

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

EDILSON DE MOURA

**FRACTAIS GERADOS
POR SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS**

**CAMPO GRANDE - MS
FEVEREIRO DE 2015**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL**

EDILSON DE MOURA

**FRACTAIS GERADOS
POR SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS**

ORIENTADORA: Prof^a. Dr^a. Janete de Paula Ferrareze Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática - INMA/UFMS - como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

**CAMPO GRANDE - MS
FEVEREIRO DE 2015**

**FRACATAIS GERADOS
POR SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS**

EDILSON DE MOURA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof.^a Dr.^a. Janete de Paula Ferrareze Silva - UFMS

Prof. Dr. Vando Narcizo - UEMS

Prof. Dr. Jair da Silva - UFMS

**CAMPO GRANDE – MS
FEVEREIRO DE 2015**

A minha esposa Adriana Alves de Moura; ao nosso filho Lorenzo Alves de Moura; e ao meus pais Lourenço Ribeiro de Moura (in memorian) e Elódia Luiza de Moura, que sempre me incentivaram na realização de meus ideais.

AGRADECIMENTOS

Como desejei escrever estas palavras de agradecimento! Este momento só seria possível se eu persistisse até o final, superando todos os desafios com muito foco e em várias horas de estudo longe do convívio familiar e secular. À minha família, aos meus colegas de estudo e aos mestres que me acompanharam durante essa caminhada deixo registrados o meu reconhecimento e a minha gratidão por tamanha compreensão e lealdade.

*O todo sem a parte não é todo,
A parte sem o todo não é parte,
Mas se a parte o faz todo, sendo parte,
Não se diga, que é parte, sendo todo.*

*Em todo o Sacramento está Deus todo,
E todo assiste inteiro em qualquer parte,
E feito em partes todo em toda a parte,
Em qualquer parte sempre fica o todo.*

*O braço de Jesus não seja parte,
Pois que feito Jesus em partes todo,
Assiste cada parte em sua parte.*

*Não se sabendo parte deste todo,
Um braço, que lhe acharam, sendo parte,
Nos disse as partes todas deste todo.*

Gregório de Matos.

RESUMO

O objeto de estudo deste texto trata sobre a classe de fractais que são gerados por Sistemas de Funções Iteradas. A primeira noção que temos sobre o conceito fractal é que são formas compostas de partes que de algum modo são semelhantes ao todo. A análise do conceito fractal envolve a compreensão de outros conceitos, como a dimensão de Hausdorff, escala, autossemelhança, complexidade infinita, atrator e iteração. A dimensão de Hausdorff quantifica a irregularidade fractal. A complexidade infinita diz respeito à complexidade das formas que convergem à forma fractal no mesmo grau e em todas as escalas. A autossemelhança provém da semelhança entre si dos elementos que vão compondo as formas até a forma fractal. Atrator é o elo entre a geometria fractal e a teoria do caos. A partir dessa abordagem tem-se que um fractal é o ponto fixo de um Sistema de Funções Iteradas (SFI) num espaço métrico completo munido da métrica de Hausdorff. Um fato interessante é que esse tema é parte integrante das Diretrizes Curriculares para Educação do Estado do Paraná, as quais orientam o estudo da geometria fractal. Por ser um tema que envolve muitos termos e conceitos acadêmicos, não comum ao mundo escolar, buscamos desenvolver neste texto uma abordagem acessível do conceito fractal a professores e alunos da Educação Básica.

Palavras-chave: Dimensão Fractal. Funções Iteradas. Fractais. Geometria fractal.

ABSTRACT

The study object of this text is about the fractal class which are created by Iteradas Function Systems. The first notion that we have about the fractal concept is that they are compound forms of parts which in a way are similar to all. The analyses of the fractal concept involves a comprehension of other ideas, like Hausdorff dimension, scale, self-similarity, infinite complexity, attractor and interaction. Hausdorff dimension quantifies the fractal irregularity. The infinite complexity is about the forms complexity that converges to fractal form in the same level and in all scales. The self-similarity comes from de similarity among them and of the elements that compound the forms till the fractal form. Attractor is the link between fractal geometry and chaos theory. From this approach we have that a fractal is the fixed point of an Iteradas Function System (SFI) in a complete metric space provided by Hausdorff metric. An interesting event is that this topic is part of Diretrizes Curriculares for State Education in Paraná, which one guides the study of fractal geometry. As this topic involves many terms and academic ideas, that are not part of school world, we tried to develop in this text an accessible approach of the fractal concept for teachers and students of Basic Education.

Keywords: Fractal Dimension. Iteradas Function. Fractal. Fractal Geometry.

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	O Conceito Fractal	15
2.1	Primeiras Noções	15
2.2	A Característica Geométrica	19
2.3	A Característica Topológica	22
2.3.1	Dimensão Fractal	25
2.3.2	Ponto Fixo	39
2.3.3	Iteração.....	44
2.3.4	O Modelo de Verhulst	47
2.4	Do Aspecto da Linguagem	55
3	O Sistema de Funções Iteradas (SFI)	58
4	Desenvolvendo o Conceito Fractal	68
3.1	Apresentação das Atividades	75
3.1.1	Iteração em Forma de Escada e Espiral	75
3.1.2	Composição de Função	83
5	Uma Síntese Conclusiva	87
	Referência	89

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - Curva de Peano	15
FIGURA 2 - Objetos fractais: a) curva de Koch; b) conjunto de Cantor; c) floco de neve de Koch	20
FIGURA 3 - Formas geométricas: a) triângulo de Sierpinski; b) conjunto de Mandelbrot (a figura maior corresponde a uma ampliação detalhada da figura menor)	20
FIGURA 4 - Propriedade intrínseca da métrica de Hausdorff de separar os elementos do espaço métrico	20
FIGURA 5 - Curvas planas irregulares de dimensão fractal entre 1 e 2	27
FIGURA 6 - Iniciador-gerador da Figura 5	28
FIGURA 7 - Curva no 4º estágio de desenvolvimento	28
FIGURA 8 - Tamanho de caixas versus número de células ocupadas: a) escala 1/4; b) escala 1/8; c) escala 1/12; d) escala 1/16; e) escala 1/24; f) escala 1/32	30
FIGURA 9 - Gráfico da reta de regressão linear por meio da ferramenta Reta de Regressão, em software específico	31
FIGURA 10 - Variante da curva de Von Koch, interpretada como modelo de Pulmão	33
FIGURA 11 - Esquema para calcular o comprimento de uma curva	35
FIGURA 12 - A dimensão euclidiana	36
FIGURA 13 - A dimensão fractal do Conjunto de Cantor	37
FIGURA 14 - A dimensão de objetos com autossimilaridade exata	39

FIGURA 15 - Trajetória do pêndulo no espaço de fase: a) sem atrito; b) com atrito	42
FIGURA 16 - Atrator de Ueda	43
FIGURA 17 - Gráficos das funções $y = r \cdot x \cdot (1 - x)$ e $y = x$: a) Diagrama da teia de aranha para $r = 0,7$; (b) Diagrama da teia de aranha para $r = 1,3$	48
FIGURA 18 - Modelo de crescimento para vários valores de r	49
FIGURA 19 - Diagrama da teia de aranha: a) para $r = 3,3$ temos dois períodos; b) para $r = 3,5$ temos quatro períodos	50
FIGURA 20 - Diagrama da teia: a) para $x = 0,5$ e $r = 4$ temos um ponto fixo; b) para $x = 0,4$ e $r = 4$ temos o caos	51
FIGURA 21 - Diagrama de Bifurcação	53
FIGURA 22 - Conjunto de Mandelbrot	54
FIGURA 23 - Iteradas sucessivas de um compacto de \mathbb{R} pela função \tilde{f} definida em $H(\mathbb{R})$	61
FIGURA 24 - Iteradas sucessivas de um compacto de \mathbb{R}^2 pela função \tilde{w} definida em $H(\mathbb{R}^2)$	63
FIGURA 25 - Triângulo de Sierpinski gerado por SFI	65
FIGURA 26 - Intervalo $B_0 = [0, 1]$	66
FIGURA 27 - Intervalo $B_1 = \tilde{w}_1(B_0) \cup \tilde{w}_2(B_0)$	66
FIGURA 28 - Intervalo $B_2 = \tilde{w}_1(B_1) \cup \tilde{w}_2(B_1)$	67
FIGURA 29 - Intervalo B_3 e B_4	67
FIGURA 30 - Composição recursivas (loop de retroalimentação)	69
FIGURA 31 - Iteração como processo gráfico	69
FIGURA 32 - Expansão	70

FIGURA 33 - Funções da forma $f(z) = z^2 + c$, $z \in \mathbb{C}$	71
FIGURA 34 - Iterando para obter o atrator pontual ou de período um	72
FIGURA 35 - Iterando para obter o atrator de ordem dois ou de período dois	73
FIGURA 36 - Iterando para obter caos	74
FIGURA 37 - Máquina de composição	75
FIGURA 38 - Processo de construção do processo gráfico	76
FIGURA 39 - Construção da escada: a) na escada; b) fora da escada	77
FIGURA 40 - Desenhar o caminho	78
FIGURA 41 - Espirais semelhantes	78
FIGURA 42 - Construção gráfica 1	79
FIGURA 43 - Construção gráfica 2	80
FIGURA 44 - Pontos de itera 1: a) escada para fora; b) espiral	80
FIGURA 45 - Ponto de itera 2: a) espiral para fora; b) na escada	81
FIGURA 46 - Inclinação da reta 1	82
FIGURA 47 - Inclinação da reta 2	82
FIGURA 48 - Diagrama de composição	83
FIGURA 49 - Diagrama de composição 1	84

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - Dimensão fractal do ramo do pinheiro	31
---	----

1 INTRODUÇÃO

O tema Fractal vem se tornando cada vez mais freqüente em revistas, livros e sites científicos ou de informação. Vários trabalhos e pesquisas acadêmicas, como veremos a seguir, afirmam que os Fractais podem ser incorporados aos conteúdos já existentes da matemática escolar, tornando o trabalho didático mais interessante e com nuances de modernidade.

Esse texto foi organizado como o objetivo de apresentar o "Conceito Fractal" por meio dos Fractais Gerados por Sistemas de Funções Iteradas.

Desde 1994, Jeremy Kilpatrick, professor do Instituto de Educação em Matemática da Universidade da Geórgia, Estados Unidos, identificou os fractais como um “novo conhecimento” e uma nova tendência dentro do processo de ensino-aprendizagem, pois para ele, “[...] à medida que surgem novos conhecimentos e novas tecnologias e aplicações da matemática, têm surgido pesquisas sobre como estes poderiam ser ensinados e/ou aprendidos na escola. Um exemplo disso são os fractais [...]” (FIORENTINI; LORENZATO, 2009, p. 42).

Mandelbrot (1998), que iniciou o uso da palavra “Fractal” para designar a ideia, diz que “Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas”. Alves (2007, p. xxxiii), em uma síntese matemática, diz que “Fractal é uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo.” Associa-se a forma fractal a três noções: autossemelhança, complexidade infinita e dimensão não-inteira. Essas noções ficam evidentes e mais claras quando tratamos de sequências geométricas. A autossemelhança provém da semelhança entre si dos elementos que vão compondo as formas até a forma fractal. A complexidade infinita diz respeito à complexidade das formas que convergem à forma fractal no mesmo grau e em todas as escalas. A dimensão não-inteira é a noção que, segundo Alves (2007, p. xxxv), diz respeito à medida que um determinado conjunto ocupa no espaço natural a que pertence, como o espaço em uma reta, em um plano ou no espaço volumoso.

O fato de a geometria fractal não ser acadêmica e também ser considerada muito nova não diminui a sua importância, pelo contrário, pois é sabido que “[...] Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática [...]” (BRASIL, 1998, p. 25).

Constatou-se um fato interessante: esse tema é parte integrante das Diretrizes Curriculares para Educação do Estado do Paraná, as quais orientam o estudo da geometria fractal; orientam, ainda, que esse estudo deve colaborar para que o aluno no Ensino Fundamental compreenda noções de geometrias não-euclidianas: “[...] geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica [...] e noção de geometria dos fractais.” (PARANÁ, 2008, p. 56).

Destacam, também, que

[...] no Ensino Médio se aprofunda os estudos das Noções de Geometrias não-euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Hiperbólica e Elíptica. Na geometria dos Fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, [...] (PARANÁ, 2008, p. 57).

Foram também encontradas várias pesquisas acadêmicas que utilizam a teoria fractal em diversos campos do conhecimento como, por exemplo: a) Medicina: Marcelo Bezerra de Melo de Mendonça e outros, em *Análise Fractal da Vasculatura Retínica: Métodos de Segmentação e de Cálculo Dimensional* (2007); b) Desenvolvimento Urbano: Fabiano José Arcadio Sombreira, em *A Lógica da Diversidade: Complexidade e Dinâmica em Assentamentos Espontâneos* (2003); c) Biologia: F. M. S. Angelis-Reis e W. S. Romanha, em *a Dimensão Fractal como um Parâmetro no Estudo do Granuloma na Esquistossomíase Experimental* (2006).

O estudo dos documentos oficiais e também das pesquisas acadêmicas em Educação Matemática confirmaram que o conceito fractal, objeto de estudo desta pesquisa, é de natureza pragmática, ou seja, os fractais estão relacionados à melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem.

O estudo do conceito fractal foi realizado levando-se em conta três aspectos: o topológico, o geométrico e o da linguagem. As noções topológicas que se buscou desenvolver se fazem necessárias porque há a classe dos fractais algébricos, construídos mediante teorias

topológicas, que são aqueles obtidos por “sistemas de funções iteradas”, onde é utilizado o estudo de métricas, do espaço métrico e da métrica de Hausdorff. Já o aspecto geométrico fez-se necessário porque apresenta grandes possibilidades da Teoria Fractal para o ensino da Matemática na Educação Básica e o aspecto da linguagem, porque a geometria fractal também é uma linguagem.

Este trabalho é considerado um estudo essencialmente descritivo, visto que se procurou conhecer, de modo descritivo a constituição matemática do conceito fractal e também bibliográfico e documentário porque foi realizado por meio de leituras diversas, em produções acadêmicas e livros escolares que tratam do tema em referência.

Este trabalho foi organizado em 5 capítulos: sendo o primeiro a *Introdução*; no segundo, *O Conceito Fractal*, apresentou-se uma das principais características do conceito fractal que é a dimensão fractal. Buscando atribuir significados ao valor não-inteiro da dimensão, foram desenvolvidas e descritas atividades que podem ser aplicadas na Educação Básica; no terceiro, *Sistemas de Funções Iteradas*; formalizamos matematicamente a construção da classe de fractais gerada por meio da iteração; no quarto, *Desenvolvendo o Conceito Fractal*; descreveu-se algumas atividades traduzidas do livro *Fractals For The Classroom* com intuito de apresentá-las como exemplos que podem ser utilizados na Educação Básica ajudando a desenvolver a compreensão do conceito fractal e de temas já consagrados no ambiente escolar; e por último a *Conclusão*.

Enfim, a organização desse conhecimento pedagógico acerca do conceito Fractal poderá favorecer mais reflexões sobre o tema e, doravante, aliada a novas pesquisas, contribuir de forma efetiva para a melhoria da qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática.

2 O CONCEITO FRACTAL

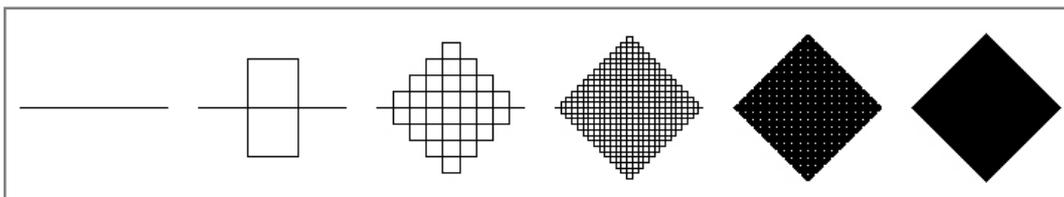
A geometria fractal está relacionada à uma ciência chamada de CAOS. As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, sendo considerada como a linguagem geométrica dessa ciência. Essa geometria busca descrever padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório. Alves (2007) considera que o conceito de Fractal é simples nas primeiras noções, como naquelas que aparecem ilustradas em revistas, livros escolares, mas “não é fácil defini-lo de modo formal”. Abordaremos neste capítulo o conceito fractal por meio do aspecto Geométrico, Topológico e da Linguagem.

2.1 PRIMEIRAS NOÇÕES

Fractal é um conceito da Matemática que é expresso com a ideia de “[...] uma forma composta de partes que de algum modo são semelhantes ao todo.” (ALVES, 2007, p. xxxiii). Uma forma fractal pode estar presente como objeto geométrico, como objeto numérico ou como objeto algébrico, dependendo da representação sobre a qual a definimos.

Mandelbrot (1998, p. 207), ao escrever a teoria fractal, afirma que a “Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau e em todas as escalas.”

FIGURA 1 - Curva de Peano



Fonte: Alves (2007, p. 42).

Na Figura 1, o quadrado é um fractal. Essa afirmação assenta como verdadeira quando é justificada mediante o procedimento iterativo da curva de Peano¹. Pode-se compreender que essa curva preenche todo o espaço do plano compreendido no quadrado euclidiano. Para se ter uma ideia desse fato, basta considerar um sistema de eixos cartesianos com origem no início da curva de Peano e o eixo das abscissas dado pelo próprio segmento. Na iteração de ordem k , a curva estará cobrindo pontos da superfície com abscissas dadas por racionais de denominadores 3^k decrescendo em $1/3$ na ordem seguinte. Fato semelhante pode ser visto para ordenadas. Em consequência, a superfície de cada quadradinho gerado pela curva tende a zero. Isso induz à confirmação de que a curva cobre toda a superfície.

Neste capítulo serão abordados a dimensão, a autossimilaridade, e a escala que são as características presentes na constituição do conceito fractal. Decresceremos também duas formas de se calcular o valor da dimensão da Curva de Peano (FIGURA 1), que é dois. O valor da dimensão fractal, em geral, é um número não-inteiro, mas se for um número inteiro, o todo será irregular ou com detalhes. Para se ter uma ideia do que seja a noção dessa irregularidade, podemos pensar em uma folha de papel amassada num formato de bola. Quanto mais próxima a folha amassada estiver de uma esfera, mais próxima a sua dimensão estará de três, e mesmo que alcancemos este valor, a sua superfície sempre será irregular.

Sobreira (2003) levanta questionamentos sobre a utilidade de se calcular a dimensão não-inteira de um objeto, mais especificamente, da aplicabilidade ou significado desses números para um urbanista, por exemplo, qual o significado que se deve atribuir à informação de que a dimensão fractal de malha (d_m) da cidade americana de Boston é $1,69$, enquanto da cidade de Budapest, capital e a maior cidade da Hungria, d_m é próxima de $1,72$? Sobreira (2003, p. 72) afirma que há autores que se utilizam dessas informações para definir postulados estéticos:

Os resultados apresentados até agora sugerem que a distribuição do espaço construído de assentamentos urbanos segue leis fractais ao longo de diferentes escalas de observação; uma ordem interna persistente, apesar da morfologia irregular. [...] De acordo com as medições, a dimensão de malha cresce juntamente com o crescimento da cidade.

¹ Para se construir a curva de Peano, começa-se, por exemplo, com um segmento de reta unitária e em seguida colocamos os nove segmentos de comprimento $1/3$. Aplica-se o mesmo procedimento para os nove segmentos e assim infinitas vezes.

Mandelbrot (1998, p. 207), destacou a autossemelhança como uma das principais noções da geometria fractal, ao afirmar que a “Geometria Fractal é o estudo de diversos objetos, tanto matemáticos como naturais, que não são regulares, mas rugosos, porosos, ou fragmentados, sendo-o no mesmo grau em todas as escalas”. A autossimilaridade pode ser: estritamente autossemelhante (determinística) como o da Figura 1; ou autossemelhança aproximada, também chamada de autossemelhança estatística (não-determinística). As baías, por exemplo, são estatisticamente semelhantes às linhas litorâneas e a rugosidade das cordilheiras está reproduzida estatisticamente num simples pedaço de rocha. Cabe destacar que a autossimilaridade não ocorre em todos os fractais, nem em todas as partes de um fractal como no próprio Conjunto de Mandelbrot. (FIGURA 3)

As nuvens não são esferas, as montanhas não são cones, as linhas costeiras não são círculos, a casca das árvores não é lisa e os relâmpagos não viajam em linha reta (MANDELBROT, 1983 apud ALVES, 2007). Nessas afirmações repousa a noção de irregularidade, pois o autor buscou mostrar exemplos de objetos naturais que não são regulares e que, se observados bem, possuem muitos graus de detalhes e reentrâncias; o grau de detalhamento se mostra na medida em que se aproxima do objeto, e isso tem a ver com a noção de escala. Para tornar mais compreensivas as noções de irregularidade e escala, Mandelbrot (1998) pergunta: “Quanto mede, afinal, a costa da Bretanha?”

Mandelbrot (1998, p. 30) ilustra a noção de escala sugerindo que se imagine

[...] um homem que caminhe ao longo da costa, percorrendo o caminho mais curto possível, garantindo, contudo, que nunca se afaste da linha costeira mais do que uma dada distância η . Depois repete-se o processo, tornando a distância máxima do homem a costa cada vez menor. Em seguida substitui-se o nosso homem por um rato, depois por uma formiga e assim por diante. Mais uma vez, quanto mais próximo o animal se mantiver da costa, mais longa será, inevitavelmente, a distância a percorrer.

Com essa ilustração, o autor sugere que a extensão do objeto depende do instrumento com o qual é medido. *Mas pode um objeto ter extensão relativa?* Do ponto de vista do paradigma tradicional da ciência, não. Entretanto, a resposta a esse questionamento vai além da aparente obviedade, pois está ligada à maneira com a qual se olham os sistemas naturais e humanos. Ressalta-se que existem diferentes visões de homem, de mundo, de conhecimento e de ciência que, neste caso, constitui a diferença entre dois paradigmas: o paradigma tradicional da ciência e o que representa uma novidade ao paradigma da ciência, chamado de

novo paradigma da ciência. No paradigma tradicional,

[...] o destaque é dado à separação sujeito/objeto, à representação do espaço físico como sendo apenas o euclidiano, ao cálculo exato, priorizando, portanto, os aspectos quantitativos da Matemática. [...] Na sistêmica, a metáfora que a expressa é a da *rede*, que diz da impossibilidade de separar o sujeito que conhece do objeto conhecido e da inexistência de uma hierarquia de *a priori*s. (BAIER, 2005, p. 5, grifo do autor).

No paradigma tradicional, o mundo é descrito como uma máquina perfeita governada por leis matemáticas exatas; os sistemas vivos são decompostos em blocos de construção elementares e de forma analítica, onde se busca separar o todo em partes cada vez menores. Já no novo paradigma da ciência (pensamento sistêmico), o mundo é concebido como um todo integrado e não como uma coleção de partes, ou seja, como uma rede de fenômenos que estão interconectados e são independentes; a análise, que no paradigma tradicional significa isolar alguma coisa a fim de compreendê-la, dá lugar a compreensão da organização do todo. A geometria fractal se insere no contexto do novo paradigma da ciência, onde o destaque está na qualidade e na irregularidade, e não na quantidade e nas regularidades, por exemplo.

A fim de que se possa avançar na construção da noção de dimensão fractal, é preciso ter compreendido estas duas características dos fractais: a irregularidade e a escala.

Para isso, é necessário retornar à pergunta de Mandelbrot (1998): “Quanto mede, afinal, a costa da Bretanha?” Se a costa for considerada um objeto fractal, a pergunta está inadequada, pois seu comprimento dependerá da escala adotada. Se dissermos: Quanto irregular é a costa da Bretanha? ou Quanto é a sua fragmentação? Dita dessas maneiras, agora há condições de prosseguir no estudo; para isso, iremos descrever ainda mais sobre as características do objeto fractal na seção a seguir, a dimensão fractal.

2.2 A CARACTERÍSTICA GEOMÉTRICA

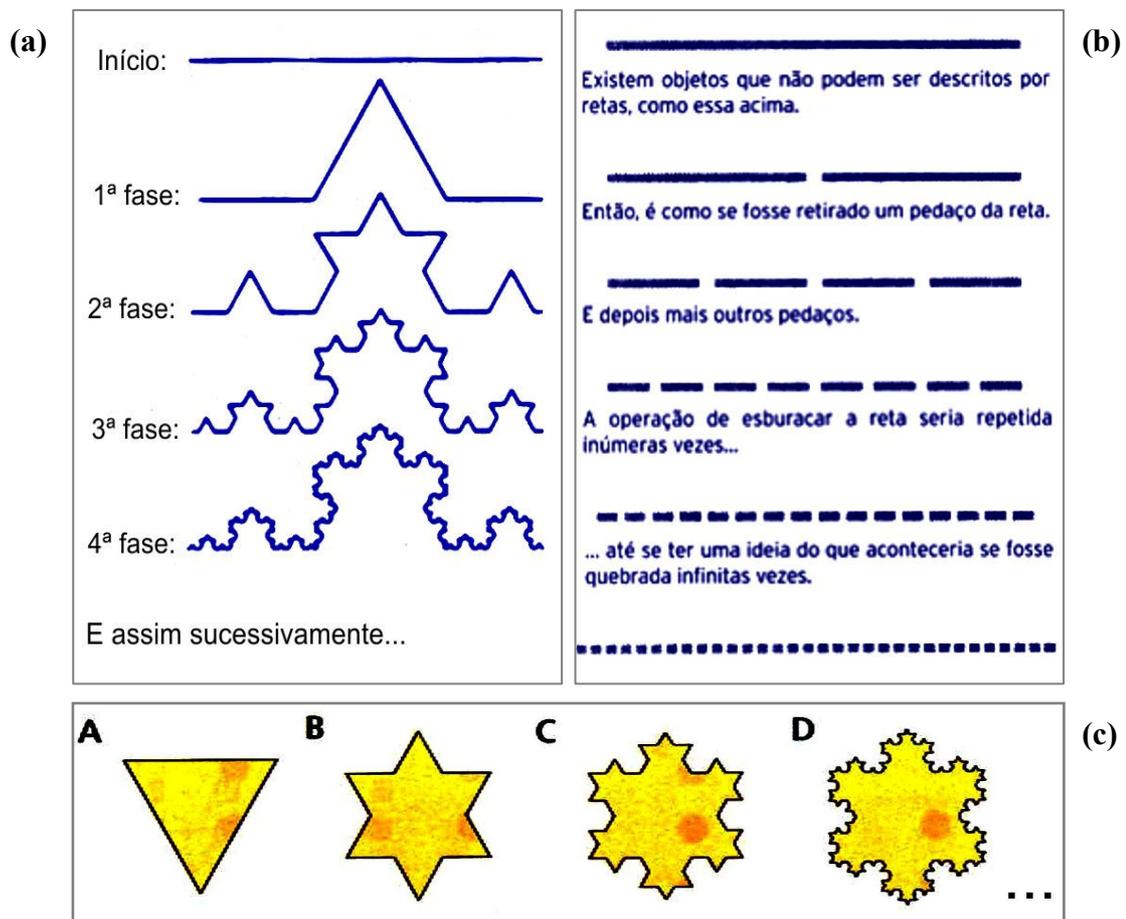
A produção geométrica está, em geral, à frente de toda a atividade compreensiva da teoria fractal. A forma das nuvens, a linha do litoral, a formação das folhas, a radiografia do pulmão ganham atenção e são levadas a certas formas geométricas que lhes competem, como a curva de Koch e o diagrama do pulmão de Mandelbrot, resultando, daí, os conteúdos da Geometria Fractal. Essa geometria, como de regra na formação dos conteúdos da Matemática, ganha o estatuto de teoria a partir da abstração como compreensão.

A dimensão fractal é uma medida do grau de irregularidade e de fragmentação. “Um fato muito importante: ao contrário dos números dimensionais correntes, a dimensão fractal pode muito bem ser uma fração simples, como $1/2$ ou $5/3$, ou mesmo um número irracional, como $\log 4/\log 3 \approx 1,2618\dots$ ou π .” (MANDELBROT, 1998, p. 14). Portanto, as linhas costeiras são exemplos de fractais naturais que não são compostos por linhas retas e curvas suaves. “[...] os objetos fractais são fragmentados e irregulares, compostos por sucessões de subestruturas, que são notadas à medida que observamos o objeto de forma mais e mais detalhada.” (FRANKHAUSER, 1997 apud SOBREIRA, 2003, p. 58).

Segundo Alves (2007), a partir da segunda metade do século XIX é que começaram aparecer os objetos, hoje tidos como objetos fractais. O triângulo de Sierpinski, o conjunto de Cantor, a curva de Peano, a curva de Koch e floco de neve vêm formando uma grande família de formas geométricas, constituindo o cenário visível da Geometria Fractal e com presença marcante nos variados estudos acadêmicos. Em meio a esta família de formas é que a grande expressão teórica de fractal, como uma “forma”, faz sentido, assim como as noções de autossimilaridade, de complexidade infinita e de dimensão fractal.

Serão descritos alguns fractais geométricos presentes em atividades dos livros didáticos.

FIGURA 2 - Objetos fractais: a) curva de Koch; b) conjunto de Cantor; c) floco de neve de Koch



Fonte: Smole e Diniz (2010b, p. 246) e Reis e Trovon (2009b, p. 9).

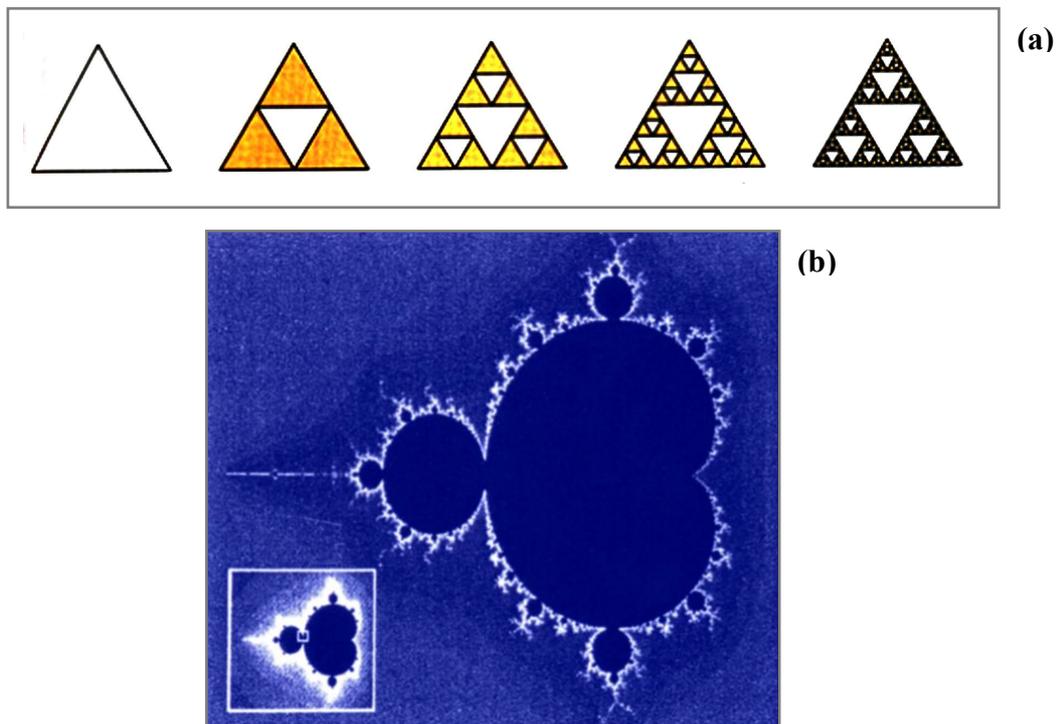
A curva de Koch é uma forma geométrica em que nela não há tangente. Para obtê-la, parte-se de um segmento de reta. Depois é dividido em três segmentos iguais e substituído o segmento central por dois outros segmentos que formariam um triângulo equilátero com o segmento central que foi retirado. Desta maneira, obtém-se quatro segmentos idênticos, em que serão realizados os mesmos procedimentos com cada um deles, e assim sucessivamente. Na realidade, o limite do qual se aproxima a Figura 2a é chamada de curva de Koch.

O conjunto de Cantor, ou também conhecido como Poeira de Cantor, é uma forma geométrica obtida a partir de um segmento de reta. Primeiro, divide-se esse segmento em três partes iguais e retira-se o segmento central. Repetem-se esses mesmos procedimentos com os dois segmentos restantes, e assim sucessivamente (FIGURA 2b).

O floco de neve de Koch é gerado inicialmente com um triângulo equilátero de lados

unitários; em seguida, divide-se em três cada um dos segmentos unitários, constrói-se um triângulo equilátero no terço do meio e, finalmente, retira-se a base de cada um dos novos triângulos equiláteros. Continuando esse processo indefinidamente, obtém-se uma curva limite chamada de floco de neve, que além de não ter tangente em nenhum dos seus pontos, apresenta um comprimento infinito (FIGURA 2c).

FIGURA 3 - Formas geométricas: a) triângulo de Sierpinski; b) conjunto de Mandelbrot (a figura maior corresponde a uma ampliação detalhada da figura menor)



Fonte: Smole e Diniz (2010a, p. 73) e Ribeiro (2010e, p. 95).

O triângulo de Sierpinski é a forma geométrica mais usual, tanto nos trabalhos acadêmicos, quanto nos livros didáticos. Sua forma é obtida a partir de um triângulo equilátero no plano. Marcam-se os pontos médios dos três lados e em seguida ligam-se esses pontos, formando quatro novos triângulos equiláteros. Após isso, elimina-se o triângulo central, e, em seguida, aplicam-se os mesmos procedimentos para os três triângulos restantes, e assim sucessivamente. A imagem final da Figura 3a ilustra o resultado que se obtém depois de se realizar esta operação quatro vezes. O conjunto que obtemos, quando realizamos este processo infinitamente, chama-se de triângulo de Sierpinski e só pode ser concebido mentalmente, pois representá-lo graficamente não é possível.

A partir de 1980 a Geometria Fractal ganha um novo e definitivo aliado, o computador. Agora, agregam-se ao universo das formas abstraídas das instâncias empíricas, as formas geradas por computação. Traça-se detalhadamente o gráfico da função complexa $f(z)=z^2+c$, sendo c um número *complexo*. Esse gráfico é conhecido como conjunto de Mandelbrot, que tem vistosa presença no cenário da geometria fractal, sendo referência obrigatória para a percepção geométrica das características essenciais dos objetos fractais no contexto do conceito fractal (FIGURA 3b).

A função complexa é iterada muitas vezes. O parâmetro c assume valores do plano complexo para ser iterada na função complexa sistematicamente. Se nesse processo de iteração resultar valores que tendem ao infinito, o ponto c permanece com a cor de fundo da tela; caso contrário, atribui-se a cor branca para c . As paredes da prisão, então, vão tomando a forma do conjunto M de Mandelbrot.

2.3 A CARACTERÍSTICA TOPOLÓGICA

Nesta seção reportamos à classe dos fractais definidos como espaços topológicos. Sem reconstruir as sutilezas formais dos fractais desta classe, apenas pretendemos interpretar e descrever a compreensão que julgamos pertinente à pesquisa. Algumas definições e demonstrações matemáticas podem ser encontradas em Alves (2007). De antemão, devemos recolocar a ideia descrita em Alves (2007, p. xxxiii) de que um fractal é uma forma composta de infinitas partes de algum modo semelhante ao todo.

Assim dito, é o fractal na sua natureza sintética, como objeto intuitivo abstraído de situações concretas. Aproximada essa ideia a modelos teóricos, pode-se compreender o fractal como um conjunto infinito de elementos semelhantes entre si, compreensão que possibilita tratá-lo com a formalidade matemática da Topologia. Neste tratamento o objeto fractal ganha natureza analítica e, numa terminologia da psicologia da aprendizagem, transcende da abstração empírica para a abstração reflexiva. Esta compreensão nos interessa na medida em que queremos tratar o conceito fractal como objeto de aprendizagem.

No conjunto fractal, de infinitos elementos semelhantes, a ideia de “semelhança” é referente à forma, e esta semelhança participa unificando a natureza constitutiva do conjunto e as partes. Os exemplos didáticos convencionais de conjuntos topológicos são conjuntos de

números reais obtidos por alguma propriedade, conjuntos de segmentos da reta geométrica obtidos com alguma relação, conjuntos de regiões euclidianas no espaço plano ou no espaço volumoso. Numa abstração a partir desses modelos é introduzida a noção de “bola” e, como em Lima (1970), define-se bola aberta e bola fechada no espaço métrico. Sob a métrica que induz o espaço métrico é que deve estar a noção de raio dessas bolas. Na formalidade matemática do fractal é razoável pensar o fractal como um conjunto do plano euclidiano, como é o triângulo de Sierpinski. Há exemplos numéricos, como sucessões numéricas convergentes e outros com representações na reta, como o conjunto de Cantor, que são modelos estratégicos para a compreensão.

Na teoria convencional dos espaços topológicos, repetida em diferentes livros sobre topologia, o conceito de “aberto” ou “bola aberta” ou “conjunto aberto”, é compreendido como os conjuntos do espaço topológico, dos quais qualquer elemento centraliza um subconjunto também aberto contido no próprio conjunto. Na matemática fractal descrita, onde é desenvolvida a classe fractal dos conjuntos topológicos, este conceito de “aberto” ou de “fechado”, cai sobre as partes semelhantes que também se decompõem em partes semelhantes.

Nesta abordagem matemática dos fractais, tomamos o que desenvolve Alves (2007), que são os fractais definidos por sistemas de funções iteradas. Trata-se de um modelo teórico, onde a formação fractal se dá por iterações de uma aplicação f sobre um conjunto X , numa sucessão até ao ponto fixo das iterações.

O conjunto X aqui considerado é o conjunto que reúne os elementos gerados nas iterações de f até ao ponto fixo, que é alcançado na convergência de f à forma idêntica. O ponto fixo a que referimos é definido como os elementos de $x_f \in X$ tal que nas aplicações de uma função f em um conjunto X e, escrito por x_f , é aquele em que $f(x_f) = x_f$.

No processo iterativo por f na formação fractal, o elemento x_f é a forma fractal. O conjunto X reúne os elementos gerados no processo iterativo até ao ponto x_f . Neste sentido, não basta que aquele conjunto X seja um conjunto topológico ou que ganhe uma topologia, ele deve estar munido de uma métrica e ser com ela um espaço métrico. A medida chamada métrica é formalmente necessária como a operação pela qual distingue-se um do outro os elementos do espaço métrico. Nesta formalidade, como declara Alves (2007, p. 4): “Um fractal é o ponto fixo de um sistema de funções iteradas num espaço métrico completo

munido da métrica de Hausdorff' que apresentaremos mais adiante.

Para facilitar a compreensão dessa ideia, será sintetizado o que se constitui como métrica, como espaço métrico e como métrica de Hausdorff a fim da formação, nesta classe analítica, do significado fractal.

Podemos definir a métrica no conjunto X qualquer como sendo uma aplicação d de $X \times X$ em \mathbb{R} com as seguintes propriedades:

$$d(x,y) = d(y, x); \forall x, y \in X ;$$

$$d(x,y) > 0; \text{se } x \neq y ;$$

$$d(x,x) = 0; \text{ } x \text{ em } X;$$

$$d(x,y) < d(x,z) + d(z,y); x, y, z \text{ em } X.$$

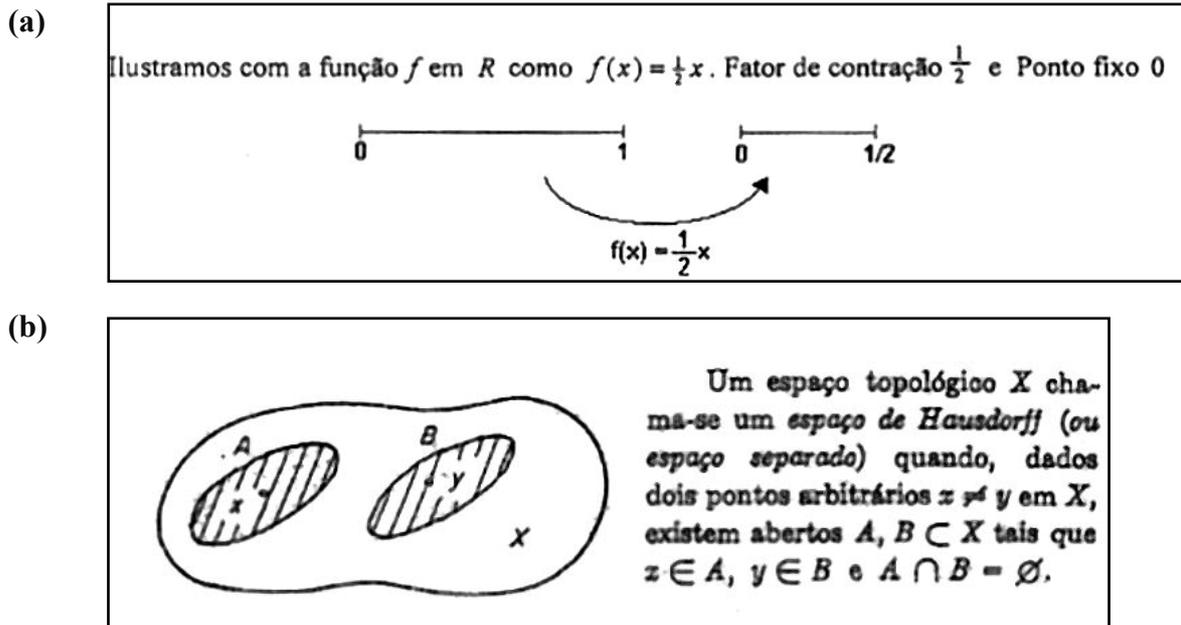
Um espaço métrico, em qualquer compêndio do assunto, é um par (X, d) formado por um conjunto X e uma métrica d em X , às vezes dito apenas espaço métrico X . Um exemplo comum é o conjunto \mathbb{R} dos números reais com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, que é o espaço métrico da reta. Intuitivamente são válidas para esta métrica d as quatro propriedades da definição de métrica. Esta métrica é a própria distância entre abscissas na reta real. Como mais um exemplo, a distância usual no plano cartesiano é a métrica na expressão $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, que satisfaz àquele sistema de quatro propriedades. Um espaço métrico é completo quando todas as seqüências de Cauchy convergem para um limite que pertence ao espaço. Assim, dado um espaço métrico completo (X, d) , designamos por $H(X)$ o espaço cujos pontos são subconjuntos compactos e não vazios de X .

A seguir, será descrita a métrica de Hausdorff, para munir este conjunto das partes e dar-lhe a estrutura de espaço métrico. A forma fractal como ponto fixo no sistema de funções iteradas tem que uma parte qualquer também se desenvolva pelas iterações ao mesmo ponto fixo (FIGURA 4a). Com este fato, a forma fractal munida da chamada métrica de Hausdorff (FIGURA 4b), é dita um espaço métrico completo. Vale ressaltar que a forma fractal assim formalizada é uma ideia de um conjunto das partes de um conjunto.

Sejam (S, d) um espaço métrico completo e o seu conjunto das partes

$X = \{A \subset S / A \neq \emptyset\}$, sendo cada parte A como conjunto fechado e limitado. A métrica de Hausdorff em X denotado por h é escrita por: $h(A, B) = \max \{d(A, B), d(B, A)\}$; $A, B \subset X$. A distância entre os conjuntos A e B é definida por $d(A, B) = \max \{d(x, B), x \in A\}$ sendo $d(x, B) = \min \{d(x, y), y \in B\}$; e $d(x, y)$ já é definida.

FIGURA 4 - Propriedade intrínseca da métrica de Hausdorff de separar os elementos do espaço métrico



Fonte: Lima (1970, p. 62).

Verifica-se que a métrica de Hausdorff está definida, não em um simples conjunto, mas já em um espaço métrico. Esta métrica escrita por h é expressa segundo uma métrica d . A métrica “ d ” distingue os elementos em S e a métrica “ h ” distingue os elementos no conjunto X das partes de S . Essa métrica h é, por vezes, chamada métrica da separação, e o espaço topológico X , induzido por ela, é chamado espaço separado (FIGURA 4).

2.3.1 Dimensão fractal

Alves (2007) afirma que a dimensão fractal é uma característica das mais importantes do conjunto fractal. Cita a dimensão euclidiana de *Os Elementos*² como 1, 2 e 3 conforme a

² A dimensão euclidiana se encontra descrita na famosa obra de Euclides, *Os Elementos*. O livro I traz as seguintes definições: “1. Ponto é aquilo de que nada é parte; 2. E linha é comprimento sem largura; [...] 4. E

fronteira da figura euclidiana, se constituída de pontos, de linhas ou de superfícies. Na geometria fractal a convenção é outra, onde a dimensão fractal diz respeito à irregularidade da forma e pode até não ser inteira.

Na descrição do próprio Mandelbrot (1998, p. 14), que surge com a teoria fractal, a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de

[...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

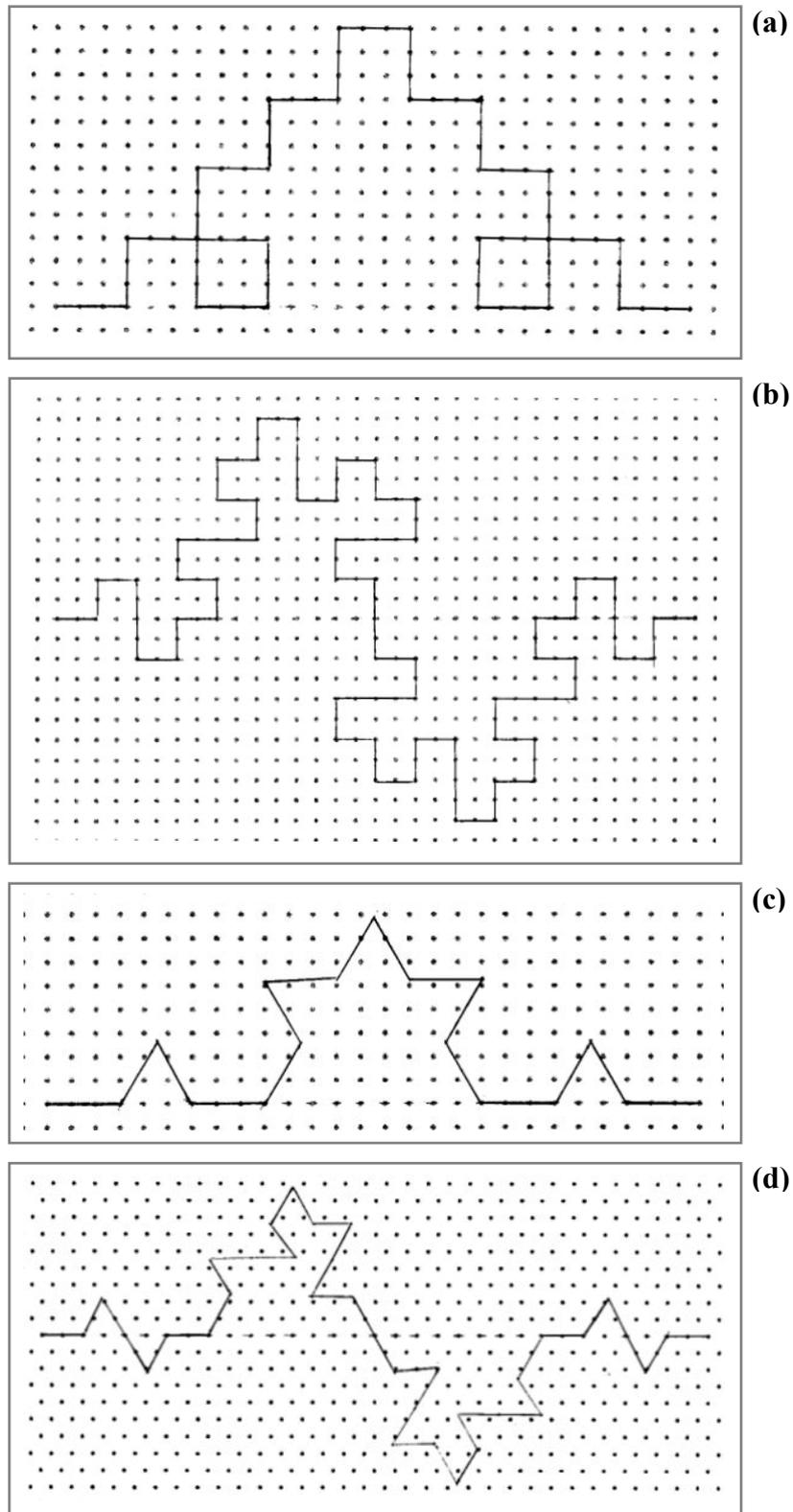
Capra (2006) complementa, expondo que o conceito de dimensão fractal é uma noção matemática, porém se aproxima de nossas experiências com a natureza. Por exemplo, “Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem, e quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea e de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais.” (CAPRA, 2006, p. 119). Vemos que o autor se utiliza da “geometria da natureza”.

Há muitas maneiras de se definir a dimensão fractal, no entanto, uma vez definida quaisquer uma delas, e determinado o valor D para ela, “[...] pode-se tentar definir um **conjunto fractal** como sendo, ou um conjunto para o qual D é um número real não inteiro, ou um conjunto para o qual D é um inteiro, mas o todo é “irregular”.” (MANDELBROT, 1998, p. 176, grifo nosso). Antes de formalizarmos matematicamente a dimensão fractal, procuramos uma compreensão mais intuitiva desse conceito. Capra (2006, p. 119) afirma que

[...] uma linha denteada em um plano preenche mais espaço do que uma linha reta, que tem dimensão 1, porém menos do que o plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal. De maneira semelhante, um pedaço de papel amarrotado ocupa mais espaço do que um plano, porém menos do que uma esfera. Desse modo, quanto mais amarrotado e apertado estiver o papel, mais perto de 3 estará sua dimensão fractal.

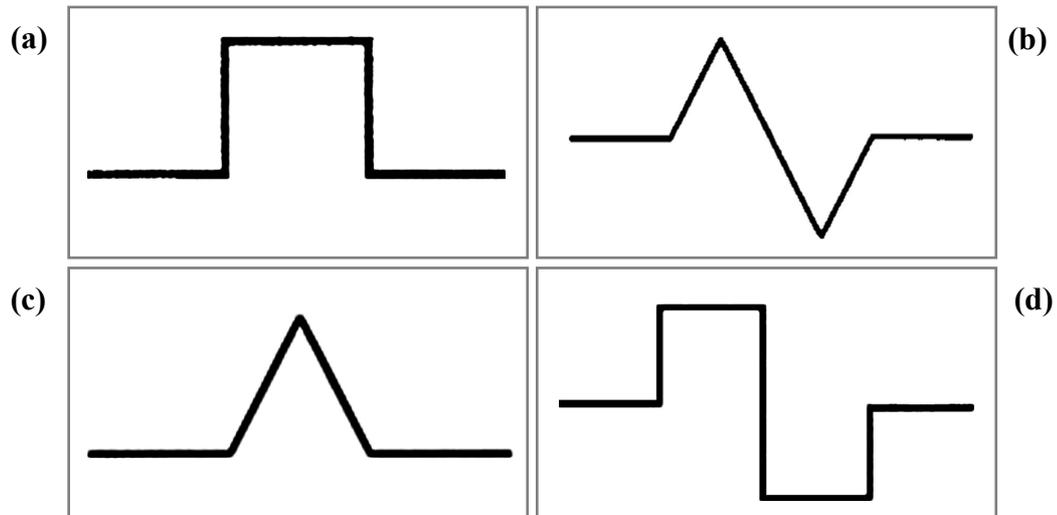
linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma; e 5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.” (EUCLIDES, 2009, livro I, p. 97). Já o livro XI traz: “1. Sólido é o que tem comprimento e largura e profundidade.” (EUCLIDES, 2009, livro XI, p. 481).

FIGURA 5 - Curvas planas irregulares de dimensão fractal entre 1 e 2



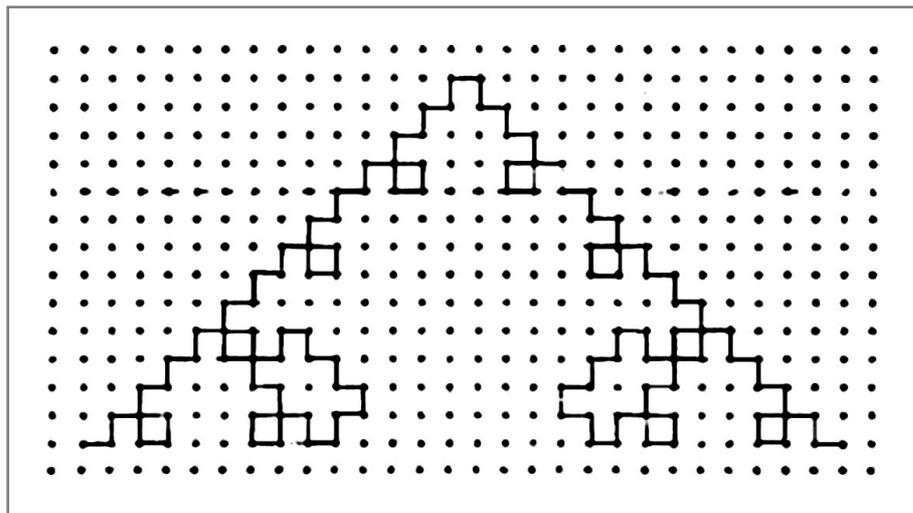
Fonte: Edilson de Moura, 2015.

FIGURA 6 - Iniciador-gerador da Figura 5



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

FIGURA 7 - Curva no 4º estágio de desenvolvimento



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Destacamos na Figura 5 um exemplo de curvas que foram construídas no plano e tem dimensões diferentes. A dimensão d_A , d_B , d_C e d_D de cada uma dessas curvas da Figura 5, será calculada mais adiante, a partir da definição fractal pelo processo de Hausdorff. Vale observar que quanto mais detalhes e reentrâncias tiver a curva, maior será a sua dimensão. Sendo assim, d_B (dimensão da Figura 5b) tem maior dimensão, portanto: $d_B > d_A > d_D > d_C$. As curvas da Figura 5 foram construídas a partir de um dos iniciador-gerador (FIGURA 6).

Exemplificaremos a construção de um deles a partir do estágio em que se encontra a curva da Figura 5a.

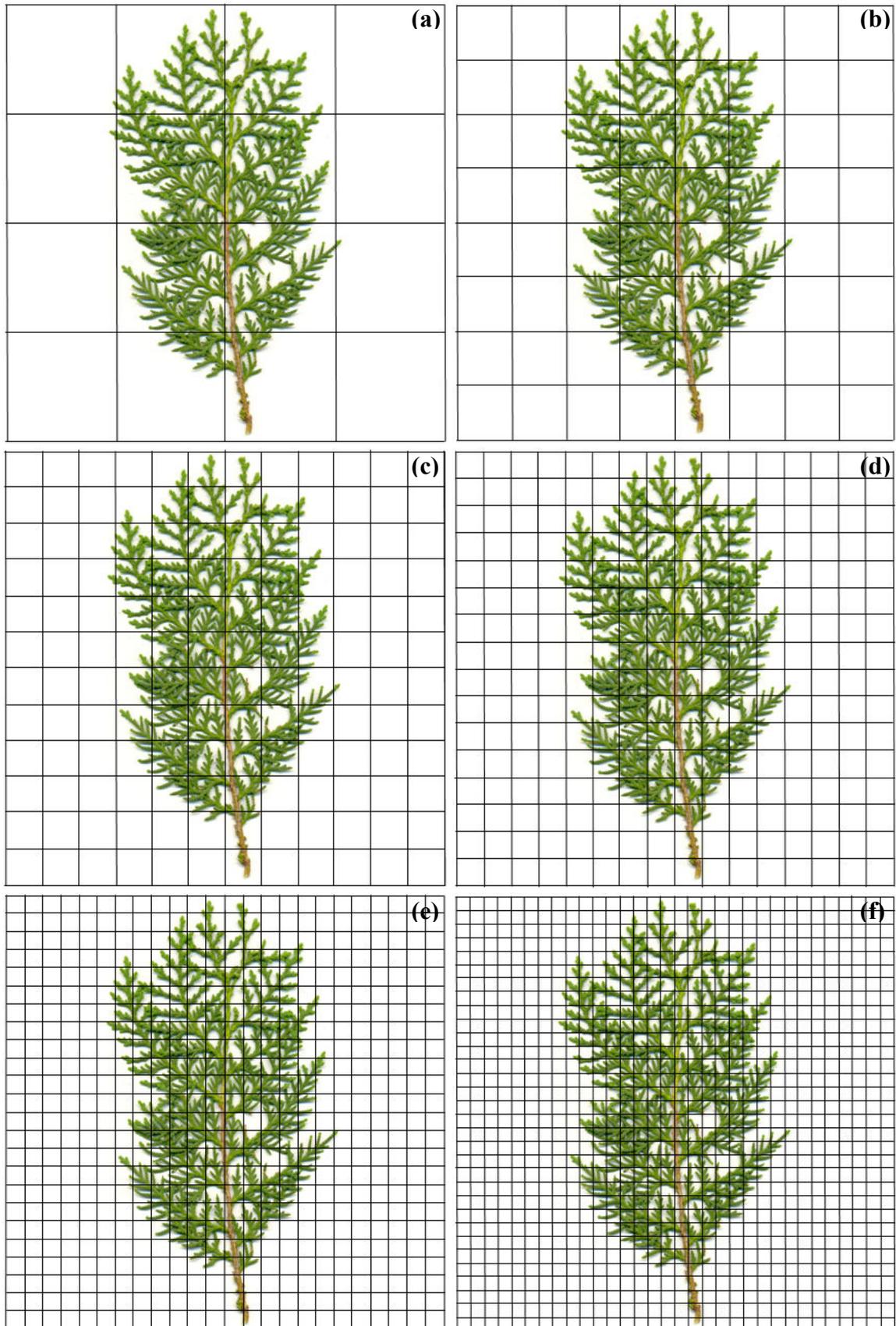
Primeiro, toma-se a peça correspondente ao iniciador-gerador da curva que, no nosso caso é a Figura 6a, depois, substitui-se cada segmento da Figura 5a pela peça geradora; para isso, a peça geradora terá que diminuir ou ficar numa escala menor para que possa ser encaixada por completo em cada segmento. Feito isso, obtém-se a curva da Figura 7, que está no 4º estágio de desenvolvimento.

Percebe-se que apesar da curva da Figura 7 apresentar visualmente mais detalhes do que a da Figura 5a, elas têm a mesma dimensão, pois apenas estão em escalas e fases de desenvolvimento diferentes. Para que os nossos sentidos não nos enganem, precisamos formalizar matematicamente maneiras de quantificar a dimensão fractal. Esses exemplos podem servir como atividades para as séries iniciais do Ensino Fundamental, pois desenvolvem conceitos de homotetia, dimensão fractal (sob o aspecto geométrico), escala, e padrão.

Existem muitas definições de dimensão, o que pode gerar resultados numéricos diferentes quando aplicadas ao mesmo conjunto fractal. Alves (2007, p. xxxv) afirma que “O valor da dimensão é um indicador da quantidade de espaço que ocupa um determinado conjunto. É uma medida das proeminências das irregularidades de um conjunto quando observado a uma escala muito pequena.” Então, a seguir, será demonstrada uma maneira de se calcular a dimensão fractal por meio da contagem de caixas.

Para se calcular a dimensão fractal por meio da contagem de caixas de um conjunto plano F , primeiro, desenha-se uma *rede- ε* de quadrados (caixas) e conta-se, para vários valores de ε (escala) cada vez menores, o número $N_\varepsilon(F)$ de quadrados (caixas) que se sobrepõe ao conjunto. A dimensão é a razão logarítmica, a qual $N_\varepsilon(F)$ cresce quando ε tende para zero e pode ser estimada pelo declive do gráfico de $\log N_\varepsilon(F)$ em função de $(-\log \varepsilon)$. Pode-se dizer também que o número de quadrados da *rede- ε* que intersecta F é um indicador de quão espalhado ou irregular é o conjunto, quando examinado à escala ε . A dimensão reflete quão rapidamente as irregularidades se desenvolvem à medida que ε tende para zero. Ou seja, quanto maior o declive do gráfico ou a razão logarítmica maior a dimensão. Apresentaremos a seguir um exemplo.

FIGURA 8 - Tamanho de caixas *versus* número de células ocupadas: a) escala 1/4; b) escala 1/8; c) escala 1/12; d) escala 1/16; e) escala 1/24; f) escala 1/32



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Para se compreender melhor esse processo descrito por Alves (2007), determinamos a dimensão fractal de um ramo de pinheiro, o qual depois de colhido foi escaneado, a fim de que pudéssemos submetê-lo ao processo de contagem das caixas (quadrados) que se sobrepunham a ele (FIGURA 8). Verifica-se que na Figura 8a, os onze quadrados da malha têm alguma parte do ramo, então $N_\epsilon(F) = 11$ e a escala $\epsilon = 1/4$.

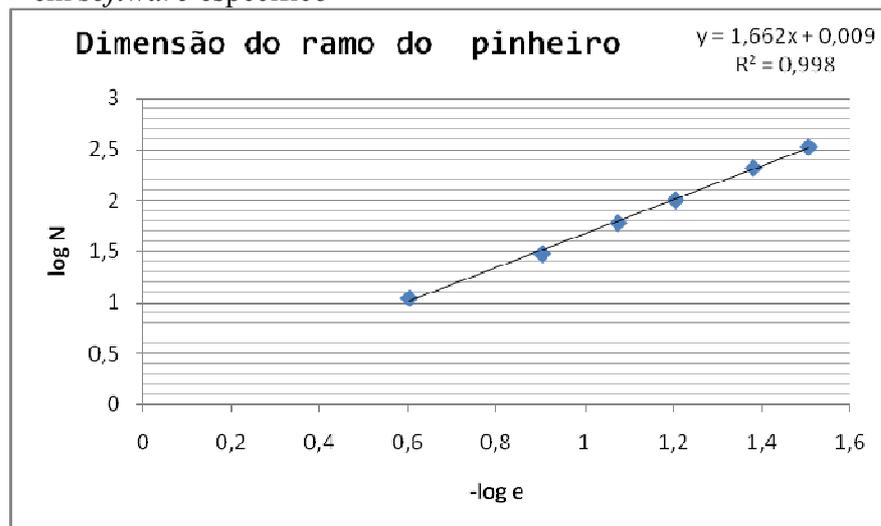
TABELA 1 - Dimensão fractal do ramo do pinheiro

Escala ϵ	1/4	1/8	1/12	1/16	1/24	1/32
$N_\epsilon(F)$	11	30	60	101	208	334
$-\log \epsilon$	0,602	0,903	1,074	1,204	1,380	1,505
$\log N_\epsilon(F)$	1,041	1,477	1,778	2,004	2,318	2,523

Fonte: Edilson de Moura, 2015.

A Tabela 1 apresenta em cada coluna os valores correspondentes a quantidades de quadrados que contêm alguma parte do ramo e abaixo os valores dos logaritmos do inverso da escala e da quantidades de quadrados que contêm alguma parte do ramo. Os valores obtidos na contagem dos quadrados $N_\epsilon(F)$ e sua respectiva escala ϵ geraram as coordenadas $(-\log \epsilon; \log N_\epsilon(F))$, as quais foram, em seguida, inseridas no editor de planilhas (TABELA 1). Finalizando, construímos a reta de regressão linear³ (FIGURA 9).

FIGURA 9 - Gráfico da reta de regressão linear por meio da ferramenta Reta de Regressão, em *software* específico



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

³ O coeficiente angular da reta: $y = 1,662x + 0,009$ obtida por meio do editor de planilha na Microsoft Excel, representa a dimensão fractal do ramo do pinheiro. Portanto $D = 1,662$.

Este método da dimensão de contagem das caixas é utilizado para estruturas fractais que não são totalmente autossemelhantes. A curva de Koch e o conjunto de Cantor são exemplos de fractais com autossemelhança exata. Contudo, a definição da dimensão de contagem de caixas também permite calcular o valor da dimensão fractal para os objetos fractais com autossemelhança exata.

Pode-se observar que o tamanho relativo do ramo cresce à medida que o tamanho das caixas diminui. Essa taxa de crescimento, representada pela inclinação da reta do gráfico logarítmico, dirá quanto quebradiço ou tortuoso é o ramo ou o objeto.

Resumindo, o cálculo da dimensão por meio da contagem de caixas pode ser simplificarmente entendido da seguinte forma:

[...] divide-se a área do conjunto analisado em um certo número de caixas iguais. Conta-se o número de caixas em que existe pelo menos um ponto do conjunto. Repete-se o procedimento para vários tamanhos de caixas. Os dados (tamanho de caixas *versus* número de células ocupadas) são lançados num gráfico logarítmico (pois neste gráfico a lei de potência é convertida em função linear, sendo possível medir o expoente da função, que corresponde a inclinação da reta resultante após uma regressão linear). A dimensão fractal, neste caso, equivale à inclinação do gráfico (SOBREIRA, 2003, p. 65-66).

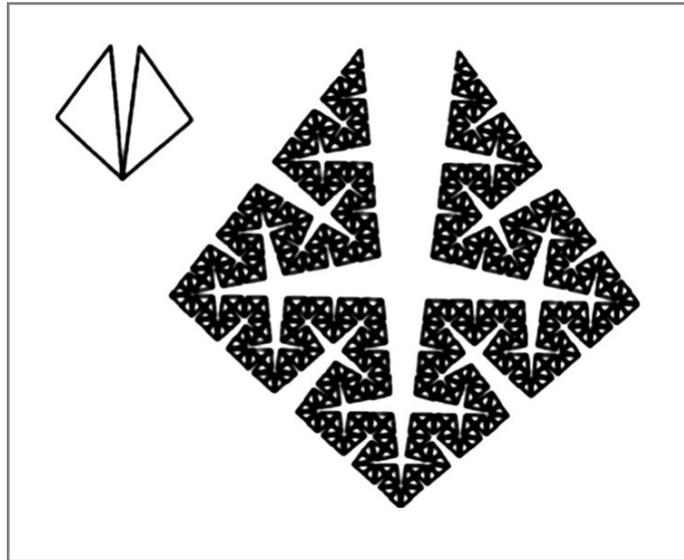
Se os objetos forem pouco fragmentados (mais euclidiano), o valor relativo da medição em diferentes escalas muda pouco e a inclinação do gráfico é pequena. A inclinação do gráfico indica quanto quebradiço ou detalhado é um objeto.

Mas, que significado há quando afirmamos que o ramo do pinheiro tem dimensão aproximada ao número 1,66? É necessário buscar, então, uma compreensão significativa desse resultado que possa ser atribuída pelo aprendiz, pois

[...] é importante privilegiar a atribuição de significados às teorias, às expressões artísticas, literárias, históricas, enfim, ao mundo onde vivemos. É importante que as atividades sejam dirigidas de modo que o sentido se faça para o aluno, gerando compreensão, interpretação e comunicação de maneira que significados sejam atribuídos. (BICUDO, 1999 apud BAIER, 2005, p. 133).

No intuito de atribuímos significado à dimensão fracionária, faremos uso de uma variante da curva de Von Koch, a qual é interpretada como o modelo de pulmão.

FIGURA 10 - Variante da curva de Von Koch, interpretada como modelo de Pulmão



Fonte: Mandelbrot (1998, p. 49).

Como se pode ver na Figura 10, no pequeno diagrama à esquerda, cada pulmão é um triângulo isósceles, ligeiramente obtuso (tem um ângulo de $90^\circ + \varepsilon$):

[...] A traqueia é limitada por um diedro de ângulo 2ε . À traqueia junta-se, de cada um dos lados, um brônquio, também limitado por um ângulo de 2ε . [...] de cada segmento do contorno externo parte um triângulo de carne, que divide o lóbulo correspondente em dois sublóbulos. Acrescentamos assim sucessivamente, ora de um lado ora do outro, subsub-brônquios e subsubtriângulos de carne (MANDELBROT, 1998, p. 48).

Segundo Mandelbrot (1998, p. 48),

[...] trata-se de um modelo medíocre, mas é suficiente para pôr em evidência a ligação que existe entre, por um lado, as conexões que permitem a este órgão estabelecer um contacto íntimo entre o ar e o sangue e, por outro lado, o conceito de objeto fractal.

Se continuássemos o processo de construção desse objeto fractal indefinidamente, Mandelbrot (1998, p. 48) afirma que

[...] acabaríamos por obter uma secção de pulmão ideal, que seria uma curva de comprimento infinito e com dimensão D ligeiramente inferior a 2. Extrapolando para três dimensões, obteríamos então uma superfície pulmonar com dimensão ligeiramente inferior a 3.

Quando Mandelbrot (1998) afirmou que a dimensão do pulmão era ligeiramente inferior a três, possivelmente estava atribuindo significado à dimensão fracionária do objeto fractal, relacionando-o à eficiência do pulmão humano que tem um volume pequeno e uma área enorme, condizente com o modelo fractal sugerido, o qual apresenta área máxima – indefinida, pois depende da escala de observação - mas com volume mínimo.

Retomando o exemplo do ramo do pinheiro, qual o significado podemos atribuir ao valor fracionário da dimensão do ramo? Quando calculamos a dimensão por meio da contagem de caixas, obtemos a irregularidade do contorno do ramo do pinheiro, já que a dimensão está entre um e dois, e, valendo-nos do exemplo dado por Mandelbrot (1998), inferimos que a árvore pinheiro tem dimensão fractal entre dois e três. Sendo assim, podemos atribuir um significado condizente à disposição da copa das árvores, pois Romanha (2009) afirma que

A disposição fractal da copa das árvores potencializa e maximiza a exposição de uma quantidade enorme de folhas ao sol, permitindo maior eficiência na captação de luz. A disposição fractal das árvores adultas também permite que elas lancem novos ramos durante todo o ano sem que o aumento do perímetro da copa seja perceptível. Então, uma estrutura fractal fornece o máximo de eficiência com o mínimo de ocupação de espaço.

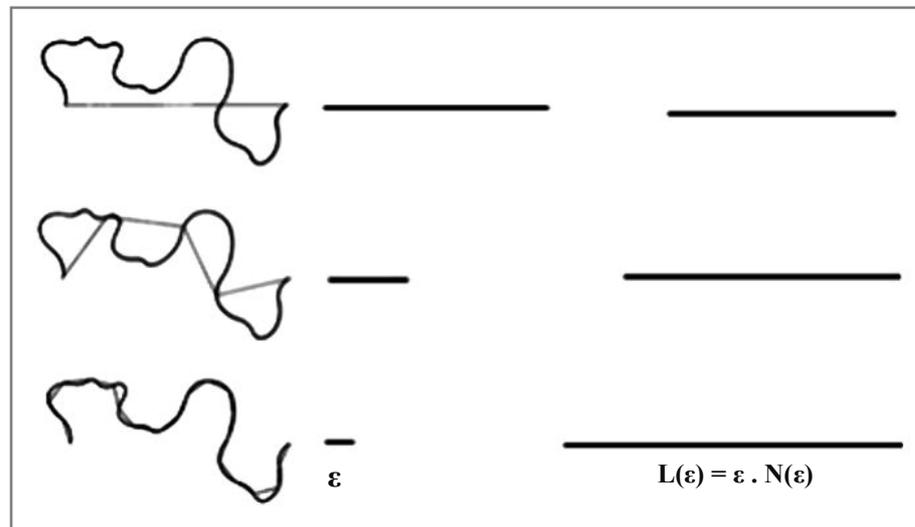
Existem várias maneiras de se medir a dimensão fractal: uma, que é o cálculo por meio da contagem de caixas ou dimensão da malha, e outra, que é a dimensão de Hausdorff-Besicovitch, a qual está em conformidade com a dimensão usual de espaços usuais. O termo dimensão fractal está associado ao processo de contagem das caixas ou a de Hausdorff.

A formulação precisa da dimensão de Hausdorff-Besicovitch não será apresentada neste estudo, pois além de ter sido pouco reveladora, transcendeu o âmbito desta investigação. No entanto, foram constatados na dissertação de Alves (2007), subsídios para o aprofundamento desse estudo. Abordaremos a formulação da dimensão de Hausdorff-Besicovitch de maneira menos formal como encontrado em Alves (2007), mas válida e mais compreensível ao público das escolas.

A maior parte das definições de dimensão de um conjunto depende de uma medição desse conjunto na escala ε , que quantifica a sua irregularidade quando observada. Carvalho et al. (1986) apresenta os conceitos escala e dimensão de Hausdorff-Besicovitch de forma

esclarecedora e bem organizada, por isso, com o intuito de apreendermos melhor aqueles conceitos, serão descritas algumas ideias centrais.

FIGURA 11 - Esquema para calcular o comprimento de uma curva



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Mandelbrot (1998) fez uma pergunta provocativa a respeito do comprimento da costa da Bretanha e, depois, concluiu que o comprimento dependeria da escala. Assim, se usada uma régua de tamanho ε para medir o comprimento do litoral (ou de uma curva), ele será igual ao comprimento ε multiplicado pelo número de vezes que a régua foi tomada ao contornar a costa. Então, se o tamanho da régua usada para medir a costa, diminuir, seu comprimento aumentará (FIGURA 11).

O meteorologista Lewis Richardson aplicou essa definição para determinar o comprimento da costa de diversos países e descobriu que, para cada um deles, o número de segmentos na escala satisfaz a Lei Empírica: $N(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{-D}$, onde K e D são constantes que dependem da formação costeira do país. Temos então:

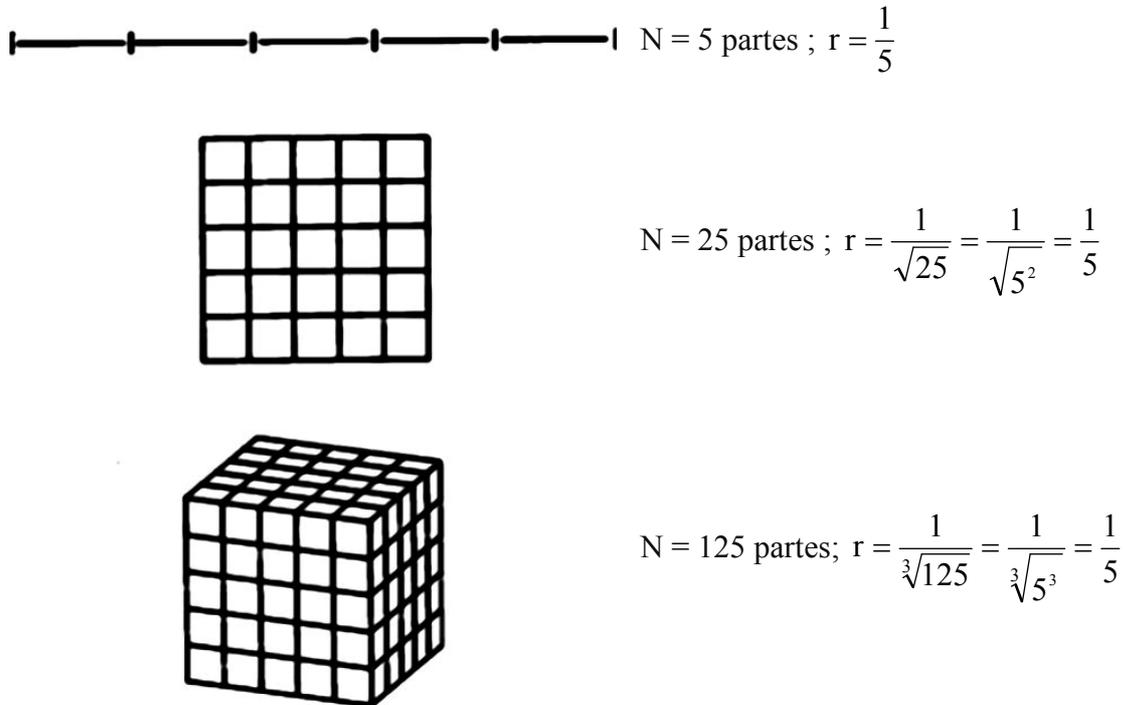
$L(\varepsilon) = \varepsilon \cdot N(\varepsilon) = (\varepsilon \cdot \varepsilon^{-D} N(\varepsilon))/\varepsilon^{-D} = (\varepsilon^{1-D} N(\varepsilon))/\varepsilon^{-D}$, fazendo $N(\varepsilon)/\varepsilon^{-D} = K$, temos que $L(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{1-D}$ e $N(\varepsilon) = K \cdot \varepsilon^{-D}$. Daí, concluímos que:

$$L = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (L(\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K \cdot \varepsilon^{1-D}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(K \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon^D} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(K \cdot \frac{1}{\varepsilon^{D-1}} \right) = \infty, \text{ ou seja, o}$$

comprimento total L da costa tende ao infinito.

Reiterando que a dimensão de Hausdorff-Besicovitch está em conformidade com a dimensão usual de espaços usuais, mostraremos como ocorre essa adequação.

FIGURA 12 - A dimensão euclidiana



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 20-21).

Um objeto unidimensional, como um segmento de reta, também possui a propriedade de se reproduzir similarmente. Ele pode ser dividido em N peças em forma de segmentos idênticos, cada uma das quais reduzidas pela razão r do todo (FIGURA 12), da seguinte

forma: $r = \frac{l}{N}$.

Analogamente, um objeto bidimensional, como um quadrado no plano, pode ser dividido em N peças em forma de quadrados autossimilares, as quais estão reduzidas pela razão r do todo, da seguinte forma: $r = \frac{l}{\sqrt{N}}$. Por fim, um objeto tridimensional, como um

cubo sólido, pode ser dividido em N peças pequenas em forma de cubos, cada um dos quais reduzidos pela Razão: $r = \frac{l}{\sqrt[3]{N}}$.

Um objeto autossimilar de dimensão D pode ser dividido em N pequenas réplicas

(peças) de si próprio, cada uma das quais reduzidas por um fator r , da seguinte forma:

$$r = \frac{I}{\sqrt[D]{N}}.$$

Podemos escrever: $r \cdot \sqrt[D]{N} = I$; depois, elevando a D membro a membro, teremos: $r^D \cdot N = I$. Para obtermos o valor de D a partir desta equação exponencial devemos aplicar o logaritmo decimal membro a membro, da seguinte maneira: $\log (r^D \cdot N) = \log I$.

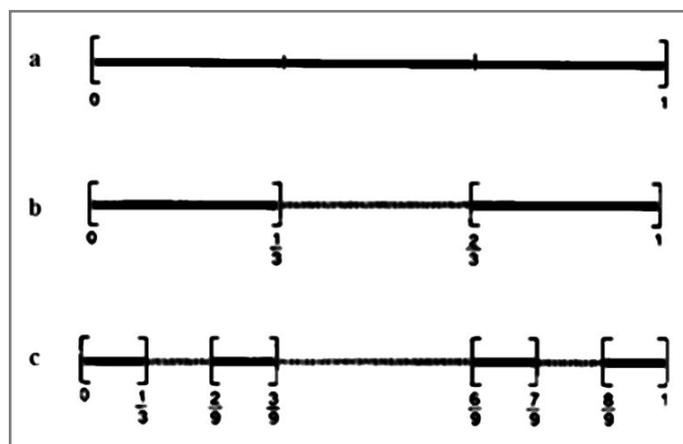
Pelas propriedades de logaritmo, teremos: $\log r^D + \log N = \log I$, ou seja, $D \cdot \log r + \log N = 0$; Então, $D = \frac{-\log N}{\log r} = \frac{\log N}{-\log r} = \frac{\log N}{\log r^{-1}}$, portanto,

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{I}{r} \right)}$$

Aplicando essa relação nos objetos da Figura 12, encontramos os valores 1; 2; e 3 para a dimensão, o que mostra que a dimensão usual está de acordo com a dimensão de Hausdorff-Besicovitch. Mandelbrot (1998) chama D de dimensão fractal da curva, que difere da dimensão euclidiana por não precisar ser, necessariamente, um número inteiro.

Um fractal primitivo que destacaremos está ligado ao nome de Georg Cantor (1845-1918), que criou um conjunto obtido por meio da fragmentação do intervalo $[0, 1]$ e reconhecido por Mandelbrot (1998), muitas décadas mais tarde, como um fractal.

FIGURA 13 - A dimensão fractal do Conjunto de Cantor



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 25).

O conjunto de Cantor⁴ é obtido da seguinte maneira: divide-se o intervalo $I_0 = [0, 1]$ em três partes autossimilares, e em seguida, retira-se de I_0 , seu terço médio aberto (FIGURA 13a). Na Figura 13b, encontramos, assim, $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

No passo seguinte, divide-se cada intervalo de I_1 em três partes autossimilares e retiramos seus respectivos terços médios abertos. Obtemos, na Figura 13c, assim, $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$.

Repetindo-se o processo indefinidamente, chega-se ao conjunto de Cantor, que é formado por todos os pontos que não foram retirados. Nota-se que os pontos extremos $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \dots$, pertencem ao conjunto de Cantor, uma vez que em cada etapa da construção são retirados apenas pontos interiores dos intervalos anteriores. Como em cada etapa obtém-se dois novos intervalos, temos que $N = 2$. Por outro lado, vimos que cada intervalo é dividido em três partes autossimilares, logo a razão $r = \frac{1}{3}$.

Assim, a dimensão fractal do conjunto de Cantor é dada pelo algoritmo:

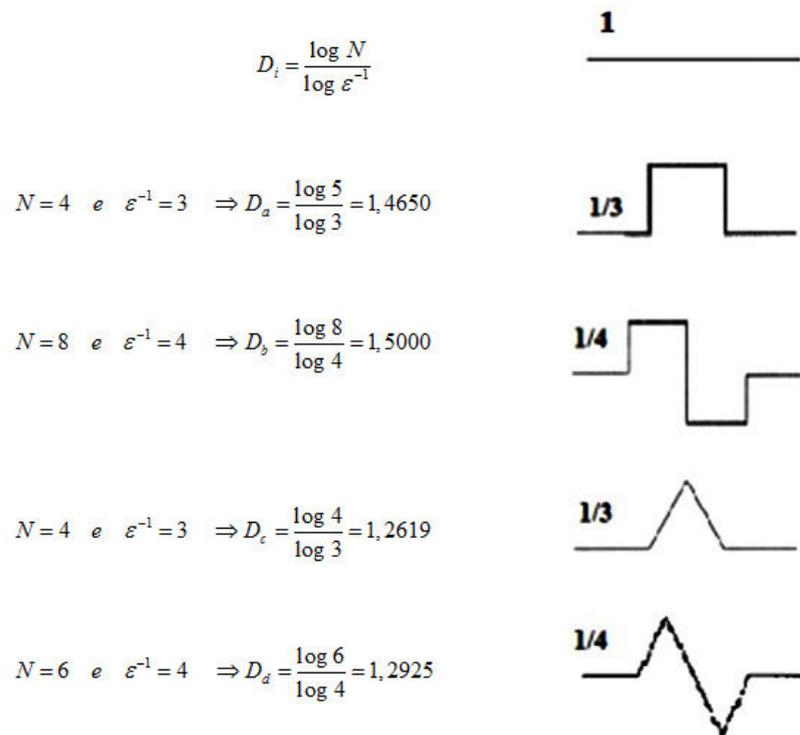
$D = \frac{\log N}{\log \varepsilon^{-1}}$, então $D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0,6309$. Também pode-se calculá-la em relação à Figura 13,

só que neste caso, $N = 4$ e $\varepsilon = 1/9$, sendo assim $D = \frac{\log 4}{\log 9} = 0,6309$.

Do exposto até o momento, pode-se calcular, agora, a dimensão das curvas da Figura 5 que está descrita na Figura 14.

⁴ O conjunto de Cantor tem dimensão fracionária entre o ponto e a reta, ou ainda, entre 0 e 1.

FIGURA 14 - A dimensão de objetos com autossimilaridade exata



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Vale ressaltar que, cada uma das maneiras de se calcular a dimensão fractal, pode gerar uma medida distinta. Isso significa dizer que a dimensão fractal não é única, pois depende do método de observação e medição utilizada. Além desses procedimentos apresentados, existem outras categorias de dimensões fractais, todas categorizando o objeto segundo a sua fragmentação, mas a partir de visões distintas. O conceito dimensão, apesar de sua importância para aquisição do conceito fractal, vem sendo explorado apenas como uma curiosidade, tanto em trabalhos acadêmicos como nos cursos oferecidos a professores.

2.3.2 Ponto Fixo

Pelo fato de o conceito ponto fixo ser relevante para a compreensão e aquisição do conceito fractal e também por estar presente em livros didáticos da Educação Básica, serão evidenciados os seus principais aspectos; será apresentada, também, uma atividade constante num livro didático do 9º ano do Ensino Fundamental.

A compreensão do conceito da dimensão fractal proporciona uma melhor distinção entre as formas geométrica regulares, como círculos e esferas – isto é, múltiplos – e as formas

irregulares, como fractais. Essas distinções entre as geometrias euclidianas e mandelbrotianas (geometria de Mandelbrot) se tornaram mais evidentes após o estudo do conceito dimensão fractal, que é aquele

[...] esquisito número fracionário inventado por Hausdorff e Besicovitch, desprezado pelos cientistas da área aplicada até que Mandelbrot o ressuscitou, poliu e explorou, vem a ser uma propriedade-chave do atrator, governando várias características quantitativas da dinâmica (STEWART, 1991, p. 239).

Souza e Pataro (2009b, p. 107) trazem no livro escolar do 9º ano do Ensino Fundamental uma atividade, da qual apresentaremos apenas um de seus itens:

O modelo de Verhulst citado no texto [A matemática do caos] é dado por $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$, no qual k representa uma característica da população e p (cujo valor máximo é 1) representa o percentual do número de indivíduos vivos nessa população. Com o auxílio de uma calculadora, considere $k = 4,5$ e use os valores 0,25; 0,5; 0,75 para p . Em seguida faça o mesmo para $k = 5$. O que você pôde observar?

Para Baier (2005), torna-se urgente o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo Logístico May, relacionado com os temas fractais, função composta, e função quadrática. Para realizar-se um estudo da dinâmica populacional com essa abordagem, faz-se necessária a compreensão das noções de ponto fixo (atrator, repulsor), iteração e órbita, além do estudo do processo de iteração gráfica, os quais também são relevantes para o estudo do conceito fractal.

Para Stewart (1991, p. 121-122), “A essência de um atrator é ser uma porção do espaço de fase tal que qualquer ponto que se ponha em movimento nas suas proximidades se aproxima cada vez mais dele.” Para Mandelbrot (1977 apud BAIER, 2005, p. 92)

Um atrator que evolui por um processo de alongamentos e dobras é chamado de *atrator estranho*, denominação introduzida por Ruelle e Takens. É também denominado *atrator caótico* ou *atrator fractal*. “Muitos livros de *Mecânica* se referem aos sistemas dinâmicos cujos atratores são pontos, aproximações de círculos ou outras formas de Euclides. Mas eles são raras exceções, e o comportamento da maioria dos sistemas dinâmicos é incomparavelmente mais complexo: seus atratores ou repulsores tendem a ser fractais.

Capra (2006, p. 111), afirma que as técnicas matemáticas que permitiram aos pesquisadores, nas três últimas décadas, descobrir padrões ordenados em sistemas caóticos baseiam-se na abordagem topológica de Poincaré e estão estreitamente ligadas com o desenvolvimento de computadores. O computador pode ser programado para desenhar a solução de equações não-lineares a partir de uma grande coleção de valores para as variáveis, que satisfazem a equação, obtendo uma curva, ou um conjunto de curvas, num gráfico. Essa técnica permitiu aos cientistas resolver as complexas equações não-lineares associadas com fenômenos caóticos e descobrir ordem sob o caos aparente.

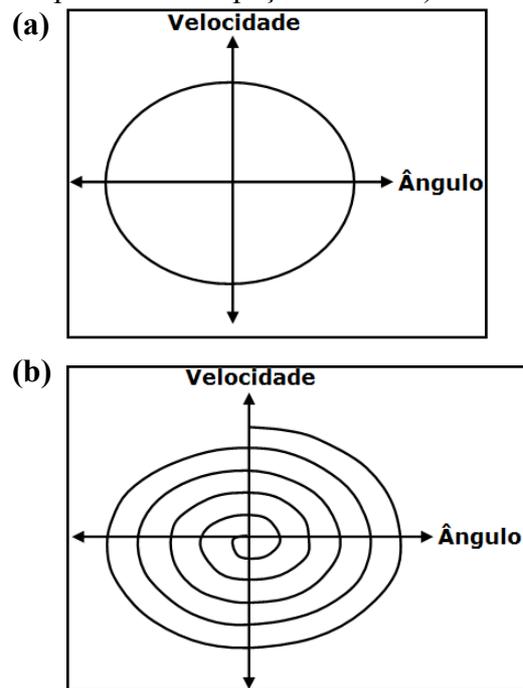
Esses padrões ordenados são revelados quando

as variáveis de um sistema complexo são exibidas num espaço matemático abstrato denominado "espaço de fase". Essa é uma técnica bem conhecida, que foi desenvolvida na termodinâmica, na virada do século. Cada uma das variáveis do sistema está associada com uma diferente coordenada nesse espaço abstrato. (CAPRA, 2006, p. 111).

Para exemplificar Capra (2006, p. 111-112) toma com exemplo muito simples: uma bola que oscila de um lado para o outro num pêndulo. Para descrever completamente o movimento pendular, precisamos de duas variáveis: o ângulo, que pode ser positivo ou negativo, e a velocidade, que pode igualmente ser positiva ou negativa, dependendo do sentido do balanço. Com essas duas variáveis, ângulo e velocidade, podemos descrever completamente o estado de movimento de um pêndulo, em qualquer momento.

Se prosseguirmos e marcarmos os pontos correspondentes aos estados de movimento entre os quatro extremos, descobriremos que eles se distribuem num laço fechado. Poderíamos torná-lo um círculo escolhendo apropriadamente nossas unidades de medida, mas em geral será algum tipo de elipse. Esse laço é chamado de trajetória do pêndulo no espaço de fase. Ele descreve completamente o movimento do sistema. Todas as variáveis do sistema, duas em nosso caso simples, são representadas por um único ponto, que sempre estará em algum lugar sobre esse laço. Conforme o pêndulo balança de um lado para o outro, o ponto no espaço de fase percorrerá o laço circular. Em qualquer momento, podemos medir as duas coordenadas do ponto no espaço de fase, e saberemos o estado exato do sistema.

FIGURA 15 - Trajetória do pêndulo no espaço de fase: a) sem atrito; b) com atrito.



Fonte: CAPRA. (2006, p. 112-113)

O pêndulo sem atrito, cujo espaço de fase está representado na Figura 15a, oscila de um lado para o outro em perpétuo movimento. Este é um exemplo típico de física clássica, onde o atrito geralmente é negligenciado. Um pêndulo real sempre terá algum atrito, que provocará sua desaceleração, até que finalmente acabe parando. A Figura 15b representa o espaço de fase bidimensional por uma curva que se espirala para dentro, em direção ao centro.

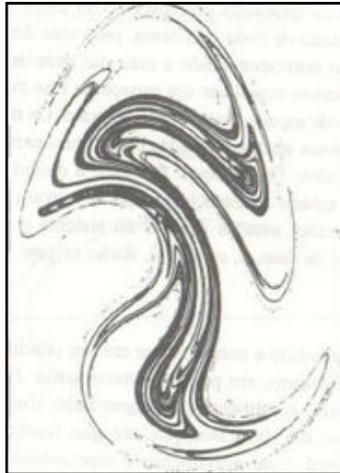
A trajetória em laço fechado é chamada de atrator periódico, Figura 15a, enquanto a trajetória espiralar para dentro, Figura 15b, é chamada de atrator puntiforme. Segundo Capra (2006, p. 114) há três tipos de básicos de atratores: os puntiformes que correspondem a sistemas que atingem um equilíbrio estável; os periódicos, correspondentes a oscilações periódicas; e os estranhos, correspondentes a sistemas caóticos. Um atrator é dito estranho quando não há um padrão de repetição.

Capra (2006, p. 114) dá um exemplo típico de sistema com um atrator estranho que é o "pêndulo caótico"⁵, estudado pela primeira vez pelo matemático japonês Yoshisuke Ueda no final da década de 60. O movimento aparentemente errático dos pontos no espaço de fase não

⁵ É um circuito eletrônico não-linear com um acionador externo, que é relativamente simples mas produz um comportamento extraordinariamente complexo. Cada balanço desse oscilador caótico é único. O sistema nunca se repete, de modo que cada ciclo cobre uma nova região do espaço de fase.

estão distribuídos aleatoriamente. Juntos, eles formam um padrão complexo, altamente organizado - um atrator estranho, que hoje leva o nome de Ueda.

FIGURA 16 - Atrator de Ueda



Fonte: CAPRA. (2006, p. 114)

O atrator de Ueda, Figura 16, é uma trajetória num espaço de fase bidimensional que gera padrões que quase se repetem, mas não totalmente. Esta é uma característica típica de todos os sistemas caóticos. Desse modo, diz Capra (2006, p. 115)

o comportamento caótico, no novo sentido científico do termo, é muito diferente do movimento aleatório, errático. Com a ajuda de atratores estranhos, pode-se fazer uma distinção entre a mera aleatoriedade, ou "ruído", e o caos. O comportamento caótico é determinista e padronizado, e os atratores estranhos nos permitem transformar os dados aparentemente aleatórios em formas visíveis distintas.

Capra (2006, p. 119), afirma que o atrator serviu de elo entre a geometria fractal e a teoria do caos, pois quando Mandelbrot publicou o seu primeiro livro, ainda não estava clara a conexão entre a geometria fractal e a teoria do caos, mas não demorou muito para que se descobrisse que

[...] os atratores estranhos são exemplos extraordinários de fractais. Se partes da sua estrutura são ampliadas, elas revelam uma subestrutura em muitas camadas nas quais os mesmos padrões são repetidos muitas e muitas vezes. Por isso, tornou-se comum definir atratores estranhos como trajetórias no espaço de fase que exibem geometria fractal.

Porém, não é possível prever em que ponto do espaço de fase a trajetória do atrator passará num certo instante, porque mesmo que

[...] o sistema seja governado por equações deterministas, é uma característica comum de todos os sistemas caóticos. No entanto, isto não significa que a teoria do caos não é capaz de quaisquer previsões. Ainda podemos fazer previsões muito precisas, mas elas se referem às características qualitativas do comportamento do sistema e não aos valores precisos de suas variáveis num determinado instante. Assim, a nova matemática representa uma mudança da quantidade para a qualidade, o que é característico do pensamento sistêmico em geral. Enquanto a matemática convencional lida com quantidades e com fórmulas, a teoria dos sistemas dinâmicos lida com qualidades e com padrões. (CAPRA, 2006, p. 116).

Dizemos que atratores que não são pontos, círculos ou outras formas de Euclides são chamados de atratores estranhos.

Para se compreender melhor a ideia de atratores e a relação deles com a geometria fractal, é preciso estudar os sistemas de funções iteradas. Alves (2007, p. 4, grifo nosso) afirma que

Os fractais definidos por *sistemas de funções iteradas* constituem apenas uma pequena classe dos fractais, mas esta forma de construir fractais é muito útil para trabalhar o conceito de fractal com os alunos dos ensinos básico e secundário porque, por um lado é simples de entender e, por outro, pode interligar muitos conceitos matemáticos.

Numa abordagem para a Educação Básica, pode-se considerar que “[...] fractal é o ponto fixo de um sistema de funções iteradas num espaço métrico munido de uma métrica de Hausdorff.” (ALVES, 2007, p. 4). O capítulo 3 traz alguns exemplos sobre essa classe de fractais.

2.3.3 Iteração

Para se obter uma melhor compreensão das noções de iteração, atratores, repulsores, e órbitas, serão utilizados alguns exemplos utilizados por Carvalho et al. (1986) e Peitgen et al. (1991).

Provavelmente algum estudante já tenha iterado funções: $R(x) = \sqrt{x}$; $Q(x) = x^2$; $S(x) = \text{sen } x$; $C(x) = \text{cos } x$, introduzindo um número qualquer na calculadora e acionando repetidas vezes a tecla correspondente a uma dessas funções reais. Vamos ver alguns exemplos:

Ao iterarmos função real $R(x) = \sqrt{x}$, para $x = 196$, obtemos os valores:

$$R^1(196)=14; \quad R^2(196)=3,7416; \quad R^3(196)=1,9343; \quad R^4(196)=1,3908; \quad R^5(196)=1,1793; \\ R^6(196)=1,0859; \quad R^7(196)=1,0420; \dots; R^{13}(196)=1,0006; \dots; R^{16}(196)=1,0000; \dots$$

A órbita do valor inicial é a listagem obtida por meio da sequência sucessiva de iterações de um número de valores de $R(x)$. Representamos a primeira iteração por $R^1(x)$ e a enésima por $R^n(x) = (R \circ R \circ R \circ \dots \circ R)(x)$, n vezes. A órbita de um número é a listagem obtida por meio da sequência sucessiva de iterações de $R(x)$.

No exemplo anterior, a órbita de 196 será a sequência (196; 14; 3,7416; 1,9343; ...), que, por sua vez, converge para 1. De fato, pode-se provar que, isto acontece não importando o número introduzido inicialmente na calculadora.

Tomemos a função $Q(x) = x^2$ e $x = 2,3$, então a órbita do número 2,3 é a sequência: (2,3; 5,29; 27,9841; 783,1099; ...) que converge para o infinito. Quando $x = 0,5$, então, a órbita é: (0,5; 0,25; 0,0623; 0,0004; ...) que converge para o número zero. Ao passo que, se $x = 1$, a órbita é (1, 1, 1, 1, 1, 1 ...) que converge para o número um. Tomemos um outro exemplo.

Seja a função $S(x) = \sin x$ e $x = 56 \text{ rad}$, então, a órbita do número 56 rad é a sequência: (56; -0,522; -0,498; -0,477; ...) que tende para o número zero. Uma curiosidade é que a órbita converge vagarosamente para zero.

Retornando, então, à questão básica dos sistemas dinâmicos: *pode-se prever o destino das órbitas sob iteração? Tal pergunta é semelhante à que já foi feita antes: pode-se prever acontecimentos a longo prazo?* Para os sistemas $R(x) = \sqrt{x}$; $Q(x) = x^2$; $S(x) = \sin x$, a resposta é sim.

Vamos a função $C(x)$ que é outro exemplo em que o destino das órbitas pode ser previsto. Seja $C(x) = \cos x$ e $x = 56 \text{ rad}$, obtemos os valores: $C^1(56) = 0,8532$; $C^2(56) = 0,6576$; $C^3(56) = 0,7915$; $C^4(56) = 0,7028$; $C^5(56) = 0,7630$; ...; $C^{15}(56) = 0,7395$; ...; $C^{34}(56) = 0,739085$. A órbita de 56 rad é uma sequência que tende a 0,739085... Novamente, é demonstrável que este fato ocorre para todo valor inicial de x ; ou seja, todas as órbitas do cosseno são estáveis.

Definimos uma órbita estável quando fazemos uma pequena variação no valor inicial, a órbita resultante se comporta de forma similar. Então, são exemplos de órbitas

estáveis as funções: $R(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$; $S(x) = \text{sen } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; e $C(x) = \text{cos } x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pode-se pensar nas órbitas estáveis como boas órbitas, no sentido de que se seu sistema dinâmico representa um processo físico, cujo resultado pode-se prever e se a órbita resultante é estável, os pequenos erros de observações e arredondamentos que podem ocorrer não têm importância. Infelizmente, nem todas as órbitas são estáveis. Mesmo sistemas mais simples possuem órbitas que estão longe de serem deste tipo. Estas órbitas são chamadas de instáveis ou oscilantes.

A função $Q(x) = x^2$ é um exemplo de órbitas instáveis, pois se cometêssemos um erro $\pm 0,1$ no valor inicial $x_0 = 1$ tem-se que os valores das órbitas convergem para resultados bem diferentes:

$$\text{se } x = 0,9; \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n(0,9) = 0.$$

$$\text{se } x_0 = 1,0; \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n(1,0) = 1.$$

$$\text{se } x = 1,1; \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n(1,1) = \infty.$$

Assim, a órbita do número 1 é instável para $Q(x) = x^2$, pois para uma “pequena” variação no valor inicial (x_0) temos que as órbitas convergem para valores totalmente distintos.

“O conjunto de todos os pontos cuja órbita é instável (não estável), é chamado *Conjunto Caótico*. Como vimos, pequenas mudanças de parâmetro podem alterar radicalmente a caracterização do conjunto caótico.” (CARVALHO et al., 1986, p. 84, grifo nosso).

Frequentemente, “[...] o conjunto dos pontos cujas órbitas *não são estáveis* forma um *fractal*. Assim, esses fractais são dados por uma regra precisa – eles são simplesmente o *conjunto caótico* de um *sistema dinâmico*.” (CARVALHO et al., 1986, p. 84, grifo nosso).

2.3.4 O Modelo de Verhulst

Estudaremos detalhadamente o modelo de *Verhulst* que consta no livro escolar de Souza e Pataro (2009b), apresentado anteriormente na seção 3.2. Esse modelo é representado por uma função real $y = k \cdot p \cdot (1 - p)$ introduzida para exemplificar o crescimento populacional de certas espécies. Segundo Baier (2005), o estudo da dinâmica populacional, por meio do modelo logístico de May, relacionado com os temas fractais, função composta e função quadrática, tornam evidente a dependência das condições iniciais.

Suponhamos que exista uma espécie cuja população aumente e diminua durante um certo tempo, num meio ambiente controlado. Ecologistas têm sugerido vários modelos matemáticos para prever o comportamento dessa população em longo prazo. Medimos a população da espécie no final de cada geração e indicamos por x_n sua porcentagem após n gerações, onde $0 < x_n < 1$.

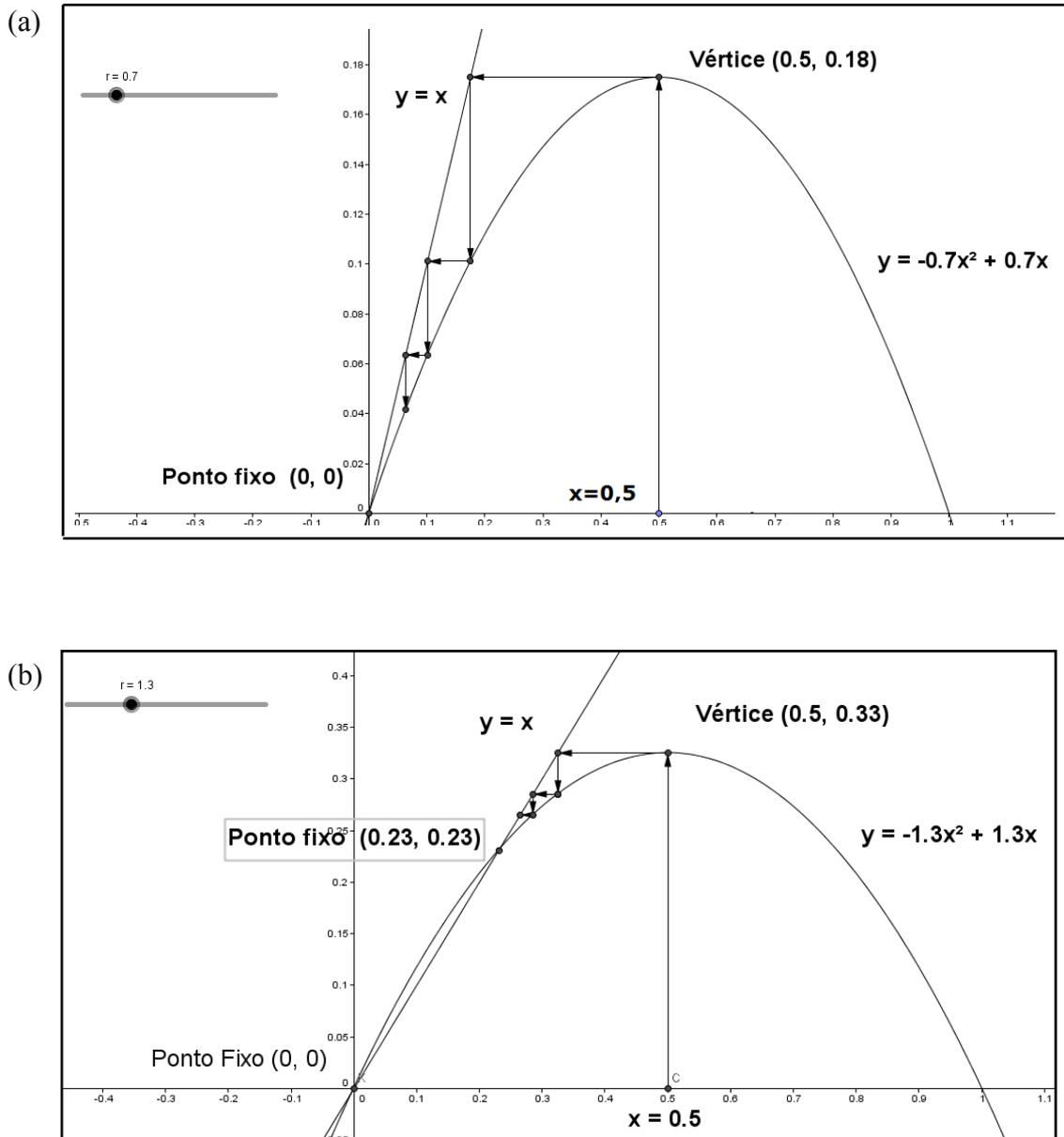
Uma equação que pode ser utilizada para descrever ou modelar o crescimento é dado por: $f(x) = r \cdot x(1-x)$; onde r é uma constante que depende das condições ambientais, como por exemplo, a quantidade de comida presente.

Usando esta função quadrática na variável x_n deduzimos a população da geração seguinte, baseando-nos apenas no conhecimento da população da geração precedente e da constante r .

O uso do fator $(1 - x_n)$, é mais do que simplesmente deduzir o crescimento, indica a quão numerosa a população virá a ser. A equação do segundo grau: $-r \cdot x_n^2 + r \cdot x_n = 0$, admite 0 e 1 como raízes; portanto, a população alcançará um máximo quando $x_n = 0,5$, logo $y_{\max} = 0,25 \cdot r$.

Os pontos de intersecção das parábolas, definidas conforme r varia, com a reta $y = x$, determinam os pontos fixos. Para determinar numericamente os pontos fixos resolvemos o sistema de equações por $y = r \cdot x \cdot (1 - x)$ e $y = x$, logo os pontos fixos são $x_f = 0$ e $x_f = f(r) = \frac{r-1}{r}$. A Figura 17 apresenta a intersecção dos gráficos para dois valores distintos de r .

FIGURA 17 - Gráficos das funções $y = r \cdot x \cdot (1 - x)$ e $y = x$: a) Diagrama da teia de aranha⁶ para $r = 0,7$; (b) Diagrama da teia de aranha para $r = 1,3$.



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

⁶ Trata-se de um método gráfico de iteração. Para iterar o valor x_0 , trace uma teia de aranha vertical e veja onde ela atinge a parábola. Desenhe então uma teia horizontal para atingir a diagonal. A coordenada desse ponto é x_1 . Repita, formando uma "escada" entre a parábola e a linha diagonal. As coordenadas de sucessivos "pés de degraus" da escada são os sucessivos valores iterados da função.

FIGURA 18 - Modelo de crescimento para vários valores de r

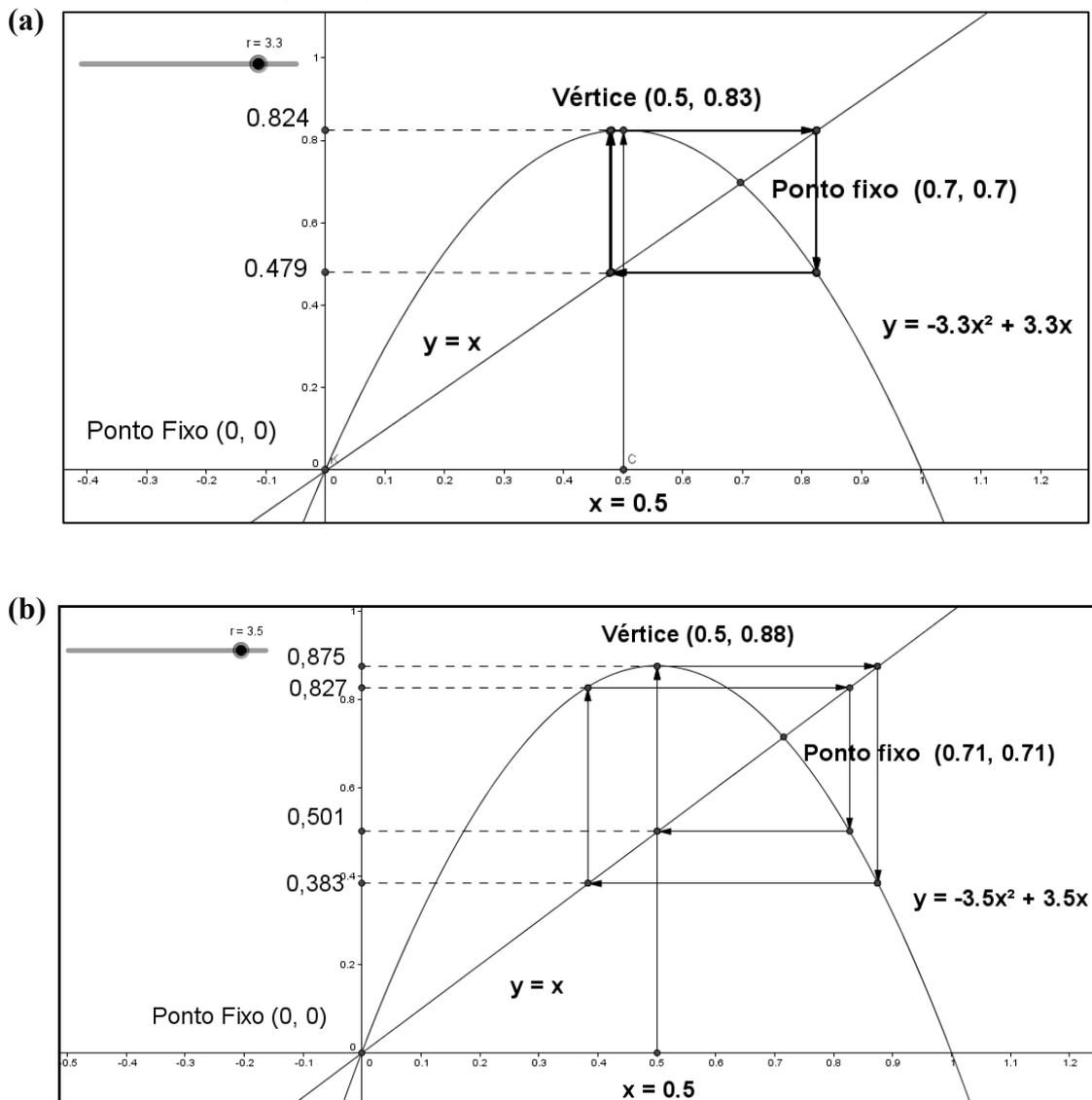
$y = r.x.(1-x)$												
iteração	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
	0,5	0,7	1,3	2	2,6	3,3	3,5	3,54	3,564	3,569	3,57	4
1	0,125	0,175	0,325	0,500	0,650	0,825	0,875	0,885	0,891	0,892	0,893	1,000
2	0,055	0,101	0,285	0,500	0,592	0,476	0,383	0,360	0,346	0,343	0,343	0,000
3	0,026	0,064	0,265	0,500	0,628	0,823	0,827	0,816	0,807	0,804	0,804	0,000
4	0,013	0,042	0,253	0,500	0,607	0,480	0,501	0,532	0,556	0,562	0,563	0,000
5	0,006	0,028	0,246	0,500	0,620	0,824	0,875	0,881	0,880	0,879	0,878	0,000
6	0,003	0,019	0,241	0,500	0,613	0,479	0,383	0,370	0,377	0,380	0,381	0,000
7	0,002	0,013	0,238	0,500	0,617	0,824	0,827	0,825	0,837	0,841	0,842	0,000
8	0,001	0,009	0,236	0,500	0,614	0,480	0,501	0,511	0,487	0,477	0,475	0,000
9	0,000	0,006	0,234	0,500	0,616	0,824	0,875	0,885	0,890	0,890	0,890	0,000
10	0,000	0,004	0,233	0,500	0,615	0,479	0,383	0,361	0,348	0,348	0,349	0,000
11	0,000	0,003	0,232	0,500	0,616	0,824	0,827	0,817	0,809	0,810	0,811	0,000
12	0,000	0,002	0,232	0,500	0,615	0,479	0,501	0,529	0,552	0,549	0,547	0,000
13	0,000	0,001	0,232	0,500	0,615	0,824	0,875	0,882	0,881	0,884	0,884	0,000
14	0,000	0,001	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,369	0,372	0,367	0,365	0,000
15	0,000	0,001	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,824	0,833	0,829	0,827	0,000
16	0,000	0,001	0,231	0,500	0,615	0,479	0,501	0,514	0,496	0,506	0,510	0,000
17	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,875	0,884	0,891	0,892	0,892	0,000
18	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,362	0,346	0,344	0,344	0,000
19	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,818	0,807	0,805	0,805	0,000
20	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,501	0,528	0,556	0,560	0,560	0,000
21	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,875	0,882	0,880	0,879	0,880	0,000
22	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,368	0,376	0,379	0,378	0,000
23	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,823	0,837	0,840	0,839	0,000
24	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,501	0,516	0,487	0,479	0,481	0,000
25	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,875	0,884	0,890	0,891	0,891	0,000
26	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,363	0,348	0,347	0,346	0,000
27	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,818	0,808	0,809	0,808	0,000
28	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,501	0,527	0,552	0,551	0,554	0,000
29	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,875	0,883	0,881	0,883	0,882	0,000
30	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,367	0,373	0,369	0,371	0,000
31	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,822	0,833	0,831	0,833	0,000
32	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,501	0,517	0,495	0,501	0,496	0,000
33	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,875	0,884	0,891	0,892	0,892	0,000
34	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,479	0,383	0,363	0,346	0,343	0,343	0,000
35	0,000	0,000	0,231	0,500	0,615	0,824	0,827	0,819	0,807	0,804	0,804	0,000

Fonte: Edilson de Moura, 2015.

A Figura 18 apresenta as iterações da função $y = r.x.(1-x)$ com r variando de 0,5 até 4. Na coluna temos a órbita dos valores de r , e em destaque vemos que essas órbitas são estáveis e de período um; dois; quatro; oito ; e dezesseis. Notemos que para um valor inicial $x_0 = 0,5$ e $r = 0,7$ a população desaparece após algumas gerações, enquanto que para $r = 1,3$; $r = 2$ e $r = 2,6$ ela tende a se estabilizar, ou seja, admite um valor limite definida. (FIGURA 17 e 18).

Agora, se $r > 3$, os resultados gerados são assustadoramente diferentes. Para $r = 3,3$, os valores limites tendem a oscilar entre dois resultados distintos. Para $r = 3,5$, a oscilação ocorre entre quatro valores diferentes, veja o destaque na Figura 18.

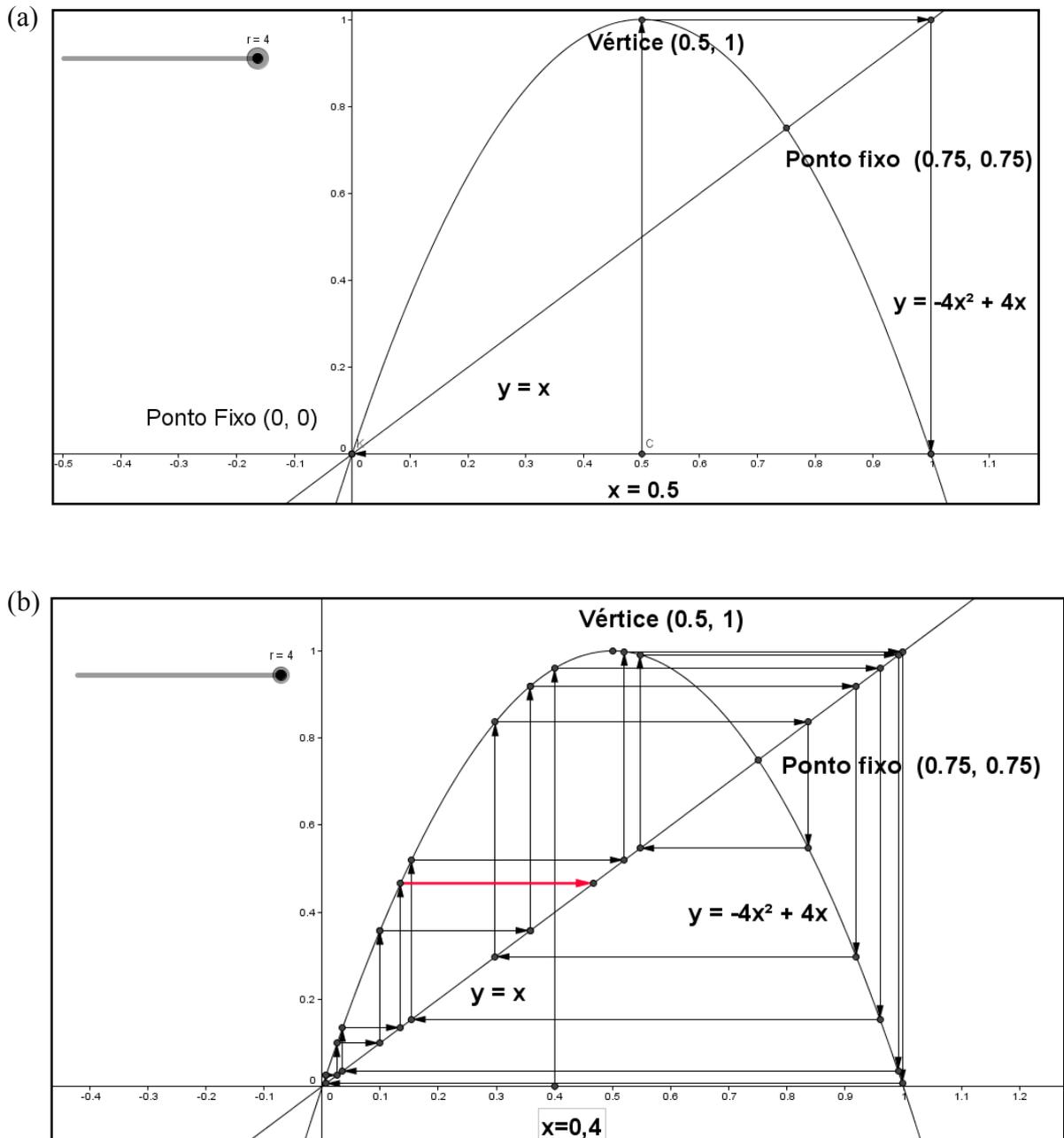
FIGURA 19 - Diagrama da teia de aranha: a) para $r = 3,3$ temos dois períodos; b) para $r = 3,5$ temos quatro períodos



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Finalmente, se tomarmos $r = 4$ e $x_0 = 0,5$ temos o desaparecimento da espécie após apenas duas gerações. Se $x_0 = 0,4$ e $r = 4$ temos $(0,4; 0,96; 0,154; 0,520; 0,998; 0,006; 0,25; 0,099; \dots)$, ou seja, um total de população completamente aleatório. Então, uma pequena mudança no valor provoca resultados bem diferentes (FIGURA 20).

FIGURA 20 - Diagrama da teia: a) para $x=0,5$ e $r=4$ temos um ponto fixo; b) para $x=0,4$ e $r=4$ temos o caos.



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Certos valores de r levam a resultados totalmente previsíveis (um valor limite fixo ou periodicamente repetido), mas outros fornecem resultados *randômicos* ou aleatórios (FIGURA 20b). Esta é a natureza imprevisível desse processo. Sobre a importância do estudo dos fractais randômicos, Baier (2005, p. 141, grifo nosso) destaca, comparando os fractais clássicos aos randômicos, afirmando que

Estes fractais clássicos estão difundidos pela internet, em revistas populares e em materiais didáticos. Pela sua aproximação com a postura mecanicista, são confortavelmente aceitos, pois seu processo de construção é regular. No entanto, é o estudo dos *fractais randômicos* que pode contribuir para o entendimento da concepção de mundo instaurada desde a criação da teoria quântica, onde a aleatoriedade é presença.

O principal componente na formulação matemática do exemplo que demos, cuja equação vem sendo utilizada por ecologistas desde aproximadamente 1950, foi a iteração⁷, ou seja, a repetição do processo muitas vezes. Isto é exatamente o que foi feito para gerar a tabela (FIGURA 18).

Temos em destaque na Figura 18: um atrator pontual quando $x = 0,5$ e $r \in \{ 0,5; 0,7; 1,3; 2 \}$; período de ordem dois para $r = 2,6$; período de ordem quatro para $r = 3,3$; e $3,5$; período de ordem oito para $r = 3,54$; período de ordem dezesseis para $r = 3,564; 3,569$; e $3,57$.

Há uma maneira de obter uma visão de conjunto de todo o comportamento dinâmico do mapeamento logístico para todos os valores de r , ao mesmo tempo. É o chamado diagramas da bifurcações. (Figura 21).

A maneira de obtê-lo, segundo Stewart (1991, p. 176-179), é a seguinte. Trace um gráfico com r seguindo na horizontal e x na vertical. Acima de cada valor de r , marque aqueles valores de x que se situam no atrator para esse r . Cada fatia vertical dará então uma figura, no intervalo de 0 a 1, do atrator correspondente. Assim, por exemplo, quando r é menor que 3, há somente um atrator pontual, e você deve marcar um único valor de x verticalmente. Isto dá uma curva.

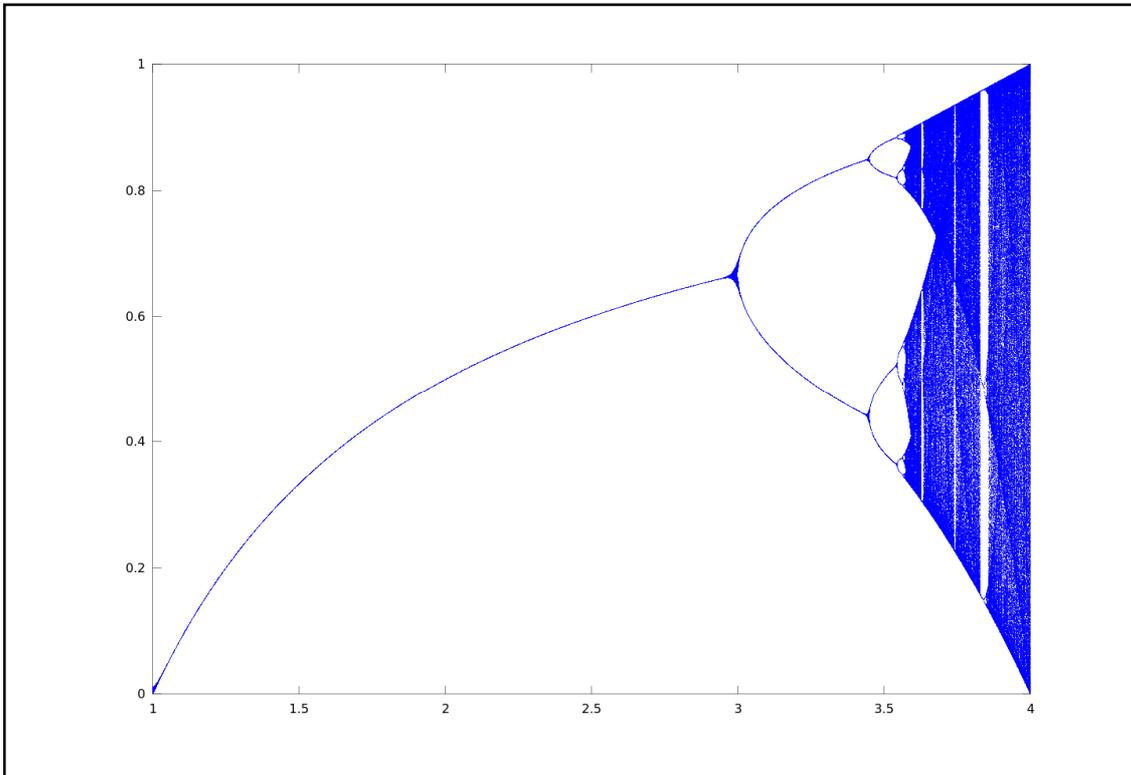
Imagine um gráfico em que r segue de 0 a 4 na horizontal, em etapas de, digamos, 0,2. Trace x verticalmente, entre 0 e 1. Você terá que esticar as escalas para poder perceber alguma coisa. A cada valor de r , itere x algumas centenas de vezes, *sem* traçar ponto algum, e depois continue por mais outras vinte vezes, aproximadamente, marcando os valores de x acima do r escolhido.

Em $r = 3,3$, o que até então fora uma única curva divide-se em duas "bifurcações",

⁷ Processos deste tipo são encontrados em todas as ciências exatas; por exemplo, para fazer a descrição de fenômenos naturais, por equações diferenciais, Isaac Newton e Gottfried Leibniz, basearam-se no princípio de *feedback*. O processo dinâmico determina a localização e a velocidade de uma partícula num determinado instante, a partir de seus valores no instante precedente (CARVALHO et al., 1986).

tornando a se dividir à medida que r avança pelo regime duplicador de período. O que aparece é uma bela estrutura em árvore (Figura 21).

FIGURA 21 - Diagrama de Bifurcação



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 87).

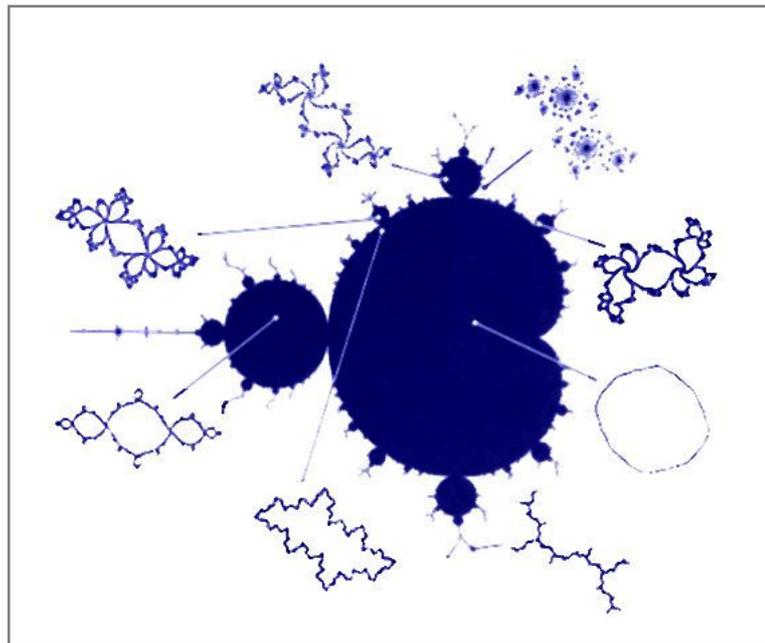
Por volta de $r = 3,58$, a estrutura culmina num número infinito de ramos e o sistema se torna caótico. Os ramos dessa estrutura se expandem em faixas de atratores caóticos. O diagrama da bifurcação é pontilhado de manchas aleatórias. **A bifurcação é o ponto onde há perda de estabilidade do atrator.**

Se o valor r for próximo de 3,835, o período básico é três. Sabemos até que ordem os períodos surgem. O teorema foi demonstrado por um matemático russo, A. N. Sharkovskii. O teorema de Sharkovskii diz que inicialmente deve-se escrever primeiro, os números ímpares, em ordem *ascendente*. Depois seus duplos, quádruplos, óctuplos, etc., por fim as potências de 2 em ordem *descendente*. Se, num dado valor de r , o mapeamento logístico tem um ciclo de período p , então deve ter tido também ciclos de período q para todo q tal que $p \rightarrow q$ nessa ordem.

$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow 14 \rightarrow 18 \rightarrow 22 \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 12 \rightarrow 20 \rightarrow 28 \rightarrow 36 \rightarrow 44 \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 3 \cdot 2^n \rightarrow 5 \cdot 2^n \rightarrow 7 \cdot 2^n \rightarrow 9 \cdot 2^n \rightarrow 11 \cdot 2^n \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 2^m \rightarrow 2^{m-1} \rightarrow 2^{m-2} \rightarrow 2^{m-3} \rightarrow 2^{m-4} \rightarrow \dots$
 $\rightarrow 32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow \dots$

Assim, os primeiros ciclos a se estabelecer têm períodos 1, 2, 4, 8, ... (a cascata duplicadora de período). O período 17, por exemplo, se estabelece *antes* do período 15; antes de ambos, porém, estabelece-se o período 34, e antes dele períodos como 44 ou 52, que são múltiplos ímpares de 4, e ainda antes 88 ou 104, que são múltiplos ímpares de 8, e assim por diante.

FIGURA 22 - Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Carvalho et al. (1986, p. 147).

Se iterarmos a função complexa $f(z) = z^2 + c$, o resultado é uma sequência de números complexos que apresenta uma estranha dança no plano complexo. Para obter o conjunto de Mandelbrot (FIGURA 22) utilizamos $z = 0 + 0i$ como ponto inicial; poderíamos, então, perguntar o que ocorre quando algum outro valor inicial for fixado. Sabe-se que, nesse caso, o resultado é sempre uma versão deformada do conjunto de Mandelbrot.

Do ponto de vista técnico-histórico, o trabalho de Mandelbrot (1998) é uma união muito bem feita dos estudos realizados por Verhulst, Julia, Fatou, Poincaré e Kolmogorov. Esse trabalho só foi possível, na década passada, devido às facilidades proporcionadas pelos computadores.

2.4 DO ASPECTO DA LINGUAGEM

Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951), filósofo austríaco-britânico e um dos principais filósofos da linguagem do século passado, tem sua obra prima em *Tractatus Lógico-Philosophicus* (1921), na qual, como está em Giles (1993, p. 261), afirma: “[...] Os limites de minha linguagem denotam os limites do meu mundo.” Vem como compreensão que fundamenta nossa busca. Desenvolver condições para o uso da linguagem, como meio da ação intelectual, é tudo o que incessantemente fazemos. Um aspecto da aprendizagem matemática é este. Então, do ponto de vista de que a teoria fractal visa ao desenvolvimento da nossa linguagem para a matemática, temos que esse novo conhecimento está na marcha natural da ampliação dos limites da ciência. Serão descritos alguns estudos que mostram a presença de conhecimentos sobre fractais empregados em diferentes domínios de atividades.

Angelis-Reis e Romanha (2006, p. 13) investigaram os granulomas hepáticos na esquistossomose e identificaram

[...] uma topologia colagênica irregular e variável, semelhante a uma estrutura fractal após varias iterações. Fractais são uma família de formas constituídas por unidades iguais (auto-similares) que se ramificam infinitamente em escalas cada vez menores. A unidade inicial, ou seja, aquela que se mostra repetitiva diante de “infinitas” iterações, é denominada de embrião fractal ou pré-fractal.

Para se estudar aquelas propriedades geométricas, os pesquisadores buscaram observar a forma para então identificar padrões. Angelis-Reis e Romanha (2006, p. 14), ao analisarem os fígados de camundongos infectados após o início da reação periovular, encontraram

[...]. a presença de resíduos vasculares de colágeno que se difundiam pelo tecido formando estruturas fractais de difícil caracterização geométrica. Aos 38 dias de infecção, entretanto, foi possível perceber dois padrões de difusão de fibras. Um de origem vascular e outro de origem fibroblastóide situado perifericamente. No padrão periférico identificamos o embrião.

Capra (2006, p. 38) destaca que “[...] o entendimento do padrão de auto-organização é a chave para se entender a natureza essencial da vida.” Por isso, os cientistas procuram por padrões, pois nas ciências a repetição significa um padrão e nós inferimos muitas conclusões justamente pelo comportamento repetitivo dos eventos. O antropólogo busca identificar padrões da cultura, o psicólogo olha para os padrões de comportamento, o músico se encanta com os padrões rítmicos e o matemático investiga padrões numéricos, geométricos, buscando uma ordem e uma estética. Pode-se dizer que é da natureza humana identificar e analisar padrões, construindo para si significados e ampliando a linguagem.

Outro exemplo vem de organizações empresariais. Baier (2005, p. 69, grifo do autor) destaca que

Na contemporaneidade, concepções sistêmicas são utilizadas nas empresas industriais, uma vez que administradores passam a considerar não apenas o grande número de componentes individuais envolvidos, mas também os efeitos originários das inúmeras interações. À medida que se tornam mais complexas, algumas empresas assumem o entendimento da organização dos negócios como um sistema social vivo, sendo incorporadas muitas ideias vindas da *Ecologia*.

Tôrres (2005, p. 1) se apropria das características dos fractais e as utiliza como uma linguagem aplicada às organizações:

[...] devemos reduzir a unidade padrão de medida, e medimos a qualidade de uma empresa e de uma pessoa pelo conhecimento e pela sabedoria que elas têm e são capazes de gerar. Uma empresa pode aumentar seus limites: 1) dando maior atenção aos pequenos detalhes e desenvolvendo dados mais específicos de seus padrões (redução da medida do padrão cognitivo); 2) reformulando um padrão já existente, pelo desenvolvimento de novas interpretações de eventos passados.

Quanto à noção de autossimilaridade, Tôrres (2005, p. 5) afirma que

A visão fractal da organização é a iterativa reflexão de toda a organização em cada uma de suas partes. A dinâmica de funcionamento de uma organização deve ser vista como ela toda se refletindo iterativamente ou recursivamente em cada uma de suas Unidades componentes. Não é uma visão hierárquica, para cima e para baixo e sim uma visão em zoom – uma visão fractal.

Portanto, a linguagem fractal tem se tornado cada vez mais presente no mundo das pessoas e do trabalho, tanto é, que Stewart (1991, p. 260), fundamentado em John

Archibald Wheeler (1911-2008), afirma que “[...]. Hoje, ninguém que não tenha familiaridade com os fractais será considerado cientificamente alfabetizado.” E por se tratar justamente de um conhecimento básico, é importante incorporá-lo à formação do aluno, pois a aquisição desse conhecimento tanto preparará o aluno cientificamente, como também, aumentará a sua capacidade de utilizar diferentes tecnologias em diferentes áreas de atuação, que segundo os *PCNEM*, esse é o alvo principal da Educação Básica (BRASIL, 2000a).

3 O SISTEMA DE FUNÇÕES ITERADAS (SFI)

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, proposições, teoremas e exemplos de fractais gerados por um Sistema de Funções Iteradas (SFI), que foram extraídos do trabalho de Alves (2007).

Numa abordagem para a Educação Básica, pode-se considerar que “[...] fractal é o ponto fixo de um sistema de funções iteradas num espaço métrico munido de uma métrica de Hausdorff.” (ALVES, 2007, p. 4). Para estudar um SFI fez-se necessário introduzir previamente os conceitos de métrica, de espaço métrico, de métrica de Hausdorff, de ponto fixo e de contração que enunciaremos a seguir. Os fractais definidos por sistemas de funções iteradas constituem uma pequena classe dos fractais, mas este processo de construção possibilita não só o desenvolvimento do conceito de fractal mas também, pode favorecer outros conceitos matemáticos.

Seja X um dado espaço métrico completo, onde temos associado a ele, um novo espaço métrico com a métrica de Hausdorff denotado por $H(X)$. Portanto, é nesse espaço que estudaremos essa classe de fractais gerados pelo SFI. Fractal então, é um subconjunto compacto não vazio de um espaço métrico X completo. Esses conceitos já foram introduzidos na seção 2.3.

Definição 1: Uma transformação $f: X \rightarrow X$ num espaço métrico diz-se uma contração se existe uma constante s , com $0 \leq s < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y), \forall x, y \in X$. Dizemos que s é o fator de contração.

Vamos há um exemplo:

Exemplo 1: Sendo \mathbb{R} o espaço métrico com a métrica $d(x, y) = |x - y|$, considere a aplicação $f(x, y) = \frac{1}{2}x$.

Vamos mostrar que o fator s de contração é igual a $\frac{1}{2}$; e zero é ponto fixo. Para

quaisquer valor x e y de \mathbb{R} se tem que $d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right| = \frac{1}{2}|x - y| = \frac{1}{2}d(x, y)$ e sendo x um ponto de \mathbb{R} temos que $f(x) = x$ se e só se $\frac{1}{2}x = x$, ou seja, se e só se $x = 0$.

Exemplo 2: Seja X o conjunto das funções contínuas $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que se representará por $C[0, 1]$. Um ponto de X é, portanto, uma função. Considere agora a seguinte métrica definida neste espaço: $d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [0, 1]\}$, $\forall f$ e $g \in C[0, 1]$. Esta métrica está bem definida porque f e g são contínuas em $[0, 1]$.

Um exemplo de contração em $C[0, 1]$ poderá ser a aplicação $w: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ que aplica cada função f em $w(f) = \frac{1}{2}f + 1$ em que $\left(\frac{1}{2}f + 1\right)(x) = \frac{1}{2}f(x) + 1, \forall x \in [0, 1]$. Vamos mostrar que o fator s de contração é igual a $\frac{1}{2}$; e o ponto fixo é a função $p(x) = 2, \forall x \in [0, 1]$.

Para quaisquer elementos f e g de $C[0, 1]$ vem que:

$$\begin{aligned} d(w(f), w(g)) &= \max\{|(w(f))(x) - (w(g))(x)| : x \in [0, 1]\} = \\ &= \max\left\{\left|\frac{1}{2}(f)(x) + 1 - \frac{1}{2}(g)(x) - 1\right| : x \in [0, 1]\right\} = \\ &= \max\left\{\frac{1}{2}|(f)(x) - (g)(x)| : x \in [0, 1]\right\} = \\ &= \frac{1}{2} \max\{|(f)(x) - (g)(x)| : x \in [0, 1]\} = \frac{1}{2}d(f, g) \end{aligned}$$

Por outro lado, se f for um elemento qualquer de $C[0, 1]$, tem-se que $w(f) = f$ se e só se, $\frac{1}{2}f(x) + 1 = f(x), \forall x \in [0, 1]$, o que equivale a dizer que $\frac{1}{2}f(x) = 1$, ou seja, $f(x)$ é a função constante igual a 2 no intervalo $[0, 1]$.

Proposição 1: Se $f, g: X \rightarrow X$ são contrações de fator s e t respectivamente, então $f \circ g$ é uma contração de fator st .

Definição 2: Seja $f: X \rightarrow X$ uma transformação no espaço métrico X . As iteradas sucessivas de f são transformações $f^n: X \rightarrow X$ definidas por:

$$f^0(x) = x$$

$$f^1(x) = f(x)$$

$$f^{(n+1)}(x) = (f \circ f^n)(x) = f(f^n(x)), n = 1, 2, 3, \dots$$

Da Proposição 1 e da Definição 2 decorre a seguinte proposição:

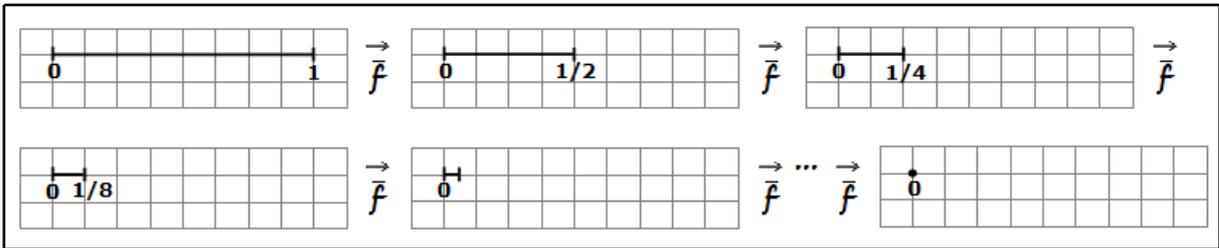
Proposição 2: Se $f: X \rightarrow X$ é uma contração de contração s , então $f^n: X \rightarrow X$ é uma contração de fator s^n .

Teorema 1: Se $f: X \rightarrow X$ é uma contração definida num espaço métrico (X, d) completo, então f possui exatamente um ponto fixo $x_f \in X$ e, para qualquer ponto $x \in X$, a sucessão $\{(f^n)(x)\}_{n=0}^{\infty}$ converge para x_f , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \forall x \in X$.

Proposição 3: Seja $w: X \rightarrow X$ uma contração num espaço métrico (X, d) , com fator de contração s e com ponto fixo x_w . Seja $\tilde{w}: H(X) \rightarrow H(X)$ tal que $\tilde{w}(B) = \{w(x) : x \in B\}, \forall B \in H(X)$. Então \tilde{w} está bem definida e é contração em $(H(X), h(d))$ com fator de contração s e cujo ponto fixo é $\{x_w\}$.

Exemplo 3: Retomando o Exemplo 1 já apresentado em \mathbb{R} , $f(x) = \frac{1}{2}x$, cujo ponto fixo é $x_f = 0$. A Proposição 3 garante que f induz em $H(\mathbb{R})$ uma contração \tilde{f} , tal que $\tilde{f}(A) = \left\{ \frac{1}{2}x : x \in A \right\}, \forall A \in H(X)$ cujo ponto fixo é $\{0\}$. Pelo Teorema 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{f}^n([0, 1]) = \{0\}$.

FIGURA 23 - Iteradas sucessivas de um compacto de \mathbb{R} pela função \tilde{f} definida em $H(\mathbb{R})$



Fonte: Alves (2007, p. 31).

Exemplo 4: Um outro exemplo poderá ser uma aplicação definida em \mathbb{R}^2 com a distância euclidiana como métrica associada, isto é, dados dois pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ de \mathbb{R}^2 , a distância entre eles é dada por $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Considere então a aplicação $w(x) = Ax + t$, em \mathbb{R}^2 , sendo

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos 120^\circ & -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 120^\circ \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} 120^\circ & \frac{1}{2} \cos 120^\circ \end{bmatrix} \quad e \quad t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicar esta função a um ponto de \mathbb{R}^2 corresponde a rotacioná-lo de 120° em torno da origem, em seguida aproximá-lo dela, reduzindo para a metade a distância que se encontrava dela e, finalmente, transladar o ponto que foi operado pelas aplicações anteriores a meia unidade, na horizontal, para a direita. Vamos demonstrar a seguir que esta aplicação é uma contração com fator de contração igual $\frac{1}{2}$ e que tem, como ponto fixo, o ponto $\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$.

Seja $x = (x_1, x_2)$ um ponto fixo de \mathbb{R}^2 . Então,

$$w(x) = Ax + t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cos 120^\circ & -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 120^\circ \\ \frac{1}{2} \operatorname{sen} 120^\circ & \frac{1}{2} \cos 120^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 + \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \end{bmatrix}$$

Assim, dados quaisquer dois pontos x e y de \mathbb{R}^2 , a distância entre $w(x)$ e $w(y)$ é dada por:

$$\begin{aligned}
d(w(x), w(y)) &= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{4}y_2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2\right)^2} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{\left[(y_1 - x_1) + \sqrt{3}(y_2 - x_2)\right]^2 + \left[\sqrt{3}(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)\right]^2} = \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + 4(x_2 - y_2)^2} = \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{4(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = \frac{1}{2} d(x, y)
\end{aligned}$$

Donde, w é, em \mathbb{R}^2 , uma contração com fator de contração igual a $\frac{1}{2}$.

Agora determinaremos o ponto fixo de w :

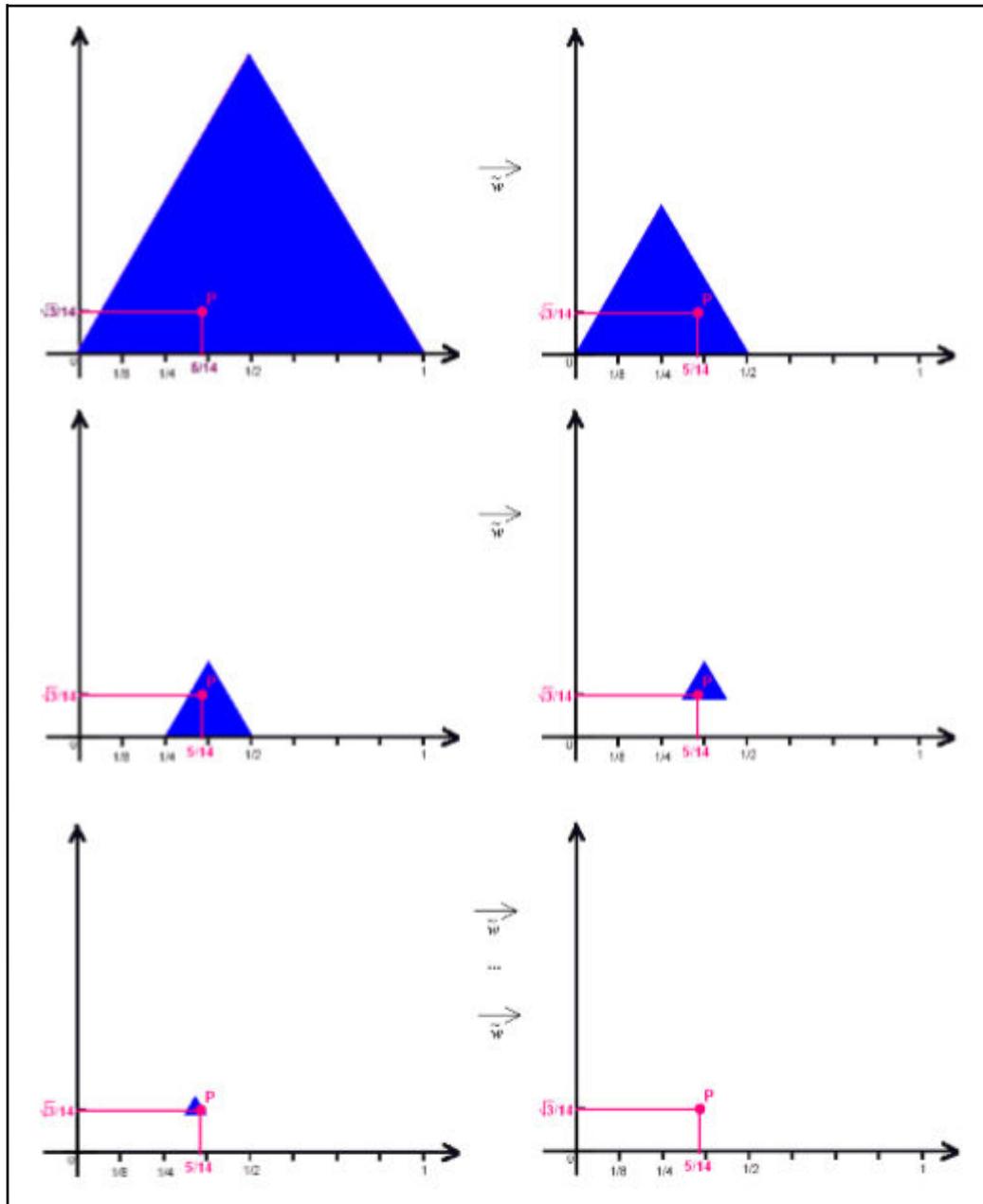
$$\begin{aligned}
w(x) = x &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x_2 + \frac{1}{2} = x_1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \frac{\sqrt{3}}{5}x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}x_1 + \frac{1}{2} = x_1 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5}{14} \\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{14} \end{cases}
\end{aligned}$$

O ponto fixo de w é, portanto, $\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$.

Aplicando agora os mesmos resultados utilizados no exemplo anterior, vem que $w(x)$ definida em \mathbb{R}^2 induz uma aplicação \tilde{w} em $H(\mathbb{R}^2)$ tal que a sucessão de iteradas sucessivas de qualquer ponto desse espaço métrico converge para $\left\{\left(\frac{5}{14}, \frac{\sqrt{3}}{14}\right)\right\}$.

O resultado deste exemplo, na prática, não é muito significativo, pelo menos em termos gráficos, já que após infinitas iterações sucessivas de qualquer conjunto compacto de X , obtermos apenas um ponto de X . Entretanto, o resultado final pode ser interessante se operar com várias contrações ao mesmo tempo.

FIGURA 24 - Iteradas sucessivas de um compacto de \mathbb{R}^2 pela função \tilde{w} definida em $H(\mathbb{R}^2)$



Fonte: Alves (2007, p. 32).

Teorema 2 : Seja (X, d) um espaço métrico e seja $\{\tilde{w}_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$ um conjunto de contrações em $(H(X), h(d))$ cada uma delas com seu respectivo fator de contração s_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Seja $W : H(X) \rightarrow H(X)$ tal que $W(B) = \tilde{w}_1(B) \cup \tilde{w}_2(B) \cup \dots$

$\cup \tilde{w}_N(B) = \bigcup_{n=1}^N \tilde{w}_n(B)$, $\forall B \in H(X)$. Então W é uma contração em $H(X)$ com fator de

contração $s = \max\{s_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$.

Temos agora as condições necessárias para definir um Sistema de Funções Iteradas (SFI), que consiste num espaço métrico (X, d) no qual se define um conjunto finito de contrações $w_N : X \rightarrow X$ com os respectivos fatores de contração s_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Denota-se este SFI por $\{X; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$ e o seu fator de contração é $s = \max\{s_n : n = 1, 2, 3, \dots, N\}$.

Como W (definido no Teorema 2) é uma contração no espaço métrico completo $(H(X), h(d))$ então, pelo Teorema 1 $\{(W^n)(B)\}_{n=1}^{\infty}$ é uma sucessão de Cuchy em $H(X)$, que converge para o ponto fixo de W independentemente do ponto B de $H(X)$, com que se inicia a iteração. Dizemos que esse ponto fixo de W é o ponto fixo do SFI que chamamos fractal. Apesar de não haver uma definição de fractal, dentro do nosso estudo, tomaremos a seguinte definição:

Definição 3: Seja (X, d) um espaço métrico completo. Seja $\{X; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$ um SFI em X , constituído por N contrações, cada uma com o respectivo fator de contração s_n . **O ponto fixo deste SFI chama-se Fractal.**

Esta definição apenas define fractal enquanto ponto fixo de um sistema de funções iteradas, estamos tratando apenas de uma classe de fractais. Veremos no exemplo a seguir que não há unicidade do SFI iteradas que produz um fractal.

Exemplo 5: Os sistemas de funções iteradas F_1 e F_2 definem o mesmo fractal que é o intervalo $[0, 1]$.

$$F_1 = \left\{ \mathbb{R}; w_1 = \frac{1}{2}x, w_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \mathbb{R}; w_1 = \frac{1}{3}x, w_2 = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right\}$$

Exemplo 6: O Triângulo de Sierpinski pode ser gerado pelo seguinte SFI: Considere o conjunto $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ em que

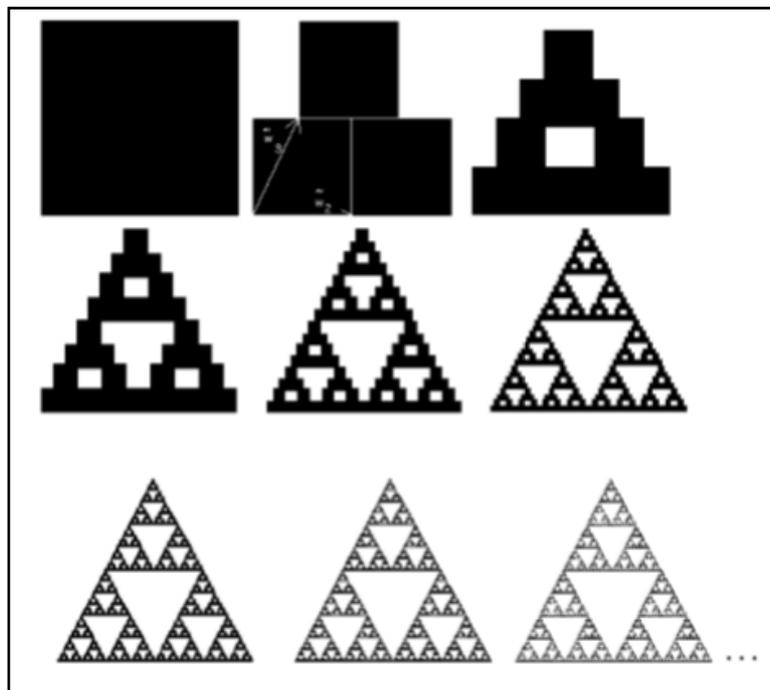
$$w_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$

$$w_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right), \text{ e}$$

$$w_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right) + \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Provamos que um sistema de funções iteradas converge sempre para o mesmo ponto de $H(\mathbb{R}^2)$, independentemente do ponto com o qual se comece a iteração. Sendo assim, para obter o Triângulo de Sierpinski, não é obrigatório começar com um triângulo, podemos começar a iteração a partir de qualquer conjunto compacto não vazio de \mathbb{R}^2 , como por exemplo um quadrado "cheio".

FIGURA 25 - Triângulo de Sierpinski gerado por SFI.



Fonte: Alves (2007, p. 38).

Exemplo 7: O Conjunto de Cantor pode ser gerado pelo seguinte SFI. Considere o conjunto $\{\mathbb{R}; w_1, w_2\}$ em que

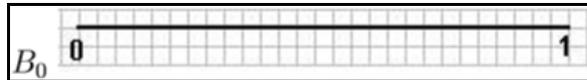
$$w_1(x) = \frac{1}{3}x, \text{ e}$$

$$w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

O fator de contração desse conjunto igual a $\frac{1}{3}$. A diferença entre as expressões destas funções e as das funções do Exemplo 6 é que os coeficientes da segunda aplicação foram trocados. Esta alteração, aparentemente pouco significativa, é suficiente para se obter um fractal interessante.

Aplique-se este SFI ao intervalo $B_0 = [0, 1]$.

FIGURA 26 - Intervalo $B_0 = [0, 1]$.

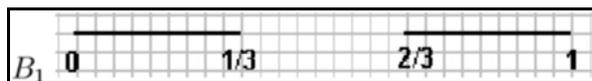


Fonte: Alves (2007, p. 38).

O resultado da primeira iteração é

$$B_1 = W(B_0) = \tilde{w}_1(B_0) \cup \tilde{w}_2(B_0) = \left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right] = [0, 1] \setminus \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right].$$

FIGURA 27 - Intervalo $B_1 = \tilde{w}_1(B_0) \cup \tilde{w}_2(B_0)$

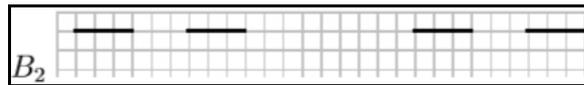


Fonte: Alves (2007, p. 38).

O resultado da segunda iteração é

$$\begin{aligned}
 B_2 &= W(B_1) = \tilde{w}_1(B_1) \cup \tilde{w}_2(B_1) = \\
 &= \tilde{w}_1\left(\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]\right) \cup \tilde{w}_2\left(\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; 1\right]\right) = \\
 &= \tilde{w}_1\left(\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \tilde{w}_1\left[\frac{2}{3}; 1\right]\right) \cup \tilde{w}_2\left(\left[0; \frac{1}{3}\right] \cup \tilde{w}_2\left[\frac{2}{3}; 1\right]\right) = \\
 &= \left[0; \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}; \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}; 1\right].
 \end{aligned}$$

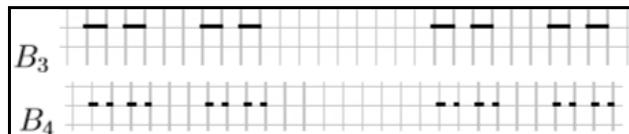
FIGURA 28 - Intervalo $B_2 = \tilde{w}_1(B_1) \cup \tilde{w}_2(B_1)$



Fonte: Alves (2007, p. 39).

Os conjuntos B_3 e B_4 podem ser obtidos de forma análoga que serão representados pela Figura 29.

FIGURA 29 - Intervalo B_3 e B_4



Fonte: Alves (2007, p. 39).

O limite dos conjuntos B_n é definido por $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ é o que chamamos de Conjunto de Cantor.

4 DESENVOLVENDO O CONCEITO FRACTAL

Trataremos neste capítulo atividades apresentadas no volume 2 do livro *Fractals for the classroom* de Peitgen et al. (1991). Abordaremos especificamente as atividades que buscam desenvolver o conceito fractal e aqueles relacionados a SFI.

O processo de iteração é desenvolvido a partir de uma perspectiva intuitiva, que se conecta com a noção familiar de composição de funções. A atenção deve ser dirigida aos aspectos da iteração gráfica e numérica como um processo recursivo. Verificaremos as mudanças sobre um ponto inicial, pois será iterado na mesma função.

Muitas vezes, se pode compreender muita coisa sobre o comportamento de um sistema dinâmico ao analisar o comportamento de apenas alguns de seus pontos. Esse estudo pode se revelar uma experiência emocionante e enriquecedora. Ela vai desafiar a nossa intuição, quando verificarmos que semelhantes funções quadráticas podem apresentar comportamentos que são dramaticamente diferentes.

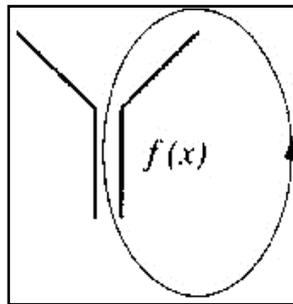
O processo de iteração é tão importante para qualquer estudo de fractais. Por exemplo, para criar o floco de neve de von Koch descrito na Figura 2c, um processo de substituição iterativo é usado em um segmento que passa a ter quatro segmentos, cada um $1/3$ do comprimento do anterior. No conjunto de Mandelbrot e dos conjuntos de Julia associado, descrito na Figura 22, a iteração é o fator fundamental utilizado para determinar se um ponto pertence a um desses conjuntos ou não. Iteração também desempenha um papel importante na determinação da cor dos pontos em torno desses conjuntos.

O processo de iteração neste capítulo começa com funções lineares, mas se concentra principalmente na iteração da família da função quadrática da forma $f(x) = ax(1 - x)$. Esta função quadrática geral, com valores reais x , é equivalente à função quadrática $z^2 + c$ usados, com valores complexos z , para determinar o conjunto de Mandelbrot. Este capítulo irá concentrar-se na iteração de um número real no intervalo fechado de 0 a 1. Mais tarde, a iteração dos números reais será expandido para além desse intervalo fechado. Eventualmente, a iteração de números no plano complexo serão estudados em relação aos pontos nos conjuntos de Mandelbrot e Julia.

O processo de iteração não só contribui para a compreensão do conceito fractal, mas também é uma importante ferramenta de base matemática para modelagem de fenômenos naturais encontrados em nosso mundo real, tais como os eventos de mudança climática, crescimento populacional, reações químicas, o fluxo de fluido, e batimentos cardíacos.

Podemos comparar o processo da iteração como um loop de retroalimentação (Figura 30). O exemplo simples deste processo pode ser ilustrado em uma calculadora. Tire a raiz quadrada de um número positivo com a sua calculadora, e depois, com o resultado daquela operação, extraia outra vez a raiz quadrada. Em seguida, repita todo o processo uma e outra vez.

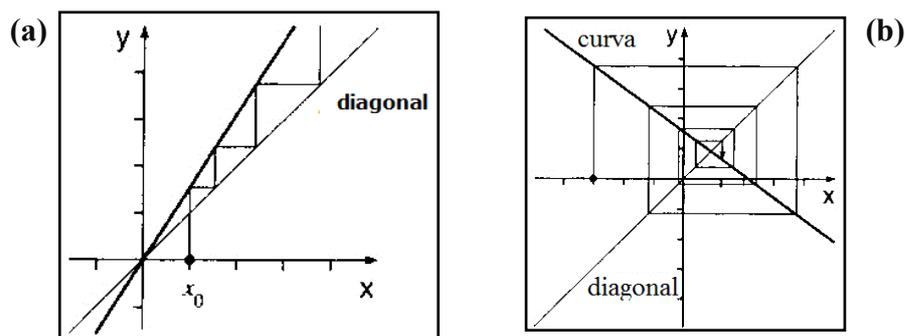
FIGURA 30 - Composição recursivas (loop de retroalimentação)



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 3).

A iteração gráfica é um processo simples. O "algoritmo do desenho" nada mais é do que construção de segmentos verticais e horizontais. Em primeiro lugar, partimos do gráfico de uma função e depois para a diagonal $y = x$, o que reflete de volta para o gráfico novamente. Repetindo o processo várias vezes é gerado um caminho contínuo e alternando segmentos verticais e horizontais. Podemos aprender muito sobre o comportamento da função de forma visual na iteração do caminho.

FIGURA 31 - Iteração como processo gráfico



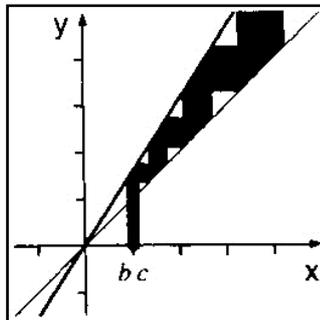
Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 3).

O algoritmo da iteração gráfica é o seguinte: primeiro, partindo de um valor qualquer de x , traçamos uma reta vertical que intercepte a curva (função), depois, partindo do ponto de intersecção, traçamos uma reta horizontal até interceptar a diagonal ($y = x$), por fim, partindo desse ponto de intersecção, traçamos uma reta vertical que intercepte a curva, e assim sucessivamente. Em outros termos, para obtermos tal caminho, primeiro desenhamos um segmento vertical para a curva e um segmento horizontal de lá para a diagonal. O processo geométrico central desta atividade é a sequência repetida destas duas etapas, repetidas vezes, cada vez usando o último ponto final como o próximo ponto de partida. (Figura 31)

O ponto fixo de uma função pode ser identificado por interseções do gráfico da função com a diagonal. Sua natureza pode ser **atração**, **repulsão**, ou **indiferente**. Alguns caminhos gráficos da iteração podem ser em **escada** (Figura 31a) ou em **espiral** (Figura 31b). Esses comportamentos estão intimamente ligados aos valores da inclinação da função afim. Seja m o coeficiente angular da função, então se $m < -1$, o gráfico da iteração se comportar no sentido de espiral para fora; se $-1 < m < 0$, tem sentido de espiral para dentro dela; se $0 < m < 1$, se desenvolve no sentido de escada e para dentro; e se $m > 1$, se dá no sentido escada para fora.

Outro comportamento, que podemos estudar por meio da construção desse gráfico, está relacionado com a visualização do efeito que pequenos intervalos causam sobre outro subintervalo, esses pequenos intervalos podem representar modelos de erro na entrada de um sistema. Temos na Figura 32 um intervalo pequeno, $[b, c]$, que representa erros que podem expandir, através da interação, provocando grandes distorções na saída.

FIGURA 32 - Expansão



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 4).

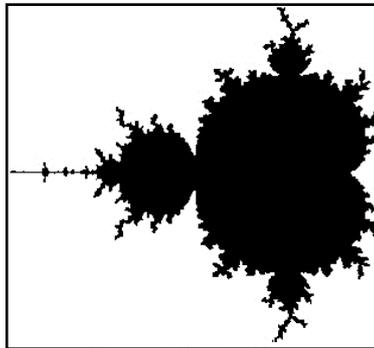
Seja m a inclinação da função afim, então, quando $|m| > 1$, há expansão de intervalo; quando $0 \leq |m| < 1$, há compressão de intervalo.

Inúmeras possibilidades podemos explorar com a prática do processo de iteração gráfica, tanto nas funções linear quanto na quadrática. Esta experiência prática com lápis e régua, é essencial que aconteça afim de se internalizar os conceitos envolvidos.

Uma família de funções quadráticas que recebe atenção especial tem a forma $f(x) = ax(1-x)$, que foi estudada na seção 2.3.4. Elas apresentam funções, sob iteração, de comportamentos centrais para a compreensão do caos em um sistema dinâmico.

A função quadrática na forma $f(x) = ax(1-x)$ são matematicamente equivalentes à da forma $f(x) = x^2 + c$. Seus comportamentos de iteração são essencialmente os mesmos. As funções da forma $f(z) = z^2 + c$, com z complexo, leva diretamente aos conjuntos de Mandelbrot e de Julia.

FIGURA 33 - Funções da forma $f(z) = z^2 + c$, $z \in \mathbb{C}$.

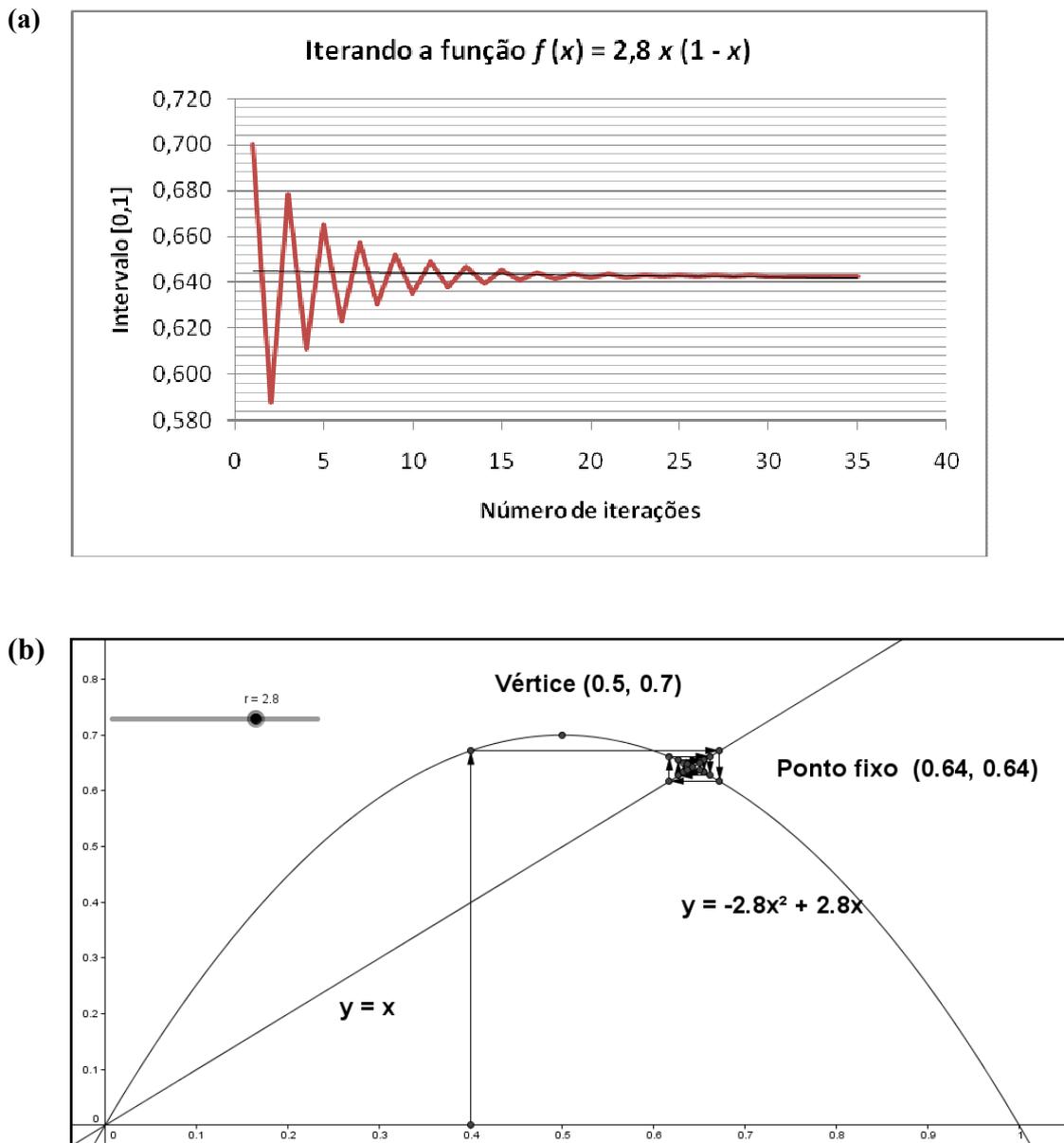


Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 1).

Enquanto as atenções substanciais são dadas aqui para iterar essas funções quadráticas, onde $a = 2,8; 3,2; e 4,0$, é importante ressaltar que esses valores são apenas representativos das muitas funções com $1 \leq a \leq 4$ que apresentam comportamentos semelhantes.

Iterando a função $f(x) = 2,8x(1-x)$ para a maioria dos valores no intervalo fechado $[0,1]$ obtemos um resultado interessante. Esse processo revela o comportamento a longo prazo, sempre levando para o mesmo valor único, $0,6429\dots$ Esta convergência em um valor único, chamado de atrator, ocorre para as funções com um valor de parâmetro em que a está entre 1 e 3 (FIGURA 34).

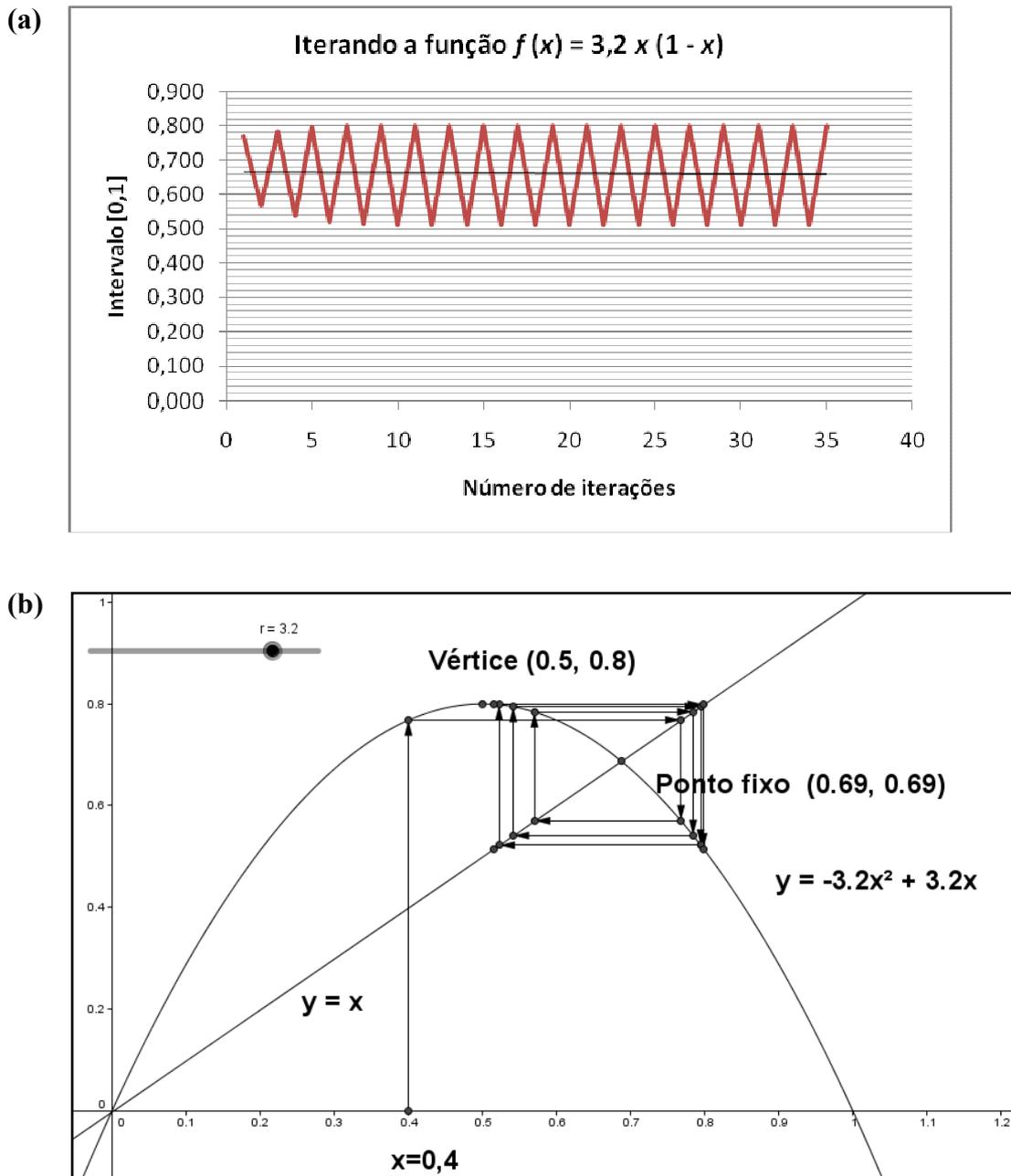
FIGURA 34 - Iterando para obter o atrator pontual ou de período um.



Fonte: Edilson de Moura, 2015.

Iterando a função $f(x) = 3,2x(1 - x)$ para a maioria dos valores no intervalo $[0,1]$ produz um resultado diferente. Ele tem o comportamento a longo prazo iterativo sempre levando para os mesmos dois valores diferentes, $0,799455\dots$ e $0,513044\dots$. Este periódico, oscilando comportamento a longo prazo, denominado período de dois atratores, irá ocorrer para aquelas funções com valores do parâmetro a entre 3 e $3,4494\dots$

FIGURA 35 - Iterando para obter o atrator de ordem dois ou de período dois.



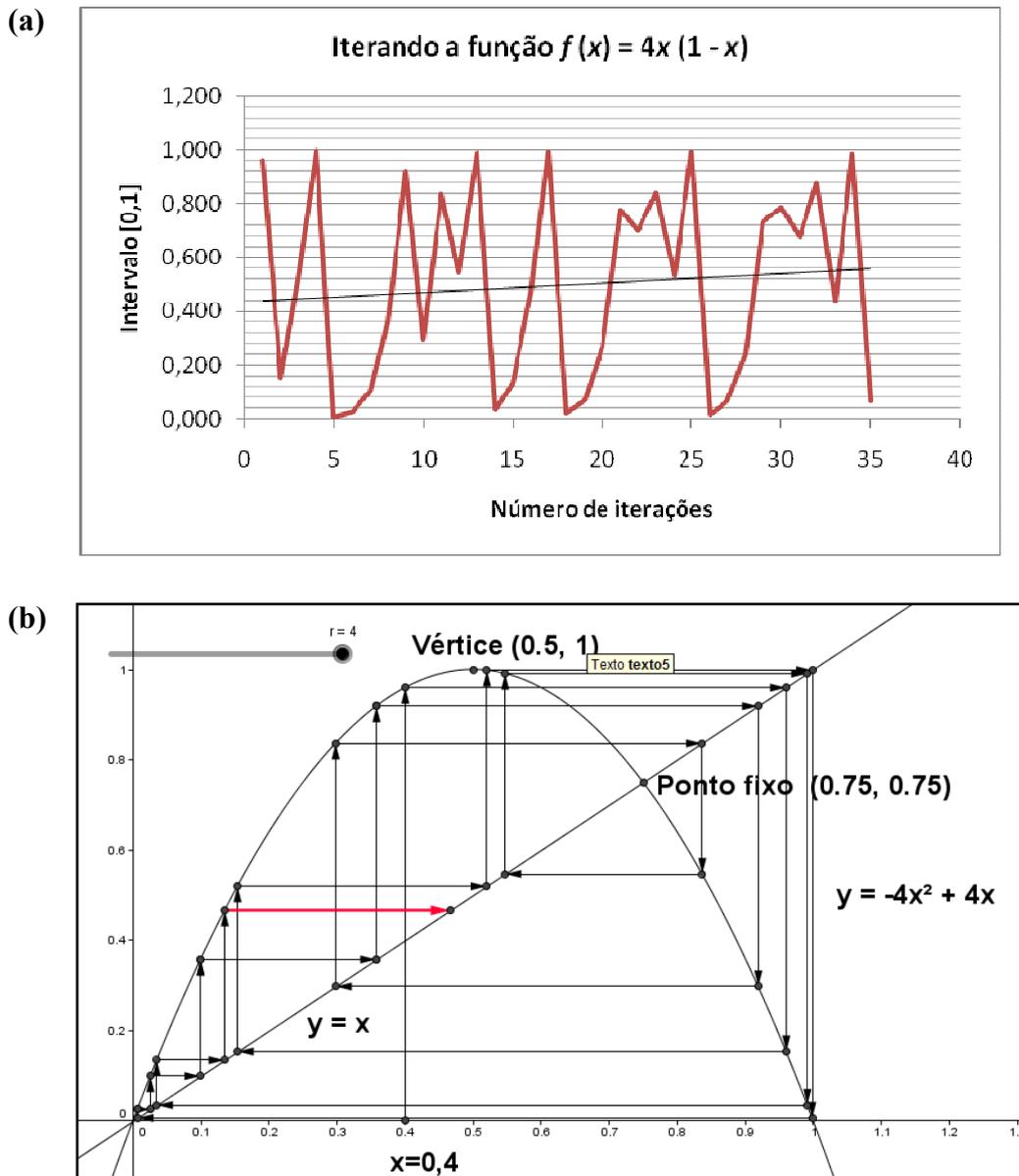
Fonte: Edilson de Moura, 2015.

As duas funções $f(x) = 2,8x(1-x)$ e $f(x) = 3,2x(1-x)$ têm comportamentos muito previsíveis quando iteradas, sendo estáveis nesses modelos de sistemas dinâmicos. Sua longa duração de comportamentos iterativos são bem conhecidos e sempre levam à mesmos atratores, independentemente dos valores iniciais.

No entanto, outra função semelhante, $f(x) = 4x(1-x)$, produz resultados bastante

diferentes para valores iniciais no intervalo $[0,1]$. O comportamento a longo prazo iterativo é errático e imprevisível, sem um padrão reconhecível.

FIGURA 36 - Iterando para obter caos.

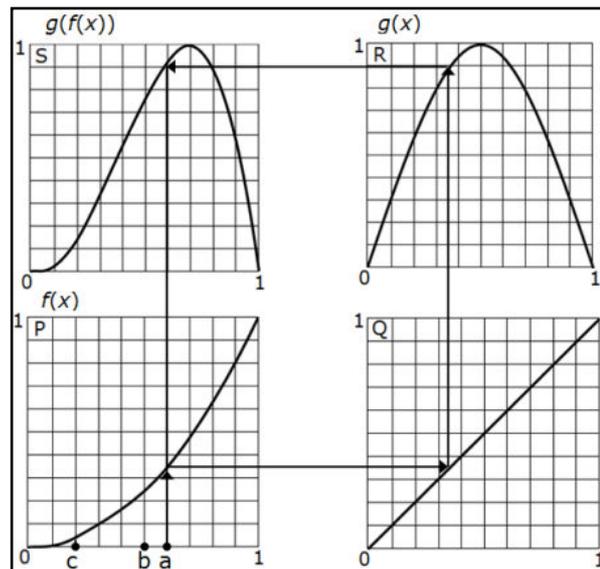


Fonte: Edilson de Moura, 2015.

O comportamento a longo prazo iterativo é errático e imprevisível, sem um padrão reconhecível. Dois pontos, muito próximos um do outro, geram radicalmente diferentes sequências iterativas, como vimos no diagrama de bifurcação (FIGURA 21). Esse fenômeno, conhecido como a dependência sensível das condições iniciais, significa que os pequenos erros iniciais expandirá em mais importantes, tornando os resultados totalmente imprevisíveis.

Podemos utilizar o processo geométrico para encontrar a composição $g(f(x))$ de duas funções $f(x)$ e $g(x)$. Embora esta composição pode ser encontrada através da substituição algébrica, o impacto visual da máquina de composição é muito marcante devido a forma gráfica. Pontos sobre uma função $f(x)$ são refletidos fora da diagonal $y=x$ e através da segunda função $g(x)$.

FIGURA 37 - Máquina de composição



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 5).

3.1 Apresentação das atividades

Como dissemos anteriormente, abordaremos algumas atividades constante no volume 2 do livro *Fractals for the classroom* de Peitgen et al. (1991). Teceremos comentários a fim de informar ao leitor qual aspecto se pretende desenvolver do conceito fractal e aqueles relacionados a SFI.

3.1.1 Iteração em forma de escada e degraus

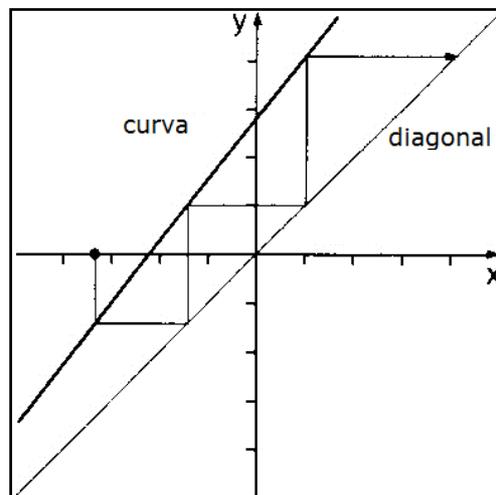
Instruções Específicas. Esta atividade introduz a ideia básica da iteração gráfica, através de um processo informal de algoritmo repetidamente de ir e vir entre uma curva e conectado com a diagonal de segmentos verticais e horizontais. Neste ponto, o processo

produz só escadas e espirais, cada uma levando para um ponto fixo como um atrator ou longe de um ponto fixo como um defletor (repulsor).

Descobertas implícitas. A inclinação no ponto fixo determina o comportamento de iteração sobre esse ponto. Como todas as funções utilizadas aqui são lineares, o comportamento não é dependente da localização do ponto inicial. A única exceção é quando o ponto inicial é o ponto fixo em si.

Imagine o caminho de um ponto que começa no eixo-x e se move verticalmente na direção da função e depois na horizontal ao encontro da diagonal. Depois repetimos esse processo varias vezes. Ou seja, para criar tal caminho, primeiro desenhe um segmento vertical para a curva e um segmento horizontal de lá para a diagonal. O processo geométrico central desta atividade é a sequência repetida destas duas etapas várias vezes, cada vez usando o último ponto final como o próximo ponto de partida (FIGURA 38).

FIGURA 38 - Processo de construção do processo gráfico



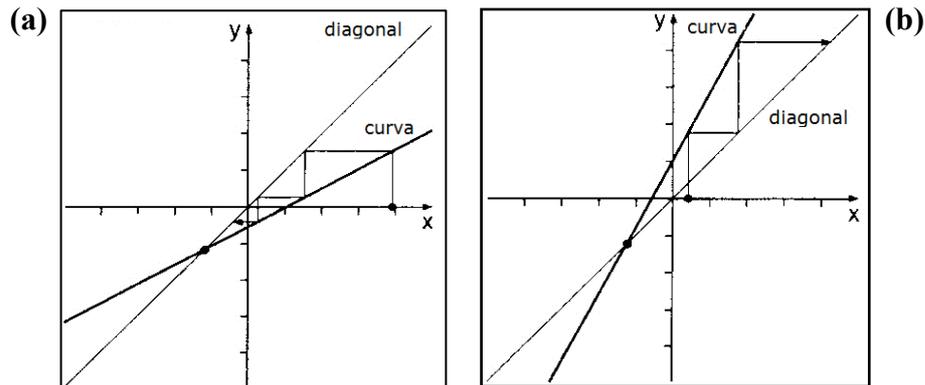
Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 11).

Este processo é chamado de *iteração gráfica*. Nesta atividade, consideramos apenas as curvas que são linhas retas. Eles são gráficos de funções lineares afim $y = mx + b$. Nas atividades a seguir, a iteração gráfica será a ferramenta central utilizada para descobrir e discutir as propriedades do caos.

O processo de iteração gráfica gera caminhos diferentes que tem forma de escada em direção ao ponto fixo, sendo atrator; ou para longe dele, se comportando como um repulsor. Iniciaremos a apresentação das atividades.

Atividade 1: Com base na Figura 39, dê o que se pede:

FIGURA 39 - Construção da escada: a) na escada; b) fora da escada



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 11).

a) A partir do ponto de partida destacado no eixo- x , complete traçando o caminho de cada iteração da Figura 39. Qual desses processos gráficos leva em direção a um ponto fixo ou para longe?

b) Escreva as coordenadas aproximadas do ponto de interseção da curva com a diagonal (FIGURA 39) em cada uma das iterações. Em seguida, circule a palavra que indica se o ponto fixo é um atrator ou repulsor.

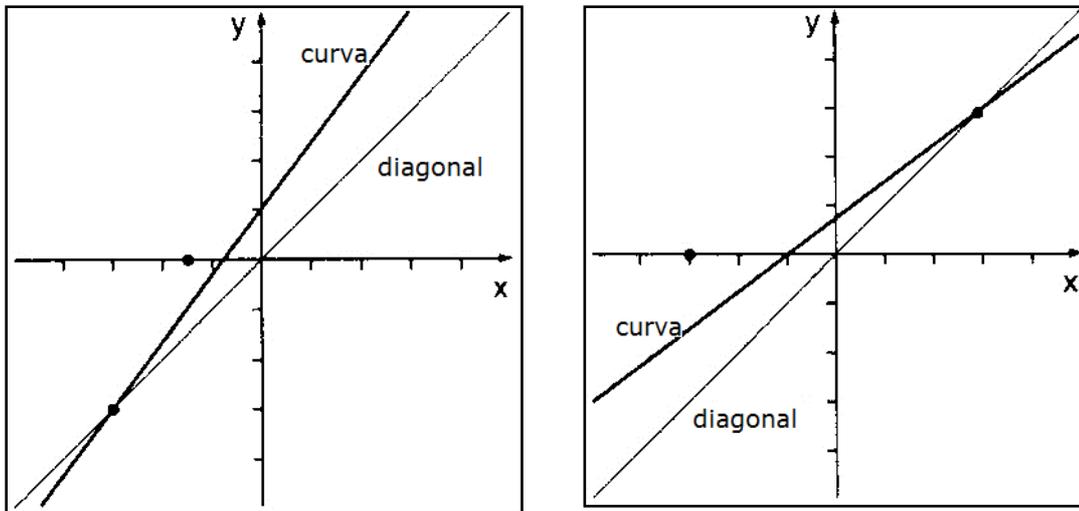
i) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ atrator ou repulsor

ii) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ atrator ou repulsor

Atividade 2: Com base na Figura 40, dê o que se pede:

a) Use a iteração gráfica para desenhar um caminho de cada valor inicial marcado. Indique se o ponto de interseção da curva na diagonal é ponto fixo atrator ou repulsor.

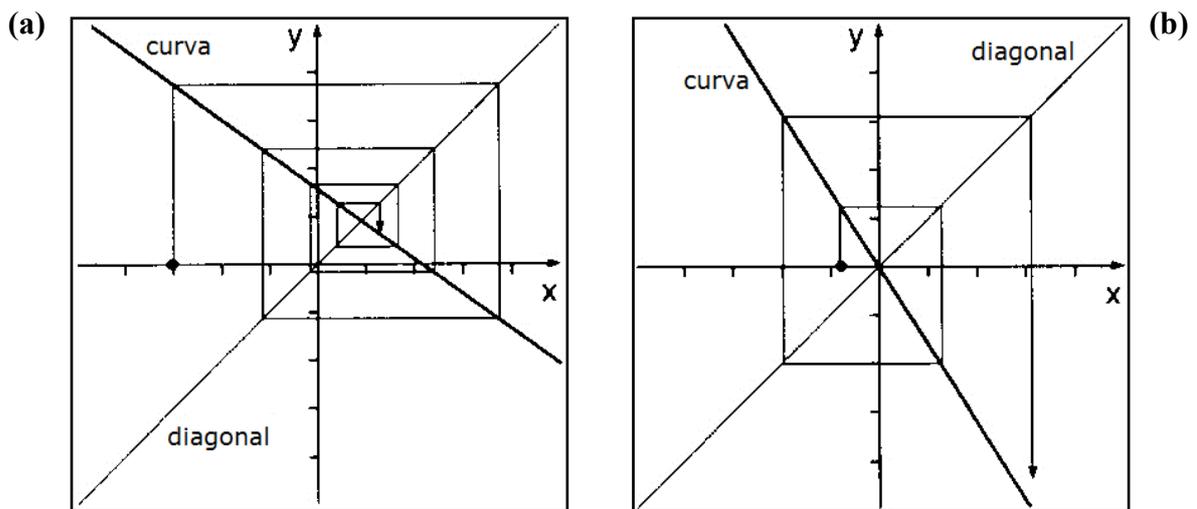
FIGURA 40 - Desenhar o caminho



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 12).

Atividade 3: Alguns caminhos de iteração gráfica tem forma espiralar semelhantes. Algumas conduzem em direção ao ponto fixo, atratores; e aqueles que fogem, levando para longe dos pontos fixos, repulsores. Com base na Figura 41, dê o que se pede.

FIGURA 41 - Espirais semelhantes



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 12).

a) A partir do ponto destacado, continue o traçado do caminho em cada iteração da Figura 41. Qual das figuras representa uma espiral em direção a um ponto fixo ou para longe dele?

b) Escreva as coordenadas aproximadas do ponto de interseção da curva com a diagonal (FIGURA 41) em cada uma das iterações. Em seguida, circule a palavra que indica se o ponto fixo é um atrator ou repulsor.

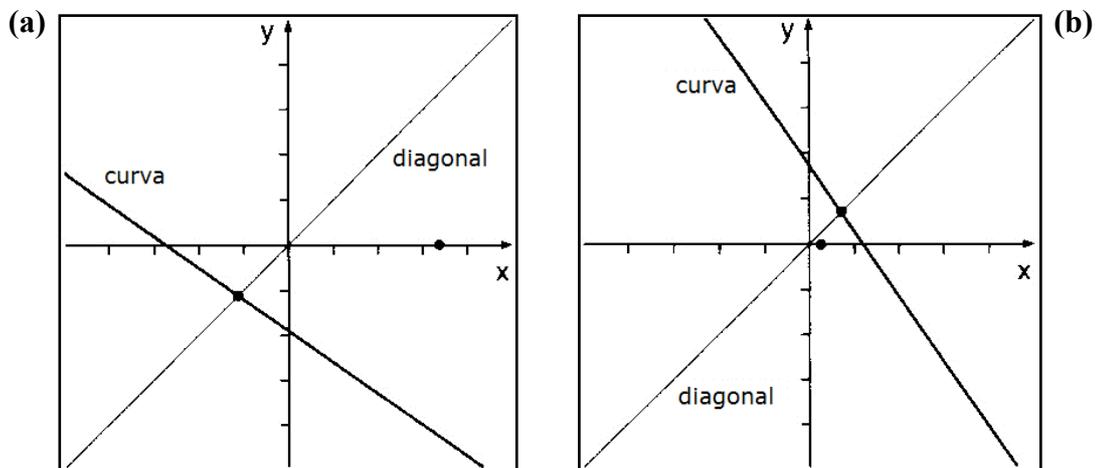
i) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ atrator ou repulsor

ii) $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$ atrator ou repulsor

Atividade 4: Com base na Figura 42, dê o que se pede:

a) Utilize o processo de iteração gráfica para desenhar um caminho de cada valor inicial destacado no eixo x. Depois escreva informando se o ponto de intersecção da curva na diagonal é um atrator ou um repulsor.

FIGURA 42 - Construção gráfica 1

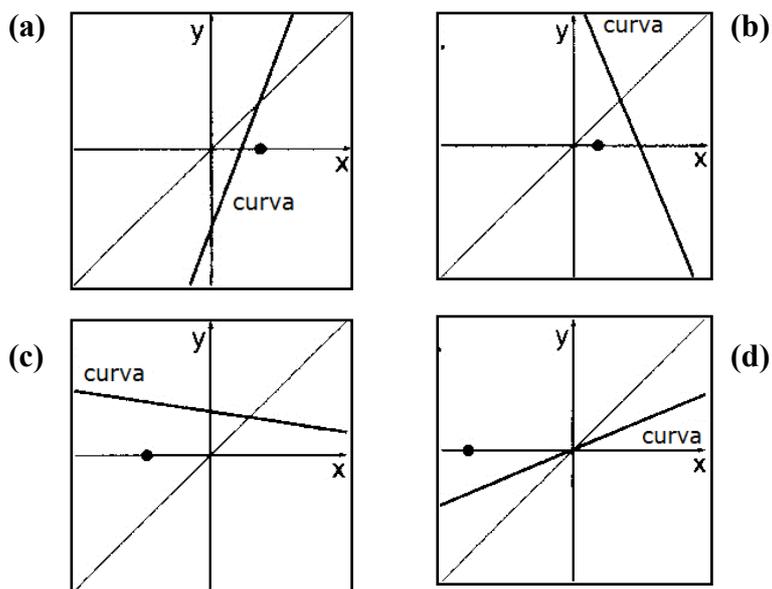


Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 13).

Atividade 5: Com base na Figura 43, dê o que se pede:

a) Responda, sem desenhar o caminho, se as iterações gráficas (FIGURA 43) tem forma de escada ou espiral? O ponto de intersecção é um atrator ou repulsor?

FIGURA 43 - Construção gráfica 2

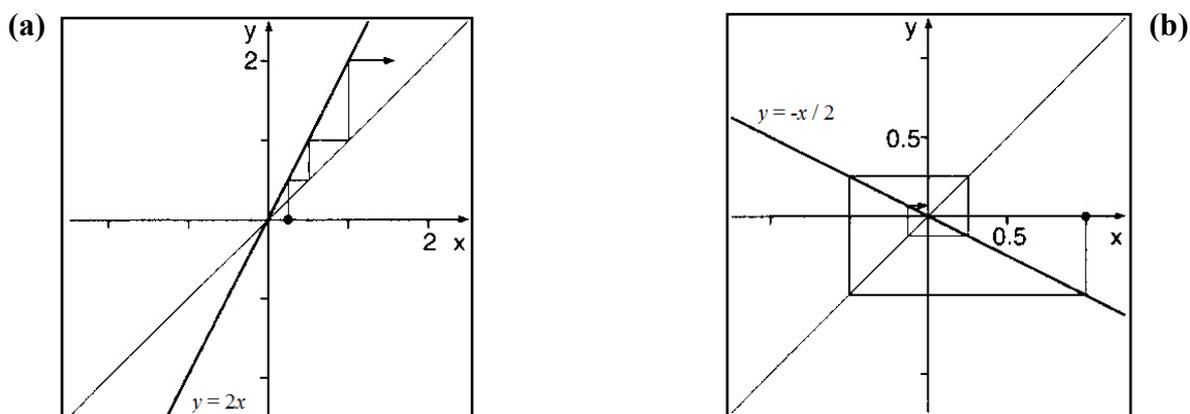


Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 13).

Atividade 6: Com base na Figura 44 e 45, dê o que se pede:

A iteração gráfica é sempre feita através da diagonal $y = x$. Desta forma, a coordenada y da curva se torna a coordenada x do próximo "ponto de viragem" na curva. A coordenada x desses pontos sucessivos de iteração na curva são chamados de *itera* ou órbita do valor inicial.

FIGURA 44 - Pontos de itera 1: a) escada para fora; b) espiral.



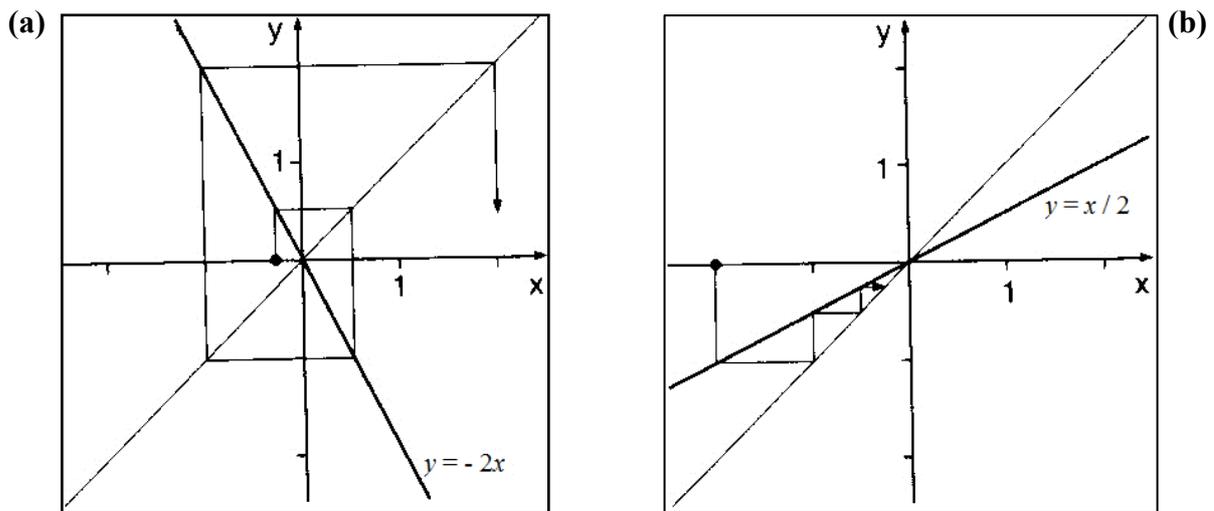
Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 13).

a) Escreva nos espaços em branco a lista de itera dos pontos de viagem da curva da Figura 44.

i) $1/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad}$

ii) $1 \rightarrow -1/2 \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad}$

FIGURA 45 - Pontos de itera 2: a) espiral para fora; b) na escada.



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 14).

b) Escreva nos espaços em branco a lista de itera dos pontos de viagem da curva da Figura 45.

i) $-1/4 \rightarrow 1/2 \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad}$

ii) $-2 \rightarrow -1 \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad} \rightarrow \underline{\quad}$

Atividade 7: Quando uma reta intercepta a diagonal $y = x$, o comportamento da iteração gráfica em torno do ponto de intersecção é estabelecido de imediato. Com base nas atividades realizadas até o momento, responda com suas palavras.

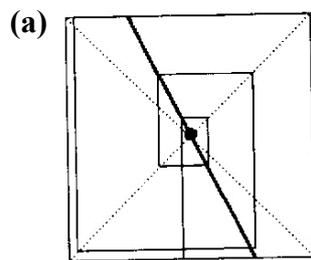
a) Como é que a localização do ponto de partida no eixo afeta o comportamento da iteração? Justifique.

b) Como é que a inclinação da reta afeta o comportamento da iteração? Justifique.

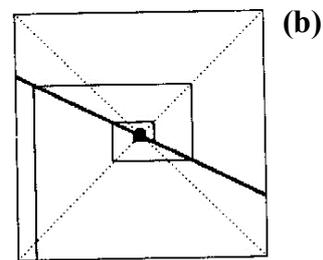
c) A diagonal e a inclinação da reta usada para fazer a iteração gráfica determinam as características do caminho resultante? Justifique.

Atividade 8: Descreva como o declive m da curva influencia a forma da trajetória da iteração gráfica quando:

FIGURA 46 - Inclinação da reta 1



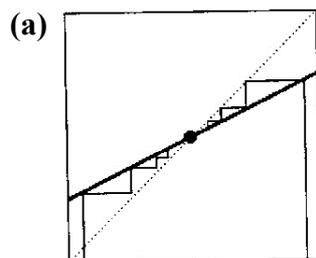
Se na inclinação $m < -1$
Repele e foge



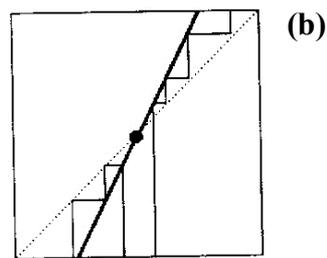
Se na inclinação $-1 < m < 0$
Atrai em espiral

Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 14).

FIGURA 47 - Inclinação da reta 2



Se a inclinação $0 < m < 1$
Atrai em escada



Se a inclinação $1 < m$
Repele em escada para fora

Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 14).

- Aumentamos o valor de m para pouco mais do que -1 .
- Aumentamos o valor de m para pouco mais do que 0 .
- Aumentamos o valor de m para pouco mais do que 1 .

d) Descreva o comportamento especial da iteração gráfica quando a inclinação da linha é

- i) Exatamente 1.
- ii) Exatamente -1.

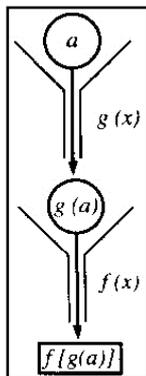
3.1.2 Composição de Função

O processo conhecido como a composição de funções é um dos conceitos algébricos mais básicos em que o estudo da iteração e do caos é construído.

Para executar $f \circ g$, começa com o argumento de a e obtem o valor funcional $g(a)$. Em seguida, use $g(a)$ como argumento e o próximo obtem o valor funcional $f(g(a))$.

A composição de funções pode ser representada visualmente por um diagrama como o da Figura 48. Ele pode ser pensado como um processo mecânico que em que a máquina $g(x)$ processa matérias-primas, a , e produz um produto, $g(a)$. Em seguida, $f(x)$ é a máquina que processa esse produto, $g(a)$, e produz um outro produto, $f(g(a))$ (FIGURA 48).

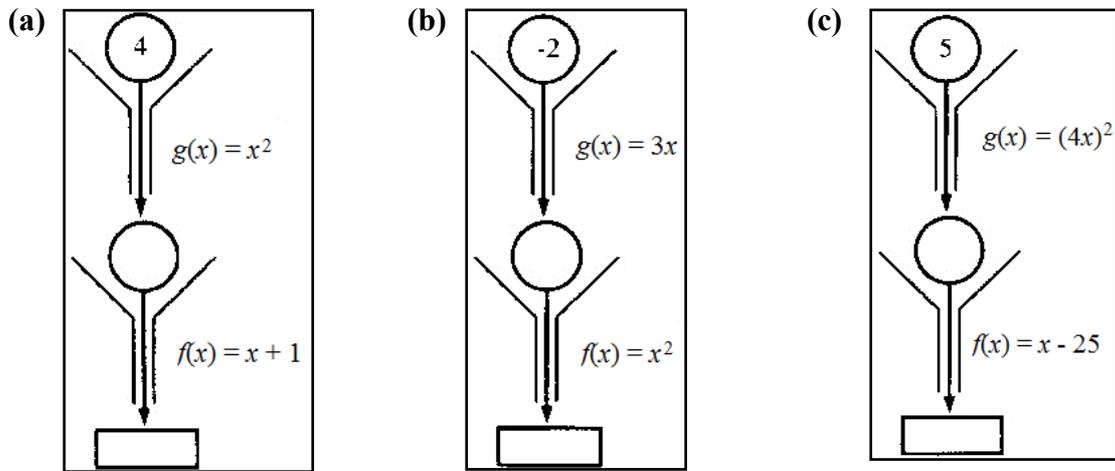
FIGURA 48 - Diagrama de composição



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 15).

Atividade 9: Use o dado de entrada para determinar a saída de cada uma das composições apresentadas na Figura 49. Use a saída para $g(x)$ como entrada para $f(x)$

FIGURA 49 - Diagrama de composição 1



Fonte: Peitgen et al. (1992, p. 15).

Atividade 10: Crie seu próprio diagrama e determine o valor de $g(f(x))$ para cada par de funções a seguir. Utilize $x = 1$ como o primeiro valor da entrada.

- a) $g(x) = x + 3$ e $f(x) = x^2$
- b) $g(x) = x^2$ e $f(x) = x + 3$
- c) $g(x) = 2x + 5$ e $f(x) = 0,5(x - 5)$

Atividade 11: Use as funções da Atividade 2, letra a e b. Em cada caso, comece com o valor inicial $x = -1$ e determine o valor da função composta dada por:

- a) $g(f(x))$ b) $g(g(x))$ c) $f(f(x))$ d) $f(g(x))$

Atividade 12: Dadas as funções $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2$, expresse cada uma das seguintes composições em termos de um valor inicial a .

- a) $f(g(a))$ b) $g(f(a))$ c) $g(g(a))$ d) $f(f(a))$

Atividade 13: Iteração é o processo repetitivo formando a composição de uma função com ela mesma. Isso é ilustrado na Figura 30 em que um argumento passa por várias vezes na mesma função $f(x)$ de uma forma cíclica, resultando em uma sequência de valores funcionais como mostrado a seguir.

$$x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow f(f(x_0)) \rightarrow f(f(f(x_0))) \rightarrow \dots$$

Outra maneira de pensar sobre iteração é considerar alguns argumentos iniciais x_0 e usá-lo para obter o valor funcional $f(x_0) = x_1$. Em seguida, use x_1 como o próximo argumento para obter o próximo valor funcional $f(x_1) = x_2$, e assim por diante. A sequência resultante dá a itera ou argumentos que são apresentados abaixo.

$$x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow \dots$$

a) Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$. Use sua calculadora e anote os resultados na tabela fornecida a seguir, fazendo o arredondamento com três dígitos de precisão.

i) $x_0 = 0.2$	ii) $x_0 = 0.85$	iii) $x_0 = 64$	iv) $x_0 = 1850$
$x_1 = \underline{\quad}$	$x_1 = \underline{\quad}$	$x_1 = \underline{\quad}$	$x_1 = \underline{\quad}$
$x_2 = \underline{\quad}$	$x_2 = \underline{\quad}$	$x_2 = \underline{\quad}$	$x_2 = \underline{\quad}$
$x_3 = \underline{\quad}$	$x_3 = \underline{\quad}$	$x_3 = \underline{\quad}$	$x_3 = \underline{\quad}$
$x_4 = \underline{\quad}$	$x_4 = \underline{\quad}$	$x_4 = \underline{\quad}$	$x_4 = \underline{\quad}$
$x_5 = \underline{\quad}$	$x_5 = \underline{\quad}$	$x_5 = \underline{\quad}$	$x_5 = \underline{\quad}$
$x_6 = \underline{\quad}$	$x_6 = \underline{\quad}$	$x_6 = \underline{\quad}$	$x_6 = \underline{\quad}$
$x_7 = \underline{\quad}$	$x_7 = \underline{\quad}$	$x_7 = \underline{\quad}$	$x_7 = \underline{\quad}$
$x_8 = \underline{\quad}$	$x_8 = \underline{\quad}$	$x_8 = \underline{\quad}$	$x_8 = \underline{\quad}$

b) Quais são os valores em que as sequências, após iteração, acima parecem estar aproximando? Continue o processo de iteração para verificar suas hipóteses.

c) Use a calculadora para fazer uma iteração da função $f(x) = x^2$. Comece com o valor de x_0 abaixo e realize a iteração cinco vezes. Anote a sequência resultante da iteração.

- a. $x_0 = 1$ b. $x_0 = 5$ c. $x_0 = 0,2$ d. $x_0 = -3$

d) Descreva o comportamento da sequência das iterações que resultam da iteração da função $f(x) = x^2$ nos itens a seguir:

- i) Qualquer valor inicial $x_0 > 1$.
- ii) Qualquer valor inicial $0 < x_0 < 1$.
- iii) Qualquer valor inicial $-1 < x_0 < 0$.
- iv). Qualquer valor inicial $x_0 < -1$.

Atividade 14:

A iteração de uma função, muitas vezes produz uma iteração que forma uma sequência aritmética ou geométrica.

Sequência aritmética são da forma $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$, onde a é o primeiro termo e d é a diferença comum entre os termos sucessivos.

Sequência Geométrica são da forma a, ar, ar^2, ar^3, \dots , onde a é o primeiro termo e r é a relação comum entre os termos sucessivos.

a) Encontre a função que, em iteração, produz a sequência de iteração listadas.

i) $4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{10em}}$

ii) $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{10em}}$

iii) $1 \rightarrow -3 \rightarrow 9 \rightarrow -27 \rightarrow 81 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{10em}}$

iv) $-6 \rightarrow -1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{10em}}$

v) $8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 1/2 \rightarrow \dots$ $f(x) = \underline{\hspace{10em}}$

b) Identifique cada uma das sequências do Item a, informando se a sequência é aritmética ou geométrica.

5 UMA SÍNTESE CONCLUSIVA

Este estudo abordou a geometria fractal tanto no aspecto de objetos matemáticos como naturais. Deu-se um significado compreensível a conceitos como dimensão não inteira ao apresentar exemplos como, na obtenção da dimensão do ramo de pinheiro e de algumas curvas do plano que podem ocupar mais espaço. A geometria fractal descreve de forma mais próxima os objetos da natureza. Em suma, o conceito de dimensão fractal é uma noção matemática, porém se aproxima de nossas experiências com a natureza.

O Triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Cantor, o Floco de neve, e a Curva de Koch são freqüentes em livros didáticos, trabalhos acadêmicos e escolares. O objeto fractal é então apresentado como curiosidades ou como possibilidades de melhoria no ensino. Essas possibilidades eram exploradas por meio da construção geométrica em software educacionais e, a partir delas, se associavam perguntas sobre seqüências numéricas, a fim de se determinar o comprimento ou a área desse objeto.

A partir de varias leituras técnicas, construímos um cenário diferente do que normalmente é apresentado. A análise da dinâmica populacional, por meio do modelo Logístico May que relaciona os objetos fractais com, função composta e função quadrática proporcionou a ampliação significativa do conceito. O estudo da dinâmica populacional conduziu naturalmente a necessidade de se compreender as noções do ponto fixo de um Sistemas de Funções Iteradas.

Ampliamos a noção de que fractais são formas compostas em partes que de algum modo são semelhantes ao todo para, o conjunto dos pontos cujas órbitas não são estáveis formam um fractal. Assim, esses fractais são dados por uma regra precisa, eles são o conjunto caótico de um sistema dinâmico.

Desenvolver condições para o uso da linguagem, como meio da ação intelectual, é o que incessantemente fazemos. Um aspecto da aprendizagem matemática é este. Então, do ponto de vista de que a teoria fractal visa ao desenvolvimento da nossa linguagem não só matemática, compreendemos que esse conhecimento vem contribuir com a ampliação dos limites da ciência e de mundo.

Descrevemos atividades que tem o objetivo de desenvolver a apreensão do conceito fractal gerado por sistemas de funções iteradas. Faz-se necessário a compreensão de conceitos de atratores, ponto fixo a fim de explorar o potencial dessas atividades. É apresentado um processo gráfico de iteração que é simples mas com alcance amplo, pois alia dois campos da matemática, o geométrico e o algébrico. A aplicação destas atividades com os alunos do ensino médio podem identificar os pontos que contribuem para a aprendizagem desses conceitos.

REFERÊNCIAS

ALVES, C. M. F. S. J. *Fractais: conceitos básicos, representações gráficas e aplicações ao ensino não universitário*. 2007. 324 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007. Disponível em: <<http://www.scribd.com/doc/20939623/Fractais-Conceitos-Basicos-Representacoes-Graficas-e-Aplicacoes-ao-Ensino-nao-Universitario>>. Acesso em: 3 abr. 2010.

ANGELIS-REIS, F. M. S.; ROMANHA, W. S. A dimensão fractal como um parâmetro no estudo do granuloma na esquistossomíase experimental. In: REUNIÃO ANUAL DA FEDERAÇÃO DE SOCIEDADES DE BIOLOGIA EXPERIMENTAL, 21.; CONGRESSO BRASILEIRO DE BIOFÍSICA, 31.; CONGRESSO BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÃO CLÍNICA, 21.; CONGRESSO BRASILEIRO DE NEUROCIÊNCIAS E COMPORTAMENTO, 30.; 2006, Águas de Lindóia. *Resumos...* São Paulo: Federação de Sociedade de Biologia Experimental, 2006. p. 13-14. Disponível em <<http://www.fesbe.org.br/fesbenovo/fesbe2006/files/FESBE2006.pdf>>. Acesso em 23 dez. 2010.

BAIER, T. *O nexó “geometria fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico*. 2005. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2005/baier_t_dr_rcla.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM): parte I – bases legais*. Brasília, 2000a. 109 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 31 dez. 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília, 1998. 148 p. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 12 fev. 2010.

CAPRA, F. *A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos*. Tradução de Newton Roberval Eicheberg. São Paulo: Cultrix, 2006. 256 p.

CARVALHO, M. C. C. S. et al. *Fractais: uma breve introdução*. São Paulo, 1986. 189 p.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. Unesp, 2009. 13 livros, 593 p.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009. 228 p.

GILES, T. R. *Dicionário de Filosofia: termos e filósofos*. São Paulo: EPU, 1993. 269 p.

LIMA, E. L. *Elementos de topologia geral*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1970. 299 p.

MANDELBROT, B. *Objectos fractais*. Tradução Carlos Fiolhais e José Luís Malaquias Lima. 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1998. 296 p.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes curriculares de matemática para a educação básica*. Curitiba, 2008. Disponível em: <[HTTP://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diaadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diaadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf)>. Acesso em: 10 out. 2010.

PEITGEN, H. O. et al. *Fractals for the classroom: Strategic activities*. New York: Springer Verlag, 1991. v. 1, 128 p.

PEITGEN, H. O. et al. *Fractals for the classroom: Strategic activities*. New York: Springer Verlag, 1992. v. 2, 187 p.

REIS, L. F.; TROVON, A. L. C. *Ensino Fundamental: 7º ano*. 2. ed. Tatuí: Casa Publicadora Brasileira, 2009b. 320 p. (Coleção Aplicando a Matemática).

RIBEIRO, J. S. *Projeto Radix: matemática, 8º ano*. São Paulo: Scipione, 2010e. 336 p.

ROMANHA, W. S. *Fractais na natureza*. 30 jun. 2009. Disponível em: <<http://microsintonias.blogspot.com/2009/06/fractais-na-natureza.html>>. Acesso em: 12 jan. 2011.

SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. *Matemática: Ensino Médio*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010a. v. 1, 320 p.

_____. *Matemática: Ensino Médio*. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010b. v. 2, 448 p.

SOBREIRA, F. J. A. *A lógica da diversidade: complexidade e dinâmica em assentamentos espontâneos*. 2003. 262 f. Tese (Doutorado em Desenvolvimento Urbano) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2003. Disponível em: <<http://fabianosobreira.files.wordpress.com/2009/07/fabiano-sobreira-tese-de-doutorado.pdf>>. Acesso em: 23 dez. 2010.

SOUZA, J. R. *Matemática*. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar, v. 1). 336 p.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. *Vontade de saber matemática: 6º ano*. São Paulo: FTD, 2009a. 304 p.

_____. *Vontade de saber matemática: 9º ano*. São Paulo: FTD, 2009b. 256 p.

STEWART, I. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Tradução de Maria Luiza X. A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 1991. 336 p.

TÔRRES, J. J. M. *Teoria da complexidade: uma nova visão de mundo para a estratégia*. Curitiba, 2005. p. 1-10. Disponível em: <<http://www.juliotorres.ws/textos/teoriadacomplexidade/TeoriaDaComplexidade-e-Estrategia.pdf>>. Acesso em: 26 dez. 2010.