2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

CÁLCULO DE PROBABILIDADES ASSOCIADAS ÀS DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS DE PROBABILIDADE

Eder José de Oliveira [1]
Andréa Cristiane dos Santos Delfino[2]

Resumo:

O cálculo de probabilidade é um dos tópicos da matemática tratadas no ensino médio. Nele o aluno consegue quantificar uma incerteza associada a um experimento aleatório. Nesta etapa, o aluno precisa saber construir o espaço amostral para, finalmente, efetuar o cálculo de probabilidades. Uma outra forma de calcular probabilidade é por meio de uma variável aleatória, que é uma função que associa a realização de um experimento aleatório à sua respectiva probabilidade. Neste contexto, o objetivo deste trabalho é fazer uma associação da forma de calcular probabilidade apresentada no ensino médio com variáveis aleatórias discretas, das quais serão utilizadas as distribuições de probabilidade discretas Uniforme, Bernoulli, Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica e Multinomial.

Palavras-chave: Distribuição de probabilidade, Probabilidade, Variável aleatória discreta.

1 Introdução

O tópico de probabilidade é um dos ítens, da disciplina de matemática, abordados nos ensinos fundamental e médio.

O cálculo de probabilidade é a forma de quantificar a incerteza de um determinado fenômeno aleatório. Compreender e descrever fenômenos aleatório possíveis, definir eventos de interesse e a eles associar um resultado são tarefas que o aluno deverá realizar.

Nesta fase de aprendizado, o aluno calcula probabilidades por meio de raciocínio lógico e muitas vezes, deve utilizar os recursos de análise combinatória.

De modo geral, os experimentos aleatórios utilizados nesta fase do ensino produzem resultados discretos, sendo assim, seria possível fazer uma associação com algumas distribuições discretas de probabilidade.

Por meio de exemplos, o professor pode apresentar uma alternativa para o cálculo de probabilidade por meio de funções de probabilidade. O intuito é acrescentar o conhecimento do aluno e oferecer uma alternativa para o cálculo de probabilidade. Nesta ocasião, o aluno deverá ser informado das características do enunciado, que o levaria a utilizar determinada distribuição de probabilidade.

[1] Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: ederjoliver@hotmail.com
[2] Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: andrea@ufsj.edu.br

Com o intuito de apresentar o elo entre o cálculo de probabilidade e as distribuições discretas, serão apresentados exemplos utilizando as distribuições Uniforme, Bernoulli, Binomial, Binomial Negativa, Geométrica, Hipergeométrica e Multinomial.

2 Probabilidade

2.1 Contexto Histórico

Segundo Dante (2014), o estudo das probabilidades teve sua origem na necessidade de quantificar os riscos dos seguros e de avaliar as chances de ganhar em jogos de azar. O surgimento dos seguros está associado à perda de carga dos navios (por naufrágio ou roubo), há mais de 5 mil anos. Os estudos matemáticos sobre seguros aparecem no início do século XVI, relacionados a seguros de vida. Iniciados por Gerônimo Cardano (1501-1576) em 1570, não ganharam repercussão. Em 1693, Edmund Halley (1656-1742) propôs um cálculo do valor da anuidade do seguro em termos da expectativa de vida e da probabilidade de sobrevida por um ou mais anos. Em 1730, em um estágio adiantado, Daniel Bernoulli (1700-1782) retomou problemas clássicos e deu os primeiros passos em direção a novos tipos de seguros.

Outra grande contribuição para o estudo de probabilidade está relacionada com jogos de azar, onde a probabilidade de ganhar ou perder depende exclusivamente do acaso, não importando o raciocínio ou habilidade do jogador. Antigamente, jogava-se não só em apostas, mas também em decisões de disputas, nas divisões de heranças, entre outras. Havia a preocupação de enumerar as possibilidades de se obter certo resultado no jogo e os primeiros cálculos de probabilidade em jogos de azar foram feitos com base em situações concretas. Os problemas genéricos viriam a ser resolvidos mais tarde por Pierre de Fermat e Blaise Pascal. Diz-se que em 1654 Pascal recebeu de se seu amigo Chevalier de Méré o desafio de resolver questões como esta:"Em oito lances de um dado um jogador deve tentar tirar o número um, mas depois de três tentativas infrutíferas o jogo é interrompido por seu oponente. Como deveria ser ele indenizado?"; isso desencadeou uma série de correspondências entre ele e Fermat, o que estimulou os estudos de Huygens sobre o assunto. Desta forma o seguro de navios e os jogos de azar foram a base para se chegar aos modelos de probabilidade que existem nos dias de hoje, (DANTE, 2014).

2.2 Teoria das Probabilidades

A teoria das probabilidades é um segmento da Matemática que estuda e desenvolve modelos visando analisar experimentos ou fenômenos aleatórios. Todos esses modelos apresentam variações segundo sua complexidade, mas possuem aspectos básicos em comuns. Antes de introduzir a fórmula para se calcular probabilidade, será dada ênfase em alguns conceitos fundamentais, como: experimento aleatório, espaço amostral e evento, conforme descritos segundo Smole (2010) e transcritos abaixo.

EXPERIMENTO ALEATÓRIO: É todo experimento que, mesmo repetido várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis, dentre os resultados possíveis.

ESPAÇO AMOSTRAL: É o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento aleatório. Notação: S

EVENTO: É todo subconjunto de um espaço amostral S de um experimento aleatório.

Será admitido que as chances de evento ocorrer em um espaço amostral S de eventos equiprováveis, para se definir a probabilidade de um evento em S.

A forma de calcular probabilidade se dará da seguinte forma: definido um evento A associado a um espaço amostral S, a probabilidade de ocorrência desse evento A, denotada por P(A), expressa na equação (1) é a razão entre o número de elementos de A, denotada por N(A) e o número de elementos de S, denotado por N(S).

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} \tag{1}$$

3 Regras Básicas da Probabilidade

Segundo Martins & Domingues (2011) podem ser destacas as seguintes regras básicas de probabilidade:

CAMPO DE VARIAÇÃO DAS PROBABILIDADES: A probabilidade de um evento A deve ser um número maior ou igual a 0, porém menor ou igual a 1. Isto é:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \tag{2}$$

PROBABILIDADE DO ESPAÇO AMOSTRAL: A probabilidade do espaço amostral S é sempre igual a 1. Isto é:

$$P(S) = 1 \tag{3}$$

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS: A probabilidade de ocorrência do evento A ou evento B (ou ambos) é igual:

$$P(A \cup B) \;=\; P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{4}$$

Caso os eventos A e B sejam mutuamente exclusivos, isto é: $A \cap B = \emptyset$, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{5}$$

PROBABILIDADE DE UM EVENTO COMPLEMENTAR: Seja A um evento e $\overline{A}$ o seu complementar, então:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{6}$$

PROBABILIDADE DA MULTIPLICAÇÃO DE DOIS EVENTOS:

Dois eventos serão independentes se a ocorrência de um deles não alterar a ocorrência do outro. Dados dois eventos independentes, A e B, a probabilidade da ocorrência de ambos é definida pela regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{7}$$

Essa forma também é válida para n eventos independentes, desde que as situações para a multiplicação de probabilidade sejam satisfeitas para todas as combinações de dois ou mais eventos, isto é, desde que todas as combinações sejam eventos independentes.

PROBABILIDADE CONDICIONADA:

Caso a condição de independência estatística não seja satisfeita, deve ser usada uma fórmula geral, envolvendo probabilidades condicionadas. Dados dois eventos, A e B, a probabilidade de que o evento B ocorra, considerando que o evento A já tenha ocorrido, é denotada por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{8}$$

4 Variável Aleatória

Uma variável aleatória é uma função que associa cada elemento de um espaço amostral a um número real, assim como na na Figura 1. A variável aleatória auxilia em situações em que se dispõe de um nível de conhecimento parcial ou incompleto do comportamento da grandeza, onde o importante é explicitar como se calcula a probabilidade da variável ou das realizações da variável. Em geral a variável aleatória é denotada por uma letra maiúscula e a seus possíveis resultados atribui-se uma letra minúscula (PINHEIRO,2009).

Segundo Meyer (2014), apesar da termologia“variável aleatória”, destaca-se que se refere a uma de função cujo domínio é S e contradomínio R.

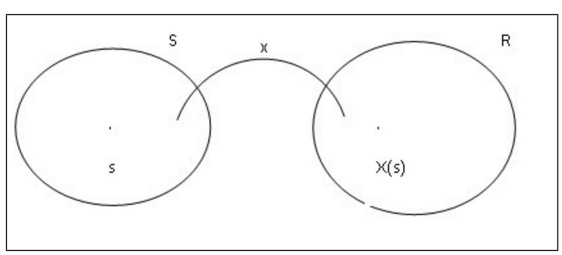

FIGURA 1: Função de Variável Aleatória (adaptada de Fonseca & Martins, 1994).

Nas atividades de aplicação os eventos são substituídos por números que estão diretamente associados as realizações da variável aleatória

5 Tipos de Variáveis Aleatórias

Os tipos de variáveis aleatórias são: discretas e contínuas, sendo classificadas conforme a natureza do conjunto de valores que elas podem assumir. Se os valores forem inteiros a variável aleatória é dita discreta: por outro lado, se os valores forem reais, a variável aleatória é denominada contínua. Neste trabalho dar-se-à ênfase às variáveis aleatórias discretas.

5.1 Variável Aleatória Discreta

Segundo Martins & Domingues (2011), uma variável aleatória, denotada por X , é considerada discreta se os possíveis valores de X forem finitos ou infinitos numeráveis.

5.2 Função de Probabilidade

Considere X uma variável aleatória discreta. Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4...$ alguns de seus valores assumidos pela função x. Aos resultados x_i, serão associados um número, denominado probabilidade de x_i tal que;

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$
- P$(x_i) \geq 0$ para todos os valores x_i

Essa função é chamada função de probabilidade da variável aleatória X e poderá ser expressa por uma tabela, gráfico ou fórmula.

Para ilustrar a ideia de variável aleatória discreta e probabilidades associadas será utilizado o seguinte exemplo:

Exemplo 5.1 *Suponha o experimento: lançamento de duas moedas. Calcular a probabilidade de ocorrer uma cara, duas caras e nenhuma cara.*

Denotaremos por X: número de caras obtida no lançamento das moedas
O espaço amostral, S, associado a este experimento é:

$$S = \{(C, C), (C, k), (K, C), K, K)\}$$

Sendo assim, os possíveis resultados que X, pode assumir são: 0, 1 e 2.

Quando X=0: significa a não ocorrência de cara, ou seja, refere-se ao evento: A={(K,K)}.

Quando X=1: significa a ocorrência de uma cara, ou seja, refere-se ao evento B={(C,k), (K,C)}

Quando X=2: significa a ocorrência de duas caras, ou seja, refere-se ao evento C={(C,C)}.

Para calcular a probabilidade de não ocorrer cara faz-se da seguinte forma:

$$P(X = 0) = P(A) = \frac{1}{4}$$

Para calcular a probabilidade de ocorrer uma cara faz-se de forma análoga a anterior:

$$P(X = 1) = P(B) = \frac{2}{4}$$

Finalmente, para calcular a probabilidade de ocorrer duas caras faz-se:

$$P(X = 2) = P(C) = \frac{1}{4}$$

A probabilidade da variável aleatória X, pode ser representada por meio de uma tabela chamada de distribuição de probabilidade

TABELA 1: Distribuição de probabilidade da variável aleatória X: ocorrência de caras no lançamento de duas moedas

X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

6 Distribuições discretas de probabilidade

Nesta seção serão apresentadas as distribuições discretas de probabilidade: Uniforme Discreta, Bernoulli, Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, Multinomial e Binomial Negativa.

6.1 Distribuição Uniforme Discreta

De acordo com Morettin & Bussab (2012), a distribuição Uniforme Discreta é o caso mais simples de variável aleatória discreta, em que cada valor possível ocorre com a mesma probabilidade.

Se x_1, x_2, ..., x_k, possui distribuição uniforme, então sua probabilidade pode ser expressa de acordo com a seguinte expressão:

$$P(X = x) = \frac{1}{k}\ ;\ x = 1, 2, 3, \ldots, k \tag{9}$$

6.2 Distribuição de Bernoulli

A distribuição de Bernoulli está relacionada a experimentos aleatórios que ocorrem em apenas uma única tentativa. Desta forma, definindo-se a variável aleatória, há apenas dois resultados, a saber, sucesso ou fracasso. Ao sucesso, atribui-se a probabilidade p, cujo valor associado é o 1 e ao fracasso atribui-se a probabilidade $q = 1 - p$, sendo, que para este atribui-se o valor zero(0), (MORETTIN & BUSSAB, 2012).

Sendo assim, se uma variável X tem distribuição de Bernoulli, sua distribuição pode ser dada por:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x} \tag{10}$$

em que
p: probabilidade de sucesso;
x: sucesso do evento.

6.3 Distribuição Binomial

Segundo Martins (2011) a distribuição de probabilidade Binomial é um modelo que fornece a probabilidade do número de sucessos quando são realizadas n provas do mesmo tipo, isto é, o experimento é repetido n vezes. Cada experimento admite dois resultados, sucesso ou fracasso, com probabilidades p e $q = 1 - p$ respectivamente, constantes em cada uma das provas. Desta forma, pode-se dizer que a distribuição Binomial são ensaios de Bernoulli repetidos n vezes. Podemos calcular a probabilidade de certo número x de sucesso em n provas por:

$$P(X = x) \quad = \quad \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{(n-x)} \tag{11}$$

em que:
n: tamanho da amostra;
p: probabilidade de sucesso;
q = 1- p: probabilidade de fracasso;
$\binom{n}{x}$: número combinatório.

6.4 Distribuição Geométrica

De acordo com Morettin (2010) se X fornece o número de falhas até o primeiro sucesso, a variável X tem distribuição Geométrica com parâmetro p, e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1} p \tag{12}$$

em que:
p: probabilidade de sucesso;
$1-p$: probabilidade de fracasso;
x: número de ensaios.

6.5 Distribuição Hipergeométrica

Segundo Bussab & Morettin(2011), essa distribuição é adequada quando consideramos extrações casuais feitas sem reposição de uma população dividida segundo dois atributos. Considere uma população de N objetos, dos quais r têm o atributo A, e N - r têm o atributo B. Para calcular a probabilidade de que um grupo contenha x elementos com o atributo A, utiliza-se a seguinte expressão:

$$P(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}} \tag{13}$$

em que :
N: número total de elementos;
r: número de elementos do atributo A;
$N-r$: número de elementos do atributo B;
x: número de elemento que contenha o atributo pedido.

6.6 Distribuição Multinomial

De acordo com Fonseca & Martins (1994) a distribuição Multinomial uma é generalização da distribuição Binomial. O experimento Binomial se transforma em um experimento multinomial se em cada tentativa (prova ou ensaio) há mais de dois possíveis resultados. Consideremos a possibilidade de k alternativas, ou seja, dividimos o espaço amostral em k eventos $X_1, X_2, ..., X_k$, mutuamente exclusivos com probabilidades $p_1, p_2, p_3, ..., p_k$, de modo que $p_1+p_2+...+p_k=1$. Então em k provas, a probabilidade que X_1 ocorra n_1 vezes, X_2 ocorra n_2 vezes, ..., X_k ocorra n_k vezes é igual a :

$$P(X_1=n_1, X_2=n_2, \ldots, X_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k} \tag{14}$$

em que
$n_i, i=1,...,k$: número de repetições.

6.7 Distribuição Binomial Negativa

A distribuição Binomial Negativa também é chamada de distribuição de Pascal.

De acordo com Morettin (2010), essa distribuição tem como objetivo analisar quantas repetições são necessárias em um experimento pra que o sucesso ocorra pela r-ésima vez. A distribuição Binomial Negativa é dada por:

$$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r(1-p)^{x-r}, \quad x \geq r \tag{15}$$

em que:

x: número de ocorrências exigidas para que um evento aconteça pela r-ésima vez;
p: probabilidade de sucesso;
$(1-p)$: probabilidade de fracasso;
r: número de sucesso na amostra.

7 Exemplos de aplicação de cálculos de probabilidades

As atividades propostas a seguir serão resolvidas de duas formas distintas: na primeira forma resolveremos usando raciocínio lógico, forma usual de resolução do aluno do ensino médio e na segunda forma utilizaremos a fórmula específica segundo as características de cada distribuição de probabilidade discreta.

O intuito desta apresentação é mostrar que cálculos de probabilidades são formalizados com o uso de distribuições de probabilidades discretas e é possível dar uma noção destas possibilidades conjuntamente com a apresentação da teoria de probabilidade.

7.1 Aplicação da distribuição Uniforme Discreta

Exemplo 7.1 *Considere um dado não "viciado", em que cada face apresenta um número natural de 1 a 6. Calcule a distribuição de probabilidade da ocorrências dos número da face do dado.*

i) Resolução por meio da definição de probabilidade

$$\text{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{P(ocorrer a face 1)} = \frac{1}{6}$$

$$\text{P(ocorrer a face 2)} = \frac{1}{6}$$

Logo,

$$\text{P(ocorrer a face 1)} = \text{P(ocorrer a face 2)} = \ldots = \text{P(ocorrer a face 6)} = \frac{1}{6}$$

Pode-se verificar que cada uma das faces tem a mesma probabilidade de ocorrer.

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

$$\text{P(X=x)}=\frac{1}{k}$$

A probabilidade de ocorrer a face 1 é dada por:

$$\text{P(X=1)=}\frac{1}{6}$$

A probabilidade de ocorrer a face 2 é dada por:

$$\text{P(X=2)=}\frac{1}{6}$$

Consequentemente,
P(X=1)=P(X=3) = ... = P(X=6) = $\frac{1}{6}$

Após analisar alguns livros didáticos do Ensino Médio, constatamos que a probabilidade uniforme discreta é a mais explorada dentro de seu conteúdo básico, por ser uma probabilidade constante e de fácil entendimento e compreensão por parte dos alunos.

7.2 Aplicação da Distribuição de Bernoulli

Exemplo 7.2 *Carlos está fazendo um simulado de estatística e se deparou com um teste que possui cinco alternativas contendo uma correta. Qual a probabilidade de Carlos acertar o teste?*

Como foi enunciado a primeira maneira de resolução será por meio do uso da probabilidade.

i) Resolução por meio da definição de probabilidade

Temos cinco possibilidades, uma é correta então,

$$\text{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{P(A)} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Agora será apresentado o cálculo de probabilidade, por meio da distribuição de Bernoulli

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

X = 1 (acertar a questão)
Sucesso = 0,2
Fracasso = 0,8

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$$

$$\text{P(X=1)=}\ 0,2^1(1 - 0,2)^0$$

$$\text{P(X=1)= 0,2}$$

Por meio do exemplo 7.2, pode-se constatar que é possível associar o exemplo apresentado com a distribuição de Bernoulli. Desta forma, é possível que o professor explore a associação com o modelo apresentado culminando em um aumento de conhecimento para o aluno.

7.3 Aplicação da Distribuição Binomial

Exemplo 7.3 *Uma moeda é lançada quatro vezes seguidas e independentes. Calcule a probabilidade de serem obtidas duas coroas nesses quatro lançamentos?*

i) Resolução por meio da definição de probabilidade

Os possíveis resultados deste experimento são:

S={(c,c,c,c), (c,c,c,k), (c,c,k,c), (c,k,c,c), (k,c,c,c), (k,k,k,c), (k,k,c,k), (k,c,k,k), (c,k,k,k), (c,c,k,k), (c,k,c,k), (k,c,c,k), (k,c,k,c), (k,k,c,c), (c,k,k,c), (k,k,k,k)}

O evento de interesse são os resultados que aparecem duas coroas, sendo assim, A = {(c,c,k,k), (c,k,c,k), (k,c,c,k), (k,c,k,c), (k,k,c,c), (c,k,k,c))}

Desta forma pode-se escrever:

$$\text{P(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\text{P(A)} = \frac{6}{16} = 0,375$$

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

X: ocorrência de duas caras

n=4
probabilidade de sucesso: p=0,5
probabilidade de fracasso: 1 - p = 1 - 0,5 = 0,5

$$P(X = x) \quad = \quad \binom{n}{x} p^x (1-p)^{(n-x)}$$

$$P(X = 2) \quad = \quad \binom{4}{2} (0,5)^2 (0,5)^2 = 0,375 \tag{16}$$

Quando o número de ensaios é grande, pode ficar inviável a construção do espaço amostral. Neste caso a distribuição de probabilidade é uma excelente alternativa. No exemplo 7.3 é possível notar que o professor do Ensino Médio pode fazer menção a função de Probabilidade Binomial, que seria uma forma alternativa de calcular a probabilidade, uma vez que pelo currículo da educação básica o aluno já tem conhecimento de análise combinatória.

7.4 Aplicação da Distribuição Geométrica

Exemplo 7.4 *João é um jogador de vôlei, tem uma eficiência de saque de 40%. Durante um jogo, João tem direito a quatro saques. Qual a probabilidade dele ter o primeiro acerto no quarto saque?*

i) Resolução por meio da definição de probabilidade:

Nos três primeiros eventos tem-se o fracasso com probabilidade 0,6 e no último evento tem-se o sucesso com probabilidade 0,4; desta forma:

$P(acerto\ no\ quarto\ saque) = 0,6 \times 0,6 \times 0,6 \times 0,4 = 0,0864 =$ 8,64%

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade:

$$P(X = x) = (1 - p)^{x-1}p$$

$$\text{P(X=4)} = (0,6)^3 \times 0,4 = 0,0864$$

Pode-se explorar este exemplo no Ensino médio, das duas diferentes formas, uma vez que o aluno já tem conhecimento de multiplicação de probabilidade de eventos independentes e através da função de probabilidade, dando ênfase em sucesso e fracasso.

7.5 Aplicação da Distribuição Hipergeométrica

Exemplo 7.5 *Em uma empresa, técnicos do departamento de qualidade fizeram uma análise de seus produtos e verificaram que em um lote de seis unidades, três apresentam defeito. Escolhendo dois produtos sem reposição, qual a probabilidade de não obter produtos defeituosos?*

i) Resolução por meio da definição de probabilidade

Podemos utilizar o princípio da probabilidade e a multiplicação de probabilidade de dois eventos não indepêndentes para resolver a situação problema.

P(A) $= \dfrac{n(A)}{n(S)}$

A: primeira e segunda peça não defeituosa.

Sendo assim,

$$\text{P(A)}= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = 0,2$$

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

X: peças não defeituosas
N=6, n=2, r=3

$$P(X=x)=\frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=0,2$$

Analisando-se do exemplo 7.5 observa-se que as formas de resolução lógica são muito eficientes, embora não descarta-se as resoluções por meio de distribuição de probabilidade. O papel do professor é instigar o aluno a procurar diferentes formas de resolução de uma situação problema, assim é possível formar um cidadão crítico e consciente.

7.6 Aplicação da Distribuição Multinomial

Exemplo 7.6 *Uma urna contém seis bolas coloridas, das quais duas são azuis, duas pretas e duas amarelas. Determine a probabilidade de retirar quatro bolas, com reposição, e na extração sair duas azuis e duas amarelas.*

i) Resolução por meio da definição de probabilidade

A probabilidade de ser retirada um bola de cor azul é $\frac{2}{6}$ e a cor amarela também é $\frac{2}{6}$.

Como as cores se repetem é necessário utilizar a permutação com repetição para obter o número de arranjos que são possíveis de serem formados, sendo assim, tem-se

$$PR_{4,2}=\frac{4!}{2!2!}=6$$

$$\text{P(duas azuis e duas amarela)}=\left(\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}\right)\times 6=0,0074$$

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

$$P(X_1=n_1,X_2=n_2,\ldots,X_k=n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$$

$$P(X_{azul}=2,X_{amarela}=2,X_{preta}=0)=\frac{4}{2!2!0!}\times\frac{2}{6}^2\times\frac{2}{6}^2\times\frac{2}{6}^0=0,0074$$

Embora os exemplos que possam ser associados à Distribuição de Probabilidade Multinomial sejam tratados de forma rápida, no Ensino Médio, podemos apresentar esta distribuição evidenciando a importância da função para eventos com um espaço amostral particionado e com repetição.

7.7 Aplicação da Distribuição Binomial Negativa

Exemplo 7.7 *João é um jogador de vôlei. O atleta tem uma eficiência de 40 % nos seus saques. Durante uma partida de um campeonato qual a probabilidade de acertar o terceiro saque na sua quinta tentativa?*

i) Resolução por meio da multiplicação de probabilidade

A probabilidade de acerto é 40% consequentemente a probabilidade de erro é 60 %. Para ele acertar, o terceiro saque na quinta tentativa, significa que ele anteriormente acertou dois saques, que devem permutar nas primeiras 4 tentativas.

Sendo assim, para as quatro primeiras tentativas, as combinações podem ser feitas da seguinte forma: $\binom{4}{2} = 6$

Logo,

$$\text{P(acertar o terceiro saque na quinta tentativa)} = \\ = 6 \times (0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 0,6) \times 0,4 = 0,1382$$

ii) Resolução por meio da distribuição de probabilidade

$$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$$

$$\text{P(x=5)} = \binom{4}{2} (0,4)^3 (0,6)^2 = 0,1382$$

Embora os exemplos possam ser associados as distribuições Geométrica, Binomial Negativa e Multinomial sejam tratados de forma rápida no Ensino Médio, percebe-se que é possível o professor estabelecer uma associação entre raciocínio lógico e as funções de probabilidade.

8 Considerações Finais

Neste trabalho foram descritas detalhadamente as distribuições de probabilidade propostas para este estudo, Distribuição Uniforme Discreta, Bernoulli, Binomial, Geométrica, Hipergeométrica, Multinomial e Binomial Negativa, suas importâncias foram evidenciadas através de situações de aplicações apresentadas.

Após analise dos problemas apresentados neste estudo, pode-se afirmar que o uso do raciocínio lógico é de grande importância para a resolução das atividades propostas em seu dia-dia. No entanto, fazer uma associação com funções de probabilidades discretas possibilita ao aluno uma nova alternativa de resolução, além de culminar, no aumento considerável de seus conhecimentos.

9 Agradecimentos

Agradeço a Deus, que me deu força e coragem para enfrentar estes anos de estudo. Agradeço a SBM e UFSJ pela oportunidade de um sonho que será concretizado. A minha orientadora Andréa Cristiane dos Santos Delfino, pela confiança e paciência nas instruções e esclarecimentos de dúvidas na pesquisa realizada. Agradeço de forma especial a minha esposa Renata, minha filha querida Maria Luiza, e a todos os familiares que me incentivaram nos momentos difíceis e tiveram paciência e compreensão nos momentos de ausência.

10 Referências

[1] BUSSAB, Wilton de O; MORETTIN, Pedro A., **Estatística Básica**, 7. ed.-São Paulo: Saraiva 2012.

[2] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações**. 2 ed. São Paulo: Ática 2014.

[3] FONSECA, Jairo Simon de; MARTINS. Gilberto de Andrade. **Curso de Estatística**. 5 ed. São Paulo: atlas S.A.1994,

[4] MARTINS, Gilberto de Andrade; DOMINGUES, Osmar. 4. ed .rev.e amp.-São Paulo:Atlas,2011.

[5] MEYER, Paul L. **Probabilidade Aplicações a Estatística**. 1. Ed.rev. Rio de Janeiro. Ao livro técnico S.A.2014.

[6] MORETTIN, L. G. **Estatística básica: probabilidade e inferência**, volume único, São Paulo, Pearson Prentice Hall, 2010, 375p.

[7] SMOLE, Kátia Stocco e DINIZ, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio**. 6 ed.São Paulo:Saraiva 2010.

[8] PINHEIRO, João Ismael D., **Estatística Básica: A Arte de Trabalhar com os Dados** [Et al] -Rio de Janeiro: Elsevier, 2009.Pag. 95-130.