UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

EDINALDO FONSECA CORRÊA

CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM, APLICAÇÃO E ENSINO

São Luís
2015

EDINALDO FONSECA CORRÊA

CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM, APLICAÇÃO E ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Kênio Alexsom de Almeida Silva

São Luís
2015

Elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do Maranhão

Corrêa, Edinaldo Fonseca
Caracterização da Função Afim, aplicação e ensino
/ Edinaldo Fonseca Corrêa . 2015. 73f.

Impresso por Computador (Fotocópia)
Orientador: Kênio Alexsom de Almeida Silva
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, 2015.

1. Função 2. Proporcionalidade. 3 Taxa de variação. I. Título.

CDU: 517.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFSSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

Ata de Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

Aos dias 28 de Maio de 2015, às 14h00min, no auditório 01 do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFMA, reuniram-se os membros da banca examinadora composta pelo (as) professores (as): Dr. Kênio Alexsom de Almeida Silva (Orientador), Ms. Arlane Manoel Silva Vieira e Dr. Roberto Batista dos Santos, designados pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, a fim de argüirem o mestrando, com o título: ***"CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM, APLICAÇÃO E ENSINO"***. Aberta sessão pelo presidente da mesma, coube ao candidato, na forma regimental, expor o tema de sua dissertação, dentro do tempo regulamentar, sendo em seguida questionado pelos membros da banca examinadora, tendo dado as explicações que foram necessárias. Sendo o resultado final: "Aprovado".

Recomendações da Banca:
Melhorar o texto fazendo as devidas referências bibliográficas;
Colocar as demonstrações e explicações solicitadas pela Banca.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Kênio Alexsom de Almeida Silva (Orientador)

Arlane

Prof. Ms.Arlane Manoel Silva Vieira

Prof. Dr. Roberto Batista dos Santos

Candidato: Edinaldo Fonseca Corrêa

Edinaldo Fonseca Corrêa

São Luís, 28 de Maio de 2015.

EDINALDO FONSECA CORRÊA

A presente Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da UFMA/PROFMAT, e elaborada por Edinaldo Fonseca Corrêa, sob o título: *"A Caracterização da Função Afim, Aplicação e Ensino"*, foi aprovada em 28 de Maio de 2015

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof^o Dr. Kênio Alexsom de Almeida Silva
Orientador

Prof^o Ms.Arlane Manoel Silva Vieira

Prof^o Dr.Roberto Batista dos Santos

São Luís
2015

DEDICATÓRIA

*Dedico infinitamente ao senhor nosso **DEUS** todo poderoso, por me proporcinar viver para realizar este sonho de muitos que ele já me ajudou a realizar durante esta vida.*

AGRADECIMENTOS

*Agradeço ao senhor nosso **DEUS** pela sabedoria me concedida durante todo o curso.*

A minha esposa Michele Vaz Corrêa e a nossas filhas Edielly Corrêa Corrêa e Maelly Corrêa Corrêa, pela compreensão nos finais de semana que tive me ausentar para estudar em São Luís.

A meus pais Benedito Quaresma Corrêa e Páscoa Fonseca Corrêa por sempre apoiarem e acreditarem que através da educação meu futuro estaria garantido.

Aos os colegas da turma do Profmat/Ufma 2013, pelo respeito, consideração e acolhimento nos momentos necessários do curso.

Aos amigos Antônio de Jesus de Sousa Ferreira, Jefferson Carmo da Costa e Rodinely Serrão Mendes pela amizade, respeito, consideração e conhecimento compartilhado durante o curso.

Ao grande amigo Venâncio Barros Corrêa e sua esposa Gisele Lopes Dias, que não mediram esforços para nos conduzir em seu veículo em São Luís, durante todos os momentos que necessitamos.

A todos os Professores do Curso e ao meu Orientador Prof^o Dr. Kênio Alexsom de Almeida Silva que contribuíram e compartilharam conhecimento.

A Todos os amigos da Escola Prof^o Leonardo Negrão de Sousa, que me apoiaram e torceram para a conclusão de mais esta etapa da minha vida.

EPÍGRAFE

Honra a teu pai e a tua mãe, para que se prolonguem os teus dias na terra que o Senhor teu ***DEUS*** *te dá.*

Êxodo: 20. 12.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o importante conceito de função afim, suas finalidades e ensino. Para tanto iniciamos com o estudo dos pré-requisitos, seguidos de conceitos e definições e apresentação de problemas contextualizados e aplicações diversas. Finalizamos propondo um Curso de Extensão e planos de aula para o ensino da função afim.

Palavras-chave: Funções. Proporcionalidade. Taxa de variação.Ensino.

ABSTRACT

In this work we studied the important concept of affine function, their purposes and teaching. For so much we began with the study of the prerequisites, followed by concepts and definitions and presentation of contextualized problems and several applications. We concluded proposing a Course of Extension and class plans for the teaching of the affine function.

Keyword: Functions. Proportionality. Rate of change. Teaching.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Ao se organizar um conteúdo matemático de função afim para se estudar ou expor em uma determinada aula ou até mesmo em um seminário ou trabalho cientifico, devemos ter o cuidado de extrair o que realmente possa fazer a diferença no entendimento do determinado assunto. Essa é uma das dificuldades da maioria dos alunos e professores de matemática, pois, o uso preciso de termos, operações, símbolos é essencial para o domínio do estudo de função afim. Como a matemática é precisa, os seus significados de termos e conceitos devem ser completamente unívocos, sem ambiguidades, sob pena do que o leitor deve estar completamente antento sobre os significados das palavras que usam para poder se comunicar. Muitas vezes um termo matemático é um termo utilizado na linguagem cotidiana com outro sentido, como por exemplo a palavra produto.

Vamos apresentar um conjunto de conhecimentos a respeito das característica e da utilização das funções afins. Espera-se que o leitor compreenda e seja capaz de reconhecer quando determinada situação deve ser adequada a função afim, mas para que isso se concretize, ele deve entender que em muitos livros didáticos o conceito de função afim se apresenta por meio de situações cotidianas ou é apresentado como relação entre dois conjuntos ou de forma operacional, em que se enfoca a manipulação algébrica de funções reais de variável real.

Em [10] estas três situações citadas acima, se apresentam como: contexto concreto, abstrato e operacional. Na primeira situação o objetivo é convencer os alunos da importância do conceito matemático de função afim, por meio da modelagem de situações supostamente familiares a eles.

Na segunda, a intenção é apresentar o conceito de função em toda a sua generalidade matemática, com domínios e contra-domínios genéricos. neste contexto a forma de representação predominante é o chamado diagrama de Venn [1]

No contexto operacional são explorados alguns procedimentos particulares para a manipulação algébrica e esboço de gráficos deixando os dois contextos anteriores de lado

[1] John Venn (1834 -1923), matemático e filósofo, criador dos famosos diagramas para ilustrar operações de conjuntos

e passando a ser predominante na maioria dos livros como por exemplo em [4].

Percebe-se que separar estes três contextos pode causar a impressão de que o termo "função" é empregado para as noções matemáticas inteiramente distintas. A clareza de propriedades gerais de funções reais é importante para articular adequadamente os contextos concreto, abstrato e operacional de funções. Neste trabalho vamos adotar o contexto concreto e o operacional.

Vamos apresentar ao leitor alguns exemplos que estão presentes no seu cotidiano, de modo que o mesmo, identifique que em tal situação requer um conhecimento de função afim para resolvê-la, em seguida, é essencial que o leitor manipule algébricamente a situação problema, identificando que toda função afim pode ser escrita na forma $y = f(x) = ax+b$, adquirindo capacidade de apresenta-lá graficamente, alcançando o objetivo dos contextos apresentados no trabalho.

Em geral, funções afins são abordadas simplesmente com base na sua expressão algébrica $y = f(x) = ax + b$, mas pouca ênfase é dada à caracterização fundamental de funções afins, onde acréscimos iguais na variável independente implicam em acréscimos iguais na variável dependente. Esta caracterização permite que os alunos compreendam o comportamento qualitativo desta classe de funções.

1.1 Estrutura do trabalho

Ao ingressar no profmat, percebi a necessidade de reformular minhas práticas pedagógicas, que já eram ultrapassadas, em particular quanto ao ensino de funções afins. Com este trabalho pretendo contribuir com o estudo e ensino do assunto.

No capítulo 2, apresentamos alguns pré-requisitos que estão ligados com o conteúdo de funções afins, como Produto e Plano cartesiano, gráfico de uma função e principalmente de proporcionalidade. Este ultimo pré-requisito traz a importância de identificar quando uma grandeza é proporcional a várias outras e tem uma ligação direta com a função afim, esta ligação é evidente, pois em algumas situações apresentam-se as funções lineares, que é um caso particular de função afim.

No capítulo 3, apresentamos a definição de funções lineares, que são comuns no cotidiano do leitor, em seguida a definição de função afim, juntamente com taxa de variação, gráfico e abordando um pouco sobre a conexão entre função afim e a progressão aritmética.

No capítulo 4, apresentamos situações que permitem ao leitor descobrir se em determinada situação deve-se usar a função afim para resolv-la. Nele há aplicações em algumas áreas com o intuito de despertar interesse no estudo de funções afins e futuramente tenha um bom conhecimento do assunto.

No capítulo 5, apresentamos uma proposta metodológica de ensino de função afim, atravéz de um curso de extensão com carga horária de 40 horas, onde no mesmo, com os conhecimentos adiquiridos neste trabalho você leitor possa assimilar e responder definitivamente quando uma situação requer ser modelada pela função afim. Assim, após a apresentação do curso sugerimos ao públido docente algumas opções de planos de aulas dos assuntos abordados neste trabalho, sugerindo objetivos a serem alcançados por cada seção estudada, o que o deixa com uma segurança, possibilitando a ele acatar ou sugerir novas estratégias pra o desenvolvimento de sua prática docente.

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

Neste capítulo faremos uma breve revisão de produto cartesiano, gráfico de uma função e proporcionalidade, para tanto seguiremos as definições, notações e exemplos dos livros [7] e [9].

2.1 Produto Cartesiano

Definição 2.1. [7] Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um elemento x, chamado de primeira coordenada de p e um objeto y, chamado de segunda coordenada de p.

Dois pares (x, y) e (a, b) serão chamados iguais quando $x = a$ e $y = b$, isto é quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada. É permitido considerar o par ordenado (x, x), no qual a primeira coordenada coincide com a segunda coordenada.

É bom ressaltar que o par ordenado $p = (x, y)$ não é a mesma coisa que o conjunto $\{x, y\}$ e ainda, $\{x, y\} = \{y, x\}$ sempre, mas $(x, y) = (y, x)$ somente quando $x = y$.

Dados dois conjuntos A e B o produto cartesiano $A \times B$ é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja a primeira coordenada x pertence a A e a segunda coordenada y pertence a B, Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\ \}$$

Lê-se a notação de $A \times B$ assim: "A cartesiano B" ou "produto cartesiano de A por B".

2.2 Plano Cartesiano

O sistema de eixos ortogonais é denominado plano cartesiano, em homenagem a Descartes[1].

[1]René Descartes (1596-1650)formalizou o conceito de coordenadas em sua obra *La Géometrie* (1637), conectando a Álgebra com a Geometria.

Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ são, naturalmente, os pares ordenados de números reais. Eles surgem como coordenadas cartesianas de um ponto P do plano Π (x = *abcissa*, y = *ordenada*) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais Ox e Oy, que se intersectam no ponto O, chamada a *origem* do sistema de coordenadas (Figura 2.1).

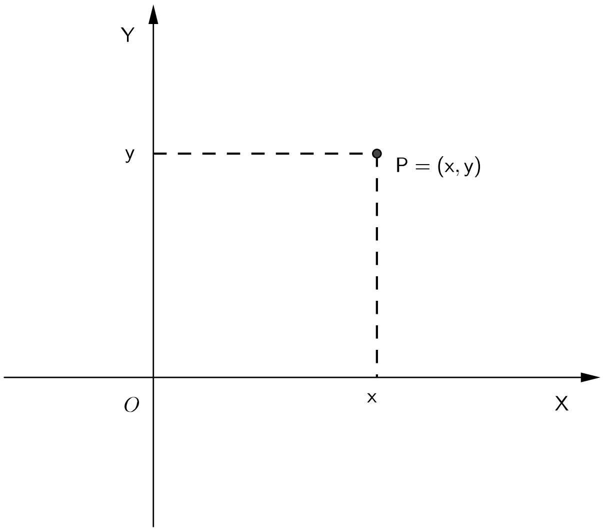


Figura 2.1: Representação do ponto P

Dado um ponto $P \in \Pi$, a *abcissa* de P é o número x, coordenada do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo Ox, enquanto a *ordenada* de P é a coordenada y do pé da perpendicular baixada de P sobre o eixo Oy. Diz-se então que (x, y) é o par de *coordenadas* do ponto P relativamente ao sistema de eixos Oxy. Os eixos Ox e Oy dividem o plano em quatro regiões, chamadas *quadrantes*, caracterizadas pelos sinais das coordenadas de seus pontos. No primeiro quadrante, tem-se $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo quadrante, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro quadrante , $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto quadrante $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Veja que cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca entre pares de números reais e pontos do plano permite escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, de modo recíproco, interpretar geometricamente relações entre números reais.

Podemos então dizer que $\mathbb{R}^2$ é o modelo aritmético do plano Π enquanto Π é o modelo geométrico de $\mathbb{R}^2$. Vamos considerar $\mathbb{R}^2$ como um plano (plano numérico), chamaremos seus elementos de $P = (x, y)$ de pontos e procuraremos, com ajuda dessa linguagem geométrica e dos resultados da Geometria, alcançar um melhor entendimento das propriedades da função afim que vamos estudar posteriormente. Veremos pouco a pouco as vantagens desse caminho de mão dupla que liga a Aritmética e a Álgebra de um lado à Geometria do outro.

A pergunta mais básica, umas das primeiras que se impõe responder, é a seguinte

: se P =(x,y) e Q =(u,v), como podemos exprimir a distância do ponto P ao ponto Q em termos dessas coordenadas?(Figura 2.2)

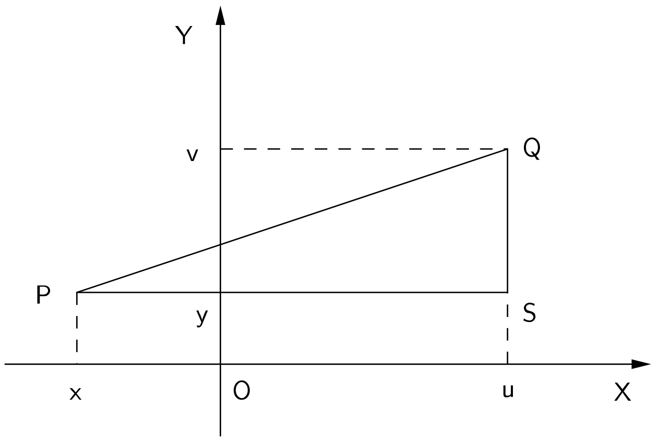


Figura 2.2: Pontos P, Q e S no plano

A resposta é fornecida imediatamente pelo Teorema de Pitágoras. Introduzimos um novo ponto S =(u, y). Como P e S tem a mesma ordenada, o segmento PS é horizontal (paralelo ao eixo Ox). Analogamente, QS é vertical (paralelo a Oy). Portanto o segmento PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo PQS, cujos catetos medem $|x-u|$ e $|y-v|$ respectivamente. O Teorema de Pitágoras nos dá então:

$$d(P,Q)^2 = (x-u)^2 + (y-v)^2$$

,

ou seja:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2}$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é igual a

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

.

2.3 Gráfico de uma Função

Inicialmente vamos verificar a definição de função.

Definição 2.2. [7] São dados dois conjuntos A e B. Uma função de a em B consiste em alguma regra que permita associar, cada elemento de A, um único elemento de B.

Sedermos o nome de f para essa função, a expressão "'função de A em B"representa-se por $f : f : A \longrightarrow B$

Funções cujo o domínio e cujo contradomínio são subconjuntos dos reais, denominamos de funções reais. Em particular, funções definidas por uma fórmula do tipo $y = f(x)$, que permite calcular, para cada número real x do domínio, o valor correspondente de y.

Por exemplo, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 5$ é uma função real dada por uma fórmula. Para cada valor de x real, podemos calcular sua imagem $f(x)$. Veja alguns valores: $f(0) = -5$, $f(3) = 1$

Definição 2.3. [7] O gráfico de uma função $f : A \longrightarrow B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de A e $y = f(x)$.

Assim,

$$G(f) = \{(x, y); y = f(x)\}$$

ou melhor

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in A\}$$

A fim de que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja gráfico de alguma função $f : A \longrightarrow B$ é necessário e suficiente que G cumpra as seguintes condições:

G1. Para todo $x \in A$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja a primeira coordenada é x.

G2. Se $P = (x, y)$ e $P' = (x, y')$ são pares pertencentes a G com a mesma primeira coordenada x então, $y = y'$ (isto é, $P = P'$).

É claro que estas condições podem ser resumidas numa só, dizendo-se que para cada $x \in A$ existe um, e somente um, $y \in B$ tal que $(x, y) \in G$.

Em geral, se definem uma função $f : A \longrightarrow B$ como um subconjunto do produto cartesiano $A \times B$ com as propriedades **G1** e **G2** acima enunciadas.

Exemplo 2.1. [7] A fórmula da distância entre dois pontos serve para reconhecer que o gráfico G da função $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

é a semi-circunferência C_+ (Figura 2.3), de centro na origem e raio 1, situada no semiplano $y \geq 0$

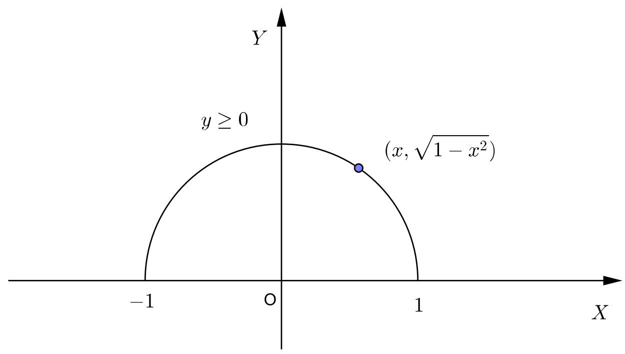


Figura 2.3: semi-circunferência C_+

Com efeito,

$$(x,y) \in G \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \;\; e \;\; y = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1, y \geq 0 \;\; e \;\; y^2 = 1 - x^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \;\; e \;\; x^2 + y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \in C_+$$

No caso de funções reais de uma variável real, as condições $G1$ e $G2$ adquirem uma forma mais geométrica e são resumidas assim:

Definição 2.4. [7] Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto que consideremos situado sobre o eixo horizontal. Um subconjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ é o gráfico de uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se, somente se, toda a reta paralela ao eixo vertical, traçada a partir de um ponto de X, intersecta G num único ponto.

Exemplo 2.2. [7] Dado um número real $c \neq 0$, consideremos o conjunto G formado pelos pontos (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tais que $xy = c$. Simbolicamente,

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; xy = c\}$$

O conjunto G acima, denominamos *hipérbole equilátera*. A figura 2.4 mostra a forma de G nos casos $c > 0$ e $c < 0$. Para todo $x \neq 0$, a reta vertical que passa pelo ponto de abscissa x corta o conjunto G no único ponto $(x, \frac{c}{x})$. Logo, G é o gráfico da função $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \dfrac{c}{x}$.

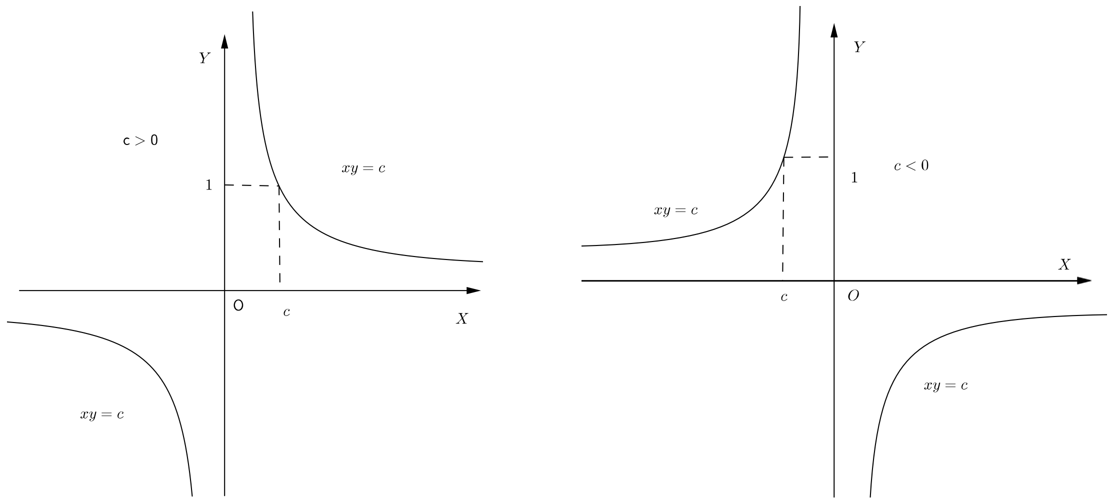


Figura 2.4: hiperbole equilátera

Considerando a reta focal $y = x$, temos que o ponto de interseção das assíntonas é a origem de centro C, e seus focos são $F_1 = (-r, -r)$ e $F_2 = (r, r)$ para algum $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

Como $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$, já que a hipérbole é equilátera, temos que:

$$a^2 + a^2 = c^2 = r^2 + r^2 \text{ , ou seja, } a = r.$$

Assim, um ponto $P = (x, y) \in G \Leftrightarrow \mid d(P, F_1) - d(P, F_2) \mid = 2a = 2r$, então:

$$\mid \sqrt{(x+r)^2 + (y+r)^2} - \sqrt{(x-r)^2 + (y-r)^2} \mid = 2r$$

$$\sqrt{(x+r)^2 + (y+r)^2} = \pm 2r - \sqrt{(x-r)^2 + (y-r)^2}$$

$$(x+r)^2 + (y+r)^2 = 4r^2 + (x-r)^2 + (y-r)^2 \pm 4r\sqrt{(x-r)^2 + (y-r)^2}$$

$$2rx + 2ry = 4r^2 - 2rx - 2ry \pm 4r\sqrt{(x-r)^2 + (y-r)^2}$$

$$x + y - r = \pm r\sqrt{(x-r)^2 + (y-r)^2}$$

$$(x + y - r)^2 = (x-r)^2 + (y-r)^2$$

$$2xy = r^2$$

$$xy = \frac{r^2}{2} = c$$

Portanto, o conjunto G é o gráfico de uma hipérbole equilátera.

2.4 Proporcionalidade

Nesta seção vamos aprofundar os conceitos de proporcionalidade com base em [8] e [9].

As funções lineares são apresentadas como modelos matemáticos para a proporcionalidade. Por incrível que possa parecer, esta ligação básica entre dois conceitos matemáticos tão importantes é, na maior parte das vezes, negligenciada nos livros didáticos. Os assuntos proporcionalidade e funções lineares são, em geral, tratados em capítulos separados, até mesmo em anos distintos, sem que nenhuma relação seja explicitamente apontada. Como ocorre em muitas outras situações, a abordagem da noção de proporcionalidade representa uma importante oportunidade para estabelecer relações entre diferentes campos da matemática, como aritmética, geometria e funções.

A compreensão inadequada da noção de proporcionalidade pode levar à sua generalização indevida pelos alunos, considerando uma proporcionalidade qualquer situação em que o crescimento de uma grandeza implica no crescimento de uma outra. Por exemplo, não é incomum a afirmação de que "a área de um quadrado é proporcional ao seu lado". É verdade que, quanto maior for o lado de um quadrado, maior será a sua área; porém, isto não significa que estas grandezas sejam proporcionais. . De fato, se $x \in \mathbb{R}^+$ representa o lado de um quadrado, a área não pode ser expressa por uma função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ na forma $f(x) = ax$, com $a \in \mathbb{R}$.

2.4.1 Grandezas Proporcionais

Quando se fala em proporcionalidade uma das definições mais adotadas pelos matemáticos é a dada por Trajano em 1883. A definição é a seguinte:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso, a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais. (TRAJANO, 1883)

De uma maneira geral, diz-se que:

Definição 2.5. [9] Duas grandezas são *proporcionais* quando existe uma correspondência $x \mapsto y$, que associa a cada valor x de uma delas um valor y bem definido da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:

1) Quanto maior for x, maior será y. Em termos matemáticos: Se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

2) Se dobrarmos, triplicarmos, etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dobrado, triplicado, etc. Na linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto ny$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nas condições acima, a correspondência $x \mapsto y$ chama-se uma *proporcionalidade*.

Exemplo 2.3. [9] Sejam r e s retas paralelas. Dado qualquer retângulo que tenha dois lados contidos nessas retas, chamemos de x o comprimento de um desses lados e z a área do retângulo.

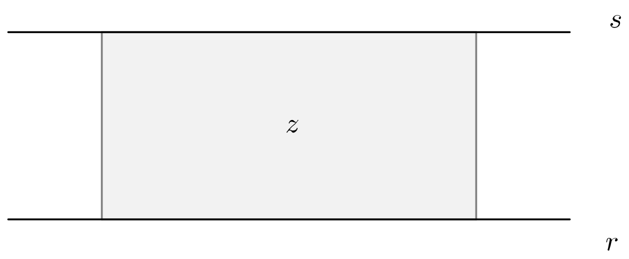


Figura 2.5: retângulo de área z

A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade. Ou seja: quando a altura de um retângulo é fixada, sua área z é proporcional à base x.

Com efeito, em primeiro lugar, se $x < x'$ então a área z' do retângulo de base x' é igual a área z do retângulo de base x mais a área de um retângulo de base $x' - x$, logo $z < z'$.

Em segundo lugar, um retângulo de base nx pode ser expresso como reunião de n retângulos justapostos de base x(e mesma área z) logo sua área é nz.

Observação 2.1. A afirmação contida no Exemplo 2.4 é uma consequência imediata da fórmula que exprime a área de um retângulo como o produto da base pela altura. Esta é, entretanto, uma justificativa a posteriori. Não é conveniente usá-la no presente contexto pois, na verdade, o primeiro passo da dedução daquela fórmula é a verificação da proporcionalidade acima.

Exemplo 2.4. [9] Investindo uma quantia x numa caderneta de poupança , após o decurso de um mês obtém-se um montante y.

A correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade: o que se recebe no fim do mês é proporcional ao que se aplicou. Com efeito, é claro que aplicando-se mais recebe-se mais e investindo-se uma quantia n vezes maior do que x, pode-se considerar essa operação como n investimentos iguais a x, logo o que se recebe é ny.

Observação 2.2. Se uma quantia fixa gera, após um mês de investimento, um retorno y, não é verdade que após n meses essa mesma quantia gere o retorno ny, mesmo que a taxa de juros permaneça constante. Pois ao final de cada mês é como se tivesse sido aplicada novamente uma quantia maior, igual à existente no mês anterior mais os juros correspondentes. Assim o retorno (num período fixo) é proporcional ao capital inicial mas não é proporcional ao tempo de investimento.

Esta observação mostra que a propriedade "quanto maior for x, maior será y"não assegura a proporcionalidade entre x e y. Outro exemplo disto é a correspondência $x \mapsto y$, onde x e o lado de um quadrado e y é sua área. Diante dos exemplos anteriores, podemos formular a definição matemática de proporcionalidade, onde as grandezas são substituídas por números reais, que são suas medidas.

Estamos considerando apenas grandezas que têm medida positiva, logo o modelo matemático da proporcionalidade leva em consideração apenas números reais positivos.

Definição 2.6. [9] Uma proporcionalidade (numérica) é uma função $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ com as seguintes propriedades:

1) f é uma função crescente, isto e $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ para quaisquer $x, x' \in \mathbb{R}^+$.

2) Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $f(nx) = n \cdot f(x)$.

Numa proporcionalidade a propriedade 2, acima é admitida apenas quando $n \in \mathbb{N}$, vale para um número real positivo qualquer. Este é o conteúdo do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade* que será abordado no capítulo seguinte.

2.4.2 Grandezas Proporcionais a várias outras

Com base em [9] vamos apresentar a proporcionalidade com o intuito de substituir as famosas flechas que usamos para resolver as regras de três. Vamos iniciar introduzindo a ideia da proporcionalidade com duas variáveis. Observe a figura abaixo, onde temos duas semirretas, OA e OB. Sobre elas, nesta ordem, tomamos os segmentos OX, de comprimento x, e OY, de comprimento y, os quais determinam um paralelogramo, cuja a área indicaremos por w. Assim, w é função de x e y, o que representamos assim: $w = f(x, y)$.

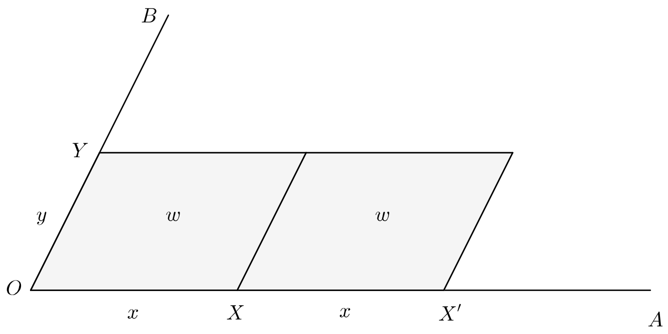


Figura 2.6: paralelogramo de área w

Observe que pela figura se mantivermos Y fixo e tomarmos OX' de comprimento $2x$, obtemos um paralelogramo cuja área é $2w$. Ou ainda, $f(2x, y) = 2 \cdot f(x, y)$. Note que se n é qualquer número natural, então $f(n \cdot x, y) = n \cdot f(x, y)$. Isto significa que, mantendo y fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a x. De modo análogo se vê que $f(x, n \cdot y) = n \cdot f(x, y)$, ou seja, mantendo x fixo, a área $w = f(x, y)$ é proporcional a y.

Consideremos uma grandeza cujo o valor w depende de outras duas grandezas x e y. Diremos que w é proporcional a x e y quando, mantendo fixos qualquer um dos valores x ou y, w é proporcional a variável restante.

Segue então que $w = f(x, y) = f(1x, 1y) = xf(1, 1y) = xy \cdot f(1, 1) = k \cdot xy$, onde $f(1, 1) = k$.

Assim, fixadas as semirretas OA e OB e tomando sobre elas, nesta ordem, segmentos OX e OY de comprimentos x e y respectivamente, a área do paralelogramo que tem OX e OY como lados adjacentes é proporcional ao produto xy. O fator de proporcionalidade é a área do paralelogramo de lados iguais a 1 cosntituído sobre essas semirretas.

Vamos estender o conhecimento de proporcionalidade para três variáveis, observando a figura 2.7, onde temos três semirretas não-colineares OA, OB e OC (com mesma origem) e tomamos sobre elas, nesta ordem, os segmentos OX, OY e OZ, de comprimentos x, y e z respectivamente, eles serão as arestas de um paralelepípedo cujo o volume indicaremos com $V = V(x, y, z)$ pois ele é função das três variáveis x, y e z.

De acordo com a situação anterior se mantivermos y e z fixos e dobrarmos x, o volume dobra, ou seja, $V(2x, y, z) = 2 \cdot V(x, y, z)$. Mais geralmente, para qualquer número natural n tem-se $V(n \cdot x, y, z) = n \cdot V(x, y, z)$. Da mesma forma se verifica que $V(x, n \cdot y, z) = n \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, n \cdot z) = n \cdot V(x, y, z)$. Segue-se daí que $V(c \cdot x, y, z) =$

$c \cdot V(x, y, z)$, $V(x, c \cdot y, z) = c \cdot V(x, y, z)$ e $V(x, y, c \cdot z) = c \cdot V(x, y, z)$ mesmo que o número c não s

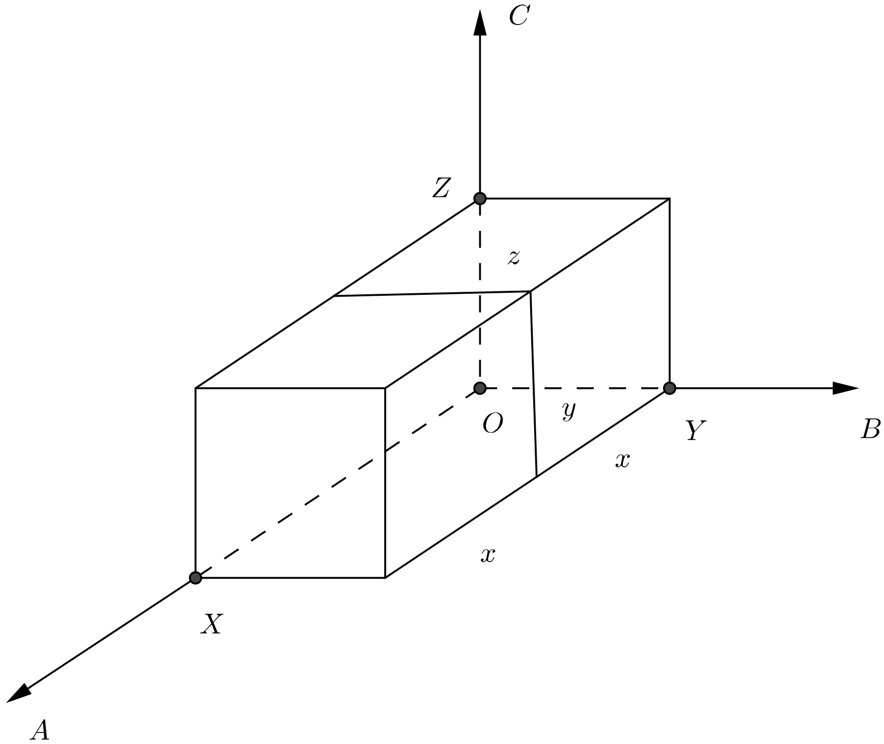


Figura 2.7: paralelepípedo de volume V

Podemos então escrever:

$$V = V(x, y, z) = V(x \cdot 1, y, z) = x \cdot V(1, y \cdot 1, z) = xy \cdot V(1, 1, z \cdot 1) = xyz \cdot V(1, 1, 1)$$

Onde $k = V(1, 1, 1)$ é o volume do paralelepípedo que tem arestas de comprimento 1, três das quais, com origem O, estão sobre as semirretas OA, OB e OC.

Consideremos uma grandeza cujo o valor w depende de outras três grandezas x, y e z. Escrevemos $w = f(x, y, z)$. Diremos que w é proporcional a x, y e z quando, mantendo fixos dois quaisquer desses valores, w é proporcional a variável restante.

2.4.3 Grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras

Em [9] muitas situações tem-se uma grandeza z, de tal modo relacionada com outras, digamos x, y, u, v, w, que a cada escolha de valores para estas últimas corresponde um valor bem determinado para z. Então z chama-se uma função das variáveis x, y, u, v, w e escreve-se $z = f(x, y, u, v, w)$.

Nestas condições, diz-se que z é (diretamente) proporcional a x quando:

1) Para quaisquer valores fixados de y, u, v, w, a grandeza z é uma função crescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) < f(x', y, u, v, w)$.

2) Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = n.f(x, y, u, v, w)$.

Analogamente, diz-se que z é inversamente proporcional a x quando:

3) Para quaisquer valores fixados de y, u, v e w, a grandeza z é uma função decrescente de x, isto é, a desigualdade $x < x'$ implica $f(x, y, u, v, w) > f(x', y, u, v, w)$.

4) Para $n \in \mathbb{N}$ e x, y, u, v, w quaisquer tem-se $f(nx, y, u, v, w) = \frac{1}{n}.f(x, y, u, v, w)$.

As propriedades 2) e 4) acima valem para $c > 0$ real qualquer em lugar de $n \in \mathbb{N}$. Isto tem a seguinte consequência:

Se $z = f(x, y, u, v, w)$ é (diretamente) proporcional a x e y e inversamente proporcional a u, v e w então, tomando-se $a = f(1, 1, 1, 1)$, tem-se:

$$f(x, y, u, v, w) = a.\frac{x.y}{u.v.w}$$

. Com efeito,

$$f(x, y, u, v, w) = f(x.1, y, u, v, w) = x.f(1, y, u, v, w) = xy.f(1, 1, u, v, w)$$

$$= \frac{xy}{u}.f(1, 1, 1, v, w) = \frac{xy}{uv}.f(1, 1, 1, 1, w) = \frac{xy}{uvw}.f(1, 1, 1, 1, 1)$$

$$= a.\frac{xy}{uvw}$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.5. [9] Com 5 máquinas funcionando 6¨horas por dia, uma fabrica produz 1800 metros de tecido com 12, metros de largura em 4 dias. Se uma das maquinas apresentar defeito e não puder funcionar e a largura do tecido for de 0,8 metros, em quanto tempo a fabrica produzirá 2000 metros do mesmo tecido, com as máquinas funcionando 8 horas por dia?

O tempo procurado é uma função $T = T(t, h, m, l)$, do numero t de máquinas, do número h de horas diárias em que eles são utilizados, do número m de metros de tecidos e da largura l da peça. Portanto T é da forma:

$$T = k \cdot \frac{ml}{th}$$

Onde temos $k = \dfrac{1}{8}$ e $T = \dfrac{25}{9}$ dias ou 2 dias, 6 horas e 13 minutos.

Exemplo 2.6. [9] A noção de grandeza proporcional a várias outras permite deduzir a fórmula do volume de um bloco retângular. O volume de um sólido geométrico X, que se escreve $vol(X)$, é um número real com as seguintes propriedades:

1) Se o sólido X está contido propriamente no sólido X' então $vol(X) < vol(X')$.

2) Se o sólido Y é a reunião de dois sólidos adjacentes X e X' então $vol(Y) = vol(X) + vol(X')$.

Dessas duas propriedades do volume, e da definição de proporcionalidade acima dada, resulta que se X é um bloco retângular cujas arestas medem x, y e z respectivamente então o volume de X é proporcional a x, y e z. Portanto $vol(X) = a.xyz$, onde a é o volume do bloco retângular cujas três arestas medem 1. Mas tal bloco é o cubo de aresta 1 e, por definição, seu volume é igual a 1. Logo $vol(X) = xyz$.

Capítulo 3

Funções Lineares e Afins

Nesse capítulo vamos estudar as funções lineares, elas estão presentes na maioria dos problemas do nosso cotidiano e veremos que é um caso particular de função afim. Suponha que estamos planejando um orçamento mensal de despesas. Iniciamos calculando uma unidade de um determinado produto ou alimento de consumo, depois aumentamos esse quantidade de acordo com o número de semanas ou pelo número de dias que se deseja consumir o determinado produto, por exemplo: vamos supor que tenho condições de comprar 8 quilos de peixe para consumir durante o mês. Sabendo quanto o quilo do peixe custa, poderia planejar um orçamento para dois meses, três, ou até mesmo ter uma noção de quanto gastaria com o consumo de peixe durante um ano. Tudo isso é possível pois, temos um consumo linear dessa situação, e consequentemente nos permite esboçar e entender o comportamento desse tipo de função (Não levando em consideração a inflação do periodo).

No estudo de função linear apresentado a seguir procure entender que toda função com a propriedade de proporcionalidade direta é da forma $f(x) = a \cdot x$, e de que toda função com a propriedade de proporcionalidade inversa é da forma $f(x) = \dfrac{a}{x}$ (em que $a = f(1)$, em ambos os casos).

3.1 Função Linear

A definição adotada em [9] é uma das mais usadas pelos livros didáticos:

Definição 3.1. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante, chama-se uma *função linear*.

Quando $a > 0$, a função linear $f(x) = ax$ transforma um número real positivo x no número ax, logo define, por restrição, uma proporcionalidade $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$. O coeficiente a chama-se o fator de proporcionalidade.

A função linear, dada pela fórmula $f(x) = ax$, é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais importantes da matemática elementar e é muito comum no nosso dia a dia.

Diremos que uma função linear $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c e x tem-se $f(cx) = c \cdot f(x)$, é uma proporcionalidade direta. Se $f(cx) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$, para quaisquer $c \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$, diremos que f é uma proporcionalidade inversa.

É claro que se $f(cx) = c \cdot f(x)$, para todo c e todo x então, escrevendo $a = f(1)$, tem-se $f(c) = f(c.1) = c \cdot f(1) = c \cdot a$, ou seja, $f(c) = a \cdot c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. Numa notação mais adequada, temos $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$, mostrando que f é uma função linear.

Quanto à proporcionalidade inversa, ela só tem sentido quando se trata de grandezas não-nulas. Seu modelo matemático é uma função $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$(onde $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$) tal que $f(cx) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$ para $c, x \in \mathbb{R}$ quaisquer. Usando o mesmo raciocínio anterior, isto quer dizer que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se $f(x) = \dfrac{a}{x}$, onde a constante a é $f(1)$.

Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de “proporcionalidade”. Na prática, há situações em que a fórmula $f(x) = y = ax$, que caracteriza a proporcionalidade, é dada explicitamente (ou quase). Por exemplo, se um litro de gasolina custa a reais então x litros custam $f(x) = y = ax$ reais.

Em muitos casos, porém, a constante a de proporcionalidade não está clara e, às vezes, nem mesmo tem relevância alguma para o problema. Um exemplo disso se tem nas aplicações do teorema de Tales. Tem-se um triângulo ABC figura 3.1 e uma correspondência que a cada ponto X do lado AB associa o ponto Y do lado AC tal que XY é paralelo a BC. O teorema de Tales assegura que o comprimento y do segmento AY é proporcional ao comprimento x de AX . Mas que importância tem a constante de proporcionalidade $a = \frac{y}{x}$?

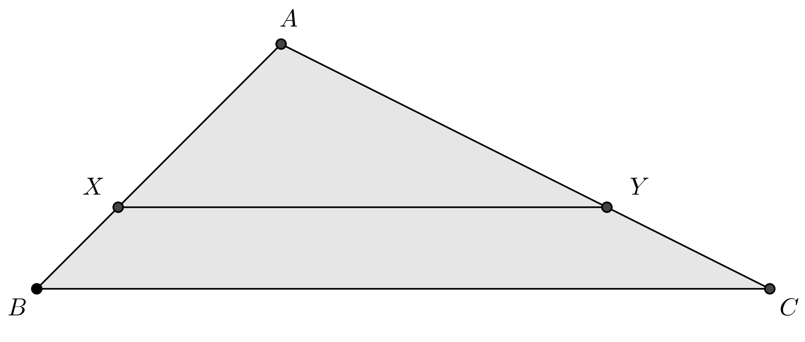


Figura 3.1: Triângulo ABC

Este exemplo chama a atenção para o fato de que nos problemas relativos à proporcionalidade o que importa muitas vezes é saber apenas que se $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ então $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$ é constante.

Quando a correspondência $x \mapsto y$, $x' \mapsto y'$ é uma proporcionalidade, a igualdade $\dfrac{y'}{x'} = \dfrac{y}{x}$ permite que se determine um desses quatro números quando se conhecem os outros três, muitos livros apresentam como ”regra de três”.

Mas há uma questão preliminar que é a seguinte: Como vamos ter certeza de que a correspondência $x \mapsto y$ é uma proporcionalidade? Em [14], ele afirma que precisamos que se tenha $f(cx) = c \cdot f(x)$ para todos os valores reais de c e x.

Lembremos que uma função $f : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se:

(i) *Crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(ii) *Decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(iii) *Monótona não - decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(iv) *Monótona não - crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Em qualquer dos quatro casos, f diz-se *monótona.* Nos dois primeiros (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é *estritamente monótona.* Nestes dois casos, f é uma função injetiva.

É bom ressaltar que não me parece o termo mais adequado! (embora algumas vezes se faça) chamar apenas de não-crescentes as funções dos dois últimos tipos, pois negar (por exemplo) que uma função decrescente não implica necessariamente que ela seja monótona.

Evidentemente, os quatro casos acima não são mutuamente excludentes. Pelo contrário, os dois primeiros são casos particulares dos dois últimos. Além disso, naturalmente, há funções que não se enquadram em nenhuma dessas quatro categorias.

Uma função afim é crescente quando sua taxa de variação (o valor de a) é positiva, decrescente quando a taxa de variação é negativa e constante quando sua taxa de variação é nula. os três exemplo abaixo representam os casos citados acima:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x - 3 \Rightarrow \textit{crescente} \\ f(x) &= -\frac{x}{3} + 1 \Rightarrow \textit{decrescente} \\ f(x) &= 2 \Rightarrow \textit{constante} \end{aligned}$$

3.1.1 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

O Teorema Fundamental da Proporcionalidade [T.F.P] é a chave para determinar, em todas as situações, se uma dada função é ou não é linear.

Teorema 3.2. *[7] (**Teorema Fundamental da Proporcionalidade [T.F.P]**) Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A demonstração deste teorema, você pode encontrar no apêndice A retirada de [7].

Em algumas situações, o [T.F.P] precisa ser aplicado a grandezas (como área ou massa, por exemplo) cujas medidas são expressas apenas por números reais positivos. Então temos uma função crescente $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$. Neste caso, as afirmações do Teorema leem-se assim:

(1') $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in \mathbb{R}^+$

(2') Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$;

(3') $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Neste novo contexto, o [T.F.P] continua válido, isto é, as afirmações $(1')$, $(2')$ e $(3')$ são ainda equivalentes.

Isto se mostra introduzindo a função $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, onde $F(0) = 0$, $F(x) = f(x)$ e $F(-x) = -f(x)$ para todo $x > 0$. Cada uma das afirmações $(1')$, $(2')$ e $(3')$ para f equivale a uma das afirmações (1), (2) e (3) para F .

Deve-se observar que a função f do teorema acima sendo crescente, tem-se $a = f(1) > 0$. No caso de se supor f decrescente vale um resultado análogo, com $a < 0$.

A importância deste teorema está no seguinte fato: se queremos saber se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear basta verificar duas coisas.

Primeira: f deve ser crescente ou decrescente. (Estamos deixando de lado o caso trivial de f ser identicamente nula.)

Segunda: $f(nx) = n.f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $n \in \mathbb{Z}$. No caso de $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, basta verificar esta última condição para $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Função Afim

O ponto de partida para o estudo das funções afins, foi a identificação da variação entre duas grandezas, em situações do cotidiano. No estudo da função afim é importante consolidar os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais, relacionado-os a função linear abordados na seção anterior.

Definição 3.3. [7] Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se ***afim*** quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

As funções afins são funções polinomiais de grau um, ou seja a variável se encontra em um polinômio, sendo que o maior expoente encontrado é o um. Por isso, elas também são conhecidas como funções polinômiais do primeiro grau. As funções afins modelam situações em que as variáveis se associam de forma linear: variações cosntantes em x causam variações constantes em y.

A função identidade $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. Também são funções afins as translações $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. São ainda casos particulares de funções afins as funções lineares estudadas anteriormente, $f(x) = ax$ e as funções constantes $f(x) = b$.

É possível mediante critérios como apresentaremos logo a seguir, saber que uma certa função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Neste caso, obtém-se b como o valor que a função dada assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ às vezes se chama valor inicial da função f. Em relação ao coeficiente a, ele pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Com efeito, conhecidos $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$, obtemos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Dados x, $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ chama-se taxa de crescimento (ou taxa de variação) da função f no intervalo de extremos x, $x + h$.

3.2.1 Taxa de Variação Média da Função Afim

Definição 3.4. Em qualquer função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, quando damos acréscimo h à variavel x, passando de x para $x + h$, há em correspondência, um acréscimo $f(x + h) - f(x)$ no valor da função.

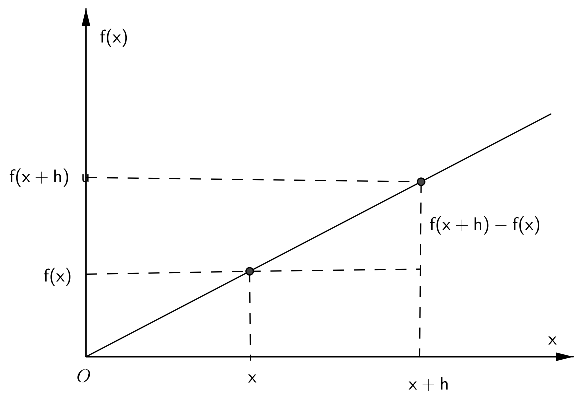


Figura 3.2: intervalo $[x, x + h]$

Definição 3.5. [2] Dados x e $x+h$ números reais, com $h \neq 0$, o número $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se **taxa de variação média da função f no intervalo** $[x, x+h]$.

Dados x e $x+h$ números reais, com $h \neq 0$, e a função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, sua taxa de variação média em relação a x é dada pelo número:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a$$

Portanto,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$$

Assim, a taxa de variação média, em relação a x, de uma função afim qualquer, definida por $f(x) = ax + b$ é igual a constante a.

Observação 3.1. 1ª) Como a taxa de varição média de uma função afim é constante, nesse caso podemos dizer apenas **taxa de variação**.

2ª) A taxa de variação da função afim pode ser interpretada como a variação em $f(x)$ causada por cada aumento de uma unidade em x.

3ª) a taxa de variação da função afim pode ser obtida conhecendo-se dois dos seus valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1 - x_2} = a,$$

para $x_1 \neq x_2$.

3.2.2 Gráfico da Função Afim

A representação geométrica de uma função afim $f : x \longrightarrow ax + b$ é uma reta.

Em [7] essa afirmação é provada mostrando que três pontos quaisquer no conjunto G, são colineares. Utilizando o conhecimento de geometria analítica, poderiamos fazer de duas maneiras. Verificando que o determinante associado aos pontos no gráfico G era igual a zero, ou à utilizando a ideia de distância entre pontos no plano, a qual adotaremos aqui.

Para isto, seja $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ três pontos de uma função afim qualquer, para que estes pontos pertençam a uma mesma reta é necessário e suficiente que o maior dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Assim, podemos sempre supor que as abcissas x_1, x_2 e x_3 foram numeradas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. A fórmula da distância entre dois pontos nos dá:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2}$$

$$= (x_2 - x_1).\sqrt{1 + a^2}$$

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2).\sqrt{1 + a^2}$$

e

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1).\sqrt{1 + a^2}$$

Daí se segue imediatamente que

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

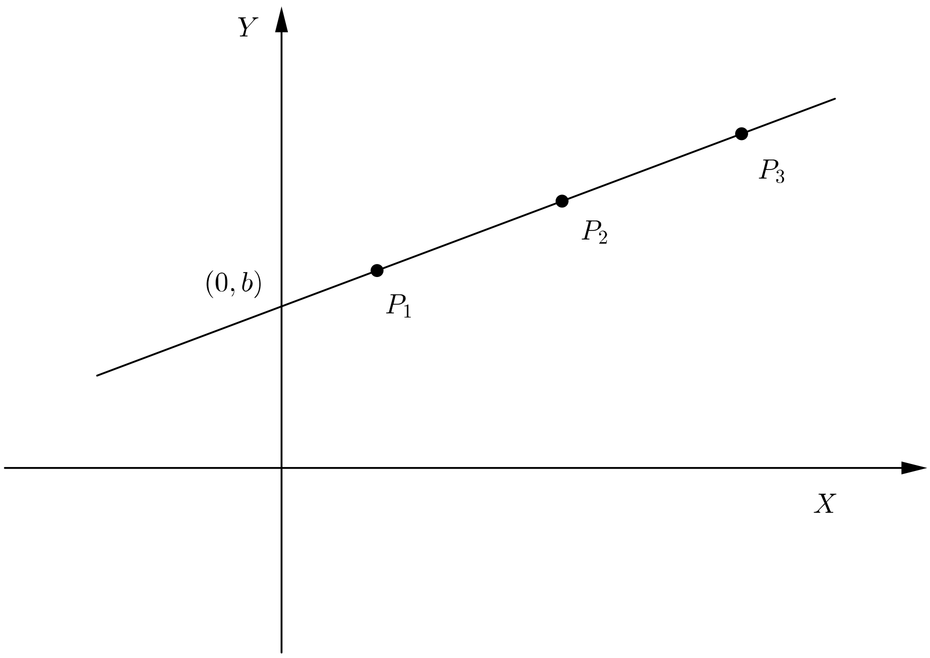


Figura 3.3: Pontos P_1, P_2 e P_3 no plano

Geometricamente, b chama-se ***valor inicial*** da função f ou ***coeficiente linear*** que é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico da função $f : x \longrightarrow ax + b$, intersecta o eixo OY, pois para $x = 0$ temos $f(0) = a.0 + b = b$.

Como vimos anteriormente na subseção anterior, o número a chama-se taxa de variação da função f, mas também é conhecido como ***declividade***, ***inclinação*** ou ***coeficiente ângular***, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta crescente (quando se caminha para a direita) e quando $a < 0$, a reta é decrescente.

No caso particular de uma função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, como seu gráfico é uma linha reta fica inteiramente determinada quando se conhecem dois de seus pontos, resulta basta conhecer os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$, que a função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assume em dois números $x_1 \neq x_2$.

Na prática, sabendo que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é afim e que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ com $x_1 \neq x_2$, queremos determinar os coeficientes a e b de modo que se tenha $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto corresponde a resolver o sistema:

$$\begin{cases} ax_1 & + & b & = & y_1 \\ ax_2 & + & b & = & y_2 \end{cases}$$

No qual as incógnitas são a e b. A solução é imediata:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e

$$b = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}.$$

Normalmente, sempre precisamos fazer a hipótese $x_1 \neq x_2$ para resolver um problema, a diferença $x_2 - x_1$ sempre aparecer em no denominador na solução.

O que podemos concluir que o citado acima prova que:

(i) *Dados arbitrariamente (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}$, com $x_1 \neq x_2$, existe uma, e somente uma, função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$.*

Evidentemente, o gráfico de uma função afim é uma reta não vertical, isto é, não paralela ao eixo OY. Reciprocamente:

(ii) *Toda a reta não - vertical r é o gráfico de uma função afim.*

Para provarmos esta afirmação, tomemos dois pontos distintos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ na reta r. Como r não é vertical, temos $x_1 \neq x_2$, logo existe uma função afim $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. O gráfico de f é uma reta que passa pelos pontos P_1 e P_2 logo essa reta coincide com r.

Se $f(x) = ax + b$, diz-se que $y = ax + b$ é uma equação da reta r.

Se a reta r é o gráfico da função afim f, dada por $f(x) = ax + b$, o coeficiente

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos distintos quaisquer de r, tem claramente o significado de taxa de crescimento de f. A esse número é dado também o nome de inclinação ou coeficiente angular da reta r, pois ele é a tangente trigonométrica do ângulo do eixo OX com a reta r.

Estas interpretações nos levam a concluir imediatamente que a equação da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), não situados na mesma vertical é

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$$

ou

$$y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_2)$$

A primeira equação nos diz que, se ao iniciar no ponto (x_1, y_1) sobre a reta, fazendo x variar, a ordenada y começa com o valor y_1 e sofre um incremento igual ao incremento $x - x_1$ dado a x vezes a taxa de variação

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

A segunda equação diz a mesma coisa, só que partindo do ponto (x_2, y_2).

De modo análago, vemos que a equação da reta que passa pelo ponto (x_0, y_0) e tem inclinação a é

$$y = y_0 + a \cdot (x - x_0)$$

É bom ressaltar que boa parte dos livros didáticos e materiais encontrados na internet fazem referencia a função afim como "função do primeiro grau". Essa referencia segundo Elon Lages em [7] não é correta pois, função não tem grau. O que possui grau é o polinômio, o que se estende para as funções quadráticas.

3.2.3 Conexão entre as Funções Afins e a Progressão Aritmética

Existe uma conexão interessante entre funções afins e progressões aritméticas, em [2] e em [7] ela é abordada possibilitando ao leitor compreender melhor esta conexão.

Definição 3.6. [7] Uma progressão aritmética pode ser vista geometricamente como uma sequência (finita ou infinita) de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ igualmente espaçados na reta. Isto quer dizer que a razão $h = x_{i+1} - x_i$ não depende de i:

$$h = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_{i+1} - x_i$$

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função afim, digamos $f(x) = ax + b$, e $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ com $i \in \mathbb{N}$ é uma progressão aritmética, então os pontos $y_i = f(x)$; $\;i \in \mathbb{N}$ também estão igualmente espaçados, isto é, formam uma progressão aritmética cuja razão é

$$y_{i+1} - y_i = (ax_{i+1} + b) - (ax_i + b) = a \cdot (x_{i+1} - x_i) = a \cdot h.$$

Assim, se tivermos uma reta não-vertical (gráfico de uma função afim) em $\mathbb{R}$ e tomarmos sobre ela os pontos

$$(1, y_1), (2, y_2), \ldots, (i, y_i)$$

Cujas abscissas são os números naturais, as ordenadas $y_1, y_2, \ldots, y_i$ desses pontos formam uma progressão aritmética.

Proposição 3.7. *Se uma função monótona $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ transforma qualquer progressão aritmética $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ numa progressão aritmética $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_i = f(x_i), \ldots$ então f é uma função afim.*

Com efeito, neste caso a nova função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - f(0)$, transforma qualquer progressão aritmética noutra progressão aritmética, e tem a propriedade $g(0) = 0$. Mostremos que g é linear.

Para todo $x \in \mathbb{R}$, os números $-x, 0, x$ formam uma progressão aritmética, logo o mesmo ocorre com os números $g(-x), 0, g(x)$. Por conseguinte, $g(-x) = -g(x)$.

Em seguida, consideremos $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Então os números $0, x, 2x, \ldots n \cdot x$ formam uma progressão aritmética, o mesmo se dando com suas imagens por g : $0, g(x), g(2x), \ldots, g(n \cdot x)$. A razão desta progressão pode ser obtida tomando a diferença entre o segundo e o primeiro termo, logo esta razão é $g(x)$. Segue-se então que $g(n \cdot x) = n \cdot g(x)$. Finalmente, se n é um inteiro negativo, temos $-n \in \mathbb{N}$, logo $g(n \cdot x) = -g(-n \cdot x) = -(-n \cdot g(x)) = n \cdot g(x)$. Assim, vale $g(n \cdot x) = n \cdot g(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo [T.F.P], segue-se que g é linear: $g(x) = ax$, portanto, pondo $f(0) = b$, temos $f(x) = g(x) + f(0) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, como queríamos demonstrar.

Capítulo 4

Caracterização da Função Afim e Aplicação

Neste capitulo vamos apresentar a caracterização da função afim. Procuramos extrair da bibiografia consultada aplicações em Física, Economia, Finanças entre outras, com objetivo de apresentar de maneira satisfatória a ideia de que sempre que encontrarmos uma situação problema que envolva função afim, termos segurança em afirmar que este é o modelo matemático que resolverá tal situação.

4.1 Caracterização da Função Afim

Geralmente uma das perguntas que costumamos ouvir quando se está estudando é que : *Como saber se, numa determinada situação, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?.* Inicialmente vamos apresentar uma situação e verificar como proceder pra resolvê-la.

Paulo, dono de um açougue, fez uma promoção de final de semana para seus clientes que compravam carne de primeira, cujo o valor é de R$ 21,00. Durante o final de semana foi feita a seguinte promoção:

* Na compra de uma quantia entre 3Kg e 5Kg, desconto de R$ 2,00 no total.

* Na compra de 5kg ou mais, desconto de 10%.

Quanto Maria pagou pela sua compra se ela levou 2,7Kg de carne? e se ela comprar 4,7 Kg? e se ela comprar 5,1 Kg?

Fazendo uma análise do problema acima, e representando o número de quilos de carne de primeira comprada por x e a quantidade em reais pago por $f(x)$, existem três situações:

1ª Situação: Quando o peso é menor ou igual a 3 ($x \leq 3$) temos uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa cada peso x de carne a um valor $f(x)$ em reais, de forma que $f(x) = 21 \cdot x$, então Maria pagará $f(2,7) = 21 \cdot 2,7 = 56,70$.

2ª Situação: Quando o peso é maior que 3Kg e menor que 5Kg (3$\leq x \leq$5) resaltamos que já temos um desconto de R$ 2,00 reais dessa forma a expressão que determina o valor pago é dado por $f(x) = 21 \cdot x - 2$, então Maria pagará $f(4,7) = 21 \cdot 4,7 - 2 = 96,70$

3ª Situação: Quando o peso for superior a 5Kg ($x \geq 5$) o desconto passa e ser de 10% o que pode trazer uma vantagem para o freguês, pois a expressão que determina o valor pago é $f(x) = 21 \cdot x - (0,1) \cdot (21 \cdot x) \Rightarrow f(x) = 18,9 \cdot x$, então Maria pagará $f(5,1) = 18,9 \cdot 5,1 = 96,39$. Nesta última situação ela levaria mais carne por menos dinheiro.

O teorema a seguir nos permite analisar a situação acima descrita de maneira mais concreta.

A seguir vamos enunciar o Teorema da Caracterização da Função Afim o [T.C.F.A], onde o mesmo se encontra demonstrado no apêndice B e em [7] e [9]

Teorema 4.1. *[7]* ***Teorema da Caracterização da Função Afim [T.C.F.A]*** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Observação 4.1. A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que "a acréscimos iguais em x correspondem a acréscimos iguais em $f(x)$". Outro maneira de se exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

4.2 Aplicações

Nesta seção vamos apresentar várias aplicações onde as mesmas vão nos responder o porque de usar como modelo matemático de resolução a função afim. Vamos perceber, que isto ocorre porque pelo [T.C.F.A] fica muito mais prático observar que quando acréscimos sofridos pela variável independente x são proporcionais aos acréscimos dados a variável dependente $f(x)$.

4.2.1 Geometria

Aplicação 4.1. [9] Seja P um ponto fora da reta r. Se X e Y são pontos distintos em r, prove que a área do triângulo PXY é proporcional ao comprimento de XY. Qual é o fator de proporcionalidade?

Admitindo a fórmula da área de um triângulo, o resultado é imediato. O fator de proporcionalidade é a metade da distância de P a r, que é a medida comum das alturas de todos esses triângulos. Deste modo, a área do triângulo resulta da área do retângulo.

Aplicação 4.2. [9] Dado o ângulo $\alpha = A\hat{O}B$, para cada par de pontos X em AO e Y em OB, sejam x e y as medidas dos segmentos OX e OY respectivamente. Prove que a área do paralelogramo que tem OX e OY como dois de seus lados é proporcional a x e y. Qual é o fator de proporcionalidade? Sabendo que a área desse paralelogramo é de 29 cm^2 quando $x = 6$ cm e $y = 7$ cm, qual o valor dessa área para $x = 2$cm e $y = 3$cm?

Seja $f(x, y)$ a área do paralelogramo que tem OX e OY como lados. A prova de que $f(x, y)$ é proporcional a x e y se faz exatamente como no caso do retângulo. A constante de proporcionalidade é $a = f(1, 1) =$ (área do losango de lado 1 e ângulos internos α e $(180 - \alpha)$) $= sen\alpha$. Portanto $f(x, y) = (sen\alpha)x \cdot y$. Não é preciso tabela de senos nem calculadora para responder a última pergunta do exercício. Sabendo que $a \cdot 6 \cdot 7 = 29$, obtemos $a = \frac{29}{42}$. Logo $f(2, 3) = \frac{29}{42} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{29}{7}$.

4.2.2 Física

As Leis da física, muitas vezes, descrevem relações de proporcionalidade direta ou inversa. Vamos apresentar algumas dessas relações encontradas em [7] que acabam representando aplicações importantes do teorema da caracterização da função afim.

Movimento uniforme: Descreve que, quando uma partícula executa um movimento com velocidade constante em relação a um determinado referencial, dizemos que ela está em movimento uniforme (MU). Isso significa dizer que o objeto móvel percorre distâncias iguais para intervalos de tempos iguais. Nesse tipo de movimento, apenas o espaço percorrido sofre variação no tempo. A expressão matemática que corresponde a esta situação é da forma

$$S(t) = s_0 + v \cdot t$$

Onde, $S(t)$ é a distancia percorrida no intervalo t de tempo, v é a velocidade do móvel.

Observe que aplicando o [T.C.F.A] temos que:

$\varphi(h) = s(t + h) - s(t)$

$\varphi(h) = s_0 + v \cdot (t + h) - s_0 + v \cdot t$

$\varphi(h) = s_0 + v \cdot t + v \cdot h - s_0 + v \cdot t$

$\varphi(h) = v \cdot h$

Onde o espaço percorrido no intervalo de tempo $[t, t + h]$ depende apenas de h, e não mais de t.

Leia da Gravitação Universal: Descreve que, matéria atrai matéria na razão direta das massas e na razão inversa do quadrado das distâncias. A expressão matemática que corresponde a esta situação é da forma

$$F = k \cdot \frac{m_1.m_2}{d^2}$$

Onde, k é a constante de gravitação universal, m_1 e m_2 são as massas de dois corpos e d é a distância entre os centros.

Se fixarmos uma das massas e aplicando o [T.C.F.A] temos:

$\varphi(h) = F(m_1 + h) - F(m_1)$

$$\varphi(h) = k \cdot \frac{(m_1 + h) \cdot m_2}{d^2} - k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

$$\varphi(h) = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} + k \cdot \frac{h \cdot m_2}{d^2} - k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$

$$\varphi(h) = k \cdot \frac{h \cdot m_2}{d^2}$$

Dilatação Térmica: Descreve que, a dilatação sofrida por uma barra de ferro é diretamente proporcional ao comprimento da barra e à variação da temperatura. A expressão matemática que corresponde a esta situação é da forma

$$\Delta l = k \cdot l \cdot \Delta t$$

Onde Δl é a dilatação térmica, k é a constante denominada de coeficiente de dilatação linear, l o comprimento inicial e Δt a variação de temperatura.

Resistência Életrica: Descreve que, a resistência de um fio condutor é diretamente proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional à área de sua seção reta. A expressão matemática que corresponde a esta situação é da forma

$$R = k \cdot \frac{l}{A}$$

Onde R é a resistência, k a constante, l o comprimento do fio e A a área da secção transversal.

Todos os exemplos citados acima tem algo em comum, de fato, todos são lineares. Para fixar as ideias vamos verificar duas aplicações.

Aplicação 4.3. [2] Os trilhos de uma ferrovia foram assentados em um dia frio de inverno sob a temperatura de 0º C. Precavido, o engenheiro instruiu os operários para deixarem uma folga de 9,0 mm entre trilhos consecutivos. O comprimentro de cada trilho é de 10,00 m, e o coeficiente de dilatação linear do aço é $1,2 \cdot 10^{-5}$ $^{o}C^{-1}$. determine:

(i) Quando a temperatura ambiente atingir 25 °C, qual a folga entre os trilhos?.

(ii) Quando a temperatura ambiente atingir 50 °C, qual a folga entre os trilhos?.

(iii) Quando a temperatura ambiente atingir 75 °C, qual a folga entre os trilhos?.
Aplicando o [T.C.F.A] temos:
$\varphi(h) = F(t+h) - F(t)$

$\varphi(h) = k \cdot l \cdot (t+h) - k \cdot l \cdot t$

$\varphi(h) = k \cdot l \cdot h$

A dilatação térmica também é uma função contínua isso quer dizer que quanto maior for a variação de temperatura maior vai ser a dilatação do corpo o que caracteriza uma função afim. Vamos julgar cada item a seguir.

No item (i), como $\Delta l = k \cdot l \cdot \Delta t$, temos $\Delta l = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10,0 \cdot 25$. Portanto $\Delta l = 3,0 \cdot 10^{-3}\ m = 3,0$ mm. A nova folga entre os trilhos consecutivos passa a ser d = 9,0 - 3,0 = 6,0 mm.

No item (ii), como $\Delta l = k \cdot l \cdot \Delta t$, temos $\Delta l = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10,0 \cdot 50$. Portanto $\Delta l = 6,0 \cdot 10^{-3}\ m = 6,0$ mm. A nova folga entre os trilhos consecutivos passa a ser d = 9,0 - 6,0 = 3,0 mm.

No item (iii), como $\Delta l = k \cdot l \cdot \Delta t$, temos $\Delta l = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 10,0 \cdot 75$. Portanto $\Delta l = 9,0 \cdot 10^{-3}\ m = 9,0$ mm. A nova folga entre os trilhos consecutivos passa a ser d = 9,0 - 9,0 = 0,0 mm. Quando a temperatura atinge 75°C os trilhos irão se tocar.

Aplicação 4.4. [2] Se um peso estica uma mola, o comprimento c da mola está relacionado linearmente com valor do peso p (para pequenos pesos). Suponha que uma mola em repouso tem 50 mm de comprimento, e um peso de 400 g causa um estiramento de 30 mm na mola. qual é a relação entre p e c? Para um peso de 800 g, qual o estiramento da mola? e para um peso de 1000 g?

A relação que encontramos entre p e c, no problema é a seguinte:

$$c = a \cdot p + b$$
$$p = 0 \Rightarrow c = 50$$
$$p = 50 \Rightarrow c = 80$$

Então:

$$\begin{cases} 50 = 0 \cdot a + b \\ 80 = 400 \cdot a + b \end{cases}$$

Daí temos, $b = 50$ e $a = \dfrac{3}{40}$

Logo, a relação entre c e p é dada por $c = \frac{3}{40} \cdot p + 50$

Assim, para um peso de 800 g, o estiramento da mola é de 60 mm, evidentemente para um peso de 1000 g, o estiramento da mola é de 75 mm.

4.2.3 Economia e Finanças

Dentro da economia as funções afins aparecem em varias aplicações, desta forma vamos apresentar as funções afins de forma habitual dentro da economia e finanças. Estes conceitos se apresentam em [4], [11] e [12].

Função Custo: A função **Custo Total**, ou simplesmente função custo $C(x)$ de um certo produto, é aquela que descreve uma relação entre o custo total, custos fixo C_f e custo variável $C_v(x)$.

$$C(x) = C_f + C_v(x)$$

Entende-se por custo fixo C_f , aquele que não depende da quantidade produzida tais como aluguel, seguros, manutenção do prédio entre outros.

O custo fixo C_f , pode ser entendido como uma função constante e desta forma seu gráfico é dado por uma semirreta paralela ao eixo horizontal.

A parcela correspondente ao custo variável, é a que depende dos custos de produção propriamente ditos tais como aquisição de matéria-prima, pagamento de mão de obra, energia gasta, etc.

O custo variável $C_v(x)$, é assim chamado pelo fato de ser uma função da quantidade produzida. Seu gráfico começa na origem, pois não se tem gastos com a produção quando nada é produzido.

Verifica-se também que para x variando dentro de um certo intervalo, o custo variável $C_v(x)$, é em geral igual a uma constante k que recebe a denominação de custo variável por unidade multiplicada por x e que pode ser escrita por $C_v(x) = k \cdot x$.

Função Receita: O valor recebido pela venda de x unidades de um certo produto ao preço p, pode ser dado pela função receita expressa por:

$$R(x) = p \cdot x$$

Função Lucro: A função lucro é dada pela diferença entre a função receita e a função custo.

$$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \begin{cases} R(x) > C_t(x) \Rightarrow \text{teremos lucro positivo} \\ R(x) < C_t(x) \Rightarrow \text{teremos lucro negativo} \\ R(x) = C_t(x) \quad\quad \Rightarrow \text{teremos lucro nulo} \end{cases}$$

Denomina-se ponto crítico ou ponto de nivelamento ao ponto em que R(x) se iguala a C(x).

Função demanda: A função demanda, busca descrever o comportamento do consumidor. Observa-se que durante certo espaço de tempo, e em um certo mercado, que a quantidade procurada de um produto varia de forma a envolver muitas variáveis. Dentre elas destacamos por exemplo, o preço do produto ou de substitutos, a renda do consumidor, o impacto de uma boa ou má propaganda, o gosto do consumidor e outras influências.

Considerando a influência das demais variáveis como constantes , com exceção do preço unitário p como responsável pela demanda de x unidades de um produto, a função demanda pode ser dada pela relação $p = f(x)$.

A função demanda pode estar se referindo a um consumidor individual ou a um grupo de consumidores. De um modo geral quando nos referirmos a uma função demanda, estaremos pensando em grupo de consumidores. Ela é normalmente expressa por uma função decrescente.

Função oferta: A função oferta, busca descrever o comportamento do fornecedor. Da mesma forma que a demanda, quando se considera apenas o preço como determinante da quantidade que é ofertada de uma certo produto, supondo constantes os demais fatores influentes. Considerando que p represente o preço unitário do produto e x a quantidade oferecida ao mercado, tem-se também $p = f(x)$.

A função oferta, expressa em função do preço é uma função crescente, pois quando o preço sobe, aumenta a oferta e quando o preço cai, cai também a oferta. Entende-se por preço de equilíbrio como o preço que corresponde a iguais quantidades de oferta e demanda.

Depreciação: A depreciação é a perda do valor de um bem ao longo do tempo devido ao uso, pelo aparecimento de dispositivos mais atualizados ou por outras razões. A depreciação é uma função decrescente que pode ser calculada por $d = V_0 - V$, onde:

d = depreciação, V = valor do objeto no tempo t e V_0 = valor do objeto na data zero.

Supondo v, função afim e expressa por $V = mt + V_0$, A depreciação d em função do tempo será obtida do seguinte modo:

$$d = V_0 - V \Rightarrow d = V_0 - (m \cdot t + V_0)$$

$$\Rightarrow d = V_0 - m \cdot t - V_0$$

$$\Rightarrow d = -m \cdot t$$

Função Consumo: É a função representada pela expressão $C = C_0 + m \cdot x$, onde.

$C_0 =$ (coeficiente linear da reta), representa as despesas fixas ou consumo autônomo;
$m =$ (coeficiente angular da reta), é chamado de propensão marginal a consumir;
$C =$ representa o consumo propriamente dito;
$x =$ representa a renda disponível.

Função Poupança: A função poupança é a função revelada pela diferença entre a renda disponível e o consumo. Representando por S a função poupança, temos:

$$S = x - C \Rightarrow S = x - (C_0 + m \cdot x)$$

$$\Rightarrow S = x - C_0 + x - m \cdot x$$

$$\Rightarrow S = -C_0 + x - m \cdot x$$

O que colocando x em evidência, resulta em $S = -C_0 + (1 - m) \cdot x$

Observe que em todos as situações apresentadas acima a função afim aparece com notável presença. Vejamos algumas aplicações:

Aplicação 4.5. [4] Na loja A, um aparelho custa 3800 reais mais uma taxa mensal de manutenção de 20 reais. Na loja B, o mesmo aparelho custa 2500 reais, porém a taxa de manutenção é de 50 reais por mês. Qual das duas opções é a mais vantajosa?

Após x meses de uso, quem comprou o aparelho na loja A gastou $f(x) = 3800 + 20x$ reais, enquanto quem comprou na loja B gastou $g(x) = 2500 + 50x$. Tem-se $g(x) - f(x) = 30x - 1300$. Logo, para todo $x \geq \frac{1300}{30}$, tem-se $g(x) - f(x) \geq 0$. Noutras palavras, após 43 meses e 10 dias de uso, o aparelho comprado na loja B, que inicialmente era mais barato, torna-se mais caro do que o comprado na loja A.

Aplicação 4.6. [4] Em uma indústria metalúrgica o custo de produção de uma peça automotiva corresponde a um custo fixo mensal de R$ 5 000,00 acrescido de um custo variável de R$ 55,00 por unidade produzida mais 25% de impostos sobre o custo variável. Considerando que o preço de venda dessa peça pela indústria aos comerciantes é de R$ 102,00, determine:

a) a função custo da produção de x peças.
b) a função receita referente a venda de x peças.
c) a função lucro na venda de x peças.
d) o lucro obtido com a venda de 500 unidades.

No item a) a função custo será dada pela somatória do custo fixo, do custo variável e do imposto cobrado de acordo com o custo variável.

$$C(x) = 5000 + 55x + 0,25 \cdot 55x$$

No item b) a função receita é dada por:

$$R(x) = 102x$$

No item c) a função lucro é obtida subtraindo a função receita da função custo.

$$L(x) = 102x - (5000 + 55x + 0,25 \cdot 55x)$$

$$L(x) = 102x - 5000 - 55x - 0,25 \cdot 55x$$

$$L(x) = 102x - 55x - 13,75x - 5000$$

$$L(x) = 33,25x - 5000$$

Quando calculamos a função lucro determinamos uma expressão capaz de determinar o lucro líquido obtido da venda de x peças, isto descontados os custos de produção e os impostos municipais, estaduais e federais.

No item d) o lucro obtido com a venda de 500 unidades corresponde a:

$$f(x) = 33,25x - 5000$$

$$f(500) = 33,25 \cdot 500 - 5000$$

$$f(500) = 16625 - 5000$$

$$f(500) = 11625$$

O lucro obtido é igual a R$ 11 625,00.

Aplicação 4.7. [2] Em 2000, a porcentagem de indivíduos brancos na população dos Estados Unidos era de 70% e outras etnias "latinos, asiáticos e outros"constituíam os 30% restantes. Projeções do órgão do governo norte-americano encarregado do censo indicam que, em 2020, a porcentagem de brancos deverá ser de 62%.

Fonte: *Newsweek International, 29 de abr.2004.*

Admite-se que essas porcentagens variam linearmente com o tempo. Com base nessas informações, é correto afirmar que os brancos serão a minoria na população norte-americana a partir de:

a) 2050

b) 2060
c) 2070
d) 2080

Como as porcentagens variam linearmente com o tempo, temos: $P(t) = a \cdot t + b$. Sendo P a população de brancos, temos:

$$\begin{cases} 0,70 & = & a \cdot 2000 & + & b \\ 0,62 & = & a \cdot 2020 & + & b \end{cases}$$

O que resulta em $a = -0,004$ e $b = 8,7$. Portanto, $P(t) = -0,004 \cdot t + 8,7$

Os brancos são minoria quando a sua população for menor de que 50%, ou seja:

$P(t) < 50\% \Rightarrow -0,004 \cdot t + 8,7 = 0,50 \Rightarrow t > 2050$. O que corresponde a alternativa a como resposta correta.

4.2.4 Biologia

Vejamos as aplicações abaixo extraídas de [2],[4] e [11].

Aplicação 4.8. [4] Sabe-se que 100 g de lentilha seca contêm 24 g de proteína e 100 g de soja seca contêm 36 g de proteína. Para um consumo diário de 72 g de proteína, baseado somente no consumo de soja e lentilha:

a) Quantos gramas de lentilha devem ser consumidos se for consumido 1,8 g de soja?

b) Quantos gramas de soja devem ser consumidos se for consumido 1,8 g de lentilha?

c) Se o grama de lentilha custa R$0,07 e o grama de soja custa R$0,09, em qual das situações gasta-se menos?

Sendo x o consumo de lentilha e y o consumo de soja, temos que $24x + 36y = 72$ é a equação que relaciona o consumo de soja com o consumo de lentilha, ou $y = -\dfrac{2}{3} \cdot x + 6$ é a função afim que associa x a y.

Para o item a) temos $y = 1,8$, então $x = 6,3$

Para o item b) temos $x = 1,8$, então $y = 2,4$

Para o item c) temos que a função custo é dada por:

$0,07 \cdot 24x + 0,09 \cdot 36y$ ou $1,68x + 3,24y$

Se $x = 1,8$ e $y = 2,4$, o custo é de R$ 10,8. Se $x = 6,3$ e $y = 1,8$, o custo é de R$ 16,41. Logo, a primeira situação é mais econômica.

Aplicação 4.9. [11] Biólogos descobriram que o número de sons emitidos por minuto por certa espécie de grilos esta relacionado com a temperatura. A relação é quase linear. A 20 °C, os grilos emitem cerca de 124 sons por minuto. A 45 °C, emitem 172 sons por minuto. Encontre a equação que relaciona a temperatura em Celsius C e o número de sons n.

Observe que a função afim que descreve esta situação é da forma $C = a \cdot n + b$

$$\begin{cases} 20 & = & a \cdot 124 & + & b \\ 44 & = & a \cdot 172 & + & b \end{cases}$$

O que resulta que $a = \dfrac{1}{2}$ e $b = -42$, logo a equação que relaciona a temperatura em Celcius C e o número de sons n é dada por $C = \dfrac{1}{2} \cdot n - 42$

Aplicação 4.10. [2] Uma pessoa obesa, pesando em certo momento 156 kg, recolhe-se a um *spa* onde se anunciam perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo P, que essa pessoa poderá atingir após n semanas;

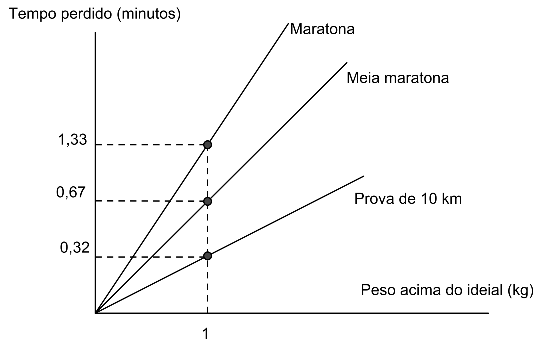
b) calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no spa para sair de lá com menos de 120 kg de peso.

Observe que na primeira semana a pessoa perde 2,5 kg, logo seu peso é P = 156 - 2,5 = 153,5. Na segunda semana ele perde mais 2,5 kg, logo seu peso é dado por $P = 156 - 2 \cdot 2,5 = 151$, e assim sucessivamente, então após n semanas a pessoa perde $P = 156 - 2,5 \cdot n$.

Para a pessoa sair de *spa* com 120 kg, ela deve permanecer: $120 = 156 - 2,5 \cdot n$ o que resulta em $n = 15$ semanas

Aplicação 4.11. [4] O excesso de peso pode prejudicar o desempenho de um atleta profissional em corridas de longa distância como a maratona (42,2 km), a meia maratona (21,1 km) ou prova de 10 km. Para saber uma aproximação do intervalo de tempo a mais perdido para completar uma corrida devido ao excesso de peso, muitos atletas utilizam os dados apresentados na tabela e no gráfico:

Altura (m)	Peso ideal para atleta masculino de ossadura grande, corredor de longa distância(kg)
1,57	56,90
1,58	57,40
1,59	58,00
1,60	58,50



Usando essas informações, um atleta de ossatura grande, pesando 61,4 kg e com altura igual a 1,58 m, que tenha corrido uma prova de 10 km, pode estimar que, em condições de peso ideal, teria melhorado seu tempo na prova em:

a) 5,32 minutos.
b) 2,68 minutos.
c) 1,28 minutos.
d) 0,96 minutos.
e) 2,01 minutos.

Da tabela percebemos que o atleta está 4 kg acima do peso ideal para sua altura. Do gráfico descobrimos que cada quilo acima do peso ideal equivale a 0,32 minuto perdido na prova de 10 Km. Assim, o tempo perdido pelo atleta é de $4 \cdot 0,32 = 1,28$ minuto. O que corresponde a alternativa c como resposta correta.

Aplicação 4.12. [2] O uso do petróleo como fonte energética representa uma das maiores causas de poluição do ar. Sua queima ocasiona a formação de gases responsáveis pelo efeito estufa , que favorece o aquecimento global. O instituto Krupa (1997), em suas pesquisas, registrou a presença desses gases, juntamente com suas respectivas contribuições percentuais ao efeito estufa, segundo a tabela abaixo:

Gases	CO_2	Ozônio	CFC_s	Óxido nitroso	Metano
Percentuais (%)	60	8	12	5	15

Diversas alternativas estão sendo testadas como combustíveis ao petróleo, que se acumulou subsolo há milhares de anos e que, num período não muito distante, se esgotará. Uma dessas alternativas está na utilização dos biocombustíveis, obtidos de plantas que produzem álcool ou de palmeiras que produzem o óleo e reduzem o efeito estufa. A cana-de-açúcar é uma das plantas promissoras para a produção desses combustíveis, principalmente no Brasil, devido à área de 4 milhões de hectares ocupadas em terras agricultáveis, representando cerca de 8% do território brasileiro. Essa fatura ocasionou implantação, nos anos 80, do objeto Proálcool, gerando a fabricação de carros movidos também a álcool. Atualmente, nossas montadoras já fabricam os carros flex (movidos aos dois combustíveis: gasolina e álcool).

Numa concessionária, o departamento de vendas procurou relacionar linearmente a quantidade x de carros a álcool, vendidos com o preço y de cada um. Para tanto, verificou que: quando o carro a álcool era oferecido a R$25 000,00, nenhum era vendido, porém, quando o preço passava a ser de R$20,000,00, 10 carros a álcool eram vendidos. Nessas condições, a relação encontrada entre x e y foi:

a) x + 500y + 50000 = 0
b) 500x - 2y - 50000 = 0
c) 500x + y - 25000 = 0
d) x + 500y - 25000 = 0
e) x + 2y - 50000 = 0

Quando temos $x = 0$, vem $y = a{\cdot}0+b = 25000 \Rightarrow b = 25000$. Quando $x = 10$, vem $20000 = a \cdot 10+25000 \Rightarrow a = -500$. Portanto $y = -500x+25000 \Rightarrow 500x+y-25000 = 0$. O que corresponde a alternativa c como resposta correta.

Aplicação 4.13. [11] Dois líquidos diferentes encontram-se em recipientes idênticos e tem taxas de evaporação constantes. O líquido I encontra-se inicialmente em um nível de 100 mm e evapora-se completamente no quadragésimo dia. O líquido II, inicialmente com nível 80 mm, evapora-se completamente no quadragésimo oitavo dia. Determine, antes da evaporação completa de ambos, ao final de que dia os líquidos terão o mesmo nível (em mm) nesses mesmos recipientes.

Para o líquido I, temos: $f(t) = 100 - d \cdot t \Rightarrow f(40) = 100 - d \cdot 40 \Rightarrow d = \dfrac{5}{2}$. Logo $f(t) = 100 - \dfrac{5}{2} \cdot t$.

Para o líquido II, temos: $g(t) = 80 - d \cdot t \Rightarrow g(48) = 80 - d \cdot 48 \Rightarrow d = \dfrac{5}{3}$. Logo $g(t) = 80 - \dfrac{5}{3} \cdot t$.

Para terem o mesmo nível nesses recipientes, temos que ter:

$f(t) = g(t) \Rightarrow 100 - \dfrac{5}{2} \cdot t = 80 - \dfrac{5}{3} \cdot t \Rightarrow t = 24$. Portanto os líquidos terão o mesmo nível após 24 dias.

4.2.5 Aplicações Diversas

Neste tópico apresentaremos algumas aplicações contextualizadas que com base no conteúdo apresentado para o estudo de função afim, você leitor exercite e confira as respostas no apêndice C no final do material. Estas aplicações são de minha autoria.

Aplicação 4.14. Estudos revelam que praticar exercícios trazem um grande benefício a saúde. Confira os principais benefícios da prática regular de exercícios e motive-se para dar início a uma atividade:

1) Exercício ajuda a diminuir e controlar o peso.

2) Diminui o risco de doenças no coração, pressão alta, osteoporose, diabetes e obesidade.

3) Melhora os níveis de colesterol sanguíneo.

4) Aumenta as taxas do bom colesterol.

5) Aumenta a resistência muscular.

6) Tendões e ligamentos ficam mais flexíveis.

7) Exercício traz bem-estar mental e ajuda a tratar a depressão.

8) Alivia o estresse e a ansiedade.

9) Combate a insônia.

10) Atividades físicas ajudam a produzir serotonina - o hormônio do bem-estar.

Com tantos benefícios não tem como não querer movimentar o corpo. Saiba que nunca é tarde para começar uma atividade física. Consulte um médico para checar a sua saúde e escolha uma atividade que você goste.

Fonte: *saudebrasilnet.com.br*

Em Belém, a academia "Tudo em Cima" cobra uma taxa de inscrição de R$ 90,00 e mensalidade de R$ 50,00. A academia "Corpo Sarado" cobra uma taxa de inscrição de R$ 60,00 e mensalidade de R$ 55,00.

a) Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aulas, em cada academia.

b) Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende "malhar" durante um ano?

Aplicação 4.15. O planeta Terra é envolto por uma camada de gases, denominada atmosfera terrestre, que é retida pela força da gravidade. A existência da atmosfera é muito importante, pois ela protege a vida na Terra absorvendo a radiação ultravioleta do sol, aquecendo a superfície através da retenção de calor (o chamado "efeito estufa") e reduzindo os extremos de temperatura entre o dia e a noite.

Com a finalidade didática, a atmosfera foi dividida em cinco camadas que, juntas, compõem uma extensão de aproximadamente 1.000 km. Essas camadas não se distribuem igualmente, a sua distância varia de acordo com a densidade dos elementos químicos que as compõem, e à medida que se afastam da superfície da Terra, elas se tornam mais rarefeitas.

A troposfera é a camada da atmosfera em que vivemos e respiramos. Ela vai do nível do mar até 12000 m de altura aproximadamente. É nesta camada que ocorrem os fenômenos climáticos (chuvas, formação de nuvens, relâmpagos). É também na troposfera que ocorre a poluição do ar. Os aviões de transporte de cargas e passageiros voam nesta camada. Nela, a temperatura diminui 2°C a cada aumento de 300 metros na altitude.

Suponha que em um ponto A, situado ao nível do mar, a temperatura seja de 20°C. Pergunta-se:

a) Em que altitude, acima do ponto A, a temperatura é de 0°C?

b) Qual é a temperatura a 10.500 metros acima do mesmo ponto A?

Aplicação 4.16. O ano de 2015 está sendo atribulado para todos os setores da economia brasileira, isto não é novidade. Especialistas afirmam que a tormenta deve permanecer durante o resto deste ano e começar a amansar no ano de 2016. Enquanto isto, muitas empresas do comércio não estão aguentando trabalhar no vermelho e, sem enxergar saída, fechando as portas. Com isso, montar um negócio nos tempos de hoje não é simplesmente ter dinheiro em caixa e pronto!.

Independente do tipo de negócio que você deseja montar é muito importante fazer um planejamento. Portanto, a primeira coisa a ser feita é pesquisar que tipo de negócio seria interessante para a sua região e que você tenha afinidade e aptidão para trabalhar. A partir daí é possível começar a tomar as outras providências para montar a empresa.

Marcos possui uma pequena fábrica de fogão. Ele percebeu que tem uma despesa fixa (aluguel da fábrica, salários, etc) de R$ 6.000,00 por mês. O custo para a fabricação de um fogão é de R$ 450,00 e o preço de venda é de R$ 1.050,00.

a) Escreva o custo mensal (C), a receita (R) e o lucro (L) em função do número x de fogões vendidos.

b) Determine o ponto de equilíbrio, ou seja, o número de fogões que devem ser vendidas para que o custo e a receita se equilibrem, isto é, o valor de x para que $L = 0$.

c) Qual será o lucro da fábrica se produzir e vender 25 fogões por mês?

d) Suponha que a fábrica reduza o preço do fogão para R$ 950,00. Quantas fogões a fábrica terá que produzir e vender por mês para ter lucro?

Aplicação 4.17. Observe o texto sobre "O MAR"

Além de ser a origem da vida, o mar é um enorme habitat biogeográfico que influi nos fenômenos atmosféricos registrados nas terras emersas. Os mares são também importante fonte de recursos alimentícios para a população humana.

Genericamente, chama-se mar o conjunto da massa de água que cobre a maior parte da superfície terrestre. No sentido mais restrito da oceanografia, mares são parcelas dos oceanos - situadas em bacias limitadas e mais ou menos isoladas - adjacentes a terras emersas. Em virtude desse relativo isolamento, as águas dos mares apresentam propriedades físico-químicas próprias, e são influenciadas pelas condições ecológicas reinantes nas terras vizinhas.

A partir dos oceanos, grandes massas líquidas compreendidas entre os continentes, se formam os mares, que são como suas seções marginais. Mares e oceanos abrigam 97% da água de todo o planeta e cobrem cerca de 71% de sua superfície – o equivalente a 362 milhões de quilômetros quadrados.

Fonte : Biomania

A pressão da água do mar varia com a profundidade. Sabe-se que a pressão da água ao nível do mar é de 1 atm (atmosfera), e que a cada 8 m de profundidade a pressão sofre um acréscimo de 0,8 atm. A expressão que dá a pressão p, em atmosferas, em função da profundidade h, em metros, é:

a) p = 1 + 0,5h
b) p = 1 + 0,1h
c) p = 1 - 0,5h
d) p = 0,5h
e) p = 0,1h

Aplicação 4.18. Atualmente a porcentagem de álcool na gasolina comum é de 27%, o que causa um desempenho não satisfatório para o bolso do consumidor, pois o mesmo deverá percorrer distâncias menores com a mesma quantidade de litros de gasolina.

A distância entre as cidades de Abaetetuba e Igarapé-Miri no Estado do Pará é de 56 Km. Carlos, funcionário do Banco do Brasil em Igarapé-miri, mora em Abaetetuba e viaja todos os dias em seu carro que consome 1 litro de gasolina comum que custa R$ 3,49 para cada 8 Km percorridos. Após essa mudança, Carlos percebeu que o consumo de seu carro passou a ser de 1 litro de gasolina comum para 7 Km percorridos. Para economizar ele passou a usar gasolina aditivada em seu carro, que apresenta o mesmo desempenho da gasolina comum(antes do aumento), só que com o valor de R$ 3,69 o litro.

Com base nas informações apresentadas acima, quanto Carlos vai desenbolsar em 5 dias de trabalho usando a gasolina comum? e usando a gasolina aditivada?

Capítulo 5

Uma proposta metodológica para o ensino de Função Afim.

Neste capítulo vamos apresentar uma proposta de ensino da função afim, em especifico abordar o [T.C.F.A], como visto anteriormente o mesmo possibilita identificar se numa determinada situação o modelo matemático utilizado para resolver a situação problema é o de uma função afim.

5.1 Um relato da minha experiência

Atuando como professor do ensino básico desde o ano 2000, adquiri uma boa experiência e prática de sala de aula ensinando os conteúdos da disciplina matemática. Mas foi no ano de 2004, que tive a oportunidade de trabalhar com o ensino médio, especificamente com o 1º ano que de acordo com os livros didáticos aborda o estudo de funções, onde aqui vamos relatar os procedimentos que eu usava para repassar o conhecimento de função afim. Inicialmente procurava seguir na risca o que o livro didático (que no meu ver era o único recurso didático) me proporcionava para repassar para os alunos.

Iniciava o conteúdo, apresentando a definição de função afim, e exemplificava de maneira algébrica tipos de funções afins: aquelas completas, que apresentavam os valores dos coeficientes a e b, aquelas que não tinham o valor de b, outras que só tinham o valor de b, e assim introduzia a definição de função afim (aparentemente). Em seguida ensinava a determinar os zeros ou raízes da função, onde nesta parte sugeria que sempre igualassem a zero à função e encontrassem o valor de x que zerasse a função. Finalizando, com a construção do gráfico da função afim, argumentava que o mesmo sempre era uma reta e para encontra o mesmo, bastava atribuir dois valores quaisquer para a abscissa x (que na maioria das vezes eram 0 e 1), possibilitando encontrar os valores das ordenadas nestes pontos.

Durante alguns anos essa prática foi se repetindo, e nem um momento percebia a necessidade de aprofundar o assunto ou simplesmente de rever como ele estava sendo abordado. Durante esta época pra ser sincero nunca tinha escutado falar em caracterização da função afim. No final do ano de 2009, fiz o concurso para tutor presencial para o Curso de Educação a Distância de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade do Estado do Pará-UEPA em parceira com a Universidade Aberta do Brasil-UAB, o qual fui classificado e contratado para atuar. Nesse momento, percebi que para contribuir com a formação de futuros professores de matemática, precisaria rever muitos conceitos e conteúdos que já estavam defasados, e de cara fui me deparando com o de função afim. Todos os alunos receberam o livro do Dante: Matemática Contextos & Aplicações, onde no mesmo aparecia a função afim de uma maneira nunca abordada por mim em sala de aula. E agora, como repassar o conteúdo de função afim de uma maneira diferente da habitualmente trabalhada em sala de aula?

As coisas encaminhavam de maneira acelerada, e por sorte o ano letivo de 2010 na escola do ensino médio onde trabalhava já tinha começado, e aí percebi que naquele momento seria a primeira vez que abordaria o conceito de função afim contextualizada, mas confesso que ainda trazia muitos vícios da metodologia anterior. No entanto por mais que melhorasse a forma de abordar o conteúdo (contextualizada não mais só algébrica), ainda apresentava muitas sequelas, tanto por parte de conteúdo como de ensino.

Em 2011, surge a primeira oportunidade de aprofundar os conhecimentos matemáticos num desconhecido PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), que de cara percebi que era uma oportunidade de adquirir conhecimento necessário e suficiente para mudar de vez a minha prática em sala de aula. Com o surgimento do Profmat, comecei a ter os primeiros contatos com os livros da SBM (Sociedade Brasileira de Matemática): Temas e problemas elementares; Temas e problemas; matemática do ensino médio volumes 1, 2 e 3. No início, os conteúdos desses livros eram uma coisa do outro mundo. Fazendo uma pesquisa mais aguçada, conheci o PAPMEM (Programa de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Médio), que já contribuía com os professores de matemática desde 1990.

Com o início das aulas do curso de mestrado, fui amadurecendo os conhecimentos e enfim, comecei a perceber como a forma que tentava de introduzir os conceitos e definições de diversos conteúdos matemáticos era de uma forma barroca, que precisava ser reformulada imediatamente. E, a oportunidade que apareceu de imediato foi o estudo de função afim, pois o ano letivo de 2013 estava começando e tinha tudo para aproveitar a oportunidade para praticar essa "nova maneira" de abordar a função afim.

No entanto, ainda fui muito tímido, apresentei uma situação problema do dia a dia e em seguida defini a função afim. Em seguida apresentei casos particulares de funções afins: Função Identidade; Função Constante; Função Linear. Onde neste ultimo caso apresentado tive a oportunidade de abordar pela primeira vez o Teorema Fundamental da Proporcionalidade, apresentando situações frequentes do cotidiano dos alunos em que a proporcionalidade aparece atrelado a função afim. Dando continuidade ao assunto, apresentei o Teorema da Caracterização da Função Afim, onde em cada situação problema apresentada a eles, procurei me preocupar em enfatizar que, acréscimos iguais na variável independente implicam em acréscimos iguais na variável dependente. Por fim, apresentei somente na Física, a aplicação deste teorema.

Esse relato da minha experiência mostra a evolução do que aconteceu na minha prática docente durante estes últimos anos e a forma como o Profmat pode auxiliar e dar base suficiente e necessária para que o professor se reformule não só em formas de apresentar o conteúdo, mas em sua pratica docente em sala de aula, e enfatiza o quanto o professor de matemática que não se reformular frequentemente pode ser atropelado pela evolução do ensino de uma forma geral.

5.2 Proposta de um curso de Extensão

Gostariamos de deixar claro ao leitor que aqui estamos apresentando uma proposta de curso de extensão, que com base no conteúdo acima apresentado pode amadurecer o conhecimento sobre as funções afins.

5.2.1 Publico Alvo

Vamos apresentar uma proposta de curso de extensão visando aperfeiçoar o ensino de funções afins no ensino básico, onde o mesmo pode ser oferecido para alunos do 9º ano do ensino fundamental, para os alunos do 1º, 2º e 3º ano do ensino médio e para alunos do curso de graduação em matemática.

5.2.2 Problemática

Devido à necessidade e a dificuldade dos alunos em escolher a função afim como modelo matemático de resolução surge a seguinte problemática: Como saber, numa determinada situação problema, o modelo matemático a ser adotado é uma função afim?

5.2.3 Justificativa

Com o surgimento do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, grande parte dos alunos do ensino básico se encontram dificuldades em relação ao estudo de função afim, os mesmos apresentam dificuldades em identificar quando uma determinada situação problema pode ser resolvida com o auxilio do estudo desta função. Este conteúdo, se apresenta dentro das competências relacionadas Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias exigidos no Enem.

> Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.
> Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.(Fonte: www.inep.gov.br Acesso:)

Onde essas competências exigem do aluno as habilidades abaixo listadas:

> *H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.*
> *H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.*
> *H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.*
> *H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.*
> *H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.*
> *H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.*
> *H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.*
> *H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.*
> *H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. (Fonte: www.inep.gov.br)*

Isto ocorre devido a forma que está sendo abordado o conteúdo e a falta de reformulação das práticas de muitos docentes. As competencias e habilidades apresentadas acima, podem ser adquiridas trabalhando uma metodologia diferenciada. Pensando nesta situação, apresento um curso de extensão com duração de 40 horas, visando aprofundar o conhecimento e lapidar as possíveis sequelas deixadas tanto pelo aluno (em seus estudos particulares) como pelo professor (pela falta de formação adequada).

5.2.4 Objetivo Geral

* Interpretar quando uma determinada situação problema pode ser modelada usando a função afim como conhecimento matemático.

5.2.5 Objetivos Específicos

* Ampliar os conceitos básicos de gráfico de uma função, plano e produto cartesiano.

* Distinguir grandezas diretamente ou inversamente proporcionais a várias outras.

* Utilizar o teorema fundamental da proporcionalidade em situações problemas.

* Identificar taxa de variação e gráficos de funções afins.

* Concluir que a função linear é um caso particular de função afim.

* Resolver situações-problema que são modeladas pela função afim.

* Relacionar a função afim com a progressão aritmética.

* Utilizar o teorema da caracterização da função afim em situações problemas e em outras áreas de conhecimento.

5.2.6 Metodologia

Serão utilizadas situações problemas práticas do cotidiano do aluno, onde nas mesmas serão introduzidos os conceitos fundamentais relativos para o estudo da função afim. Assim, o aluno formaliza os conceitos e aplica na prática, pois, segundo Ubiratan D'Ambrósio:

> A modelagem matemática é eficiente a partir do momento em que nos concientizamos de que estamos sempre trabalhando com aproximações da situação real, que, na verdade, estamos elaborando sobrerepresentações. Assim, a modelagem matemática pode ser uma metodologia de ensino muito útil e se enquadra no Programa Etnomatemática, que inclui a crítica, também de natureza histórica, sobre representações, que deve estar subjacente ao processo de modelagem.(D'AMBRÓSIO, 1993)

Estas situações do cotidiano, fortalecem o conhecimento atribuído em sala de aula onde os mesmos poderão ser trabalhados:

* Apresentando situações extraídas de reportagens de jornais e revistas;

* Construir a lei de formação da função afim;

* Elaborar uma nova situação de acordo com a realidade do aluno e expressando graficamente tal situação

* Usando o software Geogebra podemos construir os gráficos de maneira dinâmica

* Apresentar situações onde de imediato o aluno posso identificar a linearidade e prever situações futuras;

Todas essas maneiras de apresentar a função afim, se juntarão e permitiram um entendimento melhor sobre o assunto, que posteriormente ele use no seu cotidiano.

5.2.7 Recursos Didáticos

Para realização da metodologia, utilizaremos:

* Reportagens de jornais contendo anúncios de vendas de imóveis, carros entre outros;

* "*Data show*" para tornar mais dinâmica à aula

* Pincel para quadro branco para resolução das atividades compartilhadas

* Papel, para uso individual de possíveis anotações.

5.2.8 Formas de Avaliação

A avaliação será contínua considerando os critérios de participação ativa dos discentes no decorrer das aulas e terá direito ao certificado de participação o aluno que tiver no mínimo 75% de frequência e apresentar pelo menos uma das situações problemas resolvida em sala de aula.

5.2.9 Cronograma das Atividades

O curso terá duração de 40 horas distribuídas em 20 encontros presenciais de 2 horas/aula e pode ser trabalhado de acordo com o cronograma apresentado na tabela abaixo.

Conteúdo	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	13º	14º	15º	16º	17º	18º	19º	20º
Produto cartesiano, plano cartesiano e gráfico de uma função	x																			
Resolução de problemas		x																		
Proporcionalidade			x																	
Resolução de problemas				x																
Função linear, função afim e Taxa de variação					x															
Resolução de problemas						x														
Gráfico da função afim							x													
Resolução de problemas								x												
Conexão entre função afim e progressão aritmética									x											
Resolução de problemas										x										
Caracterização da função afim											x									
Resolução de problemas												x								
Aplicações na física													x							
Resolução de problemas														x						
Aplicações na economia e finanças															x					
Resolução de problemas																x				
Aplicação na geometria																	x			
Resolução de problemas																		x		
Mesa Redonda																			x	x

5.2.10 Referência Bibliográfica

Para este curso a bibliografia indicada é a mesma utilizada neste trabalho, onde o mesmo possui conteúdo e argumentos necessários para execução do mesmo.

5.3 Planos de Aulas

Apresentamos a seguir, como sugestão, os planos de aulas que podem ser adaptados para as aulas do curso de extensão.

5.3.1 Plano de Aula (1)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática   CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Produto cartesiano, plano cartesiano e gráfico de uma função.

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Ampliar os conceitos básicos de gráfico de uma função, plano e produto cartesiano.

2.2- ESPECIFICOS:
* Reconhecer e definir o gráfico de uma função.
* Analisar no plano cartesiano as figuras geométricas construídas a partir do produto cartesiano em dois conjuntos.
* Resolver situações problemas envolvendo gráfico, plano e produto cartesiano.

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO

Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.2 Plano de Aula (2)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Proporcionalidade.

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Distinguir grandezas diretamente ou inversamente proporcionais à várias outras.

2.2- ESPECIFICOS:
* Identificar grandezas diretamente e inversamente proporcionais
* Resolver problemas que envolvam duas grandezas proporcionais
* Estabelecer a diferença entre uma grandeza à varias outras

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou *data show* e *notebook*.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.3 Plano de Aula (3)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Função linear e afim e Taxa de variação.

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Reconhecer uma função Linear ou Afim e sua taxa de variação.

2.2- ESPECIFICOS:
* Identificar situações onde apresenta-se as funções linear e afim
* Relacionar a taxa de variação com crescimento e decrescimento
* Encontrar a lei de formação das funções atravéz de situações problemas

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.4 Plano de Aula (4)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Gráfico da função afim .

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Construir o grafico da função afim a partir de uma situação problema.

2.2- ESPECIFICOS:
* Identificar em situações problemas o grafico da função afim
* Exercitar a construção de graficos
* Encontrar a lei de formação das funções atravéz sabendo seu gráfico

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Uso do sftware Geogebra pra uma melhor visualização dos gráficos; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.5 Plano de Aula (5)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Conexão entre função afim e progressão aritmética .

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Ampliar o conhecimento do estudo de função afim .

2.2- ESPECIFICOS:
* Estabelecer a relação entre os conhecimentos
* Exercitar o comportamennto de Progressões usando a idéia de funçã afim
* Resolver aplicações que envolvem PA

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.6 Plano de Aula (6)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática   CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Caracterização da função afim .

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Compreender a importância do Teorema da Caracterização da Função Afim .

2.2- ESPECIFICOS:
* Verificar que acréscimos iguais a variavél independente acarretam em acréscimos iguais a variável dependente
* Identificar usando o teorema quando em uma situação problema devemos adotar a função afim para resolvê-lo
* Resolver aplicações do cotidiano do aluno

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

5.3.7 Plano de Aula (7)

1- IDENTIFICAÇÃO:

1.1- INSTITUIÇÃO: Nome da escola .

1.2- PROFESSOR: Nome do Professor

1.3- DISCIPLINA: Matemática CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

1.4- ASSUNTO DA AULA: Aplicações na física, economia, finanças e geometria .

1.5- CARGA HORÁRIA: 2 horas/aulas

2- OBJETIVOS
2.1- GERAL:
* Identificar a propriedade característica das funções afins.

2.2- ESPECIFICOS:
* Apliar o conhecimento de função afim fazendo sua aplicação em outras áreas
* Usar o teorema fundamental da proporcionalidade e da ccaracterização da função afim para resolver situações problemas
* Resolver aplicações do cotidiano do aluno

3- PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
* Aula expositiva; resolução de atividades individuais e em grupo; Apresentação de situações propostas pelos alunos; Debate.

4- RECURSOS DIDÁTICOS
* Quadro branco, livros didáticos, Apostila, projetor multimídia ou data show e notebook.

5- FORMAS DE AVALIAÇÃO
Entrega das atividades propostas em sala de aula.

Considerações Finais

Procuramos na apresentação deste trabalho abordar um problema comum no meio de ensino da disciplina matemática, que é a dificuldade de compreensão dos significados dos elementos que compõem uma função afim e saber quando em derterminada situação o modelo matemático a usar é de uma função afim. Porém, o fizemos com o intuito de evidenciá-lo para propor uma alternativa que viesse a sanar ou pelo menos amenizar tais dificuldades.

A prática no processo de ensino-aprendizagem tem-se mostrado um tanto alheia às conseqüência que estão sendo observadas ao longo dos tempos na formação de nossos alunos. Em certos momentos entendemos que ocorre certo descaso ou menosprezo no que se refere a avaliar como nossos alunos têm saído das salas de aula após receberem todo um conjunto de "ensinamentos"que são dados nas escolas, isto é, se isso está realmente fazendo sentido para a vida cotidiana e social desses futuros cidadãos.

Durante muito tempo, um grande esforço tem sido feito para melhorar o ensino da Matemática, tanto através de pesquisas nesta área educativa e pedagógica como através do desenvolvimento de materiais educativos ou novas formas de se ensinar e repassar conhecimentos, ensinamentos e informações. Com isso, a abordagem de um material que apresente os conceitos fundamentais para determinado conteúdo é uma prática que utilizamos para compor este trabalho com objetivo de despertar no leitor essa ideia de trabalhar o necessário para um entendimento melhor.

Tendo isso em mente é que partimos para o desenvolvimento desta nossa proposta de trabalho que procurou organizar um material com definições, conceitos e observações importantes tanto para resolver situações que envolvem a função afim, como para reformular sua pratica pedagogica.

Enfim, é importante consolidar os conceitos de grandezas diretamente proporcionais, relacionando-os à função linear. A definição de função afim é apresentada no segundo capitulo seguida da ideia da taxa de variação média e a importante conexão entre as funções afins e as progressões Aritmética.

Outro ponto de destaque é a propriedade que caracteriza a função afim: " acréscimos iguais a variável dependente, correspondem a acréscimos iguais a a variável independente". Finalizando com a apresentação de aplicações em algumas áreas de estudo, que esclarecem a importancia de tal conhecimento para domínio de resolução de várias situações que envolvem a situação afim.

Terminamos este trabalho disponibilizando ao leitor uma proposta de ensino. Esta contribuição deixa uma metodologia de ensino que pode fazer diferença ao ensinar funções afins. Creio que leitores que estão iniciando sua prática docente terão um norte a tomar pois os livros didáticos não apresentam esta configuração de sugerir planos de aulas de determinado assunto. É importante que o leitor, principalmente aquele que está iniciando sua prática docente, faça adaptações do curso, criando outros cursos de extensão referentes a outros conteúdos para que após algum tempo o mesmo tenha um próprio referencial bibliográfico.

Ressaltamos ainda que este trabalho possa servir de base para estudos e trabalhos posteriores objetivando a construção de conceitos e consequentemente uma aprendizagem significativa.

Referências Bibliográficas

[1] AZEVEDO, Ricardo Santos de. ***Resolução de Problemas no Ensino de Função Afim*** - Ricardo Santos Azevedo ? Rio de Janeiro, 2014. 33 f. il. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

[2] DANTE, Luis Roberto. ***Matemática - Contexto e Aplicações*** - Volume 1. São Paulo: Ática, 2010.

[3] D'AMBRÓSIO, Ubiratam. ***Etnomatemática: um programa.*** - Educação matemática em revista: Blumenau, n.1, p. 5 - 11, 1993.

[4] IEZZI, Gelson. ***Fundamentos da Matemática Elementar***. Volume 1, São Paulo: Atual, 2003.

[5] IEZZI, Gelson. ***Matemática Ciências e Aplicações***. Volume 1: Ensino Médio/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

[6] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. ***Um Curso de Cálculo*** - Volume 1/Hamilton Luiz Guidorizzi. - 5ed. , [reimpr.] - Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[7] LIMA, Elon Lages. ***A matemática do Ensino Médio*** - Volume 1 e 4/ Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cezar Morgado, 9ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[8] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. ***Temas e Problemas Elementares*** - Rio de Janeiro: SBM 2010

[9] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. ***Temas e Problemas*** - Rio de Janeiro: SBM 2010

[10] LIMA, Elon Lages. ***Números e Funções Reais: Coleção Profmat*** - Rio de Janeiro: SBM 2010

[11] PAIVA, Manoel. ***Matemática: Paiva***. Volume 1: Ensino Médio. 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

[12] REZENDE, Severino Miranda. ***Apostila II***.2006.

[13] SOUZA, Walfredo José de. ***Função Afim: Teoria e Aplicações*** - Walfredo José de Souza. - Natal, 2013. 40 f. il. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

[14] TRAJANO, Antônio Bandeira. ***Arithmetica Progressiva Illustrada: ensino teórico e prático***. 78ª edição de 1948. - Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves.

Apêndice A

Demonstração do [T.F.P]

Antes de apresentarmos a demonstração do T.F.P retirada de [7], vamos enunciar uma propriedade fundamental dos números reais *"Proriedade Arquimediana"* em seguida o Lema 1 abaixo, que são de grande inportancia na demonstração do T.F.P.

Propriedade de Arquimedes [6]: Se $x > 0$ e y são dois reias qualquer, então existe pelo menos um número natural n talque

$$n \cdot x > y$$

Lema 1: Sejam x, y dois números reais quaisquer com $x < y$. Então existe pelo menos um racional r com $x < r < y$.

Demonstração: Sejam $x < y$ números reais quaisquer. Então $x - y < 0$ e podemos usar a propriedade arquimediana dos números reais para $x - y$ e 1 a fim de garantir a existência de um número natural k de modo que $k(x-y) > 1$. Logo, $kx-ky > 1$ nos diz que o intervalo cujos os extremos são os pontos kx e ky possui comprimento maior do que 1 e assim ele contém um número inteiro, digamos, q. Como $kx < ky$ tem-se que $kx < q < ky$ e daí $x < \dfrac{q}{k} < y$. Portanto, sendo $r = \dfrac{q}{k}$ temos $x < r < y$, o que garante que existe pelo menos um racional r com $x < r < y$.

Teorema Fundamental da Proporcionalidade [T.F.P]

Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1). A fim demostrar que (1) $\Rightarrow$ (2), provemos inicialmente que, para todo número racional

$r = \dfrac{m}{n}$, a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = r.f(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se

$$n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x),$$

logo

$$f(rx) = \frac{m}{n}.f(x) = r.f(x).$$

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0.0) = 0.f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos $f(r) = f(r.1) = r.f(1) = r.a = ar$, para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Suponha, por absurdo, que exista algum número irracional x (necessariamente irracional) tal que $f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$. (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo.) Temos:

$$\frac{f(x)}{a} < x$$

Segue do Lema 1 que existe um número racional r tal que:

$$\frac{f(x)}{a} < r < x$$

Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Isto contradiz a monotonicidade da função f e completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

Vamos demostrar que (2) $\Rightarrow$ (3). Partindo de (2), tem-se,

$$f(x+y) = a.(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

logo (2) $\Rightarrow$ (3).

Finalmente, para provar que (3) $\Rightarrow$ (1). Partindo de (3), vê-se imediatamente

$$f(nx) = n.f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Além disso,

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0),$$

logo $f(0) = 0$.

Daí resulta, para quaisquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, que

$$0 = f(0) = f(-nx + nx) = f(-nx) + f(nx)$$

logo

$$f(-nx) = -n.f(x)$$

.

Segue-se que $f(nx) = n.f(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$ provando que (3) $\Rightarrow$ (1)

Apêndice B

Demonstração do [T.C.F.A]

Teorema da Caracterização da Função Afim [T.C.F.A] Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função monótona e injetiva. Se o acréscimo $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.

Demonstração: Para fixar as ideias, suponhamos que f seja uma função crescente. Seja $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, a função dada por $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$. Então, temos que para todo $h \in \mathbb{R}$ vale

$$\begin{aligned}\varphi(2h) &= f(x+2h) - f(x) \\ &= [f((x+h)+h) - f(x+h)] + [f(x+h) - f(x)] \\ &= \varphi(h) + \varphi(h) = 2 \cdot \varphi(h)\end{aligned}$$

Analogamente se vê que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tem-se ainda

$$\varphi(-h) = f(x-h) - f(x) = -[f(x) - f(x-h)] = -\varphi(h)$$

Pois $x = (x-h) + h$. Segue-se que, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $h \in \mathbb{R}$ vale

$$\varphi((-n)h) = \varphi(-nh) = -\varphi(nh) = -[n \cdot \varphi(h)] = (-n)\varphi(h)$$

Como é óbvio que $\varphi(0) = 0$, vemos que $\varphi(nh) = n \cdot \varphi(h)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade concluí-se que $\varphi(ch) = c \cdot \varphi(h)$ para quaisquer $c, h \in \mathbb{R}$, logo φ é linear.

Assim pondo-se $a = \varphi(1) = f(x+1) - f(x)$, tem-se $\varphi(h) = a \cdot h$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Então, para quaisquer $x, h \in \mathbb{R}$ vale $f(x+h) - f(x) = a \cdot h$. Trocando h por x, vem: $f(h+x) - f(h) = a \cdot x$. Fazendo $h = 0$ e $b = f(0)$, obtemos $f(x) - b = a \cdot x$, onde $f(x) = ax + b$ e o teorema está demonstrado.

Apêndice C

Respostas das aplicações diversas

4.14 - a) $f(x) = 90 + 50x$ e $g(x) = 60 + 55x$

b) $f(12) = 90+50\cdot 12 = 690$ para a academia Tudo em cima e $f(12) = 60+55\cdot 12 = 720$ para a academia Corpo sarado. Portanto, academia Tudo em cima oferece o menor custo.

4.15 - a) 6000 metros. b) - 15 °C

4.16 - a) $C(x) = 6000 + 450 \cdot x$; $R(x) = 1050 \cdot x$ e $L(x) = 600 \cdot x - 6000$

b) 10 fogões

c) R$ 9000

d) 12 fogões.

4.17 - alternativa b.

4,18 - R$ 279,20 com gasolina comum e R$ 258,30 com gasolina aditivada.