UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

JEAN DUARTE FARIAS

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO: UMA NOVA VISÃO PARA O ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2015

JEAN DUARTE FARIAS

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO: UMA NOVA VISÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão apresentado como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora: Professora Dra. Adriana Luiza do Prado

CURITIBA

2015

TERMO DE APROVAÇÃO

JEAN DUARTE FARIAS

INTER-RELAÇÃO ENTRE PROGRESSÃO ARITMÉTICA E FUNÇÃO: UMA NOVA VISÃO PARA O ENSINO MÉDIO

Trabalho de conclusão aprovado como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora.

Profª. Dra. Adriana Luiza do Prado.

Orientadora – Departamento de Ciências Exatas UFPR

Prof. Dr. Aldemir José da Silva Pinto.

Departamento de Ciências Exatas UFPR

Profª Dra. Olga Harumi Saito.

Departamento Acadêmico de Matemática UTFPR

Curitiba, 26 de março de 2015

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais José Duarte Farias e Julia Gabre Farias, responsáveis pela formação de meu caráter e personalidade;

Aos amigos Rafael Cortiano da Silva, Cleydi Maria Novelli e Ângela Mass, pelo apoio nas dificuldades e a colaboração em transpô-las e principalmente por compreende-las;

Aos professores, pela dedicação e contribuição no decorrer do programa em especial ao Professor Aldemir José da Silva Pinto;

A Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de participar do programa.

Aos colegas do programa pelo companheirismo nas horas de estudo e nas boas conversas que transformaram colegas em bons amigos para o decorrer da vida em especial aos amigos Allisson Cordeiro, Julio Cesar Cordeiro Paula, Luana Fonseca Duarte Fernandes, André Tatarim;

Ao amigo e colega de pesquisa na confecção desse trabalho Ivonzil José Soares Junior;

E especialmente a Dra. Adriana Luiza do Prado, orientadora que, com sua paciência e compreensão das dificuldades encontradas, me ajudou a completar com êxito essa difícil etapa.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

Lista de Símbolos

$\equiv$ O que vem depois é definição do que vem antes;

$\forall$ Para todo ou qualquer que seja

$\exists$ Existe

$\Rightarrow$ Implica

$\in$ Pertence

$<$ Menor que

$\leq$ Menor ou igual a

$>$ Maior que

$\geq$ Maior ou igual a

$\mathbb{R}$ Conjunto dos números reais

$\mathbb{N}$ Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos números racionais

$/$ Tal que

Resumo

Trata-se de uma proposta de abordagem das sequências, em especial, as progressões aritméticas para o ensino médio, em que procurou-se expor o tema de forma contextualizada e objetiva, realizando-se uma inter-relação das sequências com as funções, utilizando um pouco da História Matemática, exemplos do cotidiano e curiosidades matemáticas, fazendo também algumas interpretações geométricas do tema. Inicialmente faz-se uma abordagem dos conceitos necessários ao desenvolvimento do tema visando mostrar a relevância do assunto, fazendo uma coletânea dos assuntos que envolvem as sequências, tais como: definição de corpo, definição de corpo ordenado, definição de séries numéricas e propriedades, limite de sequências e propriedades e o conceito de funções com algumas propriedades. A seguir, estudam-se formas de buscar padrões nas sequências utilizando-se a sequência de Fibonacci e o número Euler e por fim, uma abordagem do assunto progressões aritméticas, fazendo uma relação com as funções, utilizando-se a divisibilidade, quadrado mágico, função quadrática, juros simples e o estudo da posição em função do tempo onde se relacionam as disciplinas de Matemática e Física. O texto segue como base as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio que prevê que o assunto não deve ser tratado como um tópico independente e evitar cálculos desnecessários utilizando apenas aplicações de fórmulas.

Palavra Chave: Sequências, Progressões Aritméticas, Funções, Quadrado Mágico, Divisibilidade.

Sumário

1. Introdução

Na construção do conhecimento, o individuo está a todo o momento observando os fenômenos da natureza em busca de regularidades, ou seja, de padrões para melhor entender tais fenômenos. As previsões de fenômenos colaboram na tomada de decisões mais eficazes, para isso os pesquisadores tentam transformar esses padrões em representações matemáticas, a fim de melhorar os procedimentos de decidir. Desde problemas do cotidiano, como o de comprar determinado produto, qual será a melhor forma de pagamento?, até os que não estão à mostra para a maioria da população, como o grande número de satélites em órbita, o lixo espacial. E se existe o risco de colisões entre satélites.

A investigação de padrões não deve ficar restrita aos pesquisadores e às cadeiras acadêmicas das universidades, a escola pode sim ter o papel de construtor do conhecimento, fazendo que o aluno investigue, relacione conteúdos e assim desfazer a ideia de que a escola é um lugar para meros espectadores, mas sem abandonar o formalismo que a matemática necessita para a construção do conhecimento. Com isso, proporcionar um ambiente de aprendizagem que tenha algo a ver com a realidade e experiências dos estudantes, descobrindo relações, encontrando conexões e fazer generalizações dos temas abordados é um desafio aos docentes.

Na busca de conteúdos adequados para desenvolver uma colaboração ao processo de ensino aprendizagem no ensino médio, optou-se pelo tema sequências que é abordado em geral no primeiro ano do ensino médio. Trazendo como parâmetro de objetivos a serem alcançados no processo de ensino aprendizagem as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio [3], elaborado pelo Ministério da Educação no ano de 2006, que trata do conhecimento a ser desenvolvido no assunto progressões como:

> As progressões aritméticas e geométricas podem ser definidas como, respectivamente, função afim e exponencial, em que o domínio é o conjunto dos naturais. Não devem ser tratadas como um tópico independente, em que o aluno não reconhece as funções já estudadas. Devem se evitar as exaustivas coletâneas de cálculos que fazem o simples uso de fórmulas (“determine a soma...”, “calcule o quinto termo...”).

Apesar dessas orientações, o que se vê na realidade, na maioria dos livros didáticos para o ensino médio, o tratamento do assunto sequências e progressões como sendo um capítulo a parte do assunto funções. Assim, o presente trabalho busca trazer algumas opções para o docente trabalhar o assunto, tratando o tópico sequência relacionado ao conceito de funções.

As sequências são utilizadas a todo momento, seja na numeração das casas, nos dias da semana ou mesmo em sala de aula quando é feita a chamada dos alunos, todas essas sequências seguem um padrão para a sua construção. Uma forma de se introduzir o tema sequências, dentre as quais será destacado as progressões aritméticas, se refere ao estudo de padrões matemáticas, utilizando fatos que ocorrem no dia a dia do aluno, a história da Matemática, com o estudo de sequências conhecidas, aplicações financeiras vivenciadas pela sociedade e algumas curiosidades matemáticas.

Encontram-se registros de sequências na história desde o Egito antigo, cerca 3000 anos antes da era cristã. Com o problema das cheias do rio Nilo, os egípcios perceberam que as inundações se davam em períodos iguais, o que representa uma sequência de um determinado fato. Segundo [1] na Babilônia antiga tem-se o registro da soma dos termos de uma progressão geométrica na tabela Plimpton 322, outro registro de sequências é o papiro de Rhind que no problema 79 do papiro traz a progressão geométrica escrita da seguinte forma:

“7 casas, “49 gatos, 343 ratos, 2401 espigas e 16 807 hectares”

Ainda segundo [1] a Escola Pitagórica demonstra interesse pelo tema principalmente com os números figurados que podem ser representados por construção geométrica, entre eles, os números triangulares $(1, 3, 6, 10, \ldots)$ e os números quadrados $(1, 4, 9, 16, \ldots)$. As sequências estão diretamente ligadas aos processos de contagem e ao estudo do desenvolvimento dos sistemas de numeração, através dos vários registros de sequências nos principais documentos das civilizações da antiguidade percebe-se esse processo matemático é utilizado desde então. Com a história das sequências verifica-se que seus estudos auxiliaram os matemáticos na resolução dos mais diversos problemas e no desenvolvimento do conhecimento matemático.

Assim segundo [10] define-se uma sequência de números reais como uma função $x: N \to R,$ definida no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in N$, será representada por $\mathrm{x_n}$ e chamado de termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência. Escreveremos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou simplesmente $(\mathrm{x_n})$ para indicar a sequência x.

A função x não é necessariamente injetora, pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n;$ o conjunto $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ pode ser finito, apesar da notação adotada, ou até mesmo reduzir-se a um único elemento, como nas sequências constantes. Quando a sequência (x_n) for injetora, ou seja, $m \neq n$ implica que $x_m \neq x_n$, diremos, então, que ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Como toda sequência obedece a uma “lei de formação”, ou uma regra que permita dizer, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pode-se voltar ao exemplo da chamada em sala de aula, na qual a numeração dos alunos é colocada através de ordem alfabética, ou seja, a ordenação dos alunos é dada por uma lei de formação. Uma importante conexão a ser feita é a construção e observação dos gráficos de progressões aritméticas. Onde fica evidente para o aluno a distinção do domínio real em funções e do domínio natural para as progressões aritméticas, fazendo com que o discente compreenda a união ou não dos pontos de um gráfico.

Nos capítulos 2 e 3, há uma construção formal necessária para os conceitos de progressão aritmética que serão abordados, a seguir do capitulo 4 procura-se trazer algumas formas de abordagem para relacionar as funções afins, quadráticas e exponenciais com as progressões aritméticas, assim criando uma inter-relação entre os temas.

O trabalho de pesquisa dos capítulos 2 e 3 e as sequências famosas foram realizados em conjunto com o colega de mestrado e amigo Ivonzil José Soares Junior.

2 Sequências e séries numéricas

No inicio do ensino médio são abordados os conceitos de conjuntos numéricos, intervalos na reta real, números reais, funções e sequências. Como o presente trabalho tem o objetivo de relacionar o conceito de funções ao de sequências, inicialmente serão abordados alguns conceitos necessários para o desenvolvimento do mesmo.

2.1 Corpo

Definição 2.1: Um **corpo** é um conjunto C, com duas operações, denominadas adição e multiplicação ($+: C \times \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$, $\cdot: C \times \mathrm{C} \rightarrow \mathrm{C}$), que satisfazem determinadas condições. Ou seja, sendo os elementos $x, y, z \in C$, definidas as operações de adição e de multiplicação, onde cada par de elementos operados pertence a C, tem-se as seguintes propriedades:

Tabela 1: Propriedades do Corpo.

	Adição	**Multiplicação**
Associativa	$(x+y)+z = x+(y+z)$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Comutativa	$x+y = y+x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Elemento Neutro	$\exists\ 0 \in C, 0+x = x$	$\exists\ 1 \in C, 1 \cdot x = x$
Inverso	$x+(-x) = 0$	$\forall\ x \neq 0 \in C, x^{-1} \cdot x = 1$

Fonte: Autor.

Exemplo 2.1: O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, que são os todos os números na forma $\frac{p}{q}$ com p e $q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, é um corpo, com as operações $\frac{p}{q} + \frac{p\prime}{q\prime} = \frac{p.q' + p'.q}{q \cdot q\prime}$ (adição) e $\frac{p}{q} \cdot \frac{p\prime}{q\prime} = \frac{p.p'}{q \cdot q\prime}$ (multiplicação), e são válidos as propriedades da adição e da multiplicação.

2.2 Corpo ordenado.

Definição 2.2: Um **corpo** $(C, +, \cdot)$ é **ordenado** se contiver um subconjunto P com as seguintes propriedades:

P1- $x, y, \in P$, tem-se que $\begin{cases} x + y \ \in P \\ x \cdot y \in P \end{cases}$.

P2- dado $x \ \in P$, exatamente uma das três alternativas ocorre, ou $x = 0$, ou $x \ \in P$ ou $-x \ \in P$.

Exemplo 2.2: Como visto no exemplo 2.1, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, com as operações de adição e de multiplicação usuais, é um corpo. Agora será mostrado que $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

Dado um $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pode-se considerar sempre $q > 0$, pois $q < 0 = -q$. Assumindo que seja sempre positivo o denominador q, valem as relações seguintes: $\frac{p}{q} < 0$, ou $\frac{p}{q} = 0$, ou $\frac{p}{q} = 0$. Assim temos que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado.

2.3 Intervalos.

Para explorar a compreensão do que são cotas superiores e inferiores, buscando-se entender quando um conjunto ou intervalo tem um maior ou um menor elemento. Destaca-se inicialmente os intervalos.

Definição 2.3: Sejam a e b dois números reais, sendo $a < b$. Denomina-se **intervalo fechado** de extremos a e b ao conjunto dos números reais x tais que $a \leq x \leq b$, e representa-se por $[a, b]$.

Definição 2.4: Denomina-se **intervalo aberto** de extremos a e b, $a < b$, ao conjunto de números reais x tais que $a < x < b$ e representa-se por (a, b).

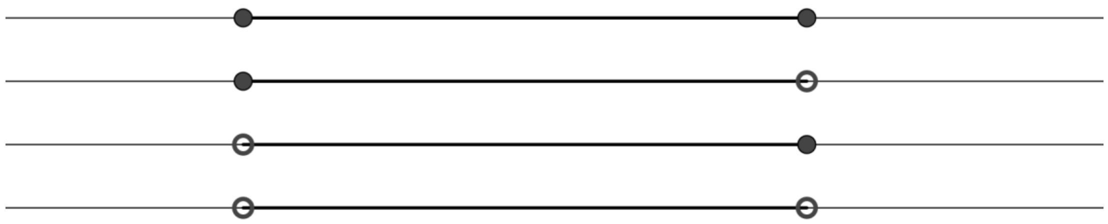
Assim pode-se defini-los como sendo:

Intervalos Limitados:

- Fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$;
- Fechado à esquerda: $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$;
- Fechado à direita: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$;
- Aberto: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$.

Podem-se representar os intervalos como sendo segmentos de reta contidos na reta dos números reais como mostra a figura 1.

Figura 1: Intervalos Limitados



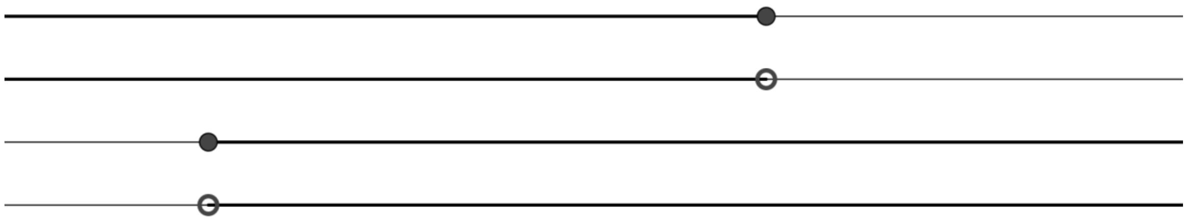
Fonte: Autor.

<u>Intervalos Ilimitados</u>:

- Semirreta direita fechada, de origem: b $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$
- Semirreta direita aberta, de origem: b $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
- Semirreta esquerda fechada, de origem: a $[a, +\infty) = x \in \mathbb{R} / a \leq x\}$
- Semirreta esquerda aberta, de origem: a $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / a < x\}$
- Intervalo aberto: $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ este intervalo também conhecido como intervalo total.

Geometricamente, tem-se na figura 2 a representação dos intervalos ilimitados.

Figura 2: Intervalo Ilimitado.



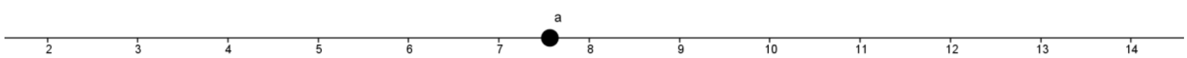
Fonte: Autor.

<u>Intervalo degenerado</u>:

- $[a, a]$: este intervalo consiste em um único ponto $\boldsymbol{a}$.

Geometricamente tem-se a marcação de um ponto na reta dos reais, mostrado na figura 3.

Figura 3: Intervalo Degenerado.



Fonte: Autor.

Proposição 2.1 - Todo intervalo não degenerado é um conjunto infinito.

***Prova**:*

Como $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado tem-se que, se $x < y$, então, $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Assim, se I for um intervalo de extremos a, b, com $a < b$, pode-se obter infinitos elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ em I, sendo:

$x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}$, ..., $x_{n+1} = \frac{a+x_n}{2}$. Assim obtém-se $a < \cdots < x_3 < x_2 < x_1 < b$. Logo, tem-se infinitos elementos entre a e b.

2.4 Desigualdades

Sendo $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos elementos positivos do corpo ordenado $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathbb{R}^+$contém todos os racionais positivos.

Definição 2.5: Sendo $x \in \mathbb{R}$, o **valor absoluto** de x, representado por $|x|$ é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0; \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Assim, para qualquer real x, tem-se:

$$|x| = |-x|.$$

Decorrem imediatamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$, da definição de valor absoluto, as seguintes propriedades:

P1- $|x| \geq 0$;

P2- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

P3- $|x| = |-x|$;

P4- $|x| \geq x$.

Teorema 2.1: Seja c um real qualquer. Então, $|c| = \sqrt{c^2}$.

Prova:

Imediata, se $c \geq 0$. Se $c < 0$, então $c^2 = |c|^2$ e, portanto, $\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|$.

Proposição 2.2: Quaisquer que sejam os números reais a, b e x, tem-se:

1. $|x|^2 = |x^2| = x^2$;

2. $|ab| = |a|\,|b|$;

3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Desigualdade Triangular);

4. Se $a > 0, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

5. $|a| - |b| \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Prova:

1. Sendo $x^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$|x^2| = x^2$, pela definição de valor absoluto.

Resta mostrar que $|x^2| = x^2$.

Se $x \geq 0$, temos $|x| = x$ e, portanto, $|x^2| = x^2$.

Se $x < 0$, |x| = $-x$ e, portanto, $|x^2| = (-x)^2 = x^2$.

2. Do item 1 tem-se que:

$|a \cdot b|^2 = (a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2 = |a|^2 \cdot |b|^2$, ou seja, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

3. Usando o fato de $|x| \geq x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Temos:

$$|a + b|^2 = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \leq |a|^2 + |b|^2 + 2\,|a||b| = (|a| + |b|)^2.$$

Ou seja, $|a + b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$.

Assim obtém-se $|a + b| \leq |a| + |b|$.

4. Supondo que $|x| \leq a$. Se $x \geq 0$, temos $x = |x| \leq a$. Sendo $x \geq 0$, é claro que $x \geq -a$, de modo que, neste caso, $-a \leq x \leq a$.

Se $x \leq 0$, então $x \leq a$ e $-x = |x| \leq a$. Mas $-x \leq a$ é equivalente a $x \geq -a$, de modo que $-a \leq x \leq a$.

Portanto, prova-se que $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$. Para provar a recíproca, distingue-se os casos $x \geq 0$ e $x < 0$.

Suponha que $-a \leq x \leq a$. Esta dupla desigualdade pode ser desdobrada em $x \leq a$ e $x \geq -a$.

Se $x \geq 0$, $|x| = x$ e a primeira desigualdade nos dá $|x| \leq a$.

Se $x < 0$, $|x| = -x$ e, da segunda desigualdade, temos $|x| \leq a$.

Logo, $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$.

5. Usando a desigualdade triangular, tem-se:

$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$. Assim tem-se

$|a| - |b| \leq |a - b|$. (I)

Pelo mesmo motivo, tem-se $|b| - |a| \leq |b - a|$.

Logo, $|a - b| = |b - a|$.

Consequentemente, $|b| - |a| \leq |a - b|$ ou $|a - b| \geq -(|a| - |b|)$. (II)

De (I) e (II) e a partir do item 4 conclui-se que $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

2.5 Vizinhança de um Ponto

Note que, como $\mathbb{R}$ esta sendo associado a uma reta, é comum o uso de expressões, como o número real x ou o ponto x, para identificar um elemento de $\mathbb{R}$.

Definição 2.6: Dado um número real x, denomina-se **vizinhança** de x, a qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$, contendo x. Fixado um ponto de $\mathbb{R}$, observa-se que tal ponto possui uma infinidade de vizinhanças, representadas por $V(x)$.

Observe que uma vizinhança de $x \in \mathbb{R}$ é um conjunto linear. Por exemplo, dado o número real 2, uma vizinhança de 2 é, por exemplo, o intervalo $(1, 3)$.
Há infinitas vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$.

As vizinhanças de um ponto possuem as seguintes propriedades:

P1- se $V(x)$ e $V'(x)$ forem vizinhanças de $x \in \mathbb{R}$ então a intersecção $V(x) \cap V'(x)$ é vizinhança de x. Note que o símbolo $\cap$ significa uma operação definida entre conjuntos. Assim, dados dois conjuntos V e V', denomina-se intersecção de V com V', representando-a por $V \cap V'$, ao conjunto formado pelos objetos que pertencem a V e V'. Logo, quando $V = (1, 3)$ e $V' = (-1, 2)$, temos $V \cap V = (1, 2)$;

P2- se $V(x)$ for uma vizinhança de x e $y \in V\,(x)$ então existe uma vizinhança $V(y) \subseteq V(x)$. Note que o símbolo $\subseteq$ $é$ uma relação binária entre os conjuntos V e V'. Diz-se que $V \subseteq V'$ quando todo objeto de V pertence a V'. Por exemplo, $V = (1,2)$ e $V' = (0,2)$ tem-se $V \subset V'$;

P3- Se $x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, existe uma $V(x)$ e uma $V(y)$ tais que $V(x)$ e $V(y)$ não possuem pontos em comum. Escreve-se simbolicamente $V(x) \cap V(y)$ igual ao conjunto vazio ou a parte vazia de $\mathbb{R}$.

2.6 Ínfimo e supremo

Seja A um subconjunto dos números reais.

Definição 2.7: A é **limitado superiormente** quando existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq a$ para todo $a \in A$. Cada $x \in \mathbb{R}$ com esta propriedade é chamado de uma **cota superior de A.**

Exemplo 2.3: Seja A um subconjunto dos números reais, tal que $A = \{\ldots, 1, 2, 3, 4\}$, tem-se que a cota superior de A é igual a 4, pois $\forall\ a\ \in A, 4 \geq a$.

Definição 2.8: Se A é **limitado inferiormente** quando existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y \leq a$ para todo $a \in A$. Assim um elemento $y \in \mathbb{R}$ com essa propriedade é chamado de **cota inferior de A**, segundo [10].

Exemplo 2.4: Seja A um subconjunto dos números reais, tal que $A = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, tem-se que a cota inferior de A é 1, pois $\forall\ a\ \in A, 1 \leq a$.

Como demostrado na Proposição 2.1, o fato de todo intervalo não degenerado ser um conjunto infinito no conjunto dos reais e definidas as cotas superior e inferior, define-se os conceitos de extremo e ínfimo.

Dado o corpo ordenado $\mathbb{R}$ e sendo A um subconjunto de $\mathbb{R}$, com A limitado superiormente.

Definição 2.9: Um elemento $b \in \mathbb{R}$ chama-se **supremo** do subconjunto A é a menor das cotas superiores de A em $\mathbb{R}$. Para que b seja determinado como supremo é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- Para todo $x \in A$, tem-se $x \leq b$;
- Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in A$, então $b \leq c$

***Propriedade**:* Se dois elementos $b \ e \ b'$ em $\mathbb{R}$ satisfazem as condições citadas, tem-se que $b \ \leq \ b'$ e $b' \leq \ b$, ou seja $b = \ b'$. Portanto, **o supremo do conjunto**, quando existe é único e é denotado como $sup \ A$.

Definição 2.10: Seja $a \in \mathbb{R}$, chama-se **ínfimo** do subconjunto A limitado inferiormente, quando a é a maior das cotas inferiores de A em $\mathbb{R}$. Para que a seja determinado como **ínfimo** é necessário e suficiente que sejam satisfeitas as seguintes condições:

- para todo $y \in A$, tem-se $a \leq y$;
- se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq y$ para todo $y \in A$, então $c \leq a$.

***Propriedade*:** Se dois elementos $c \ e \ c'$ em $\mathbb{R}$ satisfazem as condições citadas, tem-se que $c \ \leq \ c'$ e $c' \leq c$, ou seja $c = c'$. Portanto, o ínfimo do conjunto, quando existe é único e é denotado como $inf \ A$.

Uma importante consequência da definição de supremo é dada como:

Propriedade de Arquimedes. Sendo $x > 0$ e y, dois números reais quaisquer, então, existe pelo menos um número natural n tal que $nx > y$, segundo [5]

Prova:

Supondo por absurdo, que $\forall \, n \in \mathbb{N}$, temos $nx \leq y$. Consideremos então o conjunto $A = \{nx\}$. Sendo A não vazio, pois $1 \cdot x = x \in A$, e limitado superiormente por y, logo admite supremo. Seja s o supremo de A.

Como $x > 0, s - x < s$; assim, evidentemente $s - x$ não é cota superior de A; logo existe um número natural m tal que $s - x < mx$ e daı $s < (m + 1)x$ que é uma contradição.

Logo, $nx > y$ para algum natural n.

Após estas definições fica, de uma maneira intuitiva, ao aluno determinar o ínfimo e o supremo em um intervalo fechado ou ainda nas sequências numéricas.

Exemplo 2.5: Seja $Y \in Q$ a sequência definida como $\frac{1}{2^n}$ com $n \in \mathbb{N}$.

Afirma-se que $inf\ Y = 0$ e $sup\ Y = \frac{1}{2}$, primeiro, temos $\frac{1}{2} \in Y$ e $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$ para todo $n > 1$. Logo $\frac{1}{2}$ é o maior elemento de Y, consequentemente $sup\ Y = \frac{1}{2}$. Como $0 < \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, observamos que 0 é cota inferior de Y. Agora falta mostrar que nenhum número racional $c > 0$ é cota inferior de Y. Sendo Q arquimedíano, dado $c > 0$, pode-se obter $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > \frac{1}{c} - 1$ ou ainda $1 + n > \frac{1}{c}$.

Pela desigualdade de Bernoulli, tem-se $2^n = (1+1)^n \geq 1 + n > \frac{1}{c}$, ou seja, $\frac{1}{2^n} < c$. Logo nenhum $c > 0$ é cota inferior de Y e, portanto, $inf\ Y = 0$.

O exemplo 2.5 também pode ser tratado como uma função, e o seu gráfico pode explorar os conceitos de ínfimo e supremo de uma maneira visual ao discente.

Dado $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida como $f(n) = \frac{1}{2^n}$, construindo uma tabela com os discentes, tem-se que:

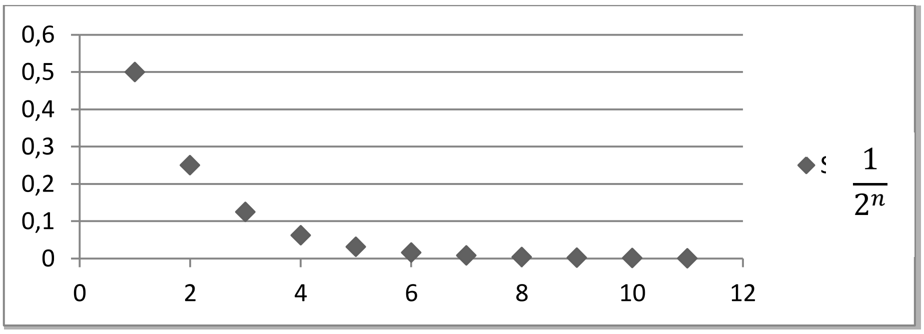
Tabela 2: Pontos de uma sequência.

$\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
$\boldsymbol{f(n)}$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,007813	0,003906

Fonte: Autor.

Com a marcação dos pontos da tabela 2 no gráfico representado na figura 4, observa-se que os pontos ficam cada vez mais próximos de zero e superiormente “sai” de $\frac{1}{2}$. Que são os extremos da função.

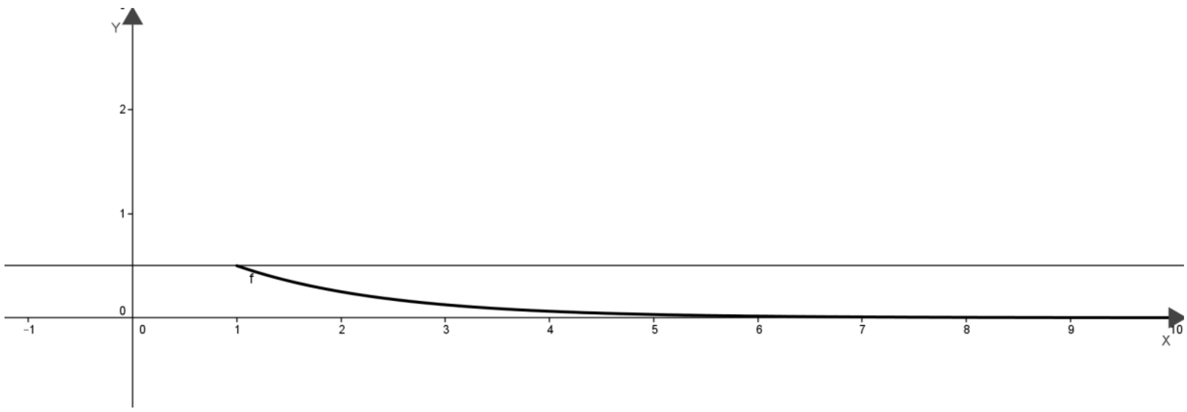
Figura 4: Pontos de uma sequência.



Fonte: Autor.

Se determinarmos o domínio da função sendo $x > 1,\ x \in \mathbb{R}^{+}$, tem o gráfico da figura 5.

Figura 5: Gráfico ínfimo e supremo.



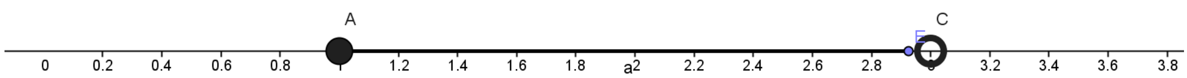
Fonte: Autor.

Exemplo 2.6: Pode-se trabalhar utilizando um subconjunto A dos números reais, onde ele não admitir um máximo, entretanto, poderá admitir uma menor cota superior.

$$A = \{x \in \mathbb{R}\ /\ 1 \leq x < 3\}$$

Observe que o subconjunto A não admite um máximo, porém sua cota superior é igual a 3, ou seja, $sup\ A = 3$. Utilizando a visualização para explorar o tema observe o intervalo na reta dos reais na figura 6.

Figura 6: Intervalo.



Fonte: Autor.

Postulado de Dedekind: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo, segundo [5]

Todo corpo ordenado K possui um subconjunto, que pode-se identificar com o conjunto $\mathbb{Q}$. Como K um corpo ordenado, ele contém o número 1 e, sendo ele fechado em relação à soma, contém todos os naturais: 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, . . .

Sendo K um corpo ordenado, ele contém 0 e o simétrico de cada natural, portanto, ele contém um subconjunto que se pode identificar com os inteiros. Sendo K um corpo ordenado, ele contém os inversos dos inteiros não nulos e produtos destes com inteiros, ou seja, ele contém um subconjunto que podemos identificar com os racionais. Em particular, sendo $\mathbb{R}$ um corpo ordenado, ele contém um subconjunto que pode-se identificar como os racionais.

O postulado de Dedekind determina o corpo dos reais entre todos os corpos ordenados. Podemos simplificar e simplesmente dizer que $\mathbb{R}$ contém $\mathbb{Q}$. A reta r é um modelo geométrico para a representação do corpo $\mathbb{R}$.

2.7 Sequências

Definição 2.11: Uma **sequência** de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ e associando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n, ou $n - ésimo$ termo da sequência.

Notação: $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$, ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (x_n), é usado para indicar a sequência x, para os seus termos usa-se a notação $x(\mathbb{N}) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$.

Exemplo 2.7: Uma sequência formada por números pares $(x_n) = (2, 4, 6, 8. \dots)$, definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = 2n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, monótona crescente.

Observação: A função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ não é necessariamente injetiva: pode-se ter $x_m = x_n$ com $m \neq n$. O conjunto $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ pode ser finito, ou até mesmo ser reduzido a um único elemento, como é o caso de uma sequência constante, em que $x_n = a \,/\, a \in \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.8: Uma sequência formada por $(x_n) = (2, 2, 2, 2. \dots)$, definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = 2, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observação: Quando a sequência (x_n) for injetiva, isto é, quando $m \neq n$ implicar $x_m \neq x_n$, diz-se que ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Exemplo 2.9: Uma sequência formada por números ímpares $(x_n) = (1, 3, 5, \dots)$, onde é definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = 2n - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.12: Uma **sequência** (x_n) é **limitada** quando o conjunto dos seus elementos é limitado, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto quer dizer que todos os termos da sequência pertencem ao intervalo $[a, b]$.

Todo intervalo $[a, b]$ está contido num intervalo da forma $[-c, c]$, com $c > 0$ (intervalo simétrico). Para ver isto, basta tomar $c = \max\{|a|, |b|\}$. Com a condição $x_n \in [-c, c]$ é equivalente a $|x_n| \leq c$, se vê que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe um número real $c > 0$ tal que $|x_n| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí resulta que (x_n) é limitada se, e somente se, $(|x_n|)$ é limitada.

Exemplo 2.10: Uma sequência formada por $(x_n) = (2, 4, 6, 8)$, onde é limitada ao intervalo fechado $[2, 8]$

Observação: Quando uma sequência (x_n) não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

Definição 2.13: Uma sequência (x_n) diz-se **limitada superiormente** quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $(-\infty, b]$.

Exemplo 2.11: Uma sequência definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = -2n, \forall\, n \in \mathbb{N}$, tem-se $(x_n) = (-2, -4, -6, -8, \dots)$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $(-\infty, -2]$.

Definição 2.14: Diz-se que (x_n) é **limitada inferiormente** quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$, ou seja, $x_n \in [a, +\infty]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.12: Uma sequência definida como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(n) = \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, tem-se $(x_n) = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right)$. Isto significa que todos os termos x_n pertencem à semirreta $[1{,}0]$.

<u>Definição</u> 2.15: Uma sequência (x_n) é **limitada** se, e somente se, é limitada superior e inferiormente.

Exemplo 2.13: $x_n = 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto define a sequência constante $(2{,}2, \cdots {,}2, \cdots)$; ela é evidentemente limitada, pois $x(\mathbb{N}) = \{2\}$, não-decrescente e também não-crescente.

Exemplo 2.14: $x_n = 1$ para n par e $x_n = 2$ para n ímpar. A sequência assim definida é $(2{,}1{,}2{,}1, \cdots)$. Seu conjunto de valores é $x(\mathbb{N}) = \{1{,}2\}$. Ela é limitada e não é monótona.

<u>Definição</u> 2.16: Dada uma sequência $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais, uma sequência de x é a restrição da função x a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots\}$ de $\mathbb{N}$. Escreve-se $x' = (x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$, ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ ou $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ para indicar a **subsequência** $x' = x \,/\, \mathbb{N}'$, segundo [10]

Exemplo 2.15: A sequência (x_n) dos números naturais onde os termos de ordem par, ou seja, a subsequência (x_{2n}) é a sequência dos números pares, é uma subsequência dos números $\mathbb{N}$.

As sequências mais estudadas no ensino médio são as progressões aritméticas e geométricas, neste capitulo será feita apenas a sua definição trabalhando suas propriedades posteriormente.

<u>Definição</u> 2.17: Uma **progressão geométrica (P.G.)** é uma sequência $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \dots)$, onde cada termo, a partir do segundo, é o produto $x_{n+1} = x_n . q$ do termo anterior multiplicado por uma constante $\boldsymbol{q}$ chamada de razão da P.G, com o termo geral igual a $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n = x_1 \,.\, q^{n-1}$, conforme [9].

Exemplo 2.16: A sequência $x_n = (2, 4, 8, 16, 32, \dots,)$ onde $x_1 = 2$ e a razão igual $q = 2$.

Definição 2.18: Uma **progressão aritmética (P.A)** é uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$, na qual cada termo, a partir do segundo, é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante r, chamada razão da P.A, com o termo geral igual a $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n = x_1 + (n-1) \cdot r$, conforme [7]

Exemplo 2.17: A sequência $x_n = (2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots,)$ onde $x_1 = 2$ e a razão igual $r = 2$.

Definição 2.19**:** Uma **progressão aritmética de segunda ordem** é uma sequência na qual as diferenças entre cada par de termos $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ formam, entre si, uma progressão aritmética não estacionária, conforme [9].

Exemplo 2.18: A sequência $(x_n) = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre seus termos

$$x_1 = 3 - 1$$
$$x_2 = 6 - 3$$
$$x_3 = 10 - 6$$
$$x_4 = 15 - 10$$
$$x_5 = 21 - 15$$
$$\vdots$$

$\Delta x_n = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ é uma progressão aritmética não estacionária.

2.7.1 Limite de uma sequência

Para dizer que o número real a é limite da sequência (x_n) significa afirmar que quanto maior for o valor de n, mais próximos de a se, está. Para ser mais preciso, e estipulando-se um "erro" $\varepsilon > 0$, encontrar-se um n_0 tal que todos os termos as sequência x_n que possui índice n maior do que n_0 são valores aproximados de a com erro inferior a ε.

Exemplo 2.19: Seja a sequência $x_n = \frac{1}{n}$, o limite da sequência $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ é 0.

Realmente, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$. Logo $n > n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, ou seja, $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

O índice n_0, evidentemente, deve depender de ε, sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de ε, necessite-se tomar n_0 cada vez maior. Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 2.20: Diz-se que o número real a é limite da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = lim\, x_n$, ou $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que $n > n_0$, segundo [10]

Simbólica, tem-se:

$$lim x_n = a. \equiv . \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Assim, pode-se ler a definição escrita, como sendo:

“$\lim x_n = a$ quer dizer que, para todo número real $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$".

Constata-se que se $lim\, x_n = a$ o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, de centro a e raio $\varepsilon > 0$, comporta todos os termos de x_n da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices n. De fato, dado o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, como $lim\, x_n = a$, obtem-se $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Ou seja, $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Portanto, fora desse intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, os termos $x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}$.

Reciprocamente se, qualquer intervalo de centro a contém todos os x_n, salvo talvez para um número finito de índices n então $lim\, x_n = a$. Com efeito, dado qualquer $\varepsilon > 0$, o intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ conterá todos os x_n exceto para um número finito de índices n. Seja n_0 o maior índice n tal que $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja $|x_n - a| < \varepsilon$, isto prova que $\lim x_n = a$.

Deste modo, dado uma sequência x_n se o $\lim x_n = a$, se diz que esta sequência converge para a, e escreve-se $x_n \to a$. Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Caso contrário quando para nenhum número real a, se tenha $\lim x_n = a$, a sequência chama-se divergente.

Agora mostrar-se que uma sequência, não pode possuir dois limites distintos.

Teorema 2.2: (Unicidade do limite). Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ então $a = b$, conforme [10].

Prova:

Seja $\lim x_n = a$. Mostrar- se que para qualquer número real $b \neq a$, não se tem $\lim x_n = b$. Inicialmente, tomando-se $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$ é claro que $\varepsilon > 0$ e que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ e\ (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos. (Se existisse $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ se teria $|a-x| < \varepsilon$ e $|x-b| < \varepsilon$, onde $|a-b| \leq |a-x| + |x-b| < 2\varepsilon = |a-b|$, um absurdo.) Ora, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ para todo $n > n_0$. Logo não é $\lim x_n = b$.

Teorema 2.3: Se $\lim x_n = a$ então toda subsequência (pela definição 2.16) de (x_n) converge para o limite de a.

Prova:

Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_i}, \cdots)$ uma subsequência de (x_n). Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Como os índices da subsequência formam um conjunto infinito, existe entre eles um $n_{i_0} > n_0$. Então $n_i > n_{i_0} \Rightarrow n_i > n_0 \Rightarrow \left|x_{n_i} - a\right| < \varepsilon$. Logo $\lim\ x_{n_i} = a$.

A recíproca nem sempre é verdadeira, como por exemplo para a sequência $x_n = (-1)^n$. Tem-se que x_n é limitada, mas é divergente pois para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, temos que $x_n - a > \varepsilon$ ou $|x_{n+1} - a| > \varepsilon, \forall\ a\ \in \mathbb{R}, n\ \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.4: Toda sequência convergente é limitada.

Prova:

Seja $lim\, x_n = a$ e atribuindo $\varepsilon = 1$, observa-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ou seja $x_n \in (a-1, a+1)$. Seja o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, \cdots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. Sejam c o menor e d o maior elemento de F. Nos leva que todos os termos da sequência x_n estão contidos no intervalo $[c, d]$; logo a sequência é limitada.

Teorema 2.5: Toda sequência monótona limitada é convergente, segundo [10].

Prova:

Dado uma sequência limitada e não decrescente, ou seja, $x_n = \{x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots\}$. Tomando-se $a = \sup\{x_n\ /\ n = 1,2, \cdots\}$. Temos que $a = \lim x_n$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $a - \varepsilon < a$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto dos x_n. Logo existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_n$. Devido a sequência ser monótona, então $n > n_0 \Rightarrow x_{n_0} \leq x_n$ e, portanto, $a - \varepsilon < x_n$. Como $x_n \leq a$ para todo n, nota-se que $n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Assim, temos de fato $\lim x_n = a$, como se queria demonstrar.

Agora reexaminando alguns exemplos anteriores do ponto de vista de convergência, tem-se.

Exemplo 2.20: Toda sequência constante $(b, b, \cdots, b, \cdots)$ é evidentemente convergente e tem limite b . Em particular, $\lim 1 = 1$.

Exemplo 2.21: A sequência $(2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots)$ não converge porque não é limitada.

Exemplo 2.22: A sequência $(2, 1, 2, 1, \cdots)$ é divergente, pois admite duas subsequências (constantes) que convergem para limites diferentes.

2.7.2 Propriedades aritméticas dos limites

Analisa-se o comportamento dos limites de sequências em relação às operações (soma, multiplicação, divisão, etc.) e às desigualdades.

Teorema 2.6: Se $\lim x_n = 0$ e (y_n) é uma sequência limitada, então $\lim x_n \,.\, y_n = 0$ (mesmo que não exista $\lim y_n$).

Prova:

Existe $c > 0$ tal que $|y_n| < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim x_n = 0$, pode-se encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{c}$. Logo, $n > n_0 \Rightarrow |x_n . y_n| = |x_n| . |y_n| < \frac{\varepsilon}{c} . c = \varepsilon$. Isto mostra que $x_n . y_n \to 0$.

Exemplo 2.21: Pode-se usar o exemplo dado anteriormente, Para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos $lim \frac{sen(nx)}{n} = 0$. De fato, $\frac{sen(nx)}{n} = se(nx) . \frac{1}{n}$, com $|sen(nx)| < 1$ e $\frac{1}{n} \to 0$, então $\lim x_n \,.\, y_n = 0$.

Teorema 2.7: Se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$, então de acordo com [10], tem-se.

1. $\lim(x_n + y_n) = a + b$; $\lim(x_n - y_n) = a - b$;
2. $\lim(x_n . y_n) = a . b$;

3. $lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}\ se\ b \neq 0;$

4. $lim\frac{1}{x_n} = \frac{1}{lim x_n}.$

Prova 1:

Dado $\varepsilon > 0$ existem n_1 e n_2 em $\mathbb{N}$ tais que $n > n_1 \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ e $n_2 \Rightarrow |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Então $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Logo $n > n_0$ implica: $|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Isso prova que $\lim(x_n + y_n) = a + b$. O caso da diferença é análogo.

Prova 2:

Tem-se $x_n y_n - ab = x_n y_n - x_n b + x_n b - ab = x_n(y_n - b) + (x_n - a)b$. Ora (x_n) é uma sequência limitada (Teorema 2.4) e $\lim(y_n - b) = 0$. Logo, pelo Teorema 2.6, $\lim[x_n(y_n - b)] = 0$. Por motivo semelhante, $\lim[(x_n - a)b] = 0$. Assim pela parte 1, já demonstrada, tem-se $\lim(x_n y_n - ab) = \lim[x_n(y_n - b)] + \lim[(x_n - a)b] = 0$, donde $lim\, x_n y_n = ab$.

Prova 3:

Em primeiro lugar, note que, como $y_n b \to b^2$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow y_n b > \frac{b^2}{2}$. Basta tomar $\varepsilon = \frac{b^2}{2}$ e achar o n_0 correspondente. Segue-se que, para todo $n > n_0$, $\frac{1}{y_n b}$ é um número (positivo) inferior a $\frac{2}{b^2}$. Logo, a sequência $(\frac{1}{y_n b})$ é limitada. Ora, tem-se $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{y_n b} = (bx_n - ay_n)\frac{1}{y_n b}$. Como $\lim_{n\to\infty}(bx_n - ay_n) = ab - ab = 0$, segue-se pelo Teorema 2.6 que $\lim\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = 0$, e portanto $\lim\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Prova 4:

Sejam (x_n) e (y_n) sequências convergentes. Se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim x_n \leq \lim y_n$. Com efeito, se fosse $\lim x_n > \lim y_n$, então se tem $0 < lim x_n - \lim y_n = \lim(x_n - y_n)$ e, daí, tem-se $x_n - y_n > 0$ para todo n suficientemente grande.

Segue ainda algumas propriedades de limite.

Propriedade 1: Se (x_n) é uma sucessão convergente, então a sucessão $(|x_n|)$ dos valores absolutos é também convergente, e $\lim|x_n| = |\lim x_n|$.

Propriedade 2: Se (x_n) é uma sucessão convergente tal que $x_n \neq 0$ para todo n, e $\lim x_n \neq 0$, então a sucessão $(\frac{1}{x_n})$ é convergente, e $\lim(\frac{1}{x_n}) = \frac{1}{\lim x_n}$.

Propriedade 3: Se (x_n) e (y_n) forem duas sucessões convergentes e $x_n \leq y_n$, para todo n, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Propriedade 4: Se (x_n) e (y_n) forem duas sucessões convergentes e $x_n \leq y_n$, para todo n, (ou para n maior do que um certo n_0), e (x_n) tender para $+\infty$, então (y_n) também tenderá para $+\infty$, conforme [5].

Exemplo 2.23: Examinando-se a sequência de números reais positivos $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$, onde $a > 0$. Ela é decrescente se $a > 1$ e crescente se $0 < a < 1$, sendo limitada em qualquer hipótese. Existe, portanto $l = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$, pode se garantir que $l > 0$. Com efeito, se $0 < a < 1$, então $l = \sup\left\{a^{\frac{1}{n}}; n \in \mathbb{N}\right\} \geq a$. Se for $a > 1$ então $a^{1/n} > 1$, para todo n, logo $l = inf\, a^{1/n} \geq 1$. Afirma-se que se tem $\lim a^{\frac{1}{n}} = 1$. Para provar isso, considerando-se a subsequência $\left(a^{\frac{1}{n(n+1)}}\right) = \left(a^{1/2}, a^{1/6}, a^{1/12}, \cdots\right)$. O Teorema 2.3 e o item 2 do Teorema 2.7, assim tem-se:

$$l = \lim a^{1/n(n+1)} = \lim a^{\frac{\frac{1}{n-1}}{n+1}} = \lim \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{\lim a^{1/n}}{\lim a^{1/(n+1)}} = \frac{l}{l} = 1.$$

Exemplo 2.24: Mostrando-se agora que $\lim \sqrt[b]{n} = \lim n^{1/n} = 1$. Sabe-se que esse limite existe porque a sequência é monótona decrescente a partir do seu terceiro termo. Escrevendo $l = lim\, n^{1/n}$, vemos que $l = \inf\{n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}$. Como $n^{1/n} > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $l \geq 1$. Em particular, $l > 0$. Considerando-se a subsequência $(2n)^{\frac{1}{2n}}$, temos

$$l = \lim[(2n)^{\frac{1}{2n}}]^2 = \lim[\left(2n\right)^{\frac{1}{n}}] = \lim\left[2^{\frac{1}{n}}.n^{\frac{1}{n}}\right] = \lim 2^{1/n}.\lim n^{1/n} = l.$$

Como $l \neq 0$, de $l^2 = l$ concluímos $l = 1$.

Exemplo 2.25: Seja a sequência $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{n-1}{n}$, com $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ e $y_n = \frac{n-1}{n}$. Como $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = 1$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 1 = 1$.

Exemplo 2.26: Considerando-se a sequência $b_n = \frac{n^2-4}{n^2+3n+1}, n \in \mathbb{N}$, mostre que $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Como $b_n = \frac{n^2-4}{n^2+3n+1} = \frac{1-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$, então se pode escrever $b_n = \frac{x_n}{y_n}$, onde $x_n = 1 - \frac{4}{n^2}$ e $y_n = 1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}$. Assim como $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$ e $\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{4}{n^2} = 0$, pelo Teorema 2.7 item 1, tem-se $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{4}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 1 - 0 = 1$, logo $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$. Para o $\lim_{n\to\infty} y_n$ tem-se, $\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1$, então, $\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \frac{1}{1} = 1$.

Teorema 2.8: Seja (x_n) uma sequência convergente. Então, existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo n.

Prova:

Seja r o limite da sequência. Então, dado ε, digamos $\varepsilon = 1$, existe n_0 tal que $|x_n - r| < 1$ para todo $n \geq n_0$. Temos $|x_n| - |r| \leq \left||x_n| - |r|\right| \leq |x_n - r| < 1$. Logo, $|x_n| < |r| + 1$ para todo $n \geq n_0$. Seja agora k' o maior dos números $|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{n_0-1}|$. É claro, pois, que se tomarmos k como sendo o maior dos dois números, k' e $|r| + 1$, então $|x_n| \leq k$ para todo n, como queríamos provar.

Exemplo 2.27: Sequência (x^n) onde $x \in \mathbb{R}$.

Observação: O princípio da indução é o método utilizado para demonstração envolvendo os números naturais. Pode ser descrito assim: “uma propriedade P vale para $n = 1$ e, supõe-se P válida para um K e conseguir concluir que vale para $K + 1$”.

Então P é válida para todos os números naturais.

Lema 2.1: (Desigualdade de Bernoulli) Se r é um número real tal que $r > -1$, então

$$1 + nr \leq (1 + r)^n, n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

Prova: (por indução).

Para $n = 1$, temos $1 + 1r \leq (1 + r)^1 \Rightarrow 1 + r = 1 + r$. Agora supondo ser verdade para algum n_0 e para $n_0 + 1$. (Assim feito, o princípio da indução nos dirá que é verdade para todo n.) Sendo $n = n_0$, e multiplicando-se ambos os membros por $1 + r$, vem:

$$(1+n_0r)(1+r) \leq (1+r)^{n_0+1}, \quad (2)$$

que fornece,

$$1+(n_0+1)r+n_0r^2 \leq (1+r)^{n_0+1}. \quad (3)$$

Assim a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

1) Analisando-se agora os casos de convergência de (x^n).

- **Caso 1**. $x > 1$. Então $x = 1 + r$, onde $r > 0$. Pela desigualdade (2) acima tem-se $x^n = (1+r)^n \geq 1 + nr$.

Pela propriedade 4 dos limites, segue-se que $x^n \to +\infty$.

- **Caso 2**. $x < -1$. Neste caso os termos ficam alternam de sinal, e tendem em valor absoluto para $+\infty$. A sequência diverge neste caso.
- **Caso 3**. $x = -1$. A sequência é: $-1, 1, -1, 1, \cdots$, é divergente.
- **Caso 4**. $x = 1$. A sequência é: $1,1,1,1,\cdots$, e convergente.
- **Caso 5**. $x = 0$. A sequência é: $0,0,0,0,\cdots$, e convergente.
- **Caso 6**. $0 < x < 1$. Então $x = \frac{1}{1+r}$, onde $r > 0$. Então, pela desigualdade (2), escreve-se:

$$0 < x^n = \frac{1}{(1+r)^n} \leq \frac{1}{1+nr}.$$

Pela propriedade 3 dos limites, segue-se que $\lim x^n = 0$.

- **Caso 7**. $-1 < x < 0$. Neste caso os termos da sequência alternam de sinal, mas a sequência converge para 0.

2) Sequência $(\sqrt[n]{x})$, onde $x \in \mathbb{R}^+$.

- **Caso 1**. $x > 1$. Neste caso $\sqrt[n]{x} > 1$ e assim.

$\sqrt[n]{x} = 1 + y_n$, onde $y_n > 0$, e varia para cada n, obtém-se $x = (1+y_n)^n \geq 1 + ny_n$, onde usamos a desigualdade (2) acima.

Então obtem-se $0 < y_n \leq \frac{x-1}{n}$.

Pela propriedade 3 dos limites, se concluí que $\lim y_n = 0$, então a sequência $(\sqrt[n]{x})$ converge para 1, pois $\lim(\sqrt[n]{x}) = 1 + \lim y_n = 1$.

- **Caso 2**. $0 < x < 1$. Neste caso $(\sqrt[n]{x}) < 1$ assim

$\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+c_n}$, onde $c_n > 0$, e varia com n. De $\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+c_n}$ e (2) obtêm-se $x = \frac{1}{(1+c_n)^n} \leq \frac{1}{1+nc_n}$. De onde se segue $0 < c_n \leq (\frac{1}{x} - 1)\frac{1}{n}$.

Portanto, $c_n \to 0$, quando $n \to \infty$. E daí $(\sqrt[n]{x})$ converge para 1, pois $\lim\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{1+\lim c_n} = 1$.

3) Sequência $\left(\sqrt[n]{n}\right)$, necessita-se da seguinte desigualdade.

Lema 2.2. Se r é um número real tal que $r \geq 0$, então,

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)r^2/2. \quad (4)$$

Prova: (por indução)

Para $n = 1, (1+r)^1 \geq 1 + 1r + \frac{1(1-1)r^2}{2} \Rightarrow 1 + r \geq 1 + r$. Agora se supondo algum n_0 e para $n + 1$ (o que provará para todo n). Tomando (4) com $n = n_0$ e multiplicando ambos os membros por $1 + r$, tem-se:

$$(1+r)^{n_0+1} \geq 1 + (n_0+1)r + \frac{n_0(n_0+1)r^2}{2} + n_0(n_0-1)r^3/2. \quad (5)$$

Como o último termo no segundo membro de (5) é positivo, podemos eliminá-lo e a desigualdade em (5) fica preservada. Mas, então, tem- se precisamente (4) para $n = n_0 + 1$. O lema está provado.

Observação. É claro que, sendo $r \geq 0$, a desigualdade (4) implica

$$(1+r)^n \geq n(n-1)r^2/2. \quad (6)$$

Voltando a sequência $\left(\sqrt[n]{n}\right)$, escreve-se:

$$\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1 + h_n, \ h_n > 0. \quad (7)$$

Aplicando (6) tem-se:

$$n = (1+h_n)^n \geq n(n-1){h_n}^2/2.$$

O que segue $0 < h_n \leq (\frac{2}{n-1})^{\frac{1}{2}}$.

Pela propriedade 3 dos limites, tem-se que $\lim h_n = 0$. Como o $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1 + \lim h_n$, se concluí que $\sqrt[n]{n} \to 1$.

2.7.3 Sequências Monótonas.

Definição 2.21: Uma sequência (x_n) é monótona não decrescente se $x_1 \leq x_2 \leq \cdots$. E não crescente se $x_1 \geq x_2 \geq \cdots$.

Usa-se a nomenclatura não decrescente (ou não crescente) para enfatizar que alguns termos podem ser iguais. Os nomes crescente e decrescente são reservados para os casos em que todos os termos são diferentes: $x_1 < x_2 < \cdots$. e, $x_1 > x_2 > \cdots$.respectivamente. Exemplos de sequências crescentes são $(x_n) = (n)$ e $(x_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$, conforme [5]

Teorema 2.9: Seja (x_n) uma sequência não decrescente tal que o conjunto $\{x_n\}$ tem uma cota superior. Então, (x_n) é convergente e seu limite é o supremo do conjunto $\{x_n\}$.

Prova:

Dado uma sequência x_n e sendo m o $\sup de \{x_n\}$, Mostrando-se que (x_n) converge para m. Dado um $\varepsilon > 0$, existe x_{n_0}, tal que $x_{n_0} > m - \varepsilon$. Como a sequência é monótona não decrescente, segue-se que $x_n > m - \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Logo, $|x_n - m| < \varepsilon$ o que continua que a sequência (x_n) converge para m.

Exemplo 2.28: Mostre que a sequência $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$, converge para 2, segundo [5]

Sendo: $X_n = \sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \cdots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Tem-se inicialmente que mostrar que a sequência é não decrescente:

Prova: (Por indução)

Como $x_1 < x_2$, tem-se ainda que:

$2 < 2 + \sqrt{2}$ (aplicando a raiz em ambos os membros da desigualdade), obtem-se:

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}}$$

Supondo verdadeiro que $X_n < X_{n+1}$, para certo $n \geq 1$, tem-se:

$$X_{n+1} < X_{n+2}.$$

De fato $\sqrt{2 + X_n} < \sqrt{2 + X_{n+1}} \Leftrightarrow X_n < X_{n+1}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Como a sequência é crescente, ou seja, não decrescente, resta se mostrar que ela tem uma cota superior.

Se $X_n \leq 2$ para um $n \geq 1$, então $\sqrt{2 + X_n} \leq \sqrt{2+2} \Leftrightarrow X_{n+1} \leq 2$, portanto

$$X_n \leq 2.$$

Assim tem-se que: $\exists\ a \in \mathbb{R} \,/\, X_n \to a$,

$$X_{n+1} = \sqrt{2 + X_n},$$

$$(X_{n+1})^2 = 2 + X_n,$$

$$a^2 = 2 + a,$$

$a^2 - a - 2 = 0 \ \to \begin{cases} a' = 2 \\ a'' = -1 \end{cases}$. Portanto, a cota superior é igual a 2.

Logo, pelo Teorema 2.9 a sequência converge para 2.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Para se afirmar que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ seja limitado, é necessário que exista um $k > 0$ tal que $|x| \leq k$, para todo $x \in A$. Assim um conjunto é limitado se ele estiver contido em algum intervalo. Ou ainda, se ele tiver cota inferior e cota superior.

Teorema 2.10: (Bolzano-Weierstrass.) Toda sucessão limitada (x_n) contém uma subsequência convergente, segundo [5].

Prova:

Seja um conjunto B de reais, tal que o conjunto $\{x_n\}$ é limitado, então existe $k > 0$ tal que $|x_n| \leq k$ para todo n. Deste modo, $-k$ é cota inferior para o conjunto B. Assim, pelo postulado de Dedekind, B tem ínfimo; seja m tal ínfimo. Pode se construir uma subsequência (x_{nj}) de (x_n) de modo que $x_{n_j} \to m$. O intervalo $(m-1, m+1)$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n, pois, caso contrário, $m-1$ estaria em B e, portanto, m não seria o ínfimo de B; tomando-se um desses termos de x_n, como por exemplo x_{n_1}, temos, $|x_{n_1} - m| < 1$.

Note que o intervalo $(m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ contém termos da sequência (x_n) para uma infinidade de valores de n, como mostrado no caso precedente; seja x_{n_2} um tal termo e tal que $n_2 > n_1$. (Observa-se que x_{n_2}pode ser igual a x_{n_1}.) Então, $|x_{n_2} - m| < 1/2$.

Assim por diante, tomamos $x_{n_j} \in (m - \frac{1}{j}, m + \frac{1}{j})$ e tal que $n_j > n_{j-1} > \cdots > n_2 > n_1$, constrói-se uma subsequência (x_{n_j}) de (x_n) de modo que $x_{n_j} \to m$, quando $j \to \infty$, pois $\left|x_{n_j} - m\right| < \frac{1}{j}$, o que completa a demonstração do teorema.

Sendo (x_n) uma sequência e c um número real. Pode se dizer que c é um ponto de acumulação desta sequência (x_n) se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um número infinito de inteiros n de modo que $|x_n - c| < \varepsilon$. Pode-se concluir que c é um ponto de acumulação da sucessão (x_n), se houver uma subsequência convergindo para c.

Exemplo 2.29: A sequência $3, 3, 3, \ldots$ tem um único ponto de acumulação: 3;

Exemplo 2.30: A sequência $1,\ \frac{1}{2},\ 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \ldots$,tem dois pontos de acumulação: 1 e 0;

Exemplo 2.31: A sequência $1,2,1,3,1,4, \ldots$ tem um ponto de acumulação: 1.

Tomando-se A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Um real c é um ponto de acumulação do conjunto A se, para cada $\varepsilon > 0$, existir um número infinito de $y \in A$ tais que $|y - c| < \varepsilon$. É evidente que conjuntos A com um número finito de pontos não pode se ter pontos de acumulação. Do mesmo modo existem conjuntos infinitos que não têm pontos de acumulação; por ex.,$\{1,2,3, \cdots\}$. Entretanto vale o seguinte resultado.

Proposição 2.3: Todo conjunto infinito limitado A de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação, conforme [5].

Prova:

Se um conjunto A é infinito então existe uma aplicação injetiva de $\mathbb{N}$ em A, isto é, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos um $x_n \geq x_m$ para $n \neq m$. Pode se demonstrar a proposição considerando a sequência (x_n) e aplicando o Teorema de Bolzano Weierstrass assim conclui-se que existe um ponto de acumulação c da sequência (x_n). Deste modo percebe-se que c também e ponto de acumulação de A.

Exemplo 2.32: Os pontos de acumulação do conjunto $[0,2] = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x \leq 2\}$ são todos os pontos de $[0,2]$.

Exemplo 2.33: Os pontos de acumulação do conjunto $\{x \in \mathbb{Q} \,/\, 0 < x < 2\}$ são todos os pontos de $[0,2]$.

Exemplo 2.34: O conjunto $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots\}$ tem um único ponto de acumulação: 0

2.8 Séries Numéricas

Neste momento, se tratará de atribuir um sentido a igualdade do tipo $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1$, onde o primeiro membro é uma soma de infinitas parcelas. O que se procura é o seu limite, quando n tende ao infinito, ou seja, $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)})$. Desta forma dado arbitrariamente um $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$, difere de 1 por meio de ε, segundo [5].

Assim sendo se definirá as somas infinitas através de limites.

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + \cdots, \text{ (1)}$$

onde os termos x_n são números reais dados.

Essa expressão é chamada de uma série numérica. Associada essa sequência de (A_n), chamada sequência das reduzidas ou das somas parciais, que é assim definida:

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} x_j = x_1 + \cdots + x_n.$$

Quando a série convergir, escreve-se:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

Exemplo 2.35: Para escrevermos a dizima periódica, em forma de fração, pode se interpreta-la como a soma de termos uma progressão geométrica de infinitos termos, seja a dizima 0,1111..., tem-se:

$$S_1 = 0{,}1 = \frac{1}{10};$$

$$S_2 = 0{,}1 + 0{,}01 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2};$$

$$S_3 = 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3};$$

$$\vdots$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}.$$

Para se calcular o valor dessa série se precisa encontrar o limite dessa sequência. Assim temos que $S_n = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots + \frac{1}{10^n}$. Multiplicando S_n por $\frac{1}{10}$, vem

$\frac{1}{10}S_n = \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots + \frac{1}{10^{n+1}}$, subtraindo as duas equações $\frac{9}{10}S_n = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \Rightarrow S_n = \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$.

Calcula-se o $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{9}$.

Teorema 2.11: A série $S = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, converge se, e somente se, dado$\varepsilon > 0$, existir n_0 (que pode depender de ε) tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} x_j\right| < \varepsilon$ para todos $m \geq n \geq n_0$.

Teorema 2.12: (Série alternadas) Seja (x_n) uma sequência de números reais não negativos, tais que $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$ e $\lim x_n = 0$. Então a série $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots$ converge.

Prova: Inicialmente, percebe-se que as reduzidas de ordem par formam uma sequência não decrescente. Então, $S_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{2n-1} - x_{2n})$, e como $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$, então cada expressão entre parênteses são negativas.

Do mesmo modo, a sequência das reduzidas de ordem ímpar é não crescente. $S_{2n+1} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) - \cdots - (x_{2n} - x_{2n+1})$, onde as expressões em cada parêntese são não-negativas. E ainda, observa-se que a sequência (S_{2n}) é limitada superiormente, pois $S_{2n} \leq S_{2n+1} \leq S_1$, assim S_1 é cota superior para essa sequência. Da mesma maneira, a sequência (S_{2n+1}) é limitada inferiormente, visto que $S_{2n+1} \geq S_{2n+2} \geq S_2$, o que nos dá S_2 como cota inferior para a sequência das reduzidas de ordem ímpar. Conclui-se que $\lim S_{2n} = r$ e $\lim S_{2n+1} = s$. Como $\lim S_{2n+1} = \lim S_{2n} + \lim x_{2n+1}$, segue-se que $r = s$, o que demonstra o teorema.

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é majorada por uma série de termos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, se existir x_0 tal que, para todo $n > n_0$, se tenha $|x_n| \leq y_n$. É comum dizer-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ é uma majorante da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Teorema 2.13: A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ será convergente se ela possuir uma série majorante $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, que converge.

Prova:

Basta observar que $\left|\sum_{j=n}^{m} x_j\right| \leq \sum_{j=n}^{m} |x_j| \leq \sum_{j=n}^{m} y_j$, para $n_0 \leq n \leq m$, e aplicar o Teorema 2.11.

Teorema 2.14: Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ convergir, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ também convergirá, conforme [5]. Para a Prova basta aplicar o Teorema 2.13.

Teorema 2.15: (Teste da razão ou teste de D'Alembert) Seja uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ agora suponha que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ exista. Sendo l tal limite, então:

(i) a série converge absolutamente se $l < 1$;

(ii) a série diverge se $l > 1$; (iii) o teste é inconcludente se $l = 1$, segundo [5].

Prova:

(i) Seja que $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq y$, para $n \geq n_0$, (1)

onde y é qualquer real de modo que $l < y < 1$.

De (1) obtem-se

$$\left|x_{n_0+1}\right| \leq y\left|x_{n_0}\right|;$$

$$\left|x_{n_0+2}\right| \leq y\left|x_{n_0+1}\right|;$$

.

.

.

$$\left|x_{n_0+p}\right| \leq y\left|x_{n_0+p-1}\right|;$$

$$\left|x_{n_0+p}\right| \leq y^p\left|x_{n_0}\right|.$$

Esta desigualdade mostra que a série $\sum_{p=1}^{\infty}\left|x_{n_0+p}\right|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{p=1}^{\infty}\left|x_{n_0}\right|y^p = \left|x_{n_0}\right|\sum_{p=1}^{\infty} y^p$. Como $y < 1$, segue-se pelo Teorema 2.13, que a série $\sum_{p=1}^{\infty}|x_n|$ converge.

(ii) Como $l > 1$, segue-se que existe n_0 tal que, para $m \geq n_0$, tem-se $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq 1$. Assim $|x_{n+1}| \geq |x_n|$, para $n \geq n_0$. Portanto, (x_n) não pode convergir para 0. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ deve divergir.

(iii) Para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} x^{-2}$, temos $l = 1$. Mas nestes casos note que, a primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

Teorema 2.16: (Teste da raiz ou teste de Cauchy) Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e supondo-se que $\lim \sqrt[n]{|x_n|}$ exista. Seja l esse limite. Então (i) a série converge absolutamente se $l < 1$; (ii) a série diverge se $l > 1$; (iii) o teste é inconcludente se $l = 1$, conforme [5].

Prova:

(i) Seja $\lim \sqrt[n]{|x_n|}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $\sqrt[n]{|x_n|} \leq y$, em que $y \in \mathbb{R}$ tal que, $l < y < 1$. Como $\sqrt[n]{|x_n|} \leq y \Rightarrow |x_n| \leq y^n$, para $n \geq n_0$. O que mostra que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ é majorada pela série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} y^n$. Como $y < 1$, segue-se pelo Teorema 2.13, que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ converge.

(ii) Se $l > 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$ tem-se $\sqrt[n]{|x_n|} \geq 1$ o que nos dá $|x_n| \geq 1$ para $n \geq n_0$ e portanto a sequência (x_n) não tende a zero, daí conclui-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

(iii) No caso em que $l = 1$ para as séries $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$. A primeira série diverge, enquanto a segunda converge.

<u>Observação</u>: Uma somatória, onde uma parte de cada parcela cancela uma parte da anterior, é conhecida como soma telescópica. Ou seja, sendo (X_n) uma sequência, e considerando-se a somatória abaixo:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j$$

Desenvolve-se a somatória, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - \sum_{j=1}^{n} X_j \,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{i=2}^{n+1} X_i - \sum_{j=1}^{n} X_j \,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = \sum_{i=2}^{n} (X_i + X_{n+1} - X_1) - \sum_{j=1}^{n} X_j \,;$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{j+1} - X_j = X_{n+1} - X_1.$$

Tal somatória $X_{n+1} - X_1$, é dita soma telescópica.

3. Funções

Um dos principais conceitos estudados no ensino médio, é o conceito de funções neste capítulo, com isso apresenta-se alguns conceitos necessários para desenvolver a inter-relação entre progressão aritmética e funções.

Definição 3.1: Dados os conjuntos A e B, uma função $f: A \to B$, onde se lê “função de A em B” é um conjunto de instruções que determina como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$, onde $y = f(x)$.

O conjunto A é denominado domínio da função, representado como $Dom\,(f)$, B o contra domínio da função f, denotado como $CD(f)$. E, para cada $x \in A$, chama-se de imagem da função f, os elementos de $y \in B$ que são associados a $x \in A$ na relação entre A e B, que representaremos por $Im(f)$, conforme [8].

Como exemplos de funções pode se relacionar algumas situações em diferentes conceitos matemáticos.

Exemplo 3.1: A área da circunferência S, que depende apenas do seu raio r, assim sua área pode se escrever como:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, temos: S(r) = \pi \cdot r^2$$

Exemplo 3.2: Uma aplicação financeira, em regime de juros compostos e com taxa de juros i fixa, onde C_0 é o capital inicial, t é o tempo em meses, assim tem-se o capital final C em função do tempo de aplicação, como sendo a função:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

$$C(t) = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Exemplo 3.3: Supondo-se que uma pessoa trabalhe como representante de uma empresa, que se dedica à criação de jogos para computador. Seu salário $f(n)$ é de $R\$\ 2000{,}00$ fixos por mês, acrescidos de $R\$\ 15{,}00$ por jogo vendido n.

A função do seu salario em relação ao número de jogos que vendeu se da por:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$f(n) = 15.n + 2000.$$

Observa-se, que o domínio esta restrito ao número de dias do mês.

Para uma função real de variável real pode-se estabelecer os seguintes conceitos:

Definição 3.2: A **função** f diz-se **injetiva** se para todos os pontos do domínio $x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$

Exemplo 3.4: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 3x + 2$ é injetiva, pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 \neq x_2$ tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 3.3: A **função** f diz-se **crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Exemplo 3.5: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 2x$ é crescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Definição 3.4: A **função** f diz-se **estritamente crescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 3.6: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = 3x - 2$ é estritamente crescente, pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 3.5: A **função** f diz-se **decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Exemplo 3.7: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x + 2$ é decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definição 3.6: A **função** f diz-se **estritamente decrescente** se para todos os pontos do domínio $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

Exemplo 3.8: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x$ é estritamente decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

<u>Definição</u> 3.7: A função f diz-se **monótona** se é crescente ou decrescente no seu domínio.

Exemplo 3.9: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x + 2$ é decrescente , pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) \geq f(x_2)$. Assim a função é monótona.

<u>Definição</u> 3.8: A função f diz-se **estritamente monótona** se é estritamente crescente ou estritamente decrescente no seu domínio.

Exemplo 3.10: A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como: $f(x) = -x$ é decrescente, pois $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Assim ela é estritamente monótona.

3.1 Produto cartesiano

Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um elemento x, chamado de primeira coordenada de p e um elemento y, chamado segunda coordenada de p.

Para A e B dois conjuntos não vazios.

<u>Definição</u> 3.9: O **produto cartesiano** de A por B é definido como sendo o conjunto cujos elementos são todos os pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B. Indica-se o produto cartesiano de A por B por $A \times B$. Simbolicamente, tem-se:

$$A \times B = \{(x, y) \ / \ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

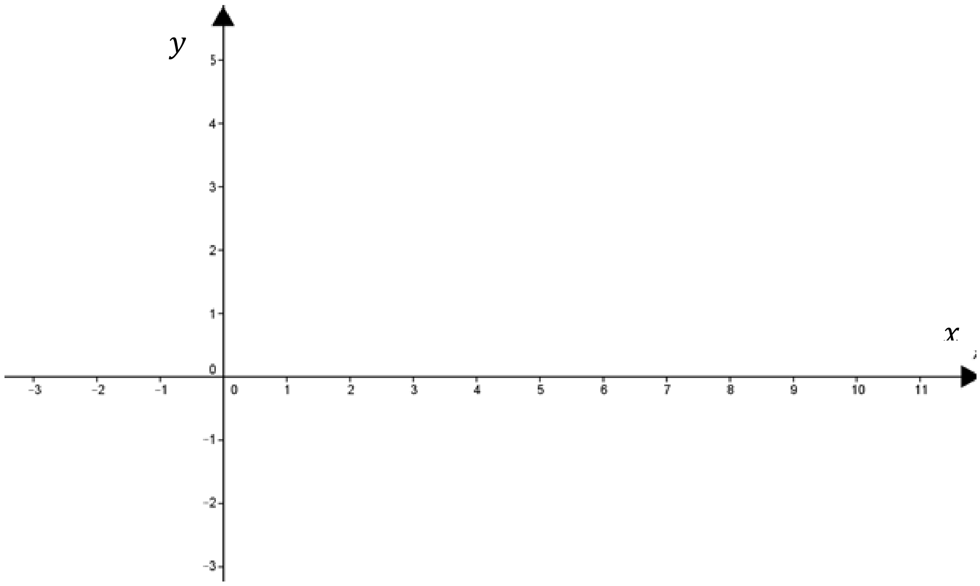
Exemplo 3.11: Sejam A e B dois conjuntos não vazios, com $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$ o seu produto cartesiano $A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,3), (2,5)\}$.

3.1.1 O Plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$

Os egípcios se utilizavam de um sistema de referência com duas retas perpendiculares em seus projetos e construções, já os romanos, dividiam os campos por meio de linhas retas paralelas entre si, perpendiculares a uma linha de referência. Mas foi René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês que em sua obra “La Geométrie” introduziu a noção de coordenadas no plano, ao estabelecer dois eixos fixos que se interceptam em um ponto chamado origem do sistema, Descartes introduziu formas euclidianas dentro de um plano bidimensional, determinados por duas retas perpendicular entre si, mais tarde chamado de plano cartesiano, em homenagem a esse matemático, como relatado em [1].

Os elementos $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, são os pares ordenados de números reais. Eles surgem com as coordenadas cartesianas de um ponto P do plano ($x =$ abscissa, $y =$ ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais Ox e Oy, que se interceptam no ponto O, chamado origem do sistema de eixos cartesianos.

Figura 7: Plano Cartesiano.



Fonte: Autor.

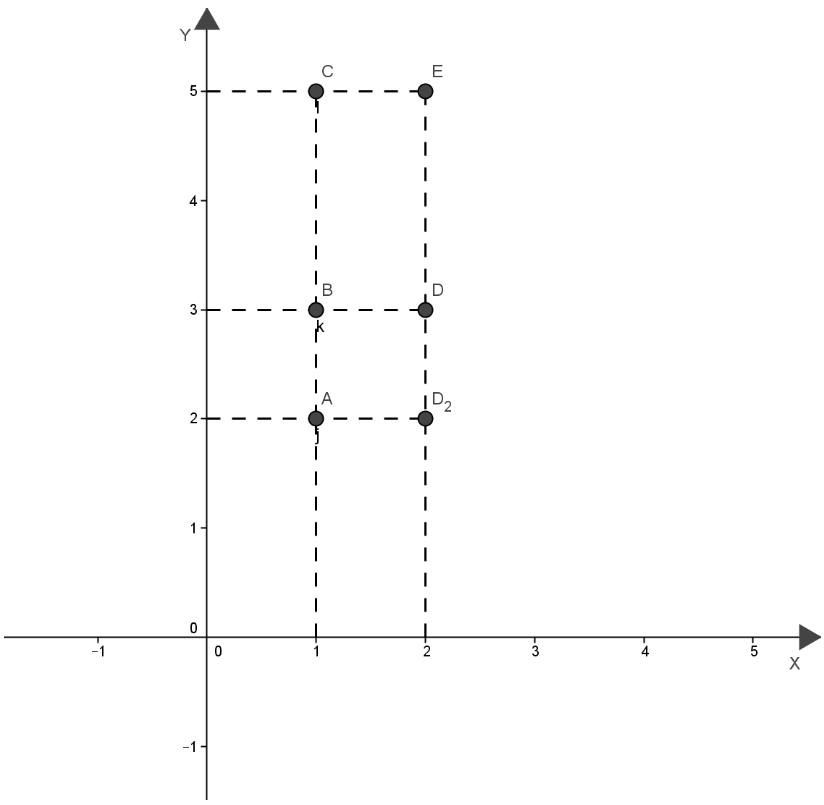
3.1.2 Representação gráfica do Produto Cartesiano

Sejam duas retas ortogonais e sobre a reta horizontal representa-se o conjunto A e sobre a reta vertical, o conjunto B. Tracemos paralelas as retas pelos pontos que representam os elementos de A e de B. Os pares ordenados serão representados pelas interseções dessas paralelas. Tem-se o gráfico de $A \times B$, isto é, sua representação gráfica.

Exemplo 3.12: A representação gráfica do produto cartesiano

$A \times B = \{A = (1,2), B = (1,3), C = (1,5), D = (2,2), E = (2,3), F = (2,5)\}$ é dada por:

Figura 8: Produto Cartesiano.



Fonte: Autor.

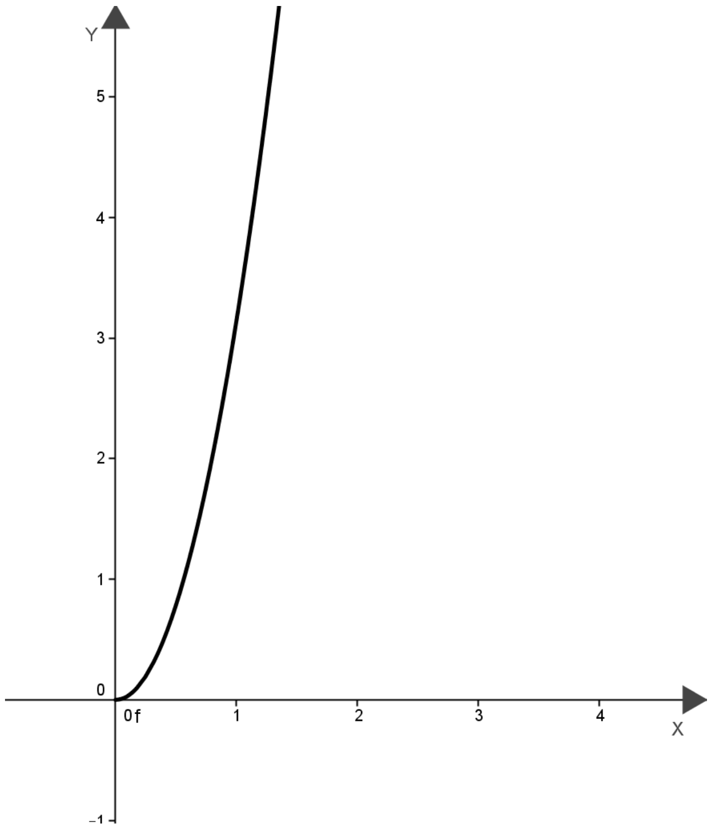
3.2 Gráficos de Funções

A representação geométrica de uma função com uma variável real é dada por seu gráfico no plano coordenado xOy, conforme [8].

<u>Definição</u> 3.10: O **gráfico de uma função** $y = f(x)$ é um subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$, dado por $G(f) = \{(x,y) \;/\; y = f(x), \forall\, x \in Dom(f)\}$.

Exemplo 3.13: Geometricamente $G(f)$ do exemplo 3.1, citado como exemplo de uma função e definida como $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, com $S(r) = \pi \cdot r^2$, pode ser construído relacionando se os pontos do $Dom(f)$ com os pontos da $Im(f)$.

Figura 9: Gráfico da função área.



Fonte: Autor.

Dentre as funções que são estudadas no ensino médio, convém se destacar as funções afim e quadrática para se embasar os estudos de progressões aritméticas.

3.3 Função afim

Uma das funções utilizadas para expressar algumas situações do cotidiano é a função afim, como o exemplo 3.2, citado como uma situação descrita de função.

Definição 3.11: Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de afim quando existem constantes a, b tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor b, chamado de valor inicial, pois para $f(0)$ o valor de $f(0) = b$.

O valor de a, pode ser determinado conhecido dois pares ordenados da função.$(x_1, f(x_1))$ e $((x_2, f(x_2))$, assim tem-se:

$$f(x_1) = ax_1 + b \text{ e}$$

$$f(x_2) = ax_2 + b.$$

Assim, obtem-se:

$$f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_2 + b)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = a$$

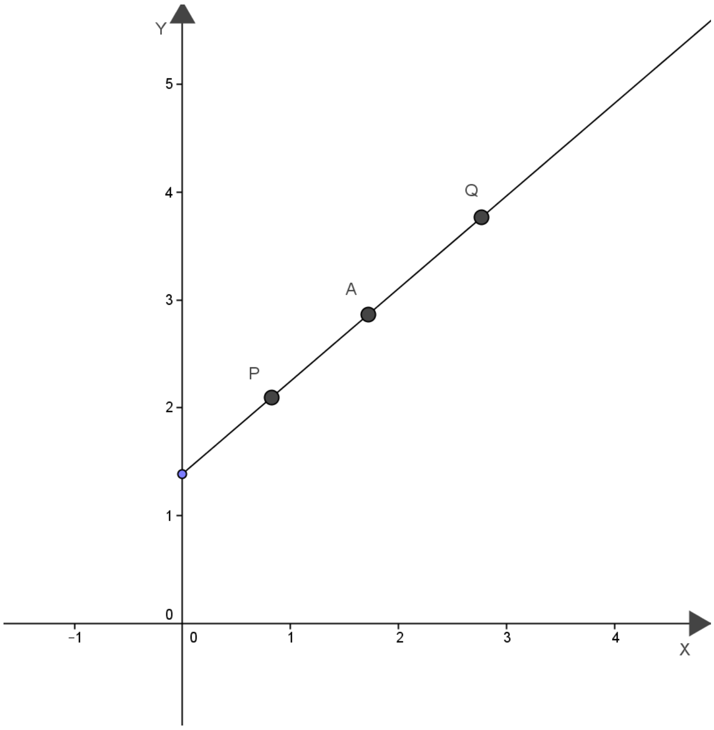
Dados $x, x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x+h)}$ é chamado de **taxa de variação da função** f no intervalo de extremos $x, x + h$.

Exemplo 3.14: O preço a pagar em uma corrida de taxi é dado por uma função afim na forma $f(x) = ax + b$, onde a é o valor do quilometro rodado, b o valor da bandeira e $f(x)$ o preço a ser pago, convém se ressaltar que nesta caso o domínio são os números reais positivos $\mathbb{R}^+$, pois não tem-se quilômetros rodados negativo, os quilômetros rodados negativos representam apenas o sentido do movimento, assim:

$$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$

Explorando o conceito graficamente na figura 10, tem-se:

Figura 10: Gráfico de uma função afim.



Fonte: Autor.

O gráfico de uma função afim é uma reta, para isto basta mostrar que três pontos quaisquer da reta são colineares, segundo [8].

Dados as coordenadas dos pontos iguais a:

$$P = (x_1, ax_1 + b)$$

$$A = (x_2, ax_2 + b)$$

$$Q = (x_3, ax_3 + b)$$

Para que eles sejam colineares, é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(A,Q), d(P,Q), d(P,A)$ seja igual à soma dos outros dois, supondo que $x_1 < x_2 < x_3$, pela expressão da distância entre dois pontos tem-se:

$$d(A,Q) = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + a^2(x_3 - x_2)^2} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2.(1 + a^2)} = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + a^2(x_3 - x_1)^2} = \sqrt{(x_3 - x_1)^2.(1 + a^2)} = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

$$d(P,A) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2.(1 + a^2)} = (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Então tem-se que a distância $d(P,Q) = d(P,A) + d(A,Q)$.

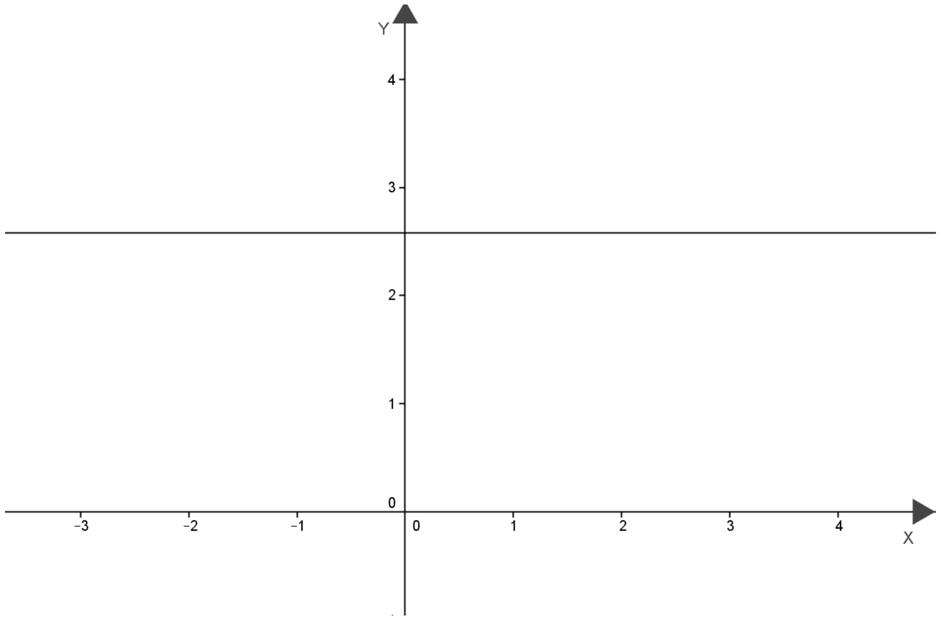
Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, faz interseção com o eixo OY, ou seja o ponto $T = (0, b)$.

O coeficiente a da função também pode se chamar de coeficiente angular da reta ou inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas, pode-se obter a através das coordenadas de dois, tomando os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Como já mostrado $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)}$, onde P_1 e P_2 são pontos quaisquer da reta e b a interseção da reta no eixo das ordenadas. Assim pode-se afirmar que toda reta r não perpendicular ao eixo das abcissas é uma função afim.

Podem-se destacar alguns casos particulares da função afim.

- quando $a = 0$, tem-se uma função constante onde a reta é paralela ao eixo das abcissas, mostrado na figura 11,

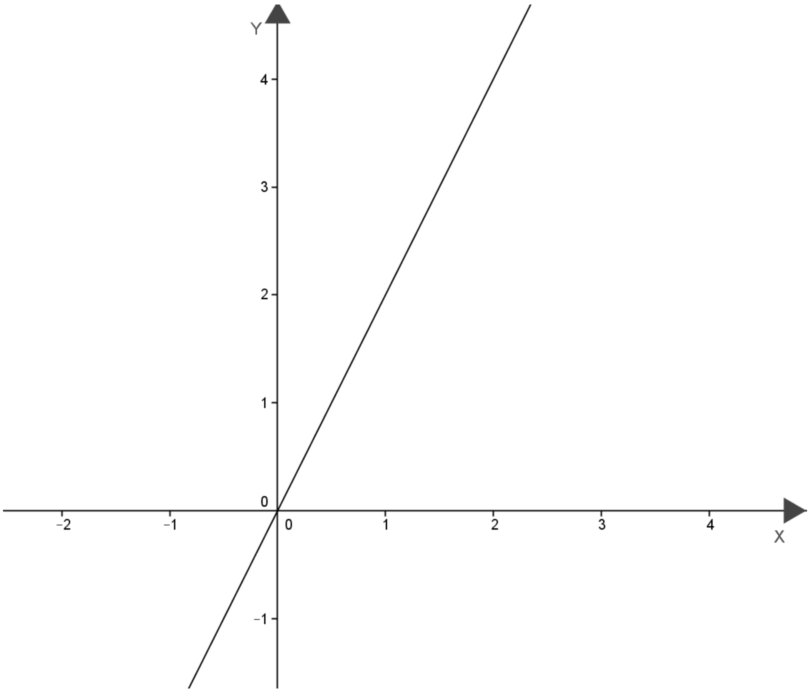
Figura 11: Gráfico da função constante.



Fonte: Autor.

- quando $b = 0$, tem-se uma função linear onde o gráfico é uma reta passando pela origem $(0, 0)$, mostrado na figura 12.

Figura 12: Gráfico da função linear.



Fonte: Autor.

Teorema 3.1: Teorema Fundamental da proporcionalidade.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são validas, segundo [8].

i. $f(nx) = nf(x), \forall\, n \in \mathbb{Z}\ e\ x \in \mathbb{R}$,

ii. Se $a = f(1)$, tem se $f(x) = ax, \forall\, x \in \mathbb{R}$,

iii. $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x\ e\ y\ \in \mathbb{R}$.

Prova:

Provando-se as implicações (i)→(ii), (ii)→(iii) e (iii)→(i). Afim de se demostrar que (i) →(ii), prova-se inicialmente que, para todo número racional $r = \frac{m}{n}$, a hipótese (i) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$.

Com efeito, tem-se:

$$n \cdot f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m \cdot f(x).$$

Logo,

$$f(r \cdot x) = \frac{m}{n} f(x) = r \cdot f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0)$, a monotonicidade indica que $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo.

Além disso, $f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar$ para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostra-se agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Supondo por absurdo, que exista algum número real x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Admitindo-se que $f(x) < ax$, tem-se $\frac{f(x)}{a} < x$:

Tomando-se um número racional r tal que $\frac{f(x)}{a} < r < x$, então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deve-se ter $f(r) < f(x)$.

Esta contradição completa a prova de que (i)→(ii).

Para mostrar que (ii)→ (iii) tomando-se $a = f(1)$, com $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

E, finalmente por indução pode-se demonstra que (iii)→ (i) .

Seja $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Tomando $x = y$ tem-se $f(x + x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, ou seja, a proposição é válida para $k = 2$.

Supondo-se a proposição válida para um certo k natural temos $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, mas $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Logo, $f((k + 1) \cdot x) = f(k \cdot x + x) = f(k \cdot x) + f(x) = k \cdot f(x) + f(x) = (k + 1) \cdot f(x)$.

Como tem-se $f(0) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) + f(-x) \leftrightarrow f(-x) = -f(x)$. Tomando-se $m = -n$ com n natural tem-se $f(m \cdot x) = f(-n \cdot x) = f\big(n \cdot (-x)\big) = n \cdot f(-x) = n \cdot \big(f(-x)\big) = m \cdot f(x)$, verificando a validade da proposição para todo inteiro.

3.3.1 Caracterização de uma função afim

Para modelar um problema matemático é necessário saber qual tipo de função a situação descreve, assim é necessário caracteriza-la.

Teorema 3.2: Caracterização de Função Afim.

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, e não de x, então f é uma função afim [8].

Prova:

Supondo que a função f seja crescente, tem-se que para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(h+k) = f(x+h+k) - f(x)$$

$$\varphi(h+k) = f\big((x+h)+K\big) - f(x+K) + f(x+K) - f(x)$$

$$\varphi(h+k) = \varphi(h) + \varphi(k).$$

Logo, pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade, considerando-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+K) - f(x) = a \cdot h$. Chamando-se $f(0)$ de b, resulta $f(h) = a \cdot h + b$, ou seja, $f(x) = a \cdot x + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

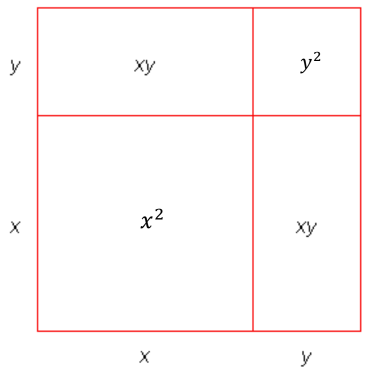
3.4 Função quadrática

Outra função que pode representar modelos matemáticos são as funções quadráticas, como o exemplo 3.1 da área da circunferência.

<u>Definição</u> 3.12: Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **quadrática** quando existem reais a, b e c com $a \neq 0$ de tal forma que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [8].

Exemplo 3.15: Na interpretação do produto $x \cdot y$ de dois números como sendo a área de um retângulo onde os lados medem x e y unidades de medida de comprimento, como mostra a figura13.

Figura 13: Área de um quadrado com lado igual a $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$.



Fonte: Autor.

Como o quadrado de um número x pode ser entendido como a área de um quadrado cujo lado mede x unidades de comprimento, tem-se que $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, assim pode-se escrever a área de um quadrado com lado igual a $(x+y)$ unidades de medida de comprimento como sendo.

A área de um quadrado com lado x unidades de medida de comprimento, mais a área de dois retângulos de lados x e y unidades de medida de comprimento, mais a área do quadrado de lado igual a y unidades de comprimento.

Observando a equação $ax^2 + bx + c = 0$, tem-se:

$$ax^2 + bx = -c.$$

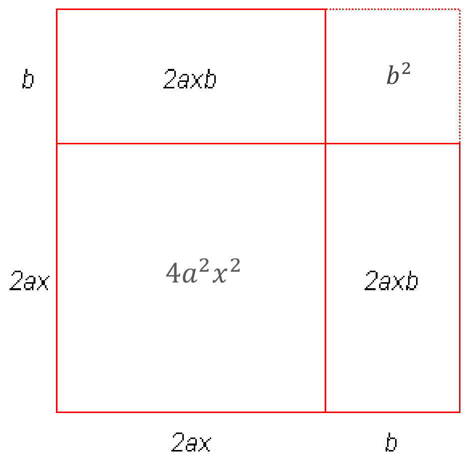
Multiplicando ambos os membros da igualdade por $4a$, tem-se:

$$4a \cdot (ax^2 + bx) = 4a \cdot (-c)$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Observando o lado esquerdo da equação temos que $4a^2x^2 + 4abx$ pode ser interpretado como a soma da área de um quadrado de lado $2ax$ com a área de dois retângulos de lados b e $2ax$, figura 14.

Figura 14: Completamento de quadrados.



Fonte: Autor.

Fazendo um comparativo entre a primeira situação do quadro com lado igual a $(x + y)$, com o quadrado de lado igual a $(2ax + b)$, falta o termo b^2.

Assim se completa o quadrado de lado b, tem-se que:

$$4a^2x^2 + 4abx \ + b^2 = -4ac + b^2.$$

Agora, a equação representa a área de um quadrado com lado igual a $(2ax + b)$, ou seja,

$$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2,$$

$$(2ax + b)^2 + 4ac - b^2 = 0.$$

Assim tem-se:

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = \frac{(2ax+b)^2+4ac-b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a},$$

$$ax^2 + \ bx \ + \ c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac+b^2}{4a^2}.$$

Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros da equação tem-se que:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Como a raiz pode assumir valores positivos e negativos, obtém-se:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, (Fórmula de resolução de equações do 2º grau).

A fórmula de resolução de equações do 2º grau é usada para determinar as raízes da função, conforme apresentado em [4].

3.4.1 Caracterização das Funções Quadráticas

O que caracteriza uma função quadrática, segundo o teorema de caracterização das funções quadráticas apresentado em [9] que diz:

Teorema 3.3: A fim de que a função contínua f seja quadrática é necessário e suficiente que toda a progressão aritmética não constante $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ seja transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $f(x_3) = y_3$, ..., $f(x_n) = y_n$.

Prova:

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com a propriedade de transformar toda PA não constante numa P.A. de segunda ordem não degenerada, ou seja, $(fx_2 - fx_1), (fx_3 - fx_2), \dots, (fx_{n+1} - fx_n), \dots$. é uma PA. Definindo $h(x) = f(x) - f(0)$, obtem-se uma função com as mesmas propriedades de f e com a propriedade adicional de que $h(0) = 0$, conforme [9].

Considerando a P.A. $(1, 2, 3, 4, 5, \cdots)$, a sequência $(h(1), h(2), \dots, h(n), \dots)$, por hipótese, é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Logo, existem constantes a, b e $c \in R$, $a \neq 0$, tais que:

$$h(n) = an^2 + bn + c, \forall n \in N.$$

Como $g(0) = 0$, então $c = 0$ e $h(n) = an^2 + bn$, $\forall n \in N$.

Considere, agora, a P.A. cujos termos são números racionais,

$$(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \dots, \frac{n}{p}, \dots)$$

em que $n, p \in \mathbb{N}$ e p é constante. Analogamente, ao caso anterior, existem constantes $a' \neq 0$ e b' tais que

$$h\left(\frac{n}{p}\right) = a'\,n^2 + b'\,n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$an^2 + bn = h(n) = h\left(\frac{np}{p}\right) = a'\,(np)^2 + b' = (a'\,p^2)n^2 + (b'\,p)n.$$

Portanto,

$$ax^2 + bx = (a'\,p^2)x^2 + (b'\,p)x, \forall x = n.$$

Logo, $a = a'p^2$ e $b = b'\,p$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}, b' = \frac{b}{p}$ e, para quaisquer números naturais n e p vale:

$$g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n = \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}\,n = a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\left(\frac{n}{p}\right).$$

Assim, tem-se que as funções contínuas $h(x)$ e $ax^2 + bx$ são tais que $h(r) = ar^2 + br, \forall\, r \in \mathbb{Q}$. Segue que $h(x) = ax2 + bx, \forall x \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, tomando a P.A. $(-1, -2, -3, \ldots)$ conclui-se que $h(x) = ax^2 + bx, \forall x \leq 0$. Como $h(x) = f(x) - f(0)$, tem-se que $f(x) = h(x) + c$, onde $c = f(0)$, ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ou ainda, como toda função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é escrita na forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

No caso em que os elementos do seu domínio estão restritos aos números naturais, tem-se que:

$$f(x_1) \to y_1,$$

$$f(x_2) \to y_2,$$

$$f(x_3) \to y_3,$$

$$\vdots$$

$$f(x_n) \to y_n.$$

Formando o conjunto imagem $I = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ então se observa-se que as diferenças:

$$d_1 = y_2 - y_1,$$

$$d_2 = y_3 - y_2,$$

$$d_3 = y_4 - y_3,$$

$$\vdots$$

$$d_n = y_n - y_{n-1}.$$

Assim tem-se que a sequência das diferenças $D_n = (d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem, pois, $d_2 - d_1 = d_3 - d_2 = \cdots = d_n - d_{n-1}$, ou seja, é a razão da progressão.

4. Inter-relação entre progressões aritméticas e funções

Com os conhecimentos prévios necessários para um bom entendimento das sequências e progressões aritméticas, definidos anteriormente, propõe-se ao docente uma forma interessante para que as sequências e funções se relacionem, assim como os tópicos função afim e progressão aritmética, e que o professor explore a inter-relação entre esses conteúdos, muitas vezes apresentados de modo desconexos para os alunos.

Em alguns livros didáticos para o ensino médio não é feita a inter-relação entre progressões aritméticas e funções, em que grandezas sofrem aumentos iguais em intervalos de tempos iguais. No caso da progressão aritmética, considera-se o tempo variando apenas no conjunto dos números naturais. Exemplos simples de progressões aritméticas ocorrem no início do aprendizado de matemática.

Assim, este capítulo procura-se relacionar as sequências e as progressões aritméticas ao conceito de funções, na tentativa de atribuir-se ao discente um conhecimento significativo do tema.

4.1Sequências famosas

Ao longo da história da matemática algumas sequências ficaram bem conhecidas dos estudiosos, curiosos e do público em geral, tais como a sequência de Fibonacci e o número de Euler. São tópicos que se pode auxiliar na introdução do tema sequências e instigar o discente na busca de construção de padrões, fortalecendo o processo de ensino aprendizagem no ambiente escolar.

4.1.1Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175-1250) nasceu na cidade Pisa na Itália, ficou conhecido como Fibonacci, por uma contração de filho de Bonacci. Seu pai foi um comerciante, que devido a sua atividade fazia varias viagens, principalmente a grandes centros comerciais da Europa, África e Ásia. As atividades do pai despertou em Fibonacci um grande interesse por cálculos aritméticos. Acompanhando o pai nas viagens, ele entrou em contato com a matemática desenvolvida pelos orientais e árabes.

Fibonacci escreveu seu famoso livro *Liber Abaci*, em 1202, que tem grande importância pelo fato de introduzir, na Europa, os algarismos indo-arábicos. Neste livro, Fibonacci explica a leitura e a escrita destes novos algarismos e traz vários problemas de álgebra, geometria e também problemas envolvendo juros, permuta de mercadorias e moeda.

Figura 15: Leonardo de Pisa

Fonte: QUEM É FIBONACCI [15].

O mais famoso destes, foi o problema dos coelhos, "Um homem põe um casal de coelhos dentro de um cercado. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, se a natureza desses coelhos é tal que a cada mês um casal gera um novo casal, que se torna fértil a partir do segundo mês?", que deu origem à sequência de Fibonacci. Existe hoje uma literatura muito grande a respeito da sequência de Fibonacci e suas aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, citada em [1].

A sequência de Fibonacci é: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots, \mathrm{x_n}, \ldots)$, definida como:

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1}, \text{ para } \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{com\ n} > 2 \text{ e } \mathrm{x_1} = \mathrm{x_2} = 1.$$

Para solucionar o problema dos coelhos deve-se resolver a seguinte soma:

$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \ldots + \mathrm{x}_{12} = \mathrm{S}_{12}.$$

Generalizando, tem-se:

$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \ldots + \mathrm{x}_\mathrm{n} = \mathrm{S}_\mathrm{n}.$$

Reescrevendo os termos da sequência tem-se que:

$$x_1 = x_3 - x_2,$$

$$x_2 = x_4 - x_3,$$

$$x_3 = x_5 - x_4,$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$x_n = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Efetuando a soma telescópica tem-se:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = x_{n+2} - x_2,$$

assim

$$S_n = x_{n+2} - x_2.$$

Como $x_2 = 1 \therefore$

$$S_n = x_{n+2} - 1.$$

Prova:

Para $n = 1$

$$x_1 = x_2 - 1 \;\rightarrow\; 1 = 2 - 1 \text{ (verdadeiro).}$$

Supondo verdadeiro para k;

$$\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \ldots + \mathrm{x}_\mathrm{k} = \mathrm{x}_{\mathrm{k}+2} - \mathrm{x}_2,$$

Deve-se provar que é válido para k+1:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k + x_{k+1} = x_{k+2} - 1 + x_{k+1},$$

$$S_{k+1} = x_{k+3} - 1.$$

Portanto é valido para todo natural.

Ao longo dos anos, foram estudadas varias outras propriedades sobre o tema tais como:

- dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci são primos entre si
- na sequência de Fibonacci, tem-se que x_n divide x_m se e somente se, n divide m.

Há outras propriedades e fatos que podem ser abordados com os discentes a serem consultados no livro Elementos da Aritmética, no capítulo 6, na referência [6] do trabalho, onde se encontram as provas das propriedades citadas.

Explorando-se as propriedades sobre a sequência de Fibonacci, pode-se pedir aos alunos para calcular o mínimo múltiplo comum entre dois números consecutivos ou o máximo divisor comum entre esses números e, então discutir as respostas e mostrar que é válida a propriedade. Propor também a questão da divisibilidade dos termos da sequência sugerindo a divisão de termos, discutindo os resultados, quando a divisão é exata. Assim pode se fazer uma exploração do tema relacionando temas que foram vistos nas series finais do ensino fundamental e buscar uma construção mais efetiva do tema.

4.1.2 Número de Euler

Leonhard Euler (1707-1783) nasceu em Basel, Suíça, foi discente de Johann Bernoulli (1667-1748) na universidade local. Passou a maior parte de sua vida em São Petersburgo (1727-1741 e de 1766 até sua morte) e em Berlim (1741-1766). Aos 20 anos, Euler recebeu uma menção honrosa da Academia de Ciências de Paris, em 1727 começou sua carreira profissional como físico na Academia de São Petersburgo, na Rússia, onde conheceu Christian Goldbach, que lhe chamou a atenção para os problemas trabalhados por Fermat. Em 1771, Euler ficou cego, porém não diminui sua produção acadêmica, tanto que quarenta e oito anos após sua morte ainda eram publicados artigos seus nos anais da Academia de São Petersburgo, conforme [1].

Figura 16: Leonhoard Euler.

Fonte: Arte & Cultura [14].

A produção científica de Euler é extensa e variada, produziu materiais em diversas áreas do conhecimento, tais como, matemática, física, astronomia, entre outras. O mais influente de seus trabalhos na área da matemática foi *Introcutio in analysin infinitorum*, obra publicada em 1748, nesse trabalho, Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas e, pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e e da função exponencial e^x.

O numero $\boldsymbol{e}$ ou simplesmente numero de Euler é na verdade o $lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, a expressão significa que, fazendo sucessivamente $n = 1, 2, 3, \ldots,$ temos:

$$1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \left(1+\frac{1}{4}\right)^4, \ldots$$

Aproximando-se cada vez mais de e, bastando para isso que se tome n suficientemente grande.

Ainda pode-se escrever $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$. Esta série foi descoberta por Isaac Newton (1642-1727), em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, esse número irracional é usado como base do logaritmo de Napier, segundo [11].

Pode-se utilizar o raciocínio de limite na prática, de maneira intuitiva com os discentes, em uma aplicação financeira, pois os juros são creditados com intervalos inteiros de tempo. Assim, o montante acumulado é modelado por uma função exponencial, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, onde i é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então o montante, $M(t)$, após t unidades de tempo é dado por:

$$M(t) = C.(1+i)^t \text{ onde,}$$

$C =$ capital inicialmente investido e t representa o tempo em períodos inteiros.

Porém, quando uma quantia inicial C é aplicada a uma taxa de juros j em uma unidade de tempo e os juros é creditada n vezes durante esta unidade de tempo, então o montante acumulado é dado por:

$$M(t) = C.\left(1+\frac{j}{n}\right)^{nt}$$

Para obter-se o montante a juros creditados continuamente tomando-se o limite da expressão anterior com n tendendo a infinito, obtendo:

$$\lim_{n\to\infty} C.\left(1+\frac{j}{n}\right)^{jn} = C.\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{nj} = C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{n}\right]^{j} =$$

$$C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{n.\frac{n}{j}}\right]^{j} = C.\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{j}{n}\right)^{\frac{n}{j}}\right]^{j.n} = C.e^{j.n}$$

Substituindo n por t tem-se:

$$M(t) = C.e^{jt}.$$

Para se explorar um pouco mais a ideia, facilitando a compreensão do aluno, trabalha-se com um exemplo usual do sistema bancário. Em um financiamento bancário onde a taxa de juros $j = 8\%$ a.a (ao ano) e supondo-se um capital investido inicial $C = R\$ 100,00$, com auxilio de um aplicativo de planilha, tem-se a Tabela 3:

Tabela 3: Capitalização contínua.

Capitalização continua			
Capitalização	n	j/n	$(1+\frac{j}{n})^{nt}$
Anual	1	0,08	1,08
Semestral	2	0,04	1,0816
Trimestral	4	0,02	1,0824
Bimestral	6	0,013333	1,0827
Mensal	2	0,006667	1,083
Semanal	2	0,001538	1,0832
Diária	60	0,000222	1,0832

Fonte: Autor.

Considerando-se o mesmo exemplo bancário, porem com uma taxa $j = 100\%$ e um capital $C = R\$ 1,00$, tem-se na tabela 4:

Tabela 4: Capitalização contínua, com taxa de 100%.

Capitalização continua			
Capitalização	n	$\frac{j}{n}$	$C.(1+\frac{j}{n})^{n}$
Anual	1	1	2
Semestral	2	0,5	2,25
Trimestral	4	0,25	2,44140625
Bimestral	6	0,166667	2,521626372
Mensal	12	0,083333	2,61303529
Semanal	52	0,019231	2,692596954
Diária	360	0,002778	2,714516025
Horário	8760	0,000114	2,718126692
Por minuto	525600	$1{,}9.10^{-6}$	2,718279243
Por segundo	31536000	$3{,}17.10^{-8}$	2,718281781

Fonte: Autor.

Desta forma, pode se mostrar ao discente de maneira intuitiva que o limite de $e \cong 2,718281781$, utilizando um recurso que é empregado diariamente no sistema bancário.

4.2 Progressão Aritmética

Uma progressão aritmética é uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, na qual cada termo, a partir do segundo é a soma $x_{n+1} = x_n + r$ do termo anterior mais uma constante r, chamada razão da P.A., ou seja, progressões aritméticas são sequências nas quais o aumento de cada termo para o seguinte é sempre o mesmo, o que equivale dizer que uma sequência onde a diferença entre um termo e seu antecessor é constante, ou ainda segundo [9]:

$$x_2 - x_1 = r,$$

$$x_3 - x_2 = r,$$

$$x_4 - x_3 = r,$$

$$\vdots$$

$$x_n - x_{n-1} = r.$$

Efetuando-se a soma telescópica nesta última definição, tem-se que:

$$x_n - x_1 = (n-1)\,.\,r;$$

$$x_n = x_1 + (n-1)\,.\,r. \quad (1)$$

(A equação (1) é conhecida como termo geral da P.A.)

Convém ressaltar ao aluno que quando a razão r é 0 e r é menor que 0, as sequências serão constantes e decrescentes respectivamente, e se $r > 0$ as sequências são crescentes.

Como visto anteriormente define-se uma sequência como sendo uma função $x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, no conjunto dos naturais $\mathbb{N} = (1, 2, 3, \dots)$ e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Assim, pode-se dizer que a progressão aritmética é uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida como:

$$f(x_n) = x_1 + (n-1)\,.\,r,$$

que é um caso particular da função afim.

Proposição 4.1: Toda progressão aritmética é uma função afim.

Prova: Usando a caracterização da função afim tem-se que:

$$f(x_n) = x_1 + (n-1)\,.\,r,$$

$$f(x_{n+h}) = x_1 + ((n+h)-1)\,.\,r,$$

$$f(x_{n+h}) - f(x_n) =$$

$$\left[x_1 + \left((n+h)-1\right).r\right] - [x_1 + (n-1).r] =$$

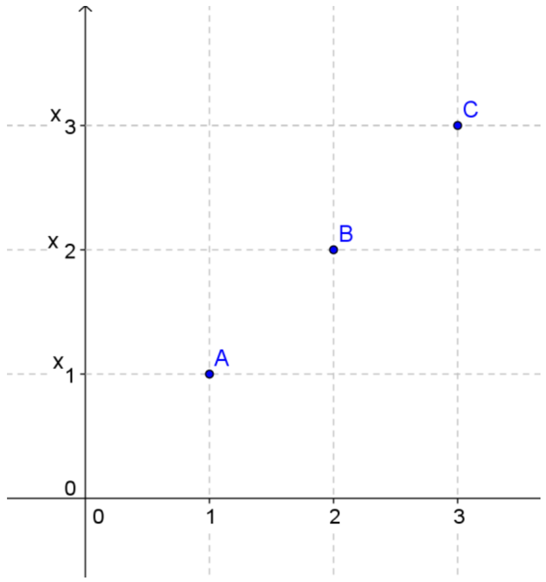
$$[x_1 + nr + hr - r] - [x_1 + nr - r] =$$

$$hr = \varphi(h).$$

Portanto, a progressão aritmética é caracterizada como uma função afim, pois a diferença entre $f(x_{n+h})$ e $f(x_n)$ depende apenas de h, sendo r uma constante.

Assim, todas as propriedades trabalhadas na função afim são válidas para as progressões aritméticas, mas convém destacar aos discentes que o domínio da função é restrito ao conjunto dos números naturais e o gráfico dessa função que a cada número natural n associa o valor x_n é formado pela sequência de pontos colineares no plano. Pode-se dizer que (x_n) é uma progressão aritmética se e somente se os pontos do plano têm as seguintes coordenadas $(1, x_1), (2, x_2), (3, x_3), \ldots, (n, x_n)$ ... são colineares.

Figura 17: Gráfico dos pontos de uma P.A..



Fonte: Autor.

A expressão do termo geral de uma progressão aritmética também pode ser mostrada em um primeiro momento ao discente de uma maneira mais intuitiva.

Exemplo 4.1: Dado, uma sequência $(X_n) = (\mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}, \dots)$, onde a sua lei de formação define que em cada termo, a partir do segundo, é o anterior somado a uma constante r chamada de razão da progressão aritmética. Então se pode escrever que:

$$x_2 = x_1 + r,$$

$$x_3 = x_2 + r,$$

$$x_4 = x_3 + r.$$

E assim sucessivamente, substituindo x_3, x_4, ..., em função do termo anterior, tem-se:

$$x_3 = x_1 + r + r = x_1 + 2r,$$
$$x_4 = x_1 + 2r + r = x_1 + 3r.$$

Observando o padrão tem-se:

$$x_n = x_1 + (n-1).r \text{ (2).}$$

A equação (2) é conhecida como termo geral da P.A..

4.2.1Soma dos termos de uma P.A.

Na soma dos termos de uma progressão aritmética finita convém explorar a história de Karl Friedrich Gauss, onde o professor solicitou que os alunos somassem os 100 primeiros números naturais $(1 + 2 + \ldots + 99 + 100)$ e após alguns minutos o aluno Gauss respondeu corretamente ao docente.

O raciocínio observado pelo então aluno Gauss, foi de que o primeiro mais o último termo da sequência eram iguais à soma do segundo mais a do penúltimo termo e assim sucessivamente, então:

$$1 + 100 = 2 + 98 = 3 + 97 = \cdots = 49 + 50$$

Totalizando 50 termos iguais, com isso Gauss fez o produto de $(101 \cdot 50)$ chegando ao resultado desejado de 5050.

Generalizando esse procedimento tem-se:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \ ,$$

$$S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + (x_3 + x_{n-2}) + \cdots$$

Observa-se que essas parcelas aparecem $\frac{n}{2}$ vezes, portanto a soma dos termos de uma progressão aritmética finita S_n é:

$S_n = \frac{n}{2}.(x_1 + x_n)$ ou ainda $S_n = \frac{n.(x_1 + x_n)}{2}$, maneira esta que aparece comumente nos livros didáticos, segundo [4].

Outra maneira de se demostrar esta expressão aos alunos é utilizando uma forma mais algébrica.

Sendo a soma dos termos de uma P.A. finta igual a:

$$S_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n, \ (3)$$

que é equivalente a:

$$S_n = x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + \cdots + x_3 + x_2 + x_1 (4)$$

Somando membro a membro as equações (3) e (4), temos:

$2S_n = (x_1 + x_n) + (x_2 + x_{n-1}) + (x_3 + x_{n-2}) + \cdots + (x_{n-2} + x_3) + (x_{n-1} + x_2) + (x_n + x_1)$.

Sabendo-se que em uma P.A. finita a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Assim tem-se n parcelas iguais no segundo membro da igualdade, portanto:

$$2S_n = (x_1 + x_n).n,$$

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n).n}{2}.$$

4.3 Formas de abordagem da Progressão Aritmética

Há diversas situações onde se depara com grandezas que sofrem aumentos iguais e periódicos, por exemplo, se pode relacionar os juros simples com a progressão aritmética. As progressões devem ser estudadas permitindo conexões entre os diversos conceitos matemáticos e buscando ainda a sua relevância, no que diz respeito às suas aplicações dentro e fora da Matemática.

Como citado, esse conteúdo formam capítulos a parte na maioria dos livros didáticos, trabalhando em geral com a manipulação de fórmulas por parte dos alunos, muitas vezes sem as devidas demonstrações destas e também suas aplicações, sendo assim trabalhados exercícios tradicionais, dificultando as relações de tais conhecimentos com o estudo de funções por parte do aluno, segundo [2] tem-se.

> Se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidos nos diversos conteúdos, no entanto o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente a Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (p.255)

Seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacional para o Ensino Médio, as aplicações tratadas nesta seção serão motivadoras para o tema buscando-se uma associação das progressões aritméticas com a ideia de funções.

4.3.1Divisibilidade

Pode-se entender a relação $x_n = x_1 + (n-1)\,.\,r$ como um polinômio em função da variável n, onde esse índice n indica a posição de cada termo da progressão, ou seja, pode-se relacionar o termo geral de uma progressão aritmética com uma função afim ou polinomial de grau 1:

$$f(n) = f(1) + (n-1)\,.\,r,$$

onde:

$f(n) = x_n$;

$f(1) = x_1$;

$n =$ váriavel independente;

$r =$ razão da progressão.

Definida a função, tem-se a pergunta: “Qual sua relação com divisibilidade?”. Para responder essa pergunta precisa-se de alguns resultados.

De acordo com [6] tem-se:

> Dados dois números naturais *a* e *b* com a$\neq 0$, diremos que *a* divide *b*, escrevendo $a|b$ quando existir $c \in N$ tal que $b = a \cdot c$. Neste caso, diremos também que *a* é um divisor ou um fator de *b* ou, ainda, que *b* é um múltiplo de *a*.

Partindo da divisibilidade, tem-se um resultado bastante conhecido e que se utiliza com frequência.

Teorema 4.1 Divisão Euclidiana

Considere dois números naturais a e b de modo que $0 < a < b$. Existem q e r, dois números naturais, tais que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$ onde q e r são únicos para cada a e b.

Prova:

Suponha que $b > a$ e considere:

$$A = (b, b-a, b-2a, \dots, b-n.a)$$

Pela propriedade da Boa Ordem, onde se diz que: “Todo subconjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ possui um menor elemento” segundo [10], o conjunto A tem um $r = b - q\,.a$. Assim vamos provar que $r < a$.

Se a divide b, então $r = 0$ e nada mais temos a provar. Se, por outro lado, a não divide b, então $r \neq a$ e, portanto, basta mostrar que $r > a$, se isso ocorresse existiria um numero natural $k < r$ tal que $r = k + a$.

Logo, sendo $r = k + a = b - q.a$, teríamos:

$$k = b - (q-1).a \in A, \text{com } k < r$$

Portanto, esse fato é uma contradição de r ser o menor elemento do conjunto A, então se tem que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$, o que prova a existência de q e r.

Assim tem-se que provar agora a unicidade. Note que dados dois elementos de A, a diferença entre o maior e o menor deles, sendo um múltiplo de a, é pelo menos a.

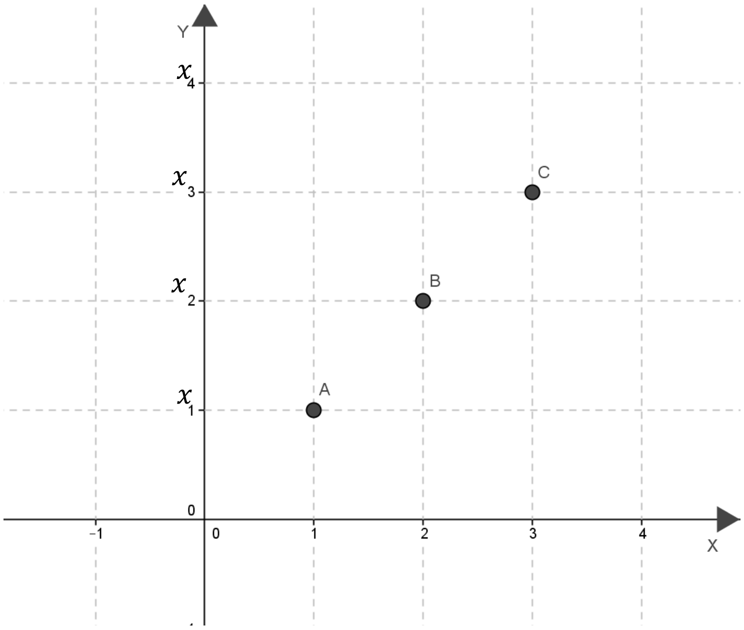
Consequentemente, se $r = b - a.q$ e $r' = b - a.q'$, com $r < r' < a$, tem-se $r' - r \geq a$ o que acarretaria $r' \geq r + a \geq a$, o que é absurdo. Assim tem-se que $r' = r$ e segue-se que $b - a.q = b - a.q'$, o que implica em que $q = q'$.

Esse teorema e a definição de divisibilidade permite-se entender a função polinomial de grau 1 de outra forma, para isso basta considerar-se $f(n)$, $f(1)$, $(n-1)$ e r números naturais.

De fato, com isso a função não passa de uma reescrita da divisão euclidiana. Assim pode-se usar esse resultado para resolver progressões aritméticas, quando seus termos sejam números naturais e sem nenhum esforço se pode estender esse resultado para o conjunto dos números inteiros. Outro fato interessante é que se pode construir geometricamente a progressão aritmética, pois como se trata de uma função afim, tem-se que seu gráfico será um conjunto de pontos colineares que estarão espaçados igualmente.

Exemplo 4.2: Considere uma progressão aritmética com $x_1 = 1$, $r = 2$ e que possui sete termos. Considerando o que foi feito anteriormente, tem-se a função afim que representa a progressão definida por $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = 1 + (n-1) \cdot 2$. A figura 18 representa o gráfico dessa progressão, que é um conjunto de pontos colineares igualmente espaçados.

Figura 18: Gráfico da divisão.



Fonte: Autor.

Expor esse resultado ou comentar que isso é possível para os alunos do ensino médio, certamente trará algumas perguntas e dúvidas. Entretanto eles possuem condições de entender a divisão Euclidiana e a função afim, pois já tiveram contato com esses conteúdos no ensino fundamental. Uma sugestão para o docente é que comece aplicar as progressões utilizando-se, nos exemplos mais simples, a divisibilidade e só após mostre que existe uma fórmula para realizar os exercícios.

Por exemplo, nos livros didáticos geralmente aparecem uma sequência qualquer e é solicitado ao aluno que determine o trigésimo termo da progressão aritmética. Dado a sequência $(5, 8, 11, \ldots)$, determinar o número de termos.

Pode-se definir tal progressão como uma função afim da seguinte maneira:

$$f(n) = f(1) + (n-1).r,$$

$$f(n) = 5 + (n-1).3 \rightarrow f(n) = 3n + 2.$$

Ou ainda, instigar o discente a relacionar a função com a divisibilidade e pedir para que eles reconstruam a sequência com outro enunciado. Construa uma sequência de números, que quando este número é dividido por 3 deixa resto 2.

4.3.2 Quadrado mágico

Os quadrados mágicos são muito conhecidos por qualquer pessoa que já tenha se interessado por curiosidades da matemática. Os primeiros registros sobre o tema são a mais de 1 000 anos A.C., na china e despertam curiosos e matemáticos profissionais, como Martin Gardner, que ofereceu um prêmio a quem encontrasse um quadrado mágico de ordem 3, composto apenas por números inteiros que sejam quadrados perfeitos.

Segundo [9], um quadrado mágico de ordem n é uma matriz $n\,x\,n$**,** onde os elementos são os inteiros $1, 2, 3, \ldots, n^2$, sem repetir nenhum, tal que todas as linhas e todas as colunas têm a mesma soma, onde este valor é chamado de constante mágica. Por exemplo, os seguintes quadrados:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

São mágicos, com constantes mágicas iguais a 15 e 65 respectivamente e as diagonais também tem a soma igual a constante mágica, devido a isso podem ser chamados de quadrados hipermágicos.

Pode-se solicitar aos alunos que determinem um padrão para determinar as constantes mágicas de qualquer quadrado, independentemente da ordem do mesmo.

Como a soma dos termos de uma P.A. é igual a:

$$S_n = \frac{(x_1+x_n).n}{2},$$

A soma dos termos de um quadrado mágico $1, 2, 3, \dots, n^2$, é:

$$S_n = \frac{(1+n^2\ ).n^2}{2}.$$

Como a soma de todos os elementos é igual a n vezes a constante mágica, pois está sendo somadas as linhas da matriz, assim a constante mágica.

$$C = \frac{1}{n} \cdot \frac{(1 + n^2\ ).n^2}{2},$$

$$C = \frac{(n.(n^2 + 1)}{2}.$$

Observando os resultados com os alunos temos que:

- quadrado mágico 3x3:

$$C = \frac{(3.(3^2 + 1)}{2} = 15.$$

- quadrado mágico 4x4:

$$C = \frac{(4.(4^2 + 1)}{2} = 34$$

- quadrado mágico 5x5:

$$C = \frac{(5.(5^2 + 1)}{2} = 65$$

4.3.3 Funções quadráticas.

O Teorema 3.3 que caracteriza a função quadrática, ou seja, se f é uma função quadrática, então ela transforma uma sequência cuja diferenças dos termos consecutivos formam numa progressão aritmética, chamada de progressão aritmética de segunda ordem. E, reciprocamente, se uma função transforma uma sequência em uma P.A de segunda ordem, então ela é uma função quadrática. Tal resultado pode ajudar o discente na resolução de vários problemas.

Exemplo 4.3: Dividem-se os números naturais em blocos do modo seguinte:

$(1), (2;\ 3), (4;\ 5;\ 6), (7;\ 8;\ 9;\ 10), (11;\ 12;\ 13;\ 14)$ ... .

Em seguida suprimem-se os blocos que contêm um número par de elementos, formando-se o quadro:

1						
4	5	6				
11	12	13	14			
...	...	...	...	...	...	...

Determine o primeiro elemento da 31ª linha.

Usando a progressão aritmética para auxiliar tem-se que:

$f(1) = 1$, $f(2) = 4$, $f(3) = 11$ e as diferenças $d_1 = f(2) - f(1)$, $d_2 = f(3) - f(2)$, com d_1, d_2, formão uma progressão aritmética de segunda ordem, podem-se escrever a sequência dos primeiros termos como uma função quadrática, assim:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 11 \end{cases} \underset{1}{\rightarrow} \begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 4 & 2 & 1 & - & 4 \\ 9 & 3 & 1 & - & 11 \end{cases} \underset{2}{\rightarrow} \begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & -2 & -3 & - & 0 \\ 0 & -6 & -8 & - & 2 \end{cases} \underset{3}{\rightarrow}$$

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & -2 & -3 & - & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 2 \end{cases} \underset{4}{\rightarrow} \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2b - 3c = 0 \\ c = 2 \end{cases} \text{, logo}$$

$$-2b - 3.(2) = 0 \rightarrow b = -3 \qquad \text{e}$$

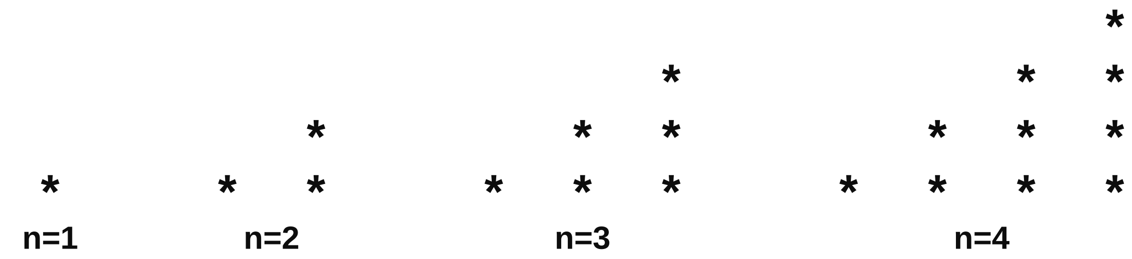
$$a + (-3) + 2 = 1 \rightarrow a = 2$$

Portanto a função quadrática que descreve a primeira coluna do quadrado é dada por $f\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(x) = 2x^2 - 3x + 2$ sendo x a linha que se deseja.

Conclui-se que o primeiro elemento da 31ª linha é $f(31) = 2.31^2 - 3.31 + 2 = f(31) = 870$, assim pode se determinar qualquer elemento da primeira coluna, raciocínio análogo pode ser usado para determinar as demais colunas. No texto foi utilizado o escalonamento para resolução do sistema de equações, porém o docente pode utilizar qualquer outro método mais adequado à realidade do seu aluno.

Exemplo 4.4: Os números triangulares $T_n = (1, 3, 6, 10, 15, \ldots)$, que tem o nome de triangulares explicada pela figura 19.

Figura 19: Números triangulares.



Fonte: Autor.

Para estabelecer uma expressão para essa relação biunívoca entre os naturais e os números triangulares. Utiliza-se o mesmo raciocínio do exemplo 4.3, a sequência das diferenças $D = (2, 3, 4, 5, \ldots)$, ou seja, uma progressão aritmética de segunda ordem com razão igual a 1 pode escrever a sequência dos primeiros termos como uma função quadrática, assim:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 6 \end{cases} \underset{1}{\rightarrow} \begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 4 & 2 & 1 & - & 3 \\ 9 & 3 & 1 & - & 6 \end{cases} \underset{2}{\rightarrow}$$

$$\begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & -2 & -3 & - & -1 \\ 0 & -6 & -8 & - & -3 \end{cases} \underset{3}{\rightarrow} \begin{cases} 1 & 1 & 1 & - & 1 \\ 0 & -2 & -3 & - & -1 \\ 0 & 0 & 1 & - & 0 \end{cases} \underset{4}{\rightarrow}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ -2b - 3c = -1 \\ c = 0 \end{cases} \text{, logo}$$

$$-2b - 3.(0) = -1 \rightarrow b = \tfrac{1}{2} \qquad \text{e}$$

$$a + \left(\frac{1}{2}\right) + 0 = 1 \rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a função quadrática que descreve os números triangulares é dada por $f: N \to T_n, f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ e $f(x) = \frac{x^2+x}{2}$ sendo x a posição do número que se deseja:

$$f(1) = \frac{1^2 + 1}{2} = 1;$$

$$f(2) = \frac{2^2 + 2}{2} = 3;$$

$$f(3) = \frac{3^2 + 3}{2} = 6;$$

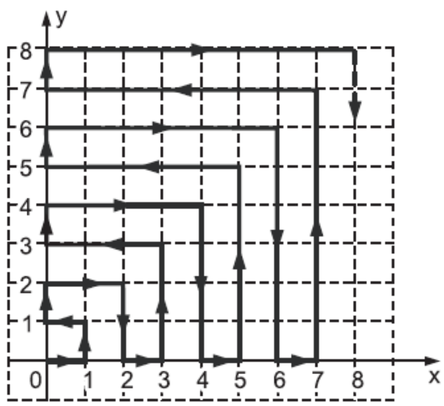
$$f(4) = \frac{4^2 + 4}{2} = 10 \ldots$$

Com isso verifica-se que após caracterizar a função quadrática pode-se construir uma lei de associação entre o conjunto dos naturais com outros conjuntos que sejam progressões aritméticas de segunda ordem.

Exemplo 4.5: O problema proposto no vestibular da UFSCAR de 2009, disponível em [16], onde diz-se:

Uma partícula se move ao longo do primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal do ponto (0,0), conforme indica o gráfico a seguir:

Figura 20: Deslocamento de uma partícula.



O deslocamento de 1 unidade (vertical ou horizontal) do plano é feito em 1 minuto, pela partícula com velocidade constante .

Fonte: Questões de vestibular [16].

Mantido o mesmo padrão de movimento, a partícula atingirá o ponto (50, 50), a partir do inicio do deslocamento em quantos minutos?

Observe na Tabela 5 a posição em relação ao tempo é:

Tabela 5: Posição em função do tempo.

	Posição	Tempo
$\boldsymbol{f}(\,\mathbf{1}) \rightarrow$	(1,1)	2 minutos
$\boldsymbol{f}(\mathbf{2}\,) \rightarrow$	(2,2)	6 minutos
$\boldsymbol{f}(\,\mathbf{3}) \rightarrow$	(3,3)	12 minutos
$\boldsymbol{f}(\,\mathbf{4}) \rightarrow$	(4,4)	20 minutos
$\boldsymbol{f}(\,\mathbf{5}) \rightarrow$	(5,5)	30 minutos

Fonte: Autor.

Assim tem-se a sequência dos tempos $(2, 6, 12, 20, 30, \dots)$, fazendo as diferenças obtemos uma progressão aritmética de segunda ordem $(\,4, 6, 8.\,10, \dots)$, com razão igual a 2. Portanto, é suficiente para caracterizar a função quadrática, deixando-se ao leitor a resolução desse último exemplo do tópico.

4.3.4 Juros

A maioria das pessoas já passou pela experiência de planejar adquirir um certo produto, faz suas economias e na hora de efetivar a compra encontra o preço maior. O aumento do preço dos produtos em geral mostra que houve uma desvalorização da moeda, ou simplesmente inflação. Nosso país já passou por problemas graves de inflação, tendo a alteração de preços diariamente, chegando em 1989 a quase 2000% ao ano, devido a isso, o país passou por diversos planos econômicos e várias moedas que se desvalorizavam rapidamente, até a estabilidade com o Plano Real.

Além desta parte da história não tão distante, o importante é destacar ao aluno algumas questões sobre a relevância da matemática financeira. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio [3] trazem algumas habilidades a serem desenvolvidas com números e operações:

> (...) o trabalho com esse bloca de contúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações e embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (...)

Instigar o discente a entender como se da desvalorização da moeda, financiamentos de bens, financiamentos estudantis, entre outros, assim um dos primeiros conceitos a serem abordados são os juros. Por exemplo, os juros simples, que é aplicado em prazos pequenos e em juros de mora.

No regime de juros simples, a taxa de juros incide apenas no capital inicial investido C_0, tem-se uma capitalização simples. Nesse caso, os juros calculados no fim de cada período não são acrescidos ao capital para calcular os juros dos períodos seguintes. Dado uma taxa i, durante t períodos de tempo constantes, temos um juro J, conforme [4]:

$$J = C_0 \cdot i \cdot t$$

O montante M é dado pela soma do capital mais os juros, ou seja:

$$M = C_0 + (C_0 \cdot i \cdot t),$$

Colocando C_0 em evidência tem-se:

$$M = C_0 \cdot (1 + i \cdot t).$$

Algumas observações que devemos destacar aos alunos são de que:

- a taxa de juros e o tempo devem estar em unidades de tempo iguais;
- nos juros simples, a taxa e o tempo são proporcionais.

Observando-se os montantes obtidos em uma aplicação de capitalização simples com capital inicial de $C_0 = R\$\ 10{,}00$, taxa de juros de $i = 20\%$ a.m. (ao mês), durante $t = 5$ meses, como mostrado na Tabela 6:

Tabela 6: Montante.

Mês	**Montante**
1	12

2	14
3	16
4	18
5	20

Fonte: Autor.

Após verificar com os discentes a relação biunívoca estabelecida entre o tempo e o montante na Tabela 7.

Tabela 7: Função montante.

Mês		Montante
$\boldsymbol{f(1)}$	$\rightarrow$	12
$\boldsymbol{f(2)}$	$\rightarrow$	14
$\boldsymbol{f(3)}$	$\rightarrow$	16
$\boldsymbol{f(4)}$	$\rightarrow$	18
$\boldsymbol{f(5)}$	$\rightarrow$	20

Fonte: Autor.

Pode-se montar uma progressão aritmética que expresse a situação e identificar a relação entre progressão aritmética e a expressão do montante no sistema de capitalização simples. Perceba que a sequência $M = (12, 14{,}16{,}18{,}20)$ vai levar o aluno a indagar: "E o capital inicial?". Devido a isso escreve-se convenientemente o capital inicial como C_0, assim o primeiro termo da sequência é $f(0)$ e não $f(1)$.

Portanto comparando o termo geral da progressão aritmética com a expressão do montante tem-se:

$$x_n = x_1 + (n-1)\,.\,r \underset{comparação}{\Longleftrightarrow} M = C_0 + (C_0 \cdot i \cdot t)$$

$$x_1 = C_0$$

$$n = t$$

$$r = C_0 \cdot i$$

Assim, a expressão do montante na capitalização simples fica escrita assim: $M = C_0 + (t-1) \cdot (C_0 \cdot i\,)$ e a sequência $M = (10, 12, 14, 16, 18, 20)$.

4.3.5 Física

Sabendo-se que a interdisciplinaridade é uma realidade na escola onde o professor é cobrado a se adaptar-se a esse modelo de ensino, procura-se utilizá-la como um facilitador da aprendizagem ao trabalhar os objetos curriculares interligados entre si, além de possibilitar uma maior motivação dos alunos envolvidos no trabalho. A interdisciplinaridade propõe atividades que envolvam-se as diferentes disciplinas escolares, buscando-se novas alternativas para o processo de ensino aprendizagem, utilizando-se recursos diferenciados para tal.

A articulação de disciplinas é uma maneira de se trabalhar em sala de aula, não objetivando criar uma nova peça curricular, mas sim propor uma alternativa de aprendizagem, seguindo-se as orientações especificadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais [4]:

> Na perspectiva escolar, a interdisciplinaridade não tem a pretensão de criar novas disciplinas ou saberes, mas de utilizar os conhecimentos de várias disciplinas para resolver um problema concreto ou compreender um determinado fenômeno sob diferentes pontos de vista. Em suma, a interdisciplinaridade tem uma função instrumental. Trata-se de recorrer a um saber diretamente útil e utilizável para responder às questões e aos problemas sociais contemporâneos. (BRASIL, p.21)

Por exemplo, a matemática e a física são duas ciências que andam lado a lado, à vista disso, há diversas áreas da física em que se utilizam os conceitos matemáticos para explicar alguns fenômenos. No estudo da cinemática é usado o conceito de funções afim, mas se utilizar-se o conceito de função afim e abordar-se a relação com as sequências, o conceito de movimento uniforme pode se trabalhar como uma progressão aritmética.

Cinemática é a parte da mecânica na qual são estudados e descritos os movimentos dos corpos, sem considerar os fatores que determinam o movimento. Corpos podem ter qualquer ordem de grandeza tais como: planetas, pessoas, automóveis ou qualquer elemento do qual se descreva o movimento. Em Cinemática são descritos movimentos analisando o deslocamento percorrido por um móvel em uma trajetória, velocidade e variações, como a direção e o sentido do movimento.

Uma das funções afim usadas na cinemática é a que relaciona a posição ($\boldsymbol{S}$) de um móvel em movimento uniforme, segundo [4], movimento com velocidade constante, com o tempo ($\boldsymbol{t}$), chamada de função horária do espaço em relação ao tempo. A expressão matemática que define essa função é:

$$S = S_0 + v \cdot t$$

onde,

S_0: espaço inicial do móvel, posição onde ocupa no instante t = 0.

v: velocidade escalar.

A expressão é originária do conceito de velocidade, o quanto se deslocou em quanto tempo.

$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0}$, como t_0 é o instante inicial igual a zero tem-se que:

$$v = \frac{S - S_0}{t},$$

$$S - S_0 = v \cdot t,$$

$$S = S_0 + v \cdot t.$$

O movimento uniforme se caracteriza-se como variações de posições constantes em intervalos de tempo iguais. Apesar de o tempo estar no conjunto dos números reais, se tratará o tempo como pertencente ao conjunto dos números naturais.

Exemplo 4.6: Um corpo está localizado na posição $16\,m$ de uma trajetória retilínea no instante $t = 0$. Ele está se movendo a uma velocidade constante de $8\,m/s$. Determinar a posição que o carro estará no instante $t = 15$

Construindo uma tabela do tempo em relação à posição.

Tabela 8: Posição.

Tempo	**0s**	**1s**	**2s**	**3s**
Posição	16 m	24 m	32 m	40 m

Fonte: Autor.

Atentando-se ao detalhe do tempo ser o domínio da função, com $t \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = (0,1,2,3,\ldots)$**,** tem-se uma progressão aritmética onde o primeiro termo é 16 e a razão igual a 8, assim para determinar a posição em um instante deve-se colocar como $t + 1$**,** pois se começa a contar no zero. Assim através do termo geral da progressão aritmética tem-se que:

$$x_n = x_1 + (n-1).r,$$

$$x_t = x_0 + \big((t+1)-1\big).r,$$

$$x_t = x_0 + t\,.r,$$

$$x_t = 16 + \big((t+1)-1\big)8,$$

$$x_t = 16 + 8t.$$

Portanto, a função horária da posição em relação ao tempo, define-se através da progressão aritmética é $S = 16 + 8t$ e no instante de 15 segundos a posição é $S = 16 + 8 \cdot 15 = S = 136\,m$.

Exemplo 4.7: A questão do vestibular UFG-GO, disponível em [13] onde:

Dois automóveis, a uma distância d um do outro, deslocam-se, um em direção ao outro, com velocidades médias constantes de $25\,m/s$ e $20\,m/s$, respectivamente.

Calcule o décimo termo da sequência dada pela distância entre os dois automóveis a cada segundo, admitindo que o primeiro termo dessa sequência é $d = 800m$.

A velocidade de aproximação dos veículos é $v = 20 + 25 = 45m/s$, assim a razão da P.A é – 45 e o termo $x_0 = 800\,m$, portanto:

$$x_t = x_0 + t\,.r,$$

$$x_{10} = 800 + 10 \cdot (-45),$$

$$x_{10} = 350\,m.$$

Assim a distância entre os veículos é de $350\,m$.

Considerações finais

O ensino na disciplina de Matemática passa por grandes desafios, com a era da informação, uma simples abordagem formal de determinado conteúdo, pode ser vista em qualquer site que o discente procure, deste modo é papel do professor mostrar aos estudantes as varias maneiras de incorporar a matemática a sua vida diária e propor diferentes tramentos de determinado tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar pensamentos e o racicínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em que quase todas as atividades humanas. No ensino médio procura-se preparar o educando para a vida, seja para a sequência dos estudos ou para ter a capacidade de resolver problemas cotidianos, assim sendo, desenvolver a habilidade de fazer observações e tomar as decisões mais adequadas e sensatas para sua vida.

Após a participação no programa de mestrado PROFMAT, restaurou a motivação em propor maneiras diferenciadas de se abordar determinados conteúdos, possibilitando uma pesquisa com um olhar cuidadoso aos conteúdos abordados no ensino médio.

Assim a escolha do tema sequência se deu após uma alto critica de como era trabalhado o tema, e observando-se a necessidade de trabalhar as inter-relações do tema com as funções, pois na sua definição esta relação fica clara. Inicialmente um formalismo matemático para embasamento do estudo das sequências, se fez necessário, e também o fato de não repetir processos de aprendizagem, onde há utilização de fórmulas e cálculos muitas vezes desnecessários e cansativos aos discentes.

Na tentativa de enfrentar os desafios do processo de ensino aprendizagem e auxiliar os colegas professores do ensino médio, o texto propôs a abordagem do tema sequências, em especial as progressões aritméticas, trazendo formas diversificadas de abordagem. Utilizando História da Matemática, resolução de problemas, interdisplinaridade e, até mesmo curiosidades, proporcionando ao leitor formas de introduzir ou desenvolver o assunto, buscando a investigação de padrões com os estudantes e indicando as suas conexões com outros temas, sem esquecer o formalismo necessario a disciplina.

Assim se propôs que a Matemática seja vista como uma maneira de pensar, como um processo em constante transformação, evoluindo e permitindo ao discente a construção conhecimento, para que possa aplicá-lo em situações novas. Por isso, é necessário que os conteúdos matemáticos sejam explorados com compreensão e conexão de temas associados, evitando fórmulas desnecessárias. Procurando por meio da investigação, conforme os estudantes consigam correlacionar o que foi observado com os diferentes temas, desenvolver a capacidade de aprender e adquirir a confiança em sua capacidade de abstração, fazendo relações e buscando padrões nas diferentes situações. Por conseguinte, desenvolvendo a comunicação, argumentação, representação matemática, em síntese, facilitar o processo de ensino e aprendizagem da disciplina, construindo um conhecimento sólido e significativo para o discente.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B.; **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2 ed. 4 reimp. – São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais Ensino Médio .** Brasília: SEF, 1998. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> acesso em 16/12/2014.

[3] BRASIL, Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio,** volume 2. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book volume2> acesso em 16/12/2014.

[4] DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações** – São Paulo: Editora Ática, 2011.

[5] FIGUEREDO, D. G.; **Análise I**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Cientifícos Editora S.A.2 edª, 1996.

[6] HEFEZ, A.; **Elementos de aritmética**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011

[7] IEZZI, G.; **Fundamentos de Matemática Elementar**, vol.4. Editora Atual. São Paulo. 1977.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio**, vol.1, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[9] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C.; **A Matemática do Ensino Médio**, vol.2, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[10] LIMA, E. L.; **Curso de análise,** vol.1. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[11] LIMA, E. L.; **Logaritmos**, Coleção do Professor de Matemática**,** Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[12] Revista FAFIBE Online, **Revistas Online**. Disponível em < www.unifafibe.com.br/revistasonline/arquivos/revistafafibeonline/sumario/9/18052011154859.pdf> acesso em 15/01/15.

[13] Site, **Olimpogo**. Disponível em <http://www.olimpogo.com.br/resolucoes/ufg/2009/imgqst/UFG2dia2009.pdf> acesso em 08/01/2015

[14] Site, **Arte & Cultura**, Disponível em < http:/arte7cultura.blogspot.com.br> acesso em 15/03/2015

[15] Site, **QUEM É FIBONACCI**, Disponível em < http:/www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/quemefib.htm > acesso em 15/03/2015

[16] UFScar, **Questões de Vestibular.** Disponível em <http://www.provasdevestibular.com.br/ufscar/#2009> acesso em 07/01/2015.