2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Números Transcendentes:

Números de Liouville e a Constante de Chapernowne

Diogo Oliveira[1]
Mariana Garabini Cornelissen Hoyos[2]

Resumo: Os números que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes inteiros são chamados números transcendentes. Neste trabalho fazemos um estudo dos números reais transcendentes, apresentando a demonstração da existência de tais números e também de sua não enumerabilidade, ou seja, mostramos que esses números de fato existem e não são poucos. Os primeiros exemplos conhecidos de números transcendentes são os chamados números de Liouville, em homenagem à Joseph Liouville, que mostrou o fato de o número $l = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$, conhecido como constante de Liouville, é um número transcendente. Apresentamos também um estudo sobre essa classe de números transcendentes, os números de Liouville e, por fim, exibimos um número transcendente conhecido como constante de Champernowne e que é o número decimal obtido através da concatenação de todos os números naturais, a saber, 0,123456789101112... mas que não é um número de Liouville, mostrando que nem todo número transcendente é necessariamente um número de Liouville.

Palavras-chave: transcendente, números de Liouville, constante de Chapernowne.

1 Introdução

Por volta de 500 a.c., Pitágoras e seus discípulos acreditavam que toda medida era comensurável, ou seja, todo segmento podia ser representado por um fração $\frac{p}{q}$ em que $p, q \in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$. Dito de outra forma, eles acreditavam que todo número era racional. Porém, Hipaso de Metaponto, discípulo da escola pitagórica mostrou que a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo e isósceles de lado uma unidade é igual à $\sqrt{2}$ e que este por sua vez não era um segmento comensurável. Estávamos ali diante do primeiro número irracional. Mas, os números racionais e o número $\sqrt{2}$ possuem uma propriedade em comum: ambos são raízes de polinômios com coeficientes inteiros, $qx - p$ e $x^2 - 2$, respectivamente. Todo número com esta propriedade de ser raiz de um polinômio com coeficientes inteiros é chamado número algébrico. Já os números que não gozam de tal propriedade são ditos transcendentes. Observe que todos os números transcendentes são irracionais.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - Campus Alto Paraopeba - CAP/UFSJ
E-mail: diogooliveira2704@gmail.com
[2]Orientadora do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Física e Matemática - DEFIM, CAP/UFSJ
E-mail: mariana@ufsj.edu.br

A teoria dos números transcendentes foi originada por Joseph Liouville em 1844 a partir de um teorema que caracteriza os números algébricos. A ideia de Liouville para construir números transcendentes foi encontrar um propriedade satisfeita por todos os números algébricos e depois construir um número que não satisfizesse tal propriedade. Dessa forma, Liouville construiu uma classe de números, os números de Liouville e, em 1851, exibiu o primeiro número transcendente da história: $l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$, conhecida como constante de Liouville. Outros matemáticos continuaram os estudos a respeito dos números de Liouville e mostraram que o conjunto desses números é não-enumerável, apesar de nem todo número transcendente ser um número de Liouville. Em 1933, D.G. Champernowne apresentou o número $c = 0,123456789101112\cdots$, conhecida como constante de Champernowne, que consiste da concatenação de todos números naturais, e em 1961, Kurt Mahler mostrou que esse número é transcendente e depois mostrou-se que essa constante não é um número de Liouville.

2 Números Transcendentes

Nesta seção falaremos dos números algébricos e transcendentes, objeto de estudo desse trabalho, apresentando exemplos e propriedades desses números.

Definição 2.1 *Qualquer solução real de uma equação polinomial da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

*onde $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ é chamado **número algébrico**. O conjunto destes números será denotado por $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Exemplo 2.1 *Todo número racional é algébrico, pois, conforme já citado anteriormente, todo número da forma $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ é raiz do polinômio $qx - p$. Entretanto, nem todo número algébrico é racional, já que $\sqrt{2}$ é algébrico e não é racional.*

Exemplo 2.2 $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ *é um número algébrico pois é solução da equação*

$$x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Definição 2.2 *Os números que não são algébricos são chamados **transcendentes** e o conjunto destes números será denotado por $\mathbb{T}$.*

Observe que, por definição, o conjunto $\mathbb{T}$ é o complementar do conjunto $\overline{\mathbb{Q}}$, também denotado por $\mathbb{T} = \overline{\mathbb{Q}}^c$.

Com essas definições, surgem as seguintes perguntas: existem números transcendentes? Ou seja, existem números que não são raízes de nenhum polinômio com coeficientes inteiros? E se existirem tais números, são muitos? Vamos mostrar que a resposta a essas duas perguntas é sim. Mas, vamos começar pela segunda pergunta, ou seja, mostraremos primeiro que, se existirem tais números, eles são muitos. Com isso, mostraremos sua existência e, posteriormente, exibiremos números transcendentes. Para isso, precisaremos de uma nova definição e alguns resultados cujas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Definição 2.3 *Um conjunto A é dito enumerável se A é finito ou se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.*

Exemplo 2.3 *$\mathbb{Z}$ é enumerável já que*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{2}, \textit{se } x \textit{ é par} \\ -\left(\frac{x+1}{2}\right), \textit{se } x \textit{ é ímpar} \end{array} \right. \end{array}$$

é claramente uma bijeção.

Exemplo 2.4 *O conjunto dos números pares, denotado por $2\mathbb{Z}$, é enumerável, pois a função $g(f(x))$ onde $f(x)$ é a função do exemplo anterior e $g(x)$ é dada por*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 2\mathbb{Z} \\ \\ & x & \longmapsto & 2x \end{array}$$

é uma bijeção.

Teorema 2.1 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *O conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, é não enumerável.*
2. *A união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*
3. *Se o conjunto A é enumerável então $A^n = A \times A \times \cdots \times A$ é enumerável.*

As demonstrações destes fatos se encontram em [1].

Teorema 2.2 *O conjunto*

$$\mathbb{Z}[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{Z} \;\forall\; i = 1, 2, 3, \cdots, n\}$$

é enumerável.

Demonstração: Como $\mathbb{Z}$ é enumerável é fácil ver que $\mathbb{Z}^*$ também é enumerável e pelo Teorema 2.1 segue que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}[x] \\ \\ & (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) & \longmapsto & a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

Note que f é obviamente bijetora, já que admite inversa igual a

$$f^{-1}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

donde podemos concluir que $\mathbb{Z}[x]$ é enumerável, como queríamos demonstrar.

$\square$

Sabemos que um polinômio não nulo, de grau n e com coeficientes em um domínio de integridade possui no máximo n raízes nesse domínio. Logo, dado um polinômio não nulo $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ em que $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i = 1, 2, 3, \cdots, n \cdots$ temos que o conjunto

$$R_p = \{k \in \mathbb{R} | p(k) = 0\}$$

é finito e, portanto, enumerável.

Teorema 2.3 $\overline{\mathbb{Q}}$ *é enumerável.*

Demonstração: Observe que

$$\overline{\mathbb{Q}} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}[X]} R_p,$$

donde $\overline{\mathbb{Q}}$ é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e assim pelo teorema (2.1) segue que o conjunto dos números algébricos é enumerável.

$\square$

Agora sim estamos prontos para responder às nossas duas perguntas feitas anteriormente. Com os resultados acima, já podemos concluir que os números transcendentes são muitos. Vejamos: temos que $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{T}$ e sabemos que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Logo, $\mathbb{T}$ é não enumerável pois senão teríamos que $\mathbb{R}$ é a união enumerável de conjuntos enumeráveis, o que implicaria que $\mathbb{R}$ é enumerável, um absurdo.

Com este fato podemos concluir também que existem números transcendentes, pois, se $\mathbb{T} = \emptyset$ teríamos novamente o absurdo de $\mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}}$ ser enumerável. E, mais do que isso, concluímos que existem mais números transcendentes do que algébricos.

Na próxima seção, apresentaremos os primeiros números não algébricos que foram conhecidos, os números de Liouville.

3 Números de Liouville

No século XIX, os matemáticos já sabiam da existência dos números transcendentes, entretanto, não era conhecido nenhum exemplo desse tipo de número. Somente em 1844, Joseph Liouville mostrou que o número $l = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$, conhecido como constante de Liouville, é transcendente. Mais tarde foi mostrado que π e e também não são algébricos (ver [1]).

A ideia de Liouville para encontrar números transcendentes foi encontrar alguma propriedade que fosse satisfeita por todos os números algébricos e, em seguida, construir algum número que não possuísse tal propriedade.

Definição 3.1 *Dizemos que $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ é de grau n se o polinômio $p(x)$ de menor grau tal que $p(\alpha) = 0$ tem grau n. Esse polinômio é chamado de polinômio mínimal de α.*

Teorema 3.1 ***Teorema de Liouville***

Se $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ tem grau $n \geq 2$ então existe $c = c(\alpha)$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{c}{q^n},$$

para todo $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Demonstração: Seja $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio minimal de α, ou seja, $p(\alpha) = 0$. Sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap R_f = \{\alpha\}$ onde R_f é o conjunto das raízes reais de $f(x)$ do contrário poreriamos R_f um conjunto infinito.

Dados $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$, $q \geq 1$ e $(p, q) = 1$, temos duas possibilidades: $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ ou $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$.

Se $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ então $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \delta \geq \frac{\delta}{q^n}$.

Se $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, como $f(x)$ é contínua e derivável em $\left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$ (aqui, sem perda de generalidade estamos supondo $\frac{p}{q} > \alpha$) logo, pelo Teorema do Valor Médio, existe $d \in \left(\alpha, \frac{p}{q}\right)$ tal que

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(d)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)$$

donde

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(d)|\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

Como f' é contínua em $\left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$ então existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \leq M$ para todo $x \in \left[\alpha, \frac{p}{q}\right]$. Assim, temos que

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leq M\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \tag{1}$$

Observe que $\frac{p}{q} \neq \alpha$ já que α tem grau maior ou igual a 2 por hipótese e todo racional tem grau 1. Logo, $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ e daí

$$\begin{aligned}
\left|f\left(\tfrac{p}{q}\right)\right| &= \left|a_n \tfrac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\tfrac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \cdots a_1 \tfrac{p}{q} + a_0\right| \\
&= \left|\tfrac{a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n}{q^n}\right| \\
&= \tfrac{\left|a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \cdots + a_1 q^{n-1} p + a_0 q^n\right|}{q^n} \\
&\geq \tfrac{1}{q^n},
\end{aligned}$$

Portanto, por (1) temos que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{Mq^n}$$

Tomando $c(\alpha) = min\left\{\delta, \frac{1}{M}\right\}$ temos em ambos os casos que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^n}$$

como queríamos demonstrar.

$\square$

Exemplo 3.1 *$\sqrt{2}$ é algébrico de grau 2 com polinômio minimal igual a $f(x) = x^2 - 2$. De acordo com o Teorema* 3.1*, tomando $\delta = 1$ obtemos $c = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)}$ tal que*

$$\left|\sqrt{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)q^2}$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Após demonstrar o Teorema 3.1, Liouville apresentou um conjunto de números que não atendem à definição 3.1. Esses são os números de Liouville e seu conjunto é denodato por $\mathbb{L}$.

Definição 3.2 *Um número real α é chamado número de Liouville se existir uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ em que $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ e $q_j \geq 1$ para todo j, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \forall j \geq 1.$$

Proposição 3.1 *A sequência (q_j) na definição acima é ilimitada.*

Demonstração: Note que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \leq 1, \forall j \geq 1.$$

Agora suponha que (q_j) é limitada, ou seja, suponha que exista $M \in \mathbb{R}$ tal que $q_j \leq M$ para todo $j \geq 1$. Dessa forma, temos que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < 1 \Longrightarrow |\alpha q_j - p_j| < q_j \leq M$$

Lembrando que $|a - b| \geq |a| - |b|$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$, segue que

$$|p_j| - |\alpha q_j| \leq |\alpha q_j - p_j| < M$$

donde

$$\begin{aligned} |p_j| &< M + |\alpha q_j| \\ &\leq M + |\alpha| M \ , \\ &= (1 + |\alpha|)M \end{aligned}$$

o que implica que a sequência p_j também é limitada. E, portando, chegamos à contradição de que $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ é finita.

$\square$

A partir da proposição acima, podemos concluir que um número racional não pode ser um número de Liouville. De fato, se $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é de Liouville então

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{q_j^j} &> \left|\alpha - \tfrac{p_j}{q_j}\right| \\ &= \left|\tfrac{p}{q} - \tfrac{p_j}{q_j}\right| \\ &= \left|\tfrac{pq_j - p_j q}{q q_j}\right| \\ &\geq \tfrac{1}{|q| q_j} \end{aligned}$$

donde $q_j^{j-1} < |q|$ o que contradiz o fato de (q_j) ser ilimitada.

Teorema 3.2 *Todo número de Liouville é transcendente, ou seja, se $\alpha \in \mathbb{L}$ então $\alpha \in \mathbb{T}$.*

Demonstração: Suponha que $\alpha \in \mathbb{L}$ e algébrico de grau $n \geq 2$. Segue pelo Teorema 3.1 que existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$\frac{1}{q_j^j} > \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{c}{q_j^n}$$

para todo racional $\frac{p_j}{q_j}$. Daí

$$\frac{1}{q_j^j} > \frac{c}{q_j^n} \Longrightarrow q_j^{(n-j)} > c \Longrightarrow q_j^{(j-n)} < \frac{1}{c}$$

Dessa forma temos que se $j > n+1$ então

$$q_j < q_j^{j-n} < \frac{1}{c},$$

contradizendo a proposição 3.1. Portanto, $\alpha \in \mathbb{T}$.

□

Mas, apesar de todo este trabalho, Liouville ainda não havia exibido nenhum número transcendente. A partir daí bastava encontrar um número de Liouville para obter o primeiro transcendente. A constante de Liouville, que será apresentada no exemplo abaixo, foi o primeiro número não algébrico apresentado.

Exemplo 3.2 *Temos que*

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} = 0,110001000000000000000001000\ldots$$

é um número de Liouville.

De fato, defina $p_j = \sum_{k=1}^{j} 10^{j!-k!}$ e $q_j = 10^{j!}$. Observe que $p_j, q_j \in \mathbb{Z}$ para todo j e

$$\frac{p_j}{q_j} = \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{10^{k!}}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|l - \tfrac{p_j}{q_j}\right| &= \textstyle\sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}} \\
&= \tfrac{1}{10^{(j+1)!}} + \tfrac{1}{10^{(j+2)!}} + \tfrac{1}{10^{(j+3)!}} + \cdots \\
&= \tfrac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \tfrac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \tfrac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + \cdots\right) \\
&< \tfrac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10^2} + \cdots\right) \\
&= \tfrac{1}{10^{(j+1)!}} \tfrac{10}{9} \\
&< \tfrac{1}{10^{(j+1)!-1}}.
\end{aligned}$$

Agora basta provar que $(j+1)!-1 \geq j!j$, o que ocorre pois

$$(j+1)!-1=(j+1)j!-1=jj!+j!-1 \geq jj!$$

Logo,

$$\left| l - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}$$

o que implica que l é um número de Liouville e, portanto, transcendente!

Podemos generalizar o exemplo acima e construir infinitos outros números de Liouville, exibindo assim infinitos números transcendentes distintos, como pode ser visto no exemplo abaixo.

Exemplo 3.3 *Os números da forma*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = 0,a_1a_2000a_300000000000000000a_4000\ldots,$$

onde $a_k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *são números de Liouville.*

A demonstração deste fato é completamente análoga à demonstração do Exemplo 3.2. O próximo exemplo nos mostra que existem também números de Liouville em outros formatos.

Exemplo 3.4 *Dada a sequência*

$$\begin{cases} a_0 &= & 1 \\ a_n &= & 10^{a_{n-1}} \end{cases}$$

então $\beta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ *pertence a* $\mathbb{L}$.

Fazendo $p_j = a_j + \sum_{n=0}^{j-1} 10^{a_{j-1}-a_n}$ e $q_j = a_j$ temos que

$$\begin{array}{rcl} \left|\beta - \frac{p_j}{q_j}\right| & = & \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \\ & = & \frac{1}{10^{a_j}} + \frac{1}{10^{a_{j+1}}} + \frac{1}{10^{a_{j+2}}} + \cdots \\ & = & \frac{1}{10^{a_j}} \left(\frac{1}{10^{a_{j+1}-a_j}} + \frac{1}{10^{a_{j+2}-a_j}} + \cdots \right) \\ & < & \frac{1}{10^{a_j}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) \\ & = & \frac{1}{10^{a_j}} \frac{10}{9} \\ & < & \frac{1}{10^{a_j-1}}, \end{array}$$

Sendo assim, basta provar que

$$\frac{1}{10^{a_j-1}} \leq \frac{1}{a_j^j} = \frac{1}{(10^{a_{j-1}})^j} = \frac{1}{10^{ja_{j-1}}}.$$

o que equivale a mostrar que

$$10^{a_j-1} \geq 10^{ja_{j-1}}$$

Ou seja, devemos mostrar
$$\frac{a_{j+1}}{10} \geq a_j^j \Longleftrightarrow a_{j+1} \geq a_j^j 10.$$

De fato,

$$10a_j^j < (a_j)^{j+1} = (10^{a_{j-1}})^{j+1} = 10^{ja_{j-1}+a_{j-1}} = 10^{a_{j-1}(j+1)} < 10^{a_{j-1}a_{j-1}} < 10^{10^{a_{j-1}}} = a_{j+1}$$

e, portanto, $\beta \in \mathbb{L}$.

Um resultado surpreendente é o fato de que todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville. Para mostrar esta afirmação precisaremos de alguns resultados preliminares que se encontram abaixo.

Lema 3.1 *$\alpha \in \mathbb{L}$ se, e somente, se para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Demonstração: Se α é um número de Liouville então existe existe pela definição (3.2) uma sucessão de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$$

Fazendo $j = n$ e $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ temos que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Agora, se α é tal que $\forall n > 0$ existe $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ e tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

considere a sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 1}$ de forma que

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n},$$

donde $\alpha \in \mathbb{L}$.

□

Lema 3.2 *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se existirem $c > 0$ e uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ com $q_j \geq 1$ tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j},$$

então $\alpha \in \mathbb{L}$.

Demonstração: Se $0 < c \leq 1$ então

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^j}$$

e segue o resultado.

Se $c > 1$, observe que a sequência (q_j) é ilimitada (esta observação pode ser demonstrada de forma análoga à proposição 3.1).

Assim, temos que existe j_0 tal que para todo $j > j_0$ tem se que $c < q_j^{j_0}$ donde

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{q_j^j} < \frac{q_j^{j_0}}{q_j^j} = \frac{1}{q_j^{j-j_0}},$$

$\forall\ j \geq j_0$.

Para todo $j \geq j_0$, considere a sequência de números naturais $n = j - j_0$. Dessa forma, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} = \frac{p_j}{q_j}$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

e pelo lema (3.1) temos que α é um número de Liouville.

□

Lema 3.3 *Se existirem uma sequência ilimitada $(w_k)_{k\geq 1}$ de números reais positivos e uma sequência de racionais $\left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 1}$ tais que*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{q_k^{w_k}},\ \forall k \in \mathbb{N},$$

então $\alpha \in \mathbb{L}$.

Demonstração: Seja $(s_k)_{k\geq 1} \subseteq (w_k)_{k\geq 1}$ uma subsequência ilimitada em que $s_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)_{k\geq 1} \subseteq \left(\frac{p_k}{q_k}\right)_{k\geq 1}$ tais que

$$0 < \left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{b_k^{s_k}},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Agora tome uma sequência de números reais $(r_k)_{k\geq 1}$ com $r_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $s_k - r_k = k$, então

$$\left|\alpha - \frac{a_k}{b_k}\right| < \frac{1}{b_k^{s_k}} < \frac{1}{b_k^{s_k - r_k}} = \frac{1}{b_k^k},\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Logo pelo lema (3.1) temos o resultado.

□

Teorema 3.3 *Se $\alpha \in \mathbb{L}$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q \geq 1$, então:*

1. $\alpha \frac{p}{q} \in \mathbb{L}$

2. $\left(\alpha+\frac{p}{q}\right)\in\mathbb{L}$

Demonstração: Se $\alpha\in\mathbb{L}$ então existe uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ tal que

$$\left|\alpha-\frac{p_j}{q_j}\right|<\frac{1}{q_j^j}$$

1. Seja $\alpha_j = log_q q_j$ donde $q^{\alpha_j}=q_j$. Observe que $\lim_{j\to+\infty}\alpha_j=+\infty$ e ainda

$$\left|\alpha\frac{p}{q}-\frac{pp_j}{qq_j}\right|=\left|\alpha\frac{p}{q}-\frac{pp_j}{qq^{\alpha_j}}\right|=\left|\alpha\frac{p}{q}-\frac{pp_j}{q^{1+\alpha_j}}\right|.$$

   Por outro lado, observe que existe $k\in\mathbb{R}$ tal que $|p|<q^k$ então

$$\begin{aligned}
\left|\alpha\tfrac{p}{q}-\tfrac{pp_j}{qq_j}\right| &= \tfrac{|p|}{q}\left|\alpha-\tfrac{p_j}{q_j}\right| \\
&< \tfrac{|p|}{q}\tfrac{1}{q_j^j} \\
&= \tfrac{|p|}{q(q^{\alpha_j})^j} \\
&= \tfrac{|p|}{q^{j\alpha_j+1}} \\
&= \tfrac{|p|}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} \\
&< \tfrac{q^k}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}}} \\
&= \tfrac{1}{(q^{\alpha_j+1})^{\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}-k}}
\end{aligned}$$

   Agora, sabemos do Cálculo Diferencial e Integral que se uma função $f(x)$ é ilimitada então pelo teorema de L'hospital $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=1$ e assim $\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{f(x)}{1+f(x)}=+\infty$. Logo,

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\frac{j\alpha_j+1}{\alpha_j+1}-k\right)=+\infty,$$

   e segue pelo lema (3.3) que $\alpha\frac{p}{q}\in\mathbb{L}$.

2. Como no item anterior tem-se

$$\begin{aligned}
\left|\left(\alpha+\tfrac{p}{q}\right)-\left(\tfrac{p_j}{q_j}+\tfrac{p}{q}\right)\right| &= \left|\left(\alpha+\tfrac{p}{q}\right)-\left(\tfrac{p_jq+q_jp}{q_jq}\right)\right| \\
&= \left|\left(\alpha+\tfrac{p}{q}\right)-\left(\tfrac{p_jq+q_jp}{q^{\alpha_j}q}\right)\right| \\
&= \left|\left(\alpha+\tfrac{p}{q}\right)-\left(\tfrac{p_jq+q_jp}{q^{1+\alpha_j}}\right)\right|
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left|\left(\alpha+\tfrac{p}{q}\right)-\left(\tfrac{p_j}{q_j}+\tfrac{p}{q}\right)\right| &= \left|\alpha-\tfrac{p_j}{q_j}\right| \\ &< \frac{1}{q_j^j} \\ &= \frac{1}{(q^{\alpha_j})^j} \\ &= \frac{1}{q^{j\alpha_j}} \\ &= \frac{1}{(q^{1+\alpha_j})^{\frac{j\alpha_j}{1+\alpha_j}}}\end{aligned}$$

Mas, já sabemos que $\lim_{j\to+\infty}\dfrac{j\alpha_j}{1+\alpha_j}=+\infty$ donde pelo lema 3.3 segue que $\left(\alpha+\frac{p}{q}\right)\in\mathbb{L}$.

□

Agora podemos provar que qualquer número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.

Teorema 3.4 ***Teorema de Erdös***

Dado $\beta\in\mathbb{R}$ então existem $l_1, l_2\in\mathbb{L}$ tais que $\beta=l_1+l_2$

Demonstração: De fato, se $\beta\in\mathbb{L}$ então pelo teorema 3.3 basta tomar $l_1=l_2=\frac{\beta}{2}\in\mathbb{L}$.

Se $\beta\in\mathbb{Q}$ tomemos qualquer $\alpha\in\mathbb{L}$ e assim pelo teorema 3.3 $\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)$ e $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\in\mathbb{L}$ com $\beta=\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{\beta+\alpha}{2}$.

Agora, se $\beta\notin\mathbb{Q}$ então $(\beta-[\beta])\notin\mathbb{Q}$ onde $[\beta]$ é a parte inteira de β. E assim podemos estudar apenas o caso em que $\beta\in(0,1)\cap\mathbb{Q}^c$. Seja

$$\beta=0,a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots,\text{em que } a_n\in\{0,1,2,3,\ldots,9\}$$

e defina

$$l_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{10^n}\ e\ l_2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta_n}{10^n}$$

em que para $n!\leq k<(n+1)!$ temos

$$\begin{cases}\lambda_k=a_k & e & \delta_k=0 & se & n\notin 2\mathbb{N}\\ \lambda_k=0 & e & \delta_k=a_k & se & n\in 2\mathbb{N}.\end{cases}$$

É fácil ver que $\beta=l_1+l_2$. Falta mostrar que $l_1,l_2\in\mathbb{L}$. Para l_1, tomemos $p_n=\sum_{k=1}^{(2n)!-1}\lambda_k 10^{(2n)!-(1+k)}$ e $q_n=10^{(2n)!-1}$, daí

$$\left|l_1-\frac{p_n}{q_n}\right|=\sum_{k=(2n)!}^{\infty}\frac{\lambda_k}{10^k}$$

Lembrando que para $(2n)!\leq k<(2n+1)!$ tem-se $\lambda_k=0$ então

$$
\begin{aligned}
\left|l_1 - \tfrac{p_n}{q_n}\right| &= \textstyle\sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{\lambda_k}{10^k} \\
&\leq \textstyle\sum_{k=(2n+1)!}^{\infty} \frac{9}{10^k} \\
&= \tfrac{9}{10^{(2n!+1)}}\left(1 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{10^3} + \cdots\right) \\
&= \tfrac{9}{10^{(2n!+1)}}\tfrac{10}{9} \\
&= \tfrac{1}{10^{(2n!+1)-1}} \\
&< \tfrac{1}{10^{n((2n)!-1)}} \\
&= \tfrac{1}{(10^{(2n)!-1})^n} \\
&= \tfrac{1}{q_n^n}.
\end{aligned}
$$

Logo $l_1 \in \mathbb{L}$. De modo análogo pode-se provar que $l_2 \in \mathbb{L}$.

□

Como consequência deste fato temos que o conjunto $\mathbb{L}$ é não-enumerável. Isto ocorre pois, pelo Teorema de Erdös, podemos estabelecer uma bijeção de $\mathbb{R}$ em $S \subset \mathbb{L} \times \mathbb{L}$

$$
\begin{aligned}
f:\ \mathbb{R} &\longrightarrow S \subset \mathbb{L} \times \mathbb{L} \\
\beta &\longmapsto (l_1, l_2)
\end{aligned}
$$

o que implica que S é não-enumerável e portanto $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ também é não enumerável. Logo, temos que $\mathbb{L}$ é não-enumerável, pois do contrário teríamos $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ enumerável o que seria uma contradição.

Mas, apesar da não-enumerabilidade de $\mathbb{L}$ e $\mathbb{T}$, temos que $\mathbb{L} \neq \mathbb{T}$. Veremos na próxima seção que existem números transcendentes que não são números de Liouville.

4 A Constante de Champernowne

David Gawen Champernowne, em 1934, apresentou o número $c = 0,123456789101112...$, conhecida como constante de Champernowne, e que consiste da concatenização de todos números naturais. Mais tarde, em 1937, Kurth Mahler mostrou em [6] que tal número é transcendente porém não é de Liouville. Nesta seção apresentaremos uma outra demonstração desses fatos, também realizada por Mahler em 1968 e que faz uso de um resultado conhecido como Teorema de Roth.

4.1 O Teorema de Roth

Muitos matemáticos procuraram uma aproximação melhor que a apresentada por Liouville em seu teorema 3.1, mas, apenas em 1955 k. F. Roth demonstrou o seguinte resultado que lhe rendeu a honrosa medalha Fields no ano de 1958.

Teorema 4.1 *Sejam α um número algébrico e irracional e $\epsilon > 0$. Então o conjunto*

$$\left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \middle| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\epsilon}}\right\}$$

é finito.

Como consequência desse resultado, pode-se mostrar que:

Corolário 4.1 *Sejam α um número algébrico e irracional e $\epsilon > 0$. Então existe $k = k(\alpha, \epsilon)$ tal que para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{2+\epsilon}}$$

Estes dois resultados renderam a medalha Fields a Roth e suas demonstrações podem ser encontradas em [3].

4.2 A constante de Champernowne é transcendente

Seja $c = 0,1234567891011...$ a constante de Champernowne. Começamos por construir uma seqüência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ que possa contradizer o corolário (4.1).

Tome

$$r_1 = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{9}{10^9} + \frac{10}{10^{10}} + \cdots = \frac{10}{81} = 0,\overline{1234567891}$$

Daí

$$|c - r_1| < \frac{1}{10^9} < \frac{1}{81^{4,5}}$$

Faça $\frac{p_1}{q_1} = r_1$.

Em seguida, tome

$$r_2 = \frac{10}{10^2} + \frac{11}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots + \frac{99}{10^{178}} + \frac{100}{10^{180}} + \cdots = \frac{991}{99^2} = 0,\overline{10111213\cdots 9798991}$$

Assim obtemos que

$$\left|10^9 c - 123456789 - \frac{991}{99^2}\right| < \frac{1}{10^{178}}$$

o que implica em

$$\left|c - \frac{A}{10^9 99^2}\right| < \frac{1}{10^{187}}$$

que $A = 123456789.99^2 + 991.10^9.99^2$. Agora fazendo $\frac{p_2}{q_2} = \frac{A}{10^9 99^2}$ tem-se

$$\left|c - \frac{p_2}{q_2}\right| < \frac{1}{10^{187}} < \frac{1}{q_2^{4,5}}.$$

E assim sucessivamente, de forma à encontrarmos uma seqüência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ em que $p_j \in \mathbb{N}$ e $q_j \in \left\{9^2, 10^9 99^2, 10^{189} 999^2, \ldots 10^{n_k}(10^k - 1)^2, \ldots\right\}$ tal que

$$\left|c - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^{4,5}}.$$

Agora podemos provar que a constante de Champernowne não é um número algébrico.

Suponha que c seja algébrico. Logo, pelo corolário 4.1, temos que dado $\epsilon > 0$ existe $k > 0$ tal que

$$\left| c - \frac{p}{q} \right| > \frac{k}{q^{2+\epsilon}}, \quad \forall \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Portanto para $\epsilon = 0,5$ e a seqüência construída anteriormente segue que

$$\frac{k}{q_j^{2,5}} < \left| c - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^{4,5}}, \quad \forall \ \ j \in \mathbb{N}$$

donde $k < q_j^{-2}$. Mas, como $(q_j)_{j \geq 1}$ é ilimitada temos uma contradição. Logo a constante de Champernowne é um número transcendente.

4.3 A constante de Champernowne não é um número de Liouville

Na seção anterior mostramos que a constante de Champernowne é um número transcendente e, portanto, irracional. Dessa forma, podemos calcular sua medida de irracionalidade de acordo com a definição abaixo.

Definição 4.1 *Dado $\alpha \in \mathbb{Q}^c$, chamamos de medida de irracionalidade de α o número real positivo $\mu(\alpha) = \mu$ tal que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\mu}},$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Masaki Amou mostrou em [4] que $\mu(c) = 10$, isto é,

$$\left| c - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{10}},$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Portanto, se $c \in \mathbb{L}$ então existe uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j \geq 1}$ tal que

$$\frac{1}{q_j^{10}} < \left| c - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^{j}}$$

donde

$$q_j^{j-10} < 1.$$

o que contradiz a proposição 3.1. Logo, c não é um número de Liouville.

□

5 Considerações Finais

Os números irracionais são abordados no Ensino Fundamental e Médio apenas como números que não podem ser escritos na forma de uma fração, isto é, números que não são racionais. Isso permite uma boa compreensão da irracionalidade de $\sqrt{2}$, mas, somente essa definição não permite mostrar que outros números, como por exemplo, π e e também são irracionais.

A proposta desse trabalho foi apresentar um texto sobre números transcendentes e, portanto, sobre números irracionais, para que professores do ensino básico possam aprofundar seus conhecimentos sobre esse tema e até mesmo conhecer outros números transcendentes diferentes dos tradicionais π e e, como a constante de Champernowne.

Referências

[1] FIGUEREIDO,Djairo G. *Números Irracionais e Transcendentes* . 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM,2011.Coleção de Iniciação Científica.

[2] HEFEZ, Abramo e VILLELA, Maria L.T. *Polinômios e Equações Algébricas.*1ª ed.Rio de Janeiro: SBM,2012. Coleção PROFMAT.

[3] LEQUAIN, Y. *Aproximação de um Número Real Por Números Racionais.* 1ª ed.Rio de Janeiro: Impa, 1993.

[4] AMOU, M.:*Approximation to Certain Transcendental Decimal Fractions by Algebraic Numbers.* Journal of Numbers Theory, volume 37 , page 231-241,(1991)

[5] MARQUES, D. *Teoria dos Números Transcendentes.* Rio de Janeiro: SBM, 2013. Coleção Textos Universitários.

[6] MAHLER, K. *Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen*, Math. Annalen, t. 101 (1929), p. 342366.