, \ldots, p_n$ e $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}^\star$, univocamente determinados, tais que,*

$$n = p_1^{k1} \cdots p_n^{k_n}$$

Com os p_i, $i = 1, \ldots, n$, satisfazendo $p_1 < \ldots < p_n$.

Demonstração: Essa demonstração encontra-se em [4]. □

Teorema 2.2 (Infinitude de Números Primos) *Existem infinitos números primos.*

Demonstração: Conforme [4], suponha que exista apenas um número finito de números primos $p_1, \ldots, p_r$. Considere o número natural

$$n = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$$

Pelo Teorema 2.1, o número n possui um fator primo p que, portanto, deve ser um dos $p_1, \ldots, p_r$ e, consequentemente, divide o produto $p_1 p_2 \ldots p_r$. Mas isto implica que p divide 1, o que é absurdo. □

Definição 2.5 (Relação Assintótica) Dizemos que f é assintótica a g, quando N tende ao infinito, e denotamos por $f(N) \sim g(N)$, se

$$\lim_{N \to \infty} \frac{f(N)}{g(N)} = 1$$

Também, dizemos que f é big-O de g, e denotamos por $f(N) = O(g(N))$ se, $\exists C > 0$ tal que $\forall N$,

$$|f(N)| \leq C|g(N)|$$

Definição 2.6 (Conjunto dos Números Complexos) O conjunto dos números complexos é definido por

$$\mathbb{C} = \{s = \sigma + it : \sigma, t \in \mathbb{R}\}$$

onde, a parte real de s é definida por $\Re(s) = \sigma$, e a parte imaginária de s é definida por $\Im(s) = t$.

Definição 2.7 (Função Gamma) Seja $s \in \mathbb{C}$. A função Gamma é definida por,

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad \Re(s) > 0$$

Teorema 2.3 *A função Γ não possui zeros em $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Essa demonstração encontra-se em [12]. □

Definição 2.8 (Função de Mangoldt) A função de Mangoldt é definida por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } \; n = p^r, \; \; p \; \text{ primo} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

Definição 2.9 A fórmula da soma geométrica é dada da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad\qquad \text{se } \; |x| < 1$$

2.1 Formas Especiais de Números Primos

Através da história e até hoje, se estudam dois tipos de números primos especiais: os Números Primos de Fermat e os Números Primos de Mersenne.

Os números de Fermat: São definidos por,

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

Note que nem todos os números de Fermat são primos. De fato, se $n = 5$,

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

Os números de Fermat que são primos são chamados de "Primos de Fermat".

Os números de Mersenne: São definidos por,

$$M_q = 2^q - 1, \quad q \in \mathbb{N}^{\star}$$

Podemos observar que para $q = 11$ o número de Mersenne não é um número primo. De fato,

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 89 \cdot 23$$

Os números de Mersenne que são primos são chamados de "Primos de Mersenne".

Esses primos são interessantes por sua história, e seu estudo tem sido um grande impulso para o desenvolvimento da teoria dos números computacionais. Na Tabela 1, veja [6], apresentamos todos os números Primos de Mersenne desde o primeiro até o quadragésimo oitavo. Desde setembro de 2008, os primos de Mersenne etiquetado com $*$, ainda, não foram oficializados, isto é, em qualquer momento podem encontrar-se alguns divisores de alguns deles.

Tabela 1: Tabela de todos os Primos de Mersenne, atuais.

Ordem	M_q	Ordem	M_q	Ordem	M_q	Ordem	M_q
1	$2^{2}-1$	**2**	$2^{3}-1$	**3**	$2^{5}-1$	**4**	$2^{7}-1$
5	$2^{13}-1$	**6**	$2^{17}-1$	**7**	$2^{19}-1$	**8**	$2^{31}-1$
9	$2^{61}-1$	**10**	$2^{89}-1$	**11**	$2^{107}-1$	**12**	$2^{127}-1$
13	$2^{521}-1$	**14**	$2^{607}-1$	**15**	$2^{1279}-1$	**16**	$2^{2203}-1$
17	$2^{2281}-1$	**18**	$2^{3217}-1$	**19**	$2^{4253}-1$	**20**	$2^{4423}-1$
21	$2^{9869}-1$	**22**	$2^{9941}-1$	**23**	$2^{11213}-1$	**24**	$2^{19937}-1$
25	$2^{21701}-1$	**26**	$2^{23209}-1$	**27**	$2^{44497}-1$	**28**	$2^{86243}-1$
29	$2^{110503}-1$	**30**	$2^{132049}-1$	**31**	$2^{216091}-1$	**32**	$2^{756839}-1$
33	$2^{859433}-1$	**34**	$2^{1257787}-1$	**35**	$2^{1398269}-1$	**36**	$2^{29776221}-1$
37	$2^{3021377}-1$	**38**	$2^{6972593}-1$	**39**	$2^{134466917}-1$	**40**	$2^{20996011}-1$
41	$2^{24036583}-1$	**42**	$2^{25964951}-1$	**43**	$2^{30402457}-1$	**44**	$2^{32582657}-1$
45*	$2^{37156667}-1$	**46***	$2^{42643801}-1$	**47***	$2^{43112609}-1$	**48***	$2^{57885161}-1$

3 Distribuição do Números Primos

A distribuição dos números primos foi e continua sendo um grande problema em aberto da matemática, não desejamos procurar uma ordem, uma fórmula, uma sequência que determine com exatidão todos os números primos. Nesta Seção 3, definiremos alguns conceitos matemáticos para elucidar sua compreensão e usaremos as seguintes referência: [5], [7], [8], [9], [10], [11], [12] e [16].

3.1 A Função Zeta de Riemann

A *função zeta de Riemann* é uma função de variável complexa, definida no semiplano $\Re(s) > 1$, pela série absolutamente convergente,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

e, em todo o plano complexo $\mathbb{C}$, por *continuação analítica.*

Para estudar todos os zeros da função Zeta de Riemann precisamos defini-la em todo seu domínio $\mathbb{C}\setminus\{1\}$. A extensão da função zeta de Riemann para os números complexos, ou seja, quando $s \in \mathbb{C}$ foi feita por Riemann (1826-1866).

Definição 3.1 A função definida em todo o plano complexo,

$$\zeta : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$s \mapsto \zeta(s)$$

por,

$$\zeta(s) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} & \Re(s) > 1 \\ \displaystyle\frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right) dx & 0 < \Re(s) \leq 1,\ s \neq 1 \\ 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\zeta(1-s) & \Re(s) < 0 \end{cases}$$

é dita função zeta de Riemann (veja [9]).

O seguinte resultado que se encontra uma parte em [7], apresenta a relação da função zeta com o produto de números primos para $\Re(s) > 1$, feita por Euler em 1748.

Teorema 3.1 (Produto de Euler) *Para $s = \sigma + it$, $\sigma > 1$, temos a seguinte identidade:*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad = \quad \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

em que, o produto é tomado para todos os números primos $p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Denote os infinitos números primos por: $2 = p_1 < p_2 < \ldots < p_N < p_{N+1} < \ldots$ Então, pela fórmula da soma da série geométrica:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} &= \left(\frac{1}{1-p_1^{-s}}\right)\left(\frac{1}{1-p_2^{-s}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-p_N^{-s}}\right) \\ &= \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{sk_1}}\right)\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^{sk_2}}\right)\cdots\left(\sum_{k_N=0}^{\infty} \frac{1}{p_N^{sk_N}}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_1^{sk_1}}\frac{1}{p_2^{sk_2}}\cdots\frac{1}{p_N^{sk_N}}\right) \\ &= \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{k_N=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_N^{k_N}}\right)^s \end{aligned} \tag{1}$$

Pelo Teorema Fundamental da Aritmética, qualquer número natural $n \leq p_N$ pode ser representado, de forma única, por

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N}$$

em que, os $k_i \in \mathbb{N},\ i = 1, 2, \ldots, N$. Logo,

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} \quad = \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \Sigma_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2}$$

em que, o segundo somatório percorre todos os números naturais $n \geqslant p_{N+1}$, cujos divisores primos são todos $\leqslant p_N$. Agora, verificaremos que esse somatório é limitado superiormente, isto é,

$$\begin{aligned} \left|\Sigma_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| \leq \Sigma_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} &\leq \frac{1}{N^\sigma} + \int_N^{\infty} \frac{du}{u^\sigma} \\ &= \frac{1}{N^\sigma} + \frac{1}{\sigma - 1} N^{1-\sigma} \\ &\leq \frac{\sigma}{\sigma - 1} N^{1-\sigma} \end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2),

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p_i^{-s}} \;=\; \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + O\left(\frac{\sigma}{\sigma-1} N^{1-\sigma}\right) \tag{4}$$

Agora, tomemos o limite em (4), quando $N \longrightarrow \infty$, e observando que $N^{1-\sigma} \longrightarrow 0$, pois, $\sigma > 1$. Portanto,

$$\prod_{p} \frac{1}{1-p^{-s}} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

□

3.2 Quantidade de Números Primos

No caótico mundo da distribuição dos números primos, devemos começar com algum conceito matemático que meça a quantidade de números primos. Nesse sentido, definimos a função de contagem $\pi(x)$.

Definição 3.2 (Função π) A função $\pi(x)$ é a quantidade de números primos menores ou iguais a $x,\ x \in \mathbb{R}$.

Definição 3.3 (Função Integral Logarítmica) A função integral logarítmica é definida por

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

A seguir, apresentamos a Conjectura de Gauss (1777-1855)

Conjectura 3.1

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Na Tabela 2, segundo Gauss, observamos que na primeira coluna, estão os distintos valores de x. Na segunda coluna, os valores da função $\pi(x)$, na terceira coluna, os valores de função logarítmica $\frac{x}{\log x}$ e, na última coluna, a razão entre as duas funções, [12]. Nota-se que a razão converge para 1.

Tabela 2: Comparação entre $\pi(x)$ e $\frac{x}{\ln x}$

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\pi(x)/\frac{x}{\ln x}$
10^3	168	$144,7$	$1,17$
10^4	1229	$1085,7$	$1,13$
10^5	9592	$8685,9$	$1,10$
10^6	78498	$72382,4$	$1,08$
10^7	664579	$620420,7$	$1,07$
10^8	5761455	5428681	$1,06$
10^9	50847534	48254942	$1,05$

3.3 Teoremas dos Números Primos

Na procura de funções que aproximem à função $\pi(x)$, em algum sentido, se estabelece o Teorema do Número Primo - TNP.

O seguinte teorema foi provado em 1896, por J. Hadammard e C. de la Vallée Poussin, independentemente.

Teorema 3.2 (TNP - 01)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1 \tag{5}$$

Teorema 3.3 (TNP - 02)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x/\log x}{\mathrm{Li}(x)} = 1 \tag{6}$$

Note que de (5) e (6) podemos obter a seguinte relação assintótica:

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x), \tag{7}$$

para x muito grande.
A seguir, temos a Conjectura de Legendre feita em 1800, independente de Gauss:

Teorema 3.4 (TNP - 03)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/(\log x - B)} = 1 \tag{8}$$

em que, $B = 1,08366$, mas não importa qual seja a escolha para o número de B, pois:

$$\frac{x}{\log x} \sim \frac{x}{\log x - B}$$

Desse modo, a escolha para $B = 1$

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x - 1}$$

é interessante para estimativas com uma calculadora.
Apresentamos na Tabela 3 os valores das funções $\pi(x)$, $\frac{x}{\ln x}$ e $\frac{x}{\ln x - 1}$. Podemos observar que a função $\frac{x}{\ln x - 1}$ aproxima melhor a $\pi(x)$ que a função $\frac{x}{\ln x}$.

Tabela 3: Valores das funções $\pi(x)$, $\frac{x}{\ln x}$ e $\frac{x}{\ln x - 1}$

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\ln x}$	$\frac{x}{\ln x - 1}$
10^3	168	144,7	169,27
10^4	1229	1085,7	1217,98
10^5	9592	8685,9	9512,10
10^6	78498	72382,4	78030,45
10^7	664579	620420,7	661458,97
10^8	5761455	5428681,0	5740303,81
10^9	50847534	48254942,0	50701542,44

3.4 Os Zeros da Função Zeta de Riemann

Para estudar os zeros da função Zeta de Riemann divide-se, o domínio $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, em quatro regiões:

- Região I: $\Re(s) > 1$.
- Região II: $\Re(s) = 1, s \neq 1$.
- Região III ou Faixa crítica: $0 < \Re(s) < 1$.
- Região IV: $\Re(s) \leq 0$.

Os zeros da função Zeta de Riemann se classificam em:

Zeros triviais: São todos os zeros da Região IV.
Zeros não-triviais: São todos os zeros da faixa crítica.

Linha crítica: $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Teorema 3.5 *Não existem zeros da função zeta de Riemann na Região I.*

Demonstração: Sabemos agora que para a região $\Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Como os números primos são positivos e diferentes de zero,

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0$$

Assim,

$$\prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \neq 0$$

Logo, para todo $s \in \mathbb{C}$, tal que, $\Re(s) > 1$,

$$\zeta(s) \neq 0 \tag{9}$$

Portanto, não existem zeros da função ζ não região I, por [10]. □

Teorema 3.6 (Equação Funcional de Riemann) *A função zeta de Riemann satisfaz a seguinte equação funcional,*

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1 - s) \zeta(1 - s) \tag{10}$$

para todo $s \neq 1$.

Demonstração: Essa demonstração encontra-se em [12]. □

Teorema 3.7 *Existem zeros triviais da função zeta de Riemann.*

Demonstração: Por [10], da equação funcional (10), temos que 2^s e π^{s-1} nunca podem ser zero. Pelo Teorema 2.3, a função Gama é diferente de zero. Agora, $\zeta(1-s) \neq 0$, pois, $\Re(1-s) > 1$, segundo (9). Logo, se $\Re(s) < 0$ todos os termos do lado direito de (10) é diferente de zero, exceto para $\operatorname{sen}\dfrac{\pi s}{2}$. Assim,

$$\zeta(s) = 0 \iff \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{2}\right) = 0 \iff s = -2n,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

Portanto, os zeros triviais de ζ são $-2, -4, -6, \ldots$ $\square$

Teorema 3.8 *Não existem zeros da função zeta de Riemann na Região II, isto é,*

$$\zeta(1+it) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{11}$$

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrado em [16]. $\square$

Conjectura 3.2 *Todos os zeros não triviais da função zeta de Riemann estão sobre a linha crítica* $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Essa conjectura seria a Hipótese de Riemann, a qual, vamos a estuda-la um pouco melhor na Seção 4.

4 A Hipótese de Riemann

Começamos esta Seção enunciado a Hipótese de Riemann:

Conjectura 4.1 (Hipótese de Riemann) *Todos os zeros não-triviais de* $\zeta(s)$ *estão sobre a linha crítica* $\Re(s) = \frac{1}{2}$.

Seguramente, a primeira pergunta que fazemos neste momento, é: ***Qual a relação entre a distribuição dos números primos com os zeros da função Zeta de Riemann?***

Existem comentários entre matemáticos amadores quando se diz que a distribuição dos números primos estaria resolvida, se todos os zeros da função zeta de Riemann estariam na linha crítica $\Re(s) = 1/2$ do plano complexo. Tais comentários, não são verdadeiros totalmente. O que acontece realmente, é que nos ajudaria muito na análise da quantidade de números primos, isto é, poderíamos controlar o erro entre $\pi(x)$ e sua aproximação assintótica, e isto, seria um magnífico resultado para o problema da distribuição dos números primos. Por outro lado, existe muita pesquisa assumindo que a hipótese de Riemann é verdadeira.

Definição 4.1 (Conjunto dos Zeros da Faixa Crítica)

$$L = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \zeta(\lambda) = 0 \ \text{ e } \ 0 \leq \Re(\lambda) \leq 1\} \tag{12}$$

A seguinte fórmula é devido a Riemann, mas quem a demostrou foi Von Mangoldt em 1895.

Teorema 4.1 (Fórmula de Mangoldt) *Para todo* $x \in \mathbb{R},\ x \geq 2$, *temos*

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}) - \sum_{\lambda \in L} \frac{x^{\lambda}}{\lambda} \tag{13}$$

Demonstração: A demonstração do Teorema 4.1 é encontrada em [13], Cap. 17. $\square$

A fórmula (13) nos diz que a distribuição dos números primos tem uma ligação com a função zeta de Riemann, principalmente com os zeros não triviais na faixa crítica. A Hipótese de Riemann sugere que esses zeros se encontram na linha crítica com $s = \frac{1}{2} + ti$, $t \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{14}$$

Demonstração: Note de (13) que $\psi(x) - x$ é limitada, logo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} - 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x) - x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}(\psi(x) - x) = 0$$

$\square$

Note que a função $\psi(x)$, no Teorema 4.1, carrega os zeros não-triviais da função zeta de Riemann. Basta observar o índice λ do somatório. Então, resta-nos estabelecer uma relação entre $\pi(x)$ e $\psi(x)$, pois, desse modo a quantidade dos números primos estariam relacionados com os zeros não-triviais da função zeta de Riemann. A seguir, estabelecemos em um Teorema de Números Primos essa relação assintótica.

Teorema 4.3 (TNP - 04)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\pi(x)\log x}{\psi(x)} = 1 \tag{15}$$

Demonstração: A demonstração do Teorema 4.3 é encontrada em [14], Cap. 4. $\square$

De (14) e (15) podemos obter uma demonstração imediata para o Teorema **3.2** (**TNP - 01**),

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} &= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{\pi(x)\log x}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{x} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Em 1901, Von Koch enunciou o resultado.

Teorema 4.4 *Se a Hipótese de Riemann for verdadeira, então*

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{1/2}\log x\right) \tag{16}$$

Demonstração: Se a hipótese de Riemann for verdadeira, então (13) se reduz a

$$\psi(x) = x + O(x^{1/2}\log^2 x)$$

Disto temos que

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(x^{1/2}\log x\right)$$

$\square$

Note que (16) não nos diz a quantidade exata de números primos menores ou iguais a x. Porém, nos diz que o erro da aproximação $|\pi(x) - Li(x)|$ é limitado por $Cx^{1/2}\log x$, para alguma constante positiva C.

Por outro lado, existem resultados que sustentam a Hipótese de Riemann, tal fato é devido a Godfrey Harold Hardy (Inglaterra, 1877 - 1947).

Teorema 4.5 (Teorema de Hardy) *Existem infinitos zeros da função ζ sobre a linha crítica.*

Demonstração: A demonstração deste teorema é encontrado em [15], Cap. 2. $\square$

5 Considerações Finais

É inconstestável que a Hipótese de Riemann é um importante problema do milênio, passando por quase dois séculos sem alguma prova ou contestação. O estudo dos números primos intriga as gerações de muitos estudiosos e matemáticos há milênios de anos e, descobrir o próximo número primo parece algo impossível, pois no começo da distribuição os encontramos com facilidade, mas depois apenas com a ajuda de calculadoras e computadores.
Neste trabalho mostramos que existe a relação da distribuição dos números primos com a função zeta de Riemann, e se a hipótese de Riemann estiver correta, passando a ser um Teorema [2], haverá a confirmação de muitos outros teoremas e podemos também chegar a um caos, já que os números primos são usados na criptografia dos nossos cartões de crédito [2].
Acredito que o estudo proposto acrescentou informações para o meu crescimento profissional, assim como para o crescimento profissional de todos que se interessam por esse grandioso e interessante assunto.

Agradecimentos

Agradeço a Deus primeiramente por ter me dado saúde e forças para superar esse desafio e por todas as viagens longas em que sempre esteve ao meu lado. À minha rainha, minha Mãe, que sempre acreditou e acredita no meu aprendizado. Às minhas irmãs, ao Gilmar e Cíntia, pelo amor, incentivo e compreensão. Ao meu orientador, Prof. Dr. Jorge Julca Avila, pela paciência e companherismo em desenvolver esse tema junto a mim. Ao corpo docente do PROFMAT da UFSJ-MG, Campos Santo Antônio, onde nos disponibilizaram todo o seu conhecimento. Aos colegas de sala, pelo apoio nos estudos, principalmente às meninas Wal, Beré, Lili, e os meus companheiros de viagens, Éder e Bruno. A Capes pelo incentivo financeiro, o meu muito obrigado.

Referências

[1] LELLIS, M., *Primos são primos?* Revista de Ensino de Ciências Nº 24. Academia de Ciências do Estado de SP, 1993.

[2] DU SAUTOY, M., *A música dos números primos: a história de um problema não resolvido na matemática* tradução, Diego Alfaro. Rio de Janeiro. Jorge Zahar Ed., 2007.

[3] CLAY MATHEMATICS INSTITUTE. Disponível em: <http://www.claymath.org/>. Acesso em: 09 mar. 2015.

[4] HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmtetica*. 2ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 169 p.

[5] Grandall R., Pomerance C., *Prime Numbers A Computational Perpective*, 2ed., USA, Springer 2005.

[6] MERSENNE. Disponível em:
<http://www.mersenne.org/primes>. Acesso em: 06/03/2015.

[7] Youtube. Produto de Euler. Disponível em:
<https://www.youtube.com/watch?v=I3qSCWNXZKg>. Acessado em: 02/03/2015.

[8] SANTOS, J. C. *A hipótese de Riemann - 150 anos*. 10 p.

[9] Youtube. Riemann Hypothesis. Disponível em:
<https://www.youtube.com/watch?v=UGj6mfCSZfY>. Acessado em: 02/03/2015.

[10] YANG, J. R. *The Riemann Hypothesis: Probability, Physics, and Primes*. Yang Academy, Gaithersburg, Maryland 20877, USA, 48p., 2014.

[11] VOLOCH, J. F. *A Distribuição dos Números Primos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Jardim Botânico, Rio de Janeiro, RJ 22460, 71-82, 1987.

[12] OLIVEIRA, W. D. *Zeros da Função Zeta de Riemann e o Teorema dos Números Primos*. 134p. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. São José do Rio Preto. 2013.

[13] DAVENPORT, H. Multiplicative Number Theory. Second Edition. Springer-Verlag New York, 1980.

[14] EDWARDS, H. M. Riemann's Zeta Function. Academic Press, Inc,New York, 1974.

[15] BORWEIN, P.; CHOI, S.; ROONEY, B. e WEIRATHMUELLER, A. The Riemann Hypothesis. Springer-Verlag New York, 2006.

[16] COURSEWARE 428. Disponível em:
<http://www.maths.tcd.ie/pub/Maths/Courseware/428/Primes-II.pdf>. Acessado em: 09/03/2015.