



Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática  
em Rede Nacional PROFMAT



# Aplicações da Trigonometria †

por

**Egdemos Brilhante de Oliveira**

sob orientação do

**Prof.Dr. Napoleón Caro Tuesta**

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Abril/2015  
João Pessoa - PB

---

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

# Aplicações da Trigonometria

por

**Egdemos Brilhante de Oliveira**

Trabalho apresentado como requisito para a conclusão do mestrado profissional em matemática em rede nacional PROFMAT-CCEN-UFPB do período 2013.1.

Matemática.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Napoleón Caro Tuesta -UFPB (Orientador)**

---

**Prof. João Bosco Batista Lacerda - UFPB**

---

**Prof. Turíbio José Gomes do Santos - UNIPÊ**

**Abril/2015**

# Agradecimentos

A meu Deus Jesus Cristo, pela benção que me foi atribuída tornando-me capaz de concluir este trabalho. Ao professor Doutor orientador Napoleón Caro Tuesta pela dedicação a mim concedida para realização do mesmo, a professora Tuca e amigos por aceitarem, prontamente, o convite para participarem desse TCC, Yolanda esposa, Irmãos Sonia, Miguel (em memória) e Geraldo (Cunhado) por me incentivarem em tudo que faço.

# Dedicatória

*A prof. Tuca e amigos que de forma direta ou indiretamente tiveram uma participação fundamental para que esse trabalho pudesse se tornar realidade; e em especial a Yolanda (esposa), Sonia Maria (irmã), Geraldo (cunhado) e Miguel (irmão em Memória) por serem pessoas de uma Importância indispensável em tudo que faço na vida.*

# Resumo

Aplicações da trigonometria Traz como foco:

- Contexto histórico: resgatando um pouco as contribuições de povos antigos e alguns nomes de pessoas que com suas descobertas contribuíram para o desenvolvimento teórico da trigonometria;
- Fundamentação teórica: visando explicitar relações trigonométricas utilizadas nas escolas públicas de nível médio, bem como, fortalecer a importância desta matemática básica para assuntos de nível superior.
- As aplicações: visando atender ao questionamento feito pela sociedade em relação às aplicações da trigonometria básica.

# Abstract

Trigonometry applications brings focus on: Historical context, rescuing some contributions of ancient peoples and some names of people with their findings contributed to the theoretical development of trigonometry; Theoretical framework: aiming explicit trigonometric ratios used in the average level of public schools, as well as strengthen the importance of basic math for top-level issues; Applications: to meet the challenges raised by the company in relation to application of basic trigonometry.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Contexto Histórico</b>	<b>1</b>
1.1	Gregos e Egípcios . . . . .	1
1.2	Trigonometria esférica e planar . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>6</b>
2.1	Postulado do Transporte de Segmentos . . . . .	6
2.2	Postulado do Transporte de Ângulos . . . . .	7
2.3	Congruência de Triângulos . . . . .	7
2.3.1	Caso de Congruência LAL . . . . .	8
2.3.2	Caso de Congruência ALA . . . . .	8
2.4	Semelhança de Triângulos . . . . .	8
2.4.1	Caso de Semelhança (AA) . . . . .	9
2.5	Triângulo Retângulo . . . . .	9
2.5.1	Elementos Notáveis . . . . .	9
2.5.2	Teorema de Pitágoras (enunciado) . . . . .	10
2.5.3	Demonstração do Teorema de Pitágoras . . . . .	11
2.6	Declividade ou Inclinação de uma Rampa . . . . .	12
2.7	Razões Trigonométricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo . . . . .	13
2.7.1	Tangente de um Ângulo Agudo . . . . .	13
2.7.2	Seno e Cosseno de um Ângulo Agudo . . . . .	14
2.7.3	Arco de Circunferência . . . . .	14
2.7.4	Unidade de Medida Grau(Notação:°) . . . . .	15
2.7.5	Unidade de Medida 1 Radiano (Notação: 1 Rad) . . . . .	15
2.7.6	Conversão: Grau e Radiano . . . . .	15
2.8	Trigonometria na Circunferência . . . . .	16
2.8.1	Circunferência Trigonométrica . . . . .	16
2.8.2	Seno e Cosseno . . . . .	16
2.8.3	Tangente . . . . .	17
2.8.4	Outras Relações Trigonométricas . . . . .	17
2.8.5	Relações Trigonométricas Para a Soma de Dois Arcos . . . . .	21
2.8.6	Funções Seno, Cosseno, Tangente no Campo Real e Suas Inversas . . . . .	25

2.8.7	Tabela de Valores Notáveis de $[0, 2\pi]$ .	26
2.8.8	Gráficos e Suas Propriedades	26
2.8.9	Funções Inversas Trigonométricas	28
2.8.10	Função Arco Seno	30
2.8.11	Função Arco Cosseno	31
2.8.12	Função Arco Tangente	32
2.9	Exp(x) e Relação de Euler	33
2.9.1	Propriedade Multiplicativa	33
2.9.2	Relação de Euler para $x$ Real	34
2.9.3	Senos e Cossenos Complexos	34
2.9.4	Noções Para Série de Fourier	34
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>36</b>
3.1	Arco soma e função trigonométrica inversa	36
3.2	Equações trigonométricas no campo complexo	38
3.3	Identidades	39
3.4	Igualdades	40
3.5	Aplicação 1 para a Série de Fourier	41
3.6	Aplicação 2 para a Série de Fourier	42
3.7	Lei do cosseno e Lei do seno	43
3.8	Aplicação da Lei do cosseno e Lei do seno	45
3.9	Razões trigonométricas e teorema de Pitágoras	48
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>50</b>

# Lista de Figuras

1.1	hexágono regular . . . . .	2
1.2	Pirâmide . . . . .	2
1.3	Inclinação da pirâmide . . . . .	2
1.4	Hiparco de Bitínia . . . . .	3
1.5	Calendário do Zodíaco . . . . .	3
1.6	Triângulo Esférico $ABC$ . . . . .	3
1.7	Menelau de Alexandria . . . . .	4
1.8	Nasir al-Din al-Tusi . . . . .	4
2.1	Segmentos Congruentes . . . . .	6
2.2	Ângulos Congruentes . . . . .	7
2.3	Triângulos Congruentes . . . . .	7
2.4	Congruência LAL . . . . .	8
2.5	Congruência ALA . . . . .	9
2.6	Triângulos Semelhantes . . . . .	9
2.7	Triângulos Retângulo ABC . . . . .	10
2.8	Altura $\overline{AD}$ Relativa a Hipotenusa no Triângulo ABC . . . . .	10
2.9	Aplicação do Teorema de Pitágoras . . . . .	11
2.10	Elementos Notáveis no Triângulo Retângulo . . . . .	11
2.11	Rampa e suas Variações . . . . .	12
2.12	Rampa . . . . .	13
2.13	Triângulo ABC com Ângulo Fixo $\theta$ . . . . .	14
2.14	Ângulo Fixo $\theta$ no Triângulo ABC . . . . .	14
2.15	Arco AB . . . . .	15
2.16	Circunferência Trigonométrica de Centro O e Raio 1 . . . . .	16
2.17	Ponto $P$ e Suas Projeções Ortogonais . . . . .	17
2.18	Reta $t$ Paralela ao Eixo $oy$ . . . . .	18
2.19	Triângulos Semelhantes $OPQ$ e $OTA$ . . . . .	18
2.20	Triângulos Semelhantes $OPQ$ e $OBT'$ . . . . .	19
2.21	Reta $s$ Tangente no Ponto $P$ e Triângulos Semelhantes $OPQ$ e $OPS$ .	20
2.22	Reta $s'$ Tangente no Ponto $P$ e Triângulos Semelhantes $OPQ$ e $OPS'$	21
2.23	Projeções Ortogonais dos Pontos $D$ e $E$ . . . . .	22

2.24	Ângulo Fixo $\alpha$ no Triângulo $EHD$ . . . . .	23
2.25	Ângulo Fixo $\beta$ no Triângulo $OED$ . . . . .	23
2.26	Triângulo Retângulo $OF E$ . . . . .	23
2.27	Triângulo Retângulo $DHE$ . . . . .	24
2.28	Triângulo Retângulo $OF E$ . . . . .	24
2.29	Circunferência Trigonométrica de Centro $O$ . . . . .	26
2.30	Eixo das Tangentes $t$ . . . . .	26
2.31	Senóide . . . . .	27
2.32	Cossenóide . . . . .	27
2.33	Tangentóide . . . . .	28
2.34	Paridade Ímpar no Eixo das Tangentes . . . . .	29
2.35	Projeção Ortogonal no Eixo dos Senos . . . . .	29
2.36	Sentido Inverso da Projeção da Figura 2.35 . . . . .	30
2.37	Função Seno de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ . . . . .	30
2.38	Arco Seno . . . . .	31
2.39	Função Cosseno de $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ . . . . .	31
2.40	Função arco-cosseno . . . . .	32
2.41	Função Tangente de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$ . . . . .	32
2.42	Função arco-tangente . . . . .	33
3.1	Onda Quadrada . . . . .	43
3.2	Triângulo Acutângulo $ABC$ com Ângulo Agudo Fixo em $A$ . . . . .	44
3.3	Triângulo Obtusângulo $ABC$ com Ângulo Obtuso Fixo em $A$ . . . . .	44
3.4	Triângulo Inscrito $ABC$ no Circulo de Centro $O$ e Raio $R$ . . . . .	44
3.5	Ilhas $C$ e $D$ . . . . .	46
3.6	Segmento $AB$ . . . . .	46
3.7	Quadrilátero $ABCD$ . . . . .	46
3.8	Triângulo $ABC$ Interno na Figura 3.7 . . . . .	47
3.9	Triângulo $ABD$ Interno na Figura 3.7 . . . . .	47
3.10	Triângulo $ACD$ Interno na Figura 3.7 . . . . .	47
3.11	Triângulo $A'BC$ com Ângulo Fixo $\theta$ . . . . .	48

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela de Valores Notáveis . . . . .	27
-----	--------------------------------------	----

# Notações

## Notações Gerais

- $\alpha$  (alfa);  $\beta$  (beta);  $\theta$  (teta) para representação angular.
- Exp ( $e^x$ ) para função exponencial.
- $\sum$  (somatório) para série de funções.
- $\int$  como símbolo para integração.
- $\widehat{AB}$  para representar um arco de extremos  $A$  e  $B$ .

# Introdução

Aplicações da trigonometria em um trabalho voltado para alunos de escolas públicas de nível médio. Tem por objetivo revisar alguns tópicos importantes, bem como, buscar incentivar os alunos a dedicarem um pouco mais de tempo de seus estudos para a trigonometria.

Para justificar a utilidade dela mesma, estão incluídos:

- No primeiro capítulo um contexto histórico, no qual civilizações egípcias, gregas, mesopotâmicas e indianas são lembradas devido à contribuições para a humanidade. Astrônomos como Hiparco, Ptolomeu e Menelau são lembrados por contribuições para a astronomia e para a trigonometria;
- No capítulo dois encontraremos definições e relações trigonométricas com uso frequente no nível médio, bem como, definições de temas utilizados no nível superior como Série de Funções e Série de Fourier;
- No capítulo três encontraremos aplicações para diversas relações vistas no capítulo anterior, cuja finalidade é mostrar, na prática, a importância da trigonometria básica, tanto no nível médio, quanto no superior.

# Capítulo 1

## Contexto Histórico

Neste capítulo, recordaremos aplicações da trigonometria feitas por civilizações a.C.. Destacaremos contribuições de astrônomos como Hiparco, considerado o pai da trigonometria, Ptolomeu, pioneiro em realizar melhoras nos trabalhos deixados por Hiparco, e Menelau de Alexandria, o pioneiro na definição para a trigonometria esférica. Povos indianos, árabes e hindus, embora de forma breve, serão mencionados neste trabalho por terem contribuído no avanço da trigonometria aperfeiçoando as criações deixadas pelos egípcios e gregos.

### 1.1 Gregos e Egípcios

Segundo [11], a trigonometria é o ramo da matemática que trata do cálculo de ângulos, particularmente em triângulos retângulos. Até o século 16, ela era realmente uma parte da geometria, mas desde então ela passou a ser considerada uma área independente da matemática.

Como qualquer polígono pode ser reduzido a um número de triângulos, a trigonometria permite aos matemáticos trabalhar com todas as áreas ou superfícies que sejam limitadas por linhas retas (ver figura 1.1). A trigonometria plana trata de áreas, ângulos e distâncias em um plano. A trigonometria esférica trata de ângulos e distâncias no espaço tridimensional.

Os egípcios tinham algum conhecimento de trigonometria, como demonstra a construção de suas pirâmides. O papiro de *Ahmes* inclui um problema que determina a *seked*, a inclinação da pirâmide (Ver figura 1.2) a partir da altura e da base (ver figura 1.3). Ela era expressa como a relação oposta de nossa medida do gradiente. Porém, os egípcios não eram rigorosos em seu estudo de triângulos. Como em outras áreas da matemática, eles estavam interessados em aplicações práticas e não na trigonometria pura.

Os antigos matemáticos indianos também sabiam alguma coisa sobre trigonometria. Os *Sulba sutras*, no contexto da descrição de altares, contém um cálculo do

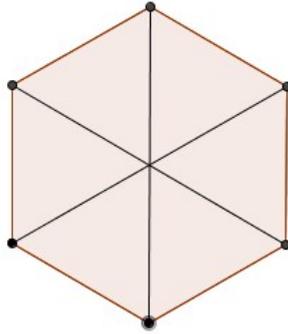


Figura 1.1: hexágono regular

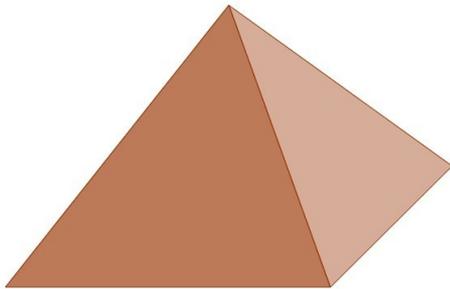


Figura 1.2: Pirâmide

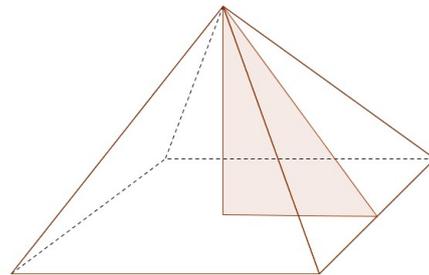


Figura 1.3: Inclinação da pirâmide

seno de  $45^\circ$  como  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ . No entanto, ficou por conta dos gregos o desenvolvimento apropriado da trigonometria. Os gregos tomaram a linha reta e o círculo como base de sua geometria e a partir daí desenvolveram a trigonometria.

A convenção de  $360^\circ$  em um círculo e 60 minutos em um grau teve origem na matemática helênica, aparentemente, já estava em uso no tempo de *Hiparco da Bitínia* (c. 190-120 a.C) (figura 1.4). Provavelmente, teve origem na divisão astronômica babilônica do zodíaco (ver figura 1.5) em 12 signos ou 36 decanos e o círculo anual de, aproximadamente, 360 dias.

O sistema superior usado pelos babilônicos para representar frações o tornou mais útil do que os sistemas egípcios ou gregos e *Ptolomeu* (c. 90-168 d.C) usou o sistema de base 60 ao dividir em graus e minutos (*partes minutae primae*) e cada minuto em 60 segundos (*partes minutae secundae*).



Figura 1.4: Hiparco de Bitínia



Figura 1.5: Calendário do Zodíaco

## 1.2 Trigonometria esférica e planar

Enquanto um triângulo planar está sobre uma superfície plana, um triângulo esférico está sobre a superfície de uma esfera. Ele é composto pelos arcos de três círculos que se intercepta ao redor da esfera, ou planos que cortam a esfera (ver figura 1.6).

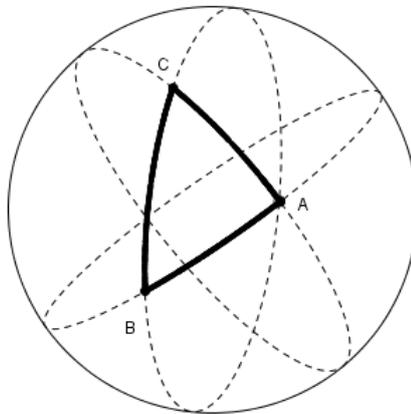


Figura 1.6: Triângulo Esférico  $ABC$

A primeira definição de um triângulo esférico é encontrada em um trabalho do egípcio *Menelau de Alexandria* (c.100 d.C.) (figura 1.7). Ele desenvolveu os equivalentes dos princípios de Euclides da trigonometria planar, mas os aplicou a triângulos

esféricos. Os triângulos esféricos são, claramente, essenciais na astronomia, na náutica e navegação.



Figura 1.7: Menelau de Alexandria

Enquanto os ângulos de um triângulo planar totalizam  $180^\circ$ , os ângulos de um triângulo esférico totalizam mais de  $180^\circ$ . Há também outras diferenças fundamentais: até por volta de 1250 e do trabalho de *Nasir al-Din al-Tusi* (1201-74) (Figura 1.8), a trigonometria esférica esteve sempre integrada com a astronomia.

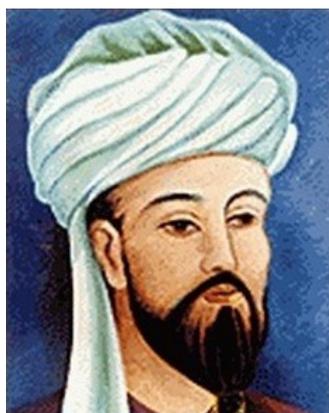


Figura 1.8: Nasir al-Din al-Tusi

*Al-Tusi* foi o primeiro a listar seis tipos distintos de triângulos retângulos em uma superfície esférica e o primeiro a tratar a trigonometria como uma disciplina discreta. Ele desenvolveu a trigonometria esférica na sua forma atual.

*Hiparco* foi o primeiro a compilar tabelas de funções trigonométricas. Seu interesse era por triângulos imaginários "traçados" sobre a esfera imaginária do céu à noite, relacionando os corpos celestes uns com os outros de maneira que ele podia calcular e prever as posições dos planetas.

*Cláudio Ptolomeu* Expandiu o trabalho de Hiparco, ao criar melhores tabelas trigonométricas e definições aproximadas para as funções trigonométricas inversas arco-seno e arco-cosseno.

# Capítulo 2

## Fundamentação Teórica

Neste capítulo trataremos de definições, propriedades, teoremas acompanhados de suas demonstrações, critérios, relações, postulados e algumas funções trigonométricas e suas respectivas inversas que são trabalhadas nas escolas de nível médio, como também, a definição para  $\exp(x)$  vista no curso de cálculo. Recordaremos a relação de Euler para  $x$  real, definiremos cosseno e seno no campo complexo e encerraremos com noções para Série de Fourier.

### 2.1 Postulado do Transporte de Segmentos

**Definição 2.1** *Dados um segmento  $\overline{AB}$  e uma semirreta de origem  $A'$ , existe sobre esta semirreta um único ponto  $B'$  tal que  $\overline{A'B'}$  seja congruente a  $\overline{AB}$ .*

**Observação 2.1** *A congruência (símbolo  $\equiv$ ) de segmento ou de ângulo é uma noção primitiva que satisfaz os postulados da reflexividade, simetria e transitividade.*

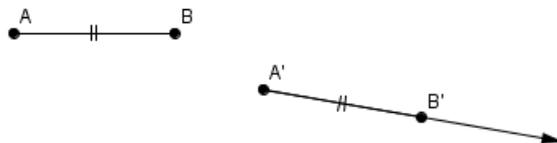


Figura 2.1: Segmentos Congruentes

## 2.2 Postulado do Transporte de Ângulos

**Definição 2.2** Dado um ângulo  $A\hat{O}B$  e uma semirreta  $\overrightarrow{O'A'}$  de um plano, existe sobre este plano, uma única semirreta  $\overrightarrow{O'B'}$  que forma com  $\overrightarrow{O'A'}$  um ângulo  $A'\hat{O}'B'$  congruente do ângulo  $A\hat{O}B$ .

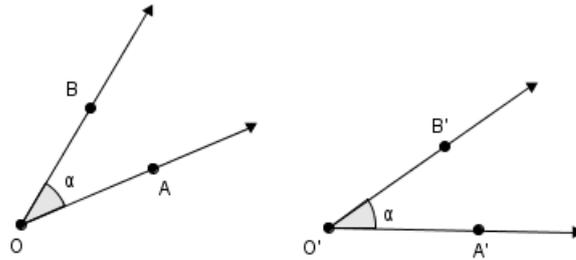


Figura 2.2: Ângulos Congruentes

## 2.3 Congruência de Triângulos

**Definição 2.3** Dois triângulos  $T_1$  e  $T_2$  são congruentes (Notação  $T_1 \equiv T_2$ ) se, e somente se, existir uma correspondência entre seus vértices de modo que: os lados e os ângulos do primeiro triângulo  $T_1$  sejam ordenadamente congruentes, respectivamente, aos lados e aos ângulos do triângulo  $T_2$ .

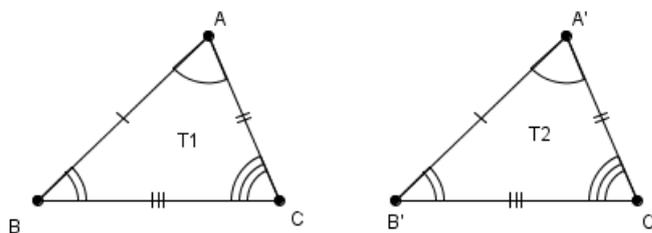


Figura 2.3: Triângulos Congruentes

$$\Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} = \overline{A'B'} & \text{e } \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} & \text{e } \hat{B} = \hat{B}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} & \text{e } \hat{C} = \hat{C}' \end{cases}$$

### 2.3.1 Caso de Congruência LAL

Esta Definição é postulado e diz que:

**Definição 2.4** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes*

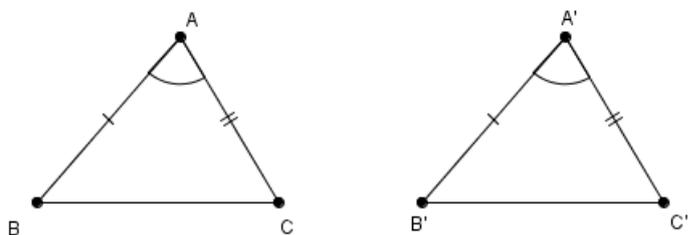


Figura 2.4: Congruência LAL

$$\text{Se } \begin{cases} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta_{ABC} \equiv \Delta_{A'B'C'}$$

### 2.3.2 Caso de Congruência ALA

**Definição 2.5** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então, esses triângulos são congruentes.*

## 2.4 Semelhança de Triângulos

**Definição 2.6** *Dois triângulos são semelhantes (simbologia  $\sim$ ) se, e somente se, os ângulos de um são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro e os lados opostos à ângulos iguais (ou homólogos) são proporcionais.*

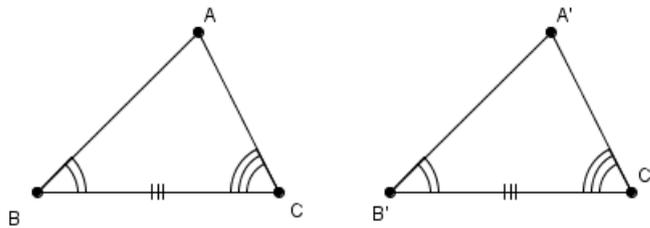


Figura 2.5: Congruência ALA

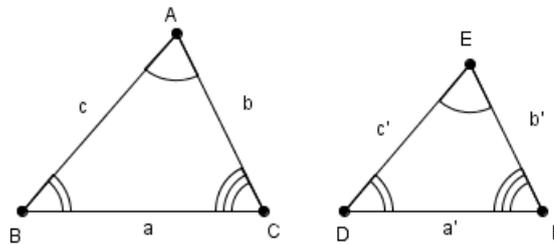


Figura 2.6: Triângulos Semelhantes

$$\Delta_{ABC} \sim \Delta_{A'B'C'} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{cases} \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

### 2.4.1 Caso de Semelhança (AA)

**Definição 2.7** Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então, eles são semelhantes.

## 2.5 Triângulo Retângulo

**Definição 2.8** Triângulo retângulo, é todo triângulo no qual um de seus ângulos internos é reto (medida em graus 90 ou  $\hat{A} = 90^\circ$ )

### 2.5.1 Elementos Notáveis

No triângulo  $ABC$  (reto em  $A$ ), figura 2.8

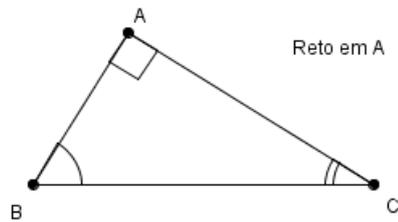


Figura 2.7: Triângulos Retângulo ABC

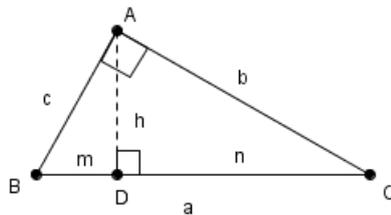


Figura 2.8: Altura  $\overline{AD}$  Relativa a Hipotenusa no Triângulo ABC

Adotaremos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{BC} = a \quad (\text{hipotenusa}). \\ \overline{AC} = b \quad (\text{cateto}). \\ \overline{AB} = c \quad (\text{cateto}). \\ \overline{BD} = m \quad (\text{projeção do cateto } c \text{ sobre a hipotenusa}). \\ \overline{CD} = n \quad (\text{projeção do cateto } b \text{ sobre a hipotenusa}). \\ \overline{AD} = h \quad (\text{altura relativa à hipotenusa}). \end{array} \right.$$

Percebe-se também que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A}CB = 90^\circ - \hat{A}BC = \hat{D}AB \\ \hat{A}BC = 90^\circ - \hat{A}CB = \hat{D}AC \end{array} \right.$$

### 2.5.2 Teorema de Pitágoras (enunciado)

O quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

**Observação 2.2** *Unidade de medida em metros (m)*

De acordo com o Teorema de Pitágoras:

## 2.5. TRIÂNGULO RETÂNGULO

---

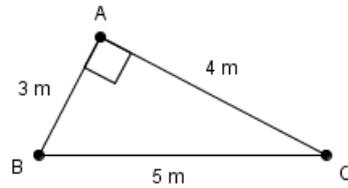


Figura 2.9: Aplicação do Teorema de Pitágoras

$$(5)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$25 = 9 + 16$$

$$25 = 25$$

### 2.5.3 Demonstração do Teorema de Pitágoras

Na figura abaixo, apresentamos um triângulo  $ABC$ , reto em  $A$ , e seus elementos notáveis.

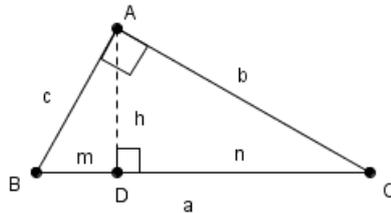


Figura 2.10: Elementos Notáveis no Triângulo Retângulo

Mais ainda:

$$\begin{cases} \hat{A}CB = 90^\circ - \hat{A}BC = \hat{D}AB \\ \hat{A}BC = 90^\circ - \hat{A}CB = \hat{D}AC \end{cases}$$

Nota-se também que:

(i)  $m + n = a$

(ii) Por semelhança (caso AA):

- $ABC \sim DBA$ , logo:  $\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = a \cdot m$  ( $II_i$ )

## 2.6. DECLIVIDADE OU INCLINAÇÃO DE UMA RAMPA

---

- $ABC \sim DAC$ , logo:  $\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = a \cdot n(II_i)$

Fazendo  $II_i + II_{ii}$ , vem:

$$c^2 + b^2 = a \cdot (m + n). \text{ Como, por (i) } m + n = a, \text{ conclui-se que:}$$
$$c^2 + b^2 = a \cdot a \Rightarrow c^2 + b^2 = a^2 \text{ (Teorema de Pitágoras)}$$

## 2.6 Declividade ou Inclinação de uma Rampa

**Definição 2.9** A declividade é a razão entre a variação vertical e a variação horizontal.

Veja o esquema: seja a rampa na figura seguinte.

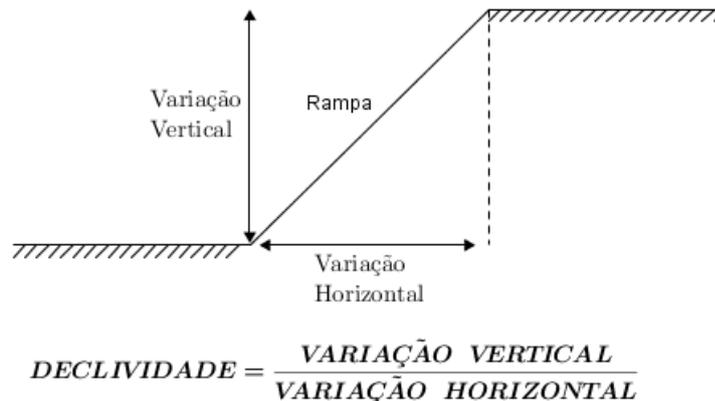


Figura 2.11: Rampa e suas Variações

**Exemplo:** O que significa uma declividade de 5% (unidade de medida usada em um município de São Paulo para representar inclinação de rampa)?  $\diamond$

**Solução: 2.1** A declividade de 5% equivale a razão  $\frac{1}{20}$ , isto é:

$$5\% = \frac{5}{100} \Rightarrow 5\% = \frac{1}{20}.$$

## 2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

---

Significando que, quando houver uma variação de 1 unidade de comprimento (u.c.) na vertical, causará uma variação de 20 unidade de comprimento (u.c.) na horizontal.

Veja no esquema onde uma variação de 1 (u.c.) na vertical corresponde uma variação de 20 (u.c.) na horizontal.

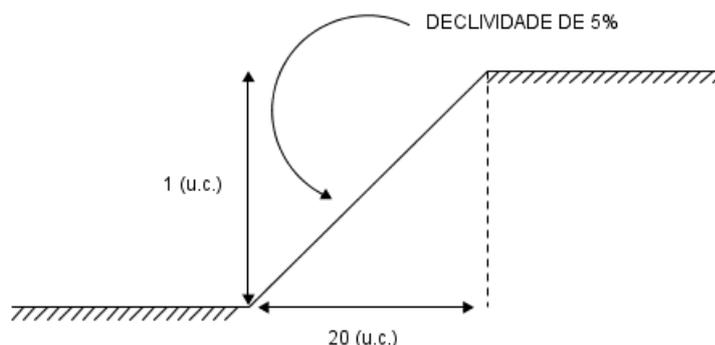


Figura 2.12: Rampa

## 2.7 Razões Trigonômétricas de um ângulo agudo no triângulo retângulo

### 2.7.1 Tangente de um Ângulo Agudo

**Definição 2.10** Em um Triângulo Retângulo, a tangente de um ângulo agudo  $\theta$  (notação  $\text{tg } \theta$ ) é dada pela razão entre a medida do cateto oposto a  $\theta$  e a medida do cateto adjacente a  $\theta$ .

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \theta}{\text{medida do cateto adjacente a } \theta}$$

**Exemplo:** Seja o triângulo  $ABC$  retângulo em  $A$ , cujos catetos  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  medem 6 cm e 8 cm, respectivamente.  $\diamond$

Sendo o ângulo  $\theta$  agudo, determine o valor para  $\text{tg } \theta$ ?

**Solução: 2.2**  $\text{tg } \theta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

## 2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

---

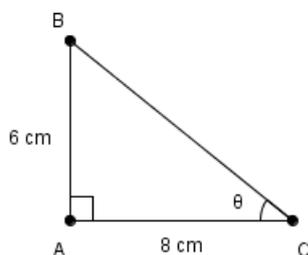


Figura 2.13: Triângulo ABC com Ângulo Fixo  $\theta$

### 2.7.2 Seno e Cosseno de um Ângulo Agudo

**Definição 2.11** Considerando a Figura 2.14 e fixando o  $\theta$ , a cada 8 cm de deslocamento horizontal (ou a cada 6 cm de deslocamento vertical) o Teorema de Pitágoras garante um deslocamento, sobre a hipotenusa, de 10 cm.

Relacionando essas grandezas por meio das seguintes razões, definiremos que:

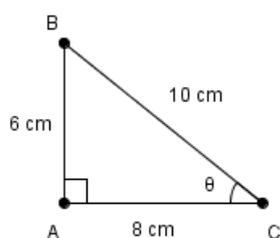


Figura 2.14: Ângulo Fixo  $\theta$  no Triângulo ABC

$$* \frac{6}{10} = \frac{\text{deslocamento vertical}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \text{sen } \theta$$

$$** \frac{8}{10} = \frac{\text{deslocamento horizontal}}{\text{deslocamento sobre a hipotenusa}} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \text{cos } \theta$$

### 2.7.3 Arco de Circunferência

**Definição 2.12** Qualquer parte da circunferência limitada por dois de seus pontos.

Arco  $AB$ , Notação:  $\widehat{AB}$

**Observação 2.3** caso os pontos coincidam, teremos um arco nulo ou arco de uma volta.

## 2.7. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS DE UM ÂNGULO AGUDO NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

---

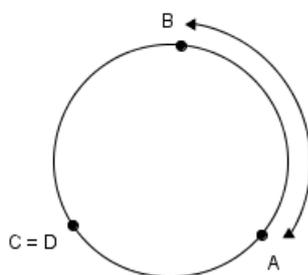


Figura 2.15: Arco AB

### 2.7.4 Unidade de Medida Grau (Notação: °)

O arco de um Grau ( $1^\circ$ ) é igual a  $\frac{1}{360}$  do arco de uma volta. Logo, o arco de uma volta mede  $360^\circ$ .

### 2.7.5 Unidade de Medida 1 Radiano (Notação: 1 Rad)

Arco de medida 1 Radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido. Para sabermos quantos radianos têm o arco de uma volta, tomaremos da geometria plana para o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  o valor de  $2\pi r$ . Logo, usando a regra de três simples e direta:

Medida do arco		Comprimento do Arco
1 Rad	$\longleftrightarrow$	$r$
$\theta$	$\longleftrightarrow$	$2\pi r$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
 r \cdot \theta &= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 1 \Rightarrow \\
 \theta &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{r} \cdot 1 \Rightarrow \\
 \theta &= 2 \cdot \pi (rad).
 \end{aligned}$$

### 2.7.6 Conversão: Grau e Radiano

Na transformação de grau para radianos, ou vice-versa, faremos uso da regra de três:

Medida do Arco (em rad)		Medida do Arco (em grau)
$2 \cdot \pi$	$\longleftrightarrow$	$360^\circ$
$x$	$\longleftrightarrow$	$\theta$

## 2.8 Trigonometria na Circunferência

### 2.8.1 Circunferência Trigonométrica

Consideremos num plano um sistema de coordenadas cartesianas  $xoy$  e uma circunferência com centro na origem e raio unitário (veja figura 2.16).

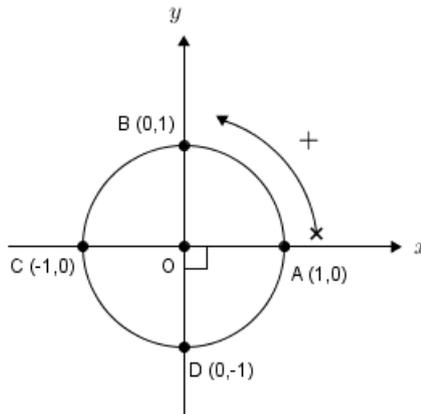


Figura 2.16: Circunferência Trigonométrica de Centro O e Raio 1

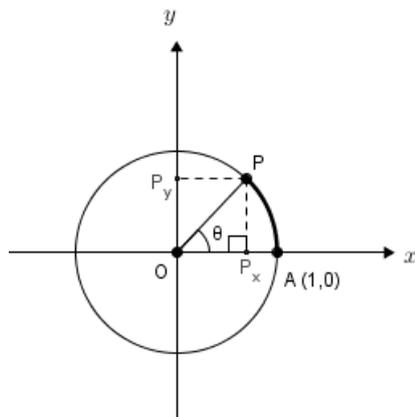
Convencionamos o ponto  $A$  como origem para a contagem dos arcos e que os arcos percorridos no sentido anti-horário a partir do ponto  $A$  terá medida positiva. Essa circunferência orientada será denominada circunferência trigonométrica.

### 2.8.2 Seno e Cosseno

Na circunferência trigonométrica tomemos um ponto  $P$  extremidade do arco  $\widehat{AP}$  (Ver Figura 2.17)

Nota-se que:

$(X_P, Y_P)$  coordenadas do ponto  $P$  e que para o triângulo  $OPP_x$ , o  $\cos \theta = X_P$  e  $\sin \theta = Y_P$ . Logo, concluímos que o cosseno de  $\theta$  é a abscissa do ponto  $P$  e o seno de  $\theta$  é a sua ordenada.

Figura 2.17: Ponto  $P$  e Suas Projeções Ortogonais

**Observação 2.4** *O Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo  $OPP_x$ , diz que:*

$$\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1.$$

*Esta relação é conhecida como **RELAÇÃO FUNDAMENTAL DA TRIGONOMETRIA**.*

### 2.8.3 Tangente

Tracemos a reta  $t$  tangente à circunferência pelo ponto  $A$  (ver Figura 2.18)

Prolongando o segmento  $\overline{OP}$  até tocar a reta  $t$  num ponto ( $T$ ). Para o triângulo retângulo  $OAT$  é conhecida a relação:

$$\text{tg } \theta = \frac{\overline{AT}}{1} = \overline{AT}.$$

### 2.8.4 Outras Relações Trigonômétricas

i)  $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ )

Na Figura 2.19:

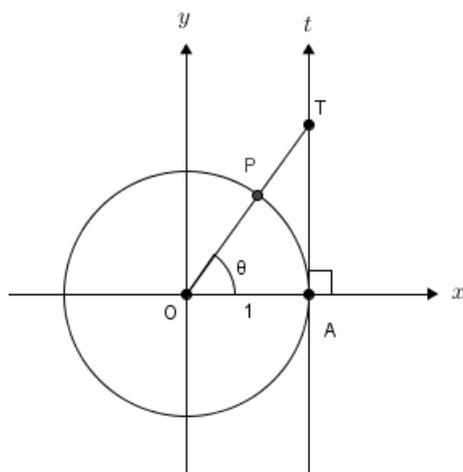


Figura 2.18: Reta  $t$  Paralela ao Eixo  $oy$

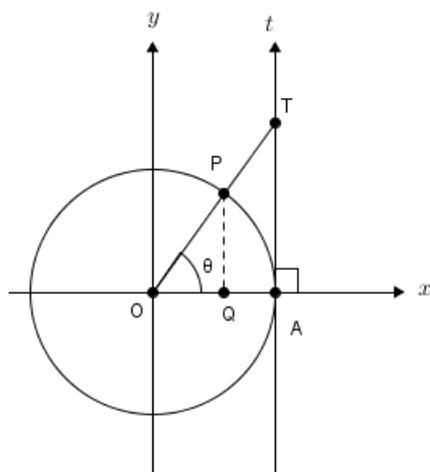


Figura 2.19: Triângulos Semelhantes  $OPQ$  e  $OTA$

Os triângulos  $OPQ$  e  $OTA$  são semelhantes ( caso AA). Então:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{TA}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OA}}.$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{PQ} = \text{sen } \theta \\ \overline{OQ} = \text{cos } \theta \\ \overline{OA} = 1 \\ \overline{TA} = \text{tg } \theta \end{cases} \text{ Logo, } \frac{\text{sen } \theta}{\text{tg } \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{1} \Rightarrow \text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

ii) Cotangente de  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ )

Na Figura 2.20:

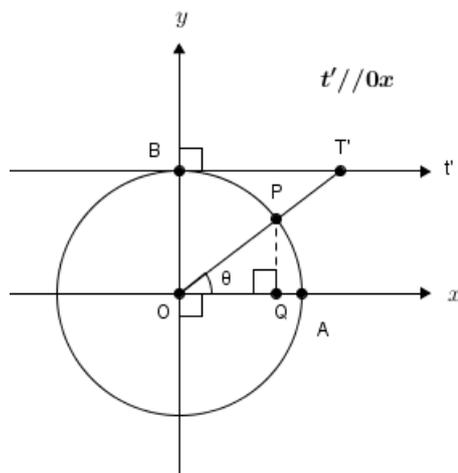


Figura 2.20: Triângulos Semelhantes  $OPQ$  e  $OBT'$

A reta  $t'$  é tangente à circunferência no ponto  $B$ .  $T'$  é o ponto que a reta  $t'$  intercepta a reta  $\overleftrightarrow{OP}$ . Os triângulos retângulos  $PQO$  e  $OBT'$  são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OQ}}{\overline{BT'}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BO}}.$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{OQ} = \text{cos } \theta \\ \overline{PQ} = \text{sen } \theta \\ \overline{BO} = 1 \end{cases} \text{ Logo, } \frac{\text{cos } \theta}{\overline{BT'}} = \frac{\text{sen } \theta}{1} \Rightarrow \overline{BT'} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}.$$

definiremos a razão  $\frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$  como sendo cotangente de  $\theta$ , daí:

$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}.$$

## 2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

---

iii) Secante de  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ )

Na Figura 2.21:

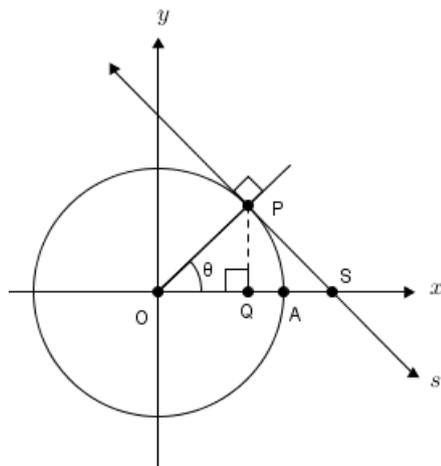


Figura 2.21: Reta  $s$  Tangente no Ponto  $P$  e Triângulos Semelhantes  $OPQ$  e  $OPS$

A reta  $s$  é tangente à circunferência no ponto  $P$ .  $S$  é o ponto que a reta  $s$  intercepta o eixo  $0x$ . Os triângulos retângulos  $OPS$  e  $OQP$  são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}}.$$

$$\text{Mas: } \begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{OQ} = \cos \theta \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\overline{OS}}{1} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \overline{OS} = \frac{1}{\cos \theta}.$$

definiremos a razão  $\frac{1}{\cos \theta}$  como sendo a secante de  $\theta$ , daí:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

iv) Cossecante de  $\theta$  ( $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) na Figura 2.22:

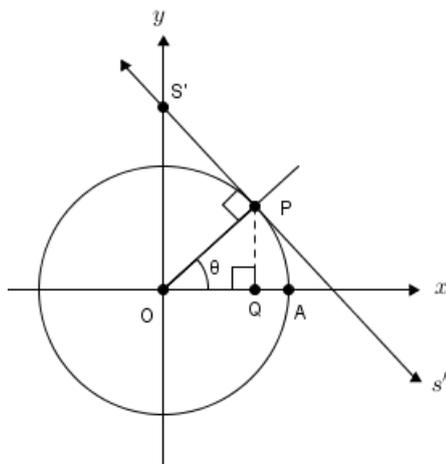


Figura 2.22: Reta  $s'$  Tangente no Ponto  $P$  e Triângulos Semelhantes  $OPQ$  e  $OPS'$

A reta  $s'$  é tangente à circunferência no ponto  $P$ .  $S'$  é o ponto que a reta  $s'$  intercepta o eixo  $0y$ . Os triângulos retângulos  $OPQ$  e  $S'OP$  são semelhantes (caso AA), então:

$$\frac{\overline{OS'}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}}.$$

Mas:  $\begin{cases} \overline{OP} = 1 \\ \overline{PQ} = \text{sen } \theta \end{cases}$

Logo,

$$\frac{\overline{OS'}}{1} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \Rightarrow \overline{OS'} = \frac{1}{\text{sen } \theta}.$$

definiremos a razão  $\frac{1}{\text{sen } \theta}$  como sendo a cossecante de  $\theta$ , daí:

$$\text{cossec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$$

### 2.8.5 Relações Trigonométricas Para a Soma de Dois Arcos

i)  $\text{sen}(\alpha + \beta)$

Na Figura 2.23:

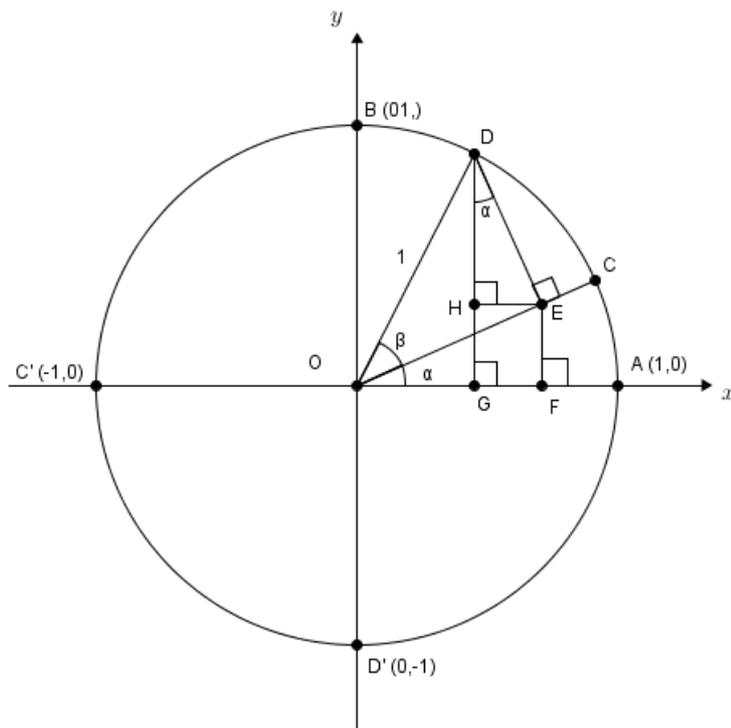


Figura 2.23: Projeções Ortogonais dos Pontos  $D$  e  $E$

$\overline{HE}$  foi traçado paralelo a  $\overline{GF}$ . Logo,  $\overline{HE} = \overline{GF}$  (1), o ângulo  $\widehat{HDE}$  também mede  $\alpha$ , pois os seus lados são perpendiculares aos do ângulo  $\widehat{FOE}$ .

o  $\overline{sen}(\alpha + \beta)$  procurado corresponde à medida do segmento  $\overline{DG}$ , onde  $\overline{DG} = \overline{DH} + \overline{HG}$ .

- Buscando  $\overline{DH}$

No triângulo  $HDE$  da Figura 2.24 note que  $\overline{DH} = \cos \alpha \overline{DE}$  (2), pois,  $\overline{DE} = \overline{sen} \beta$ .

- Buscando  $\overline{HG}$ .

No triângulo  $OED$  da Figura 2.25, temos que  $\overline{OE} = \cos \beta$ .

No triângulo  $OFE$  da Figura 2.26 (onde,  $\overline{OE} = \cos \beta$ ), temos:  $\overline{EF} = \overline{sen} \alpha \overline{OE} = \overline{sen} \alpha \cos \beta$ , como  $\overline{EF} = \overline{HG}$ , temos  $\overline{HG} = \overline{sen} \alpha \cos \beta$ (3).

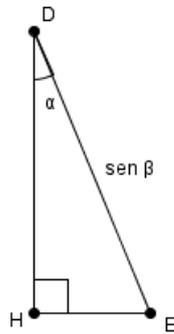


Figura 2.24: Ângulo Fixo  $\alpha$  no Triângulo  $EHD$

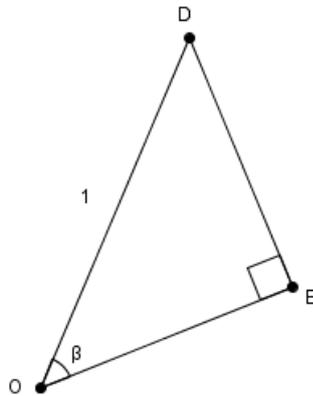


Figura 2.25: Ângulo Fixo  $\beta$  no Triângulo  $OED$

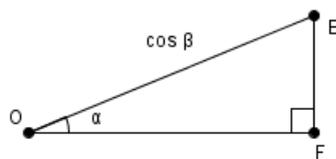


Figura 2.26: Triângulo Retângulo  $OFE$

Portanto, como  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \overline{DE}$  e  $\overline{DE} = \overline{DH} + \overline{HG}$ , vem:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha.$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras também muito importantes, como:  $\text{sen}(\alpha - \beta)$ ,  $\text{sen}(2\alpha)$ ,  $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e etc.

ii)  $\cos(\alpha + \beta)$

O  $\cos(\alpha + \beta)$  corresponde à medida do segmento  $\overline{OG}$ , onde  $\overline{OG} = \overline{OF} - \overline{GF}$  na figura 2.23.

- Buscando  $\overline{GF} = \overline{HE}$  (lados oposto no retângulo  $GFEH$ ).

No triângulo  $HDE$  da Figura 2.27 note que  $\overline{HE} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$  ou, como  $\overline{HE} = \overline{GF}$ , temos  $\overline{GF} = \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$ (4).

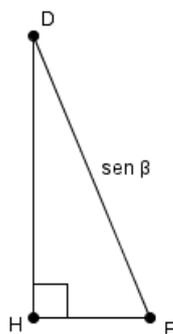


Figura 2.27: Triângulo Retângulo  $DHE$

- Buscando  $\overline{OF}$

No triângulo  $OFE$  da Figura, temos:  $\overline{OF} = \cos \alpha \cos \beta$ (5).

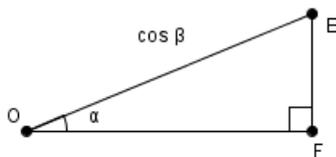


Figura 2.28: Triângulo Retângulo  $OFE$

Portanto, de (5) - (4), vem:

$$\overline{OG} = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ ou, } \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta.$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras, também muito importantes, como:  $\cos(\alpha - \beta)$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$  e etc.

iii)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$

A tangente procurada corresponde a razão  $\frac{\overline{DG}}{\overline{OG}} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$  na Figura 2.23. Portanto:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}$$

Como  $\cos \alpha \cos \beta \neq 0$  ( $0^\circ < \alpha, \beta, (\alpha + \beta) < 90^\circ$ ), a  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  é equivalente a:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}},$$

ou seja,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}.$$

Portanto, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

Note que a partir dessa fórmula, podemos encontrar outras como  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  e etc.

### 2.8.6 Funções Seno, Cosseno, Tangente no Campo Real e Suas Inversas

**Definição 2.13** Dado um número real  $x$ , seja o ponto  $P(\cos x, \operatorname{sen} x)$  sua imagem na circunferência trigonométrica (ver Figura 2.29).

Denominaremos função seno, a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{sen} x$ . Para a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \cos x$  denominaremos função cosseno.

Consideremos agora o eixo das tangentes (ver Figura 2.30).

$\overline{OT}$  é o prolongamento do segmento  $\overline{OP}$  até tocar o eixo das tangentes no ponto  $T$ . uma vez que  $\overline{AT} = \operatorname{tg} x$  para  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k$  inteiro), definiremos a função tangente como a função  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{tg} x$  onde  $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

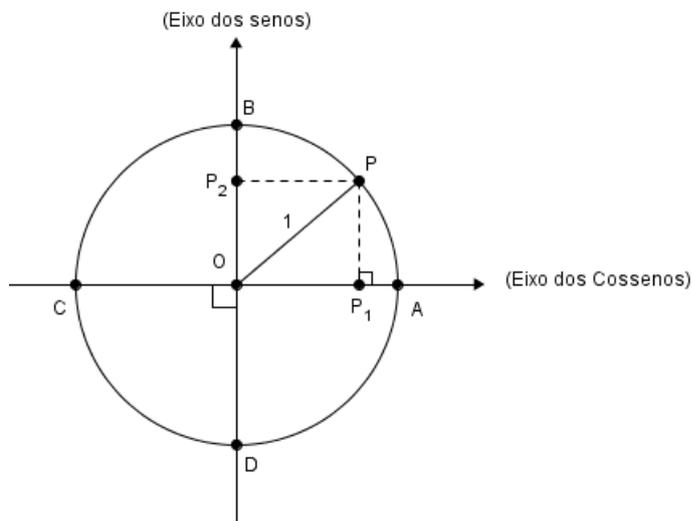


Figura 2.29: Circunferência Trigonométrica de Centro  $O$

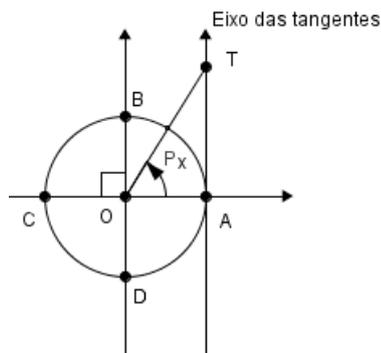


Figura 2.30: Eixo das Tangentes  $t$

### 2.8.7 Tabela de Valores Notáveis de $[0, 2\pi]$ .

**Observação 2.5** *As definições de cada função torna evidente cada valor usado no preenchimento da tabela 2.1.*

### 2.8.8 Gráficos e Suas Propriedades

Função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \text{sen } x$

## 2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

Grau ou Rad	0 ou $2\pi$	$90^\circ$ ou $\frac{\pi}{2}$	$180^\circ$ ou $\pi$	$270^\circ$ ou $\frac{3\pi}{2}$
Seno	0	1	0	-1
Cosseno	1	0	-1	0
Tangente	0	Não está definida	0	Não está definida

Tabela 2.1: Tabela de Valores Notáveis

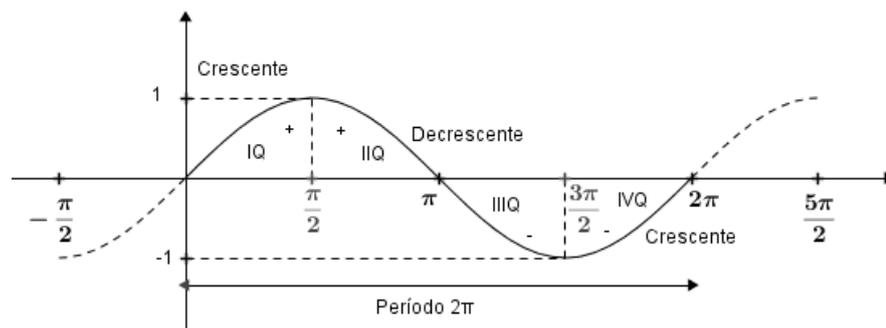


Figura 2.31: Senóide

Período:  $P = 2\pi$ ;

Sinais: IQ (+); IIQ (+); IIIQ (-); IVQ (-);

Paridade: Função Ímpar (Gráfico Simétrico em Relação à Origem).

Função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \cos x$ .

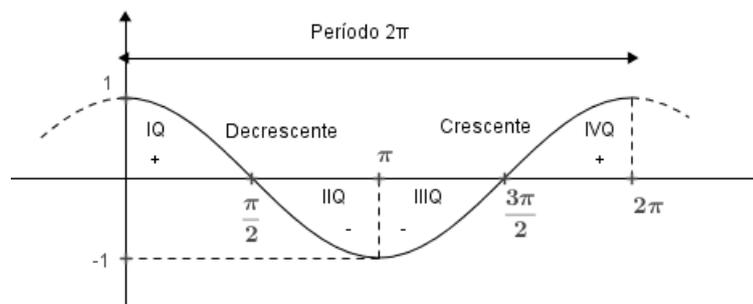


Figura 2.32: Cossenóide

Período:  $P = 2\pi$ ;

Sinais: IQ (+); IIQ (-); IIIQ (-); IVQ (+);

## 2.8. TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

---

Paridade: Função Par (Gráfico Simétrico em Relação ao Eixo 0Y).

Função  $f : \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{tg} x$

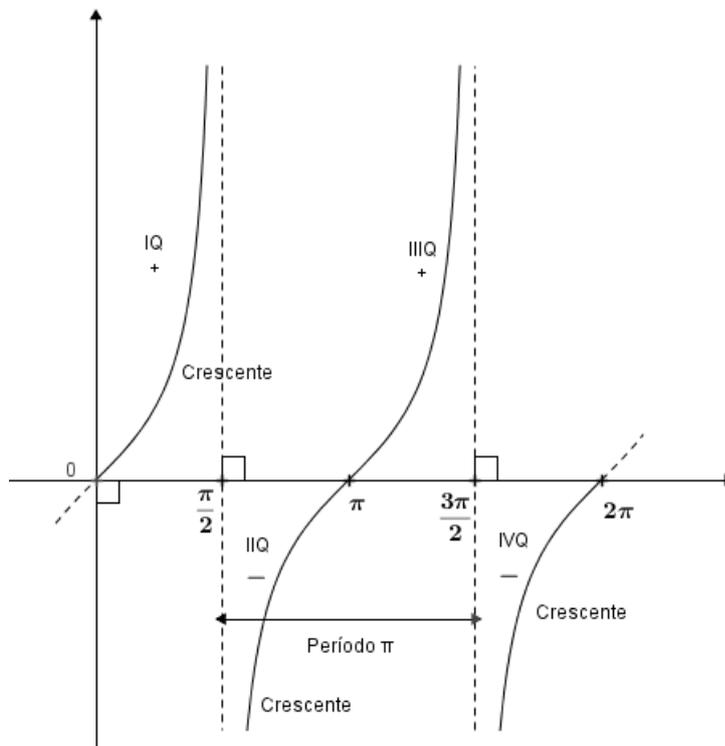


Figura 2.33: Tangentóide

Período:  $P = \pi$ ;

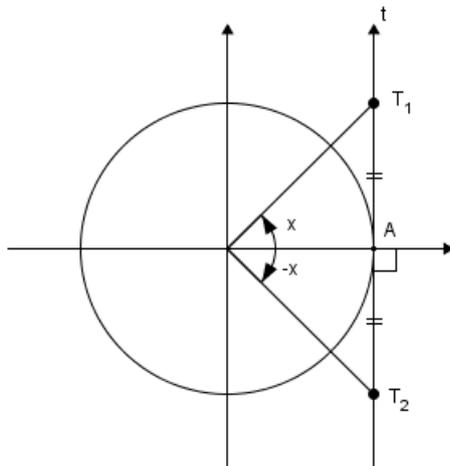
Sinais: IQ (+); IIQ(-); IIIQ(+); IVQ(-);

Paridade: Função Ímpar (Ver Figura 2.34).

### 2.8.9 Funções Inversas Trigonômétricas

Até agora, a partir da medida do ângulo  $x$  (ou arco), determinávamos os valores do seno, cosseno e tangente deste ângulo (ou arco).

Agora, percorreremos o sentido inverso



$$\begin{cases} \overline{AT_2} &= -\overline{AT_1} \\ f(x) + f(-x) &= 0 \end{cases}, \text{ daí } f(x) = -f(-x), \text{ isto é: a função tangente é ímpar.}$$

Figura 2.34: Paridade Ímpar no Eixo das Tangentes

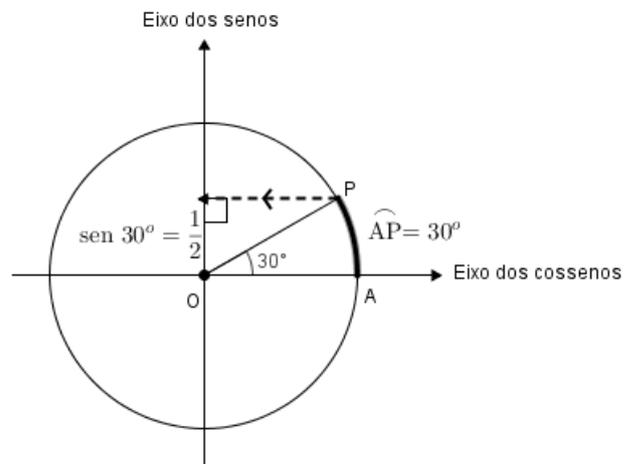


Figura 2.35: Projeção Ortogonal no Eixo dos Senos

Para encontrarmos o valor do ângulo  $x$  (ou arco), definiremos as funções trigonométricas inversas.

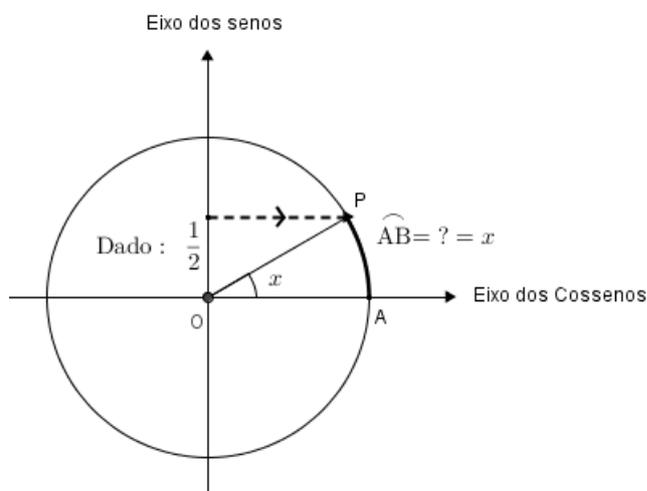


Figura 2.36: Sentido Inverso da Projeção da Figura 2.35

### 2.8.10 Função Arco Seno

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \text{sen } x$  não é bijetiva (não admite inversa), caso contrário, existiria algum  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{sen } x = 3$ . Porém, considerando  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  (ver Figura 2.37), tal que  $f(x) = \text{sen } x$

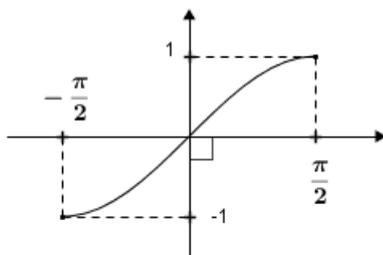


Figura 2.37: Função Seno de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$

$f$  é bijetiva. Assim, denominaremos  $f^{-1}$  ou arco-seno como a função inversa da função  $f$ . Nota-se que:

$f^{-1}$  tem domínio  $[-1, 1]$ , contradomínio  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , a cada  $x \in [-1, 1]$  corresponde a um só  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $y$  é um arco cujo seno é  $x$ , em símbolos:

$$y = \arcsen x \Leftrightarrow \sen y = x \text{ e } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Graficamente fica:

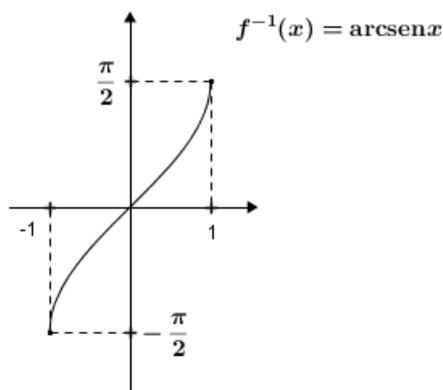


Figura 2.38: Arco Seno

### 2.8.11 Função Arco Cosseno

A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \cos x$  não é bijetiva ( $\nexists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos x = 4$ ). Porém, considerando  $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  tal que  $f(x) = \cos x$  (ver Figura 2.39).

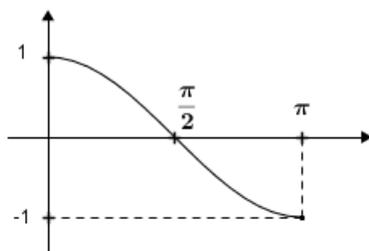


Figura 2.39: Função Cosseno de  $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$f$  é bijetiva e  $f^{-1}$  ou função arco-cosseno passará a ser a sua função inversa.

Nota-se que:  $[-1, 1]$  é o domínio de  $f^{-1}$ ,  $[0, \pi]$  é o contradomínio e o fato de que a cada  $x \in [-1, 1]$  corresponde a um só  $y \in [0, \pi]$  tal que  $y$  é um arco cujo cosseno é  $x$  é simbolicamente escrito como,  $y = \arccos x \iff \cos y = x$  e  $y \in [0, \pi]$ .

Graficamente fica:

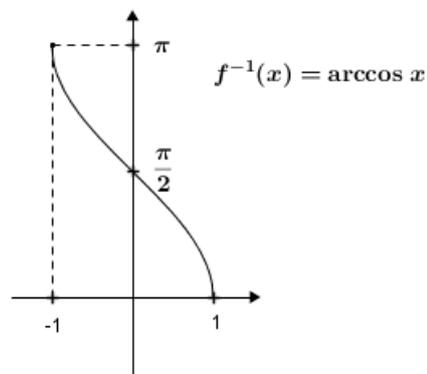


Figura 2.40: Função arco-cosseno

### 2.8.12 Função Arco Tangente

A função  $f : \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$  Tal que  $f(x) = \operatorname{tg} x$  não é bijetiva (já que  $0^\circ \neq \pi$  e  $\operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} \pi$ ). Se considerarmos  $f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \operatorname{tg} x$  (ver Figura 2.41).

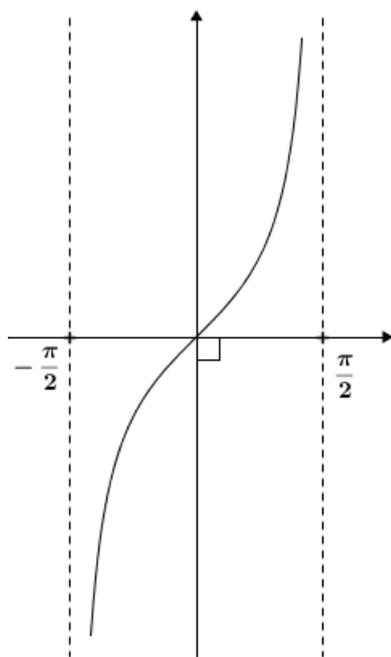


Figura 2.41: Função Tangente de  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R}$

$f$  é bijetiva e  $f^{-1}$  ou função Arco-tangente passará a ser a sua função inversa.

Note que:  $\mathbb{R}$  é o domínio de  $f^{-1}$ ,  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  o contradomínio e a cada  $x \in \mathbb{R}$  corresponde uma só  $y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $y$  é um arco cuja tangente é  $x$ , em símbolos:

$$y = \operatorname{arctg} x \iff \operatorname{tg} y = x \text{ e } y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

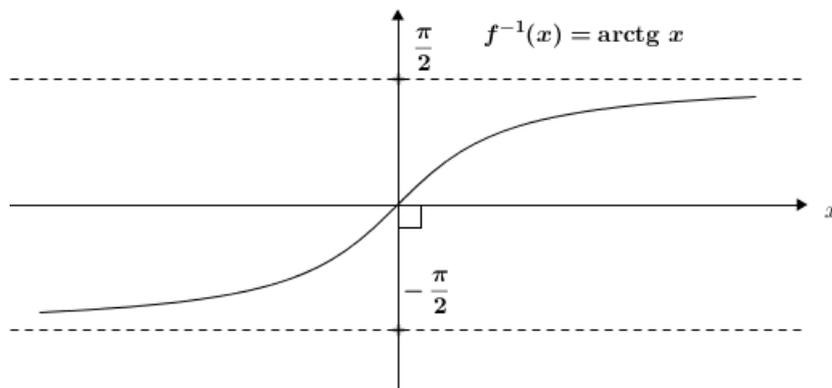


Figura 2.42: Função arco-tangente

## 2.9 Exp(x) e Relação de Euler

**Definição 2.14** No curso de cálculo define-se a função  $e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) como:

$$\operatorname{Exp}(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

ou seja, uma soma infinita (Série infinita) com domínio de convergência o conjunto dos números Reais.

### 2.9.1 Propriedade Multiplicativa

$$e^{t_1} \cdot e^{t_2} = e^{t_1+t_2}, \quad t_1 \in \mathbb{R} \text{ e } t_2 \in \mathbb{R}$$

### 2.9.2 Relação de Euler para $x$ Real

$$e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x$$

e para

$$e^{-i \cdot x} = \cos(-x) + i \cdot \operatorname{sen}(-x).$$

Como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, vem:

$$e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x).$$

### 2.9.3 Seno e Cosseno Complexo

$$(1) e^{i \cdot x} = \cos x + i \cdot \operatorname{sen} x \quad (x \in \mathbb{R})$$

como:

$$(2) e^{-i \cdot x} = \cos(x) - i \cdot \operatorname{sen}(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Fazendo:

(1) + (2) e (1) - (2), segue-se que:

$$\text{De (1) + (2), vem: } \cos x = \frac{e^{i \cdot x} + e^{-i \cdot x}}{2}$$

$$\text{De (1) - (2), vem: } \operatorname{sen} x = \frac{e^{i \cdot x} - e^{-i \cdot x}}{2 \cdot i}.$$

Para cada  $z = x + y \cdot i$  com  $x$  e  $y$  Reais, definamos:

$$\begin{cases} \cos(z) = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2} \\ \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} \end{cases}, \text{ com o seno e cossenos complexos.}$$

### 2.9.4 Noções Para Série de Fourier

**Definição 2.15** (*Série de Funções*) Uma Série  $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$ , ( $m$  natural), na qual cada  $f_m$  é uma função denominaremos Série de funções.

**Exemplo:**

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ( $n$  natural),  $x$  variável real, com  $|x| < 1$

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + k^2}$  ( $k$  natural),  $x$  variável real.

c)  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$ ,  $a_n$  e  $b_n$  números reais dados e  $n$  natural ( $n \geq 1$ )  
(Série trigonométrica)

◇

**Observação 2.6** Dizemos que a Série de funções  $\sum_{m=0}^{\infty} f_m$  converge uniformemente, em um domínio  $D$ , à função  $t : D \rightarrow \mathbb{R}$  se, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existir um natural  $n_0$  tal que, para todo  $x \in D$ ,  $n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{m=0}^{\infty} f_m - t(x) \right| < \epsilon$ . Não devemos esquecer da existência de critérios como de Cauchy e o de Weierstrass, bastante utilizados para decidir se uma convergência é uniforme ou não.

**Definição 2.16** (Coeficientes de Fourier em uma Função  $g$ ) Sendo  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g$  integrável os números  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) dx$ ,  $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx$  para  $n \geq 1$  e  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx$  para  $n \geq 1$  ( $n$  natural), são denominados coeficientes de Fourier de  $g$ .

**Definição 2.17** (Série de Fourier de uma função  $g$ ) A Série  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$  onde  $a_n$  e  $b_n$  são coeficientes de Fourier de  $g$ , é dita Série de Fourier de  $g$ .

**Observação 2.7** Lembraremos neste momento de certas integrais com uso frequente nas Séries de Fourier, bem como, a regra de integração por partes.

- $\int \cos(nx) dx = \frac{\sin(nx)}{n} + w$  ( $w$  constante real,  $n \geq 1$  natural)
- $\int \sin(nx) dx = -\frac{\cos(nx)}{n} + w$
- $\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$

Admitamos as funções  $f$  e  $g$  deriváveis, contínuas e integráveis em um intervalo  $I$ .

# Capítulo 3

## Aplicações

Conviveremos neste capítulo com situações cujo desenvolvimento dependerá do uso de uma ou mais das fundamentações teóricas vista no capítulo anterior.

### 3.1 Arco soma e função trigonométrica inversa

- 01) Utilizando a fórmula  $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$  e a equivalência  $\operatorname{arctg} y = x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = y$  ( $x$  e  $y$  reais e diferentes de  $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k$  inteiro). Verifique que  $\frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46}$ .

**Solução: 3.1** Seja  $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$ .

Fazendo:

$$\begin{array}{lcl} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} & \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e & \iff & e \quad (*) \\ y = \operatorname{arctg} a & \operatorname{tg} y = a \end{array}$$

Portanto, da igualdade:  $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a$ , vem:

$\frac{\pi}{4} = x + y \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}(x + y)$ . Como  $\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$  e  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ , segue-se que:

$1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ . Mas, por (\*)  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$  e  $\operatorname{tg} y =$

a. Substituindo, Vem:

$$\frac{1}{5} + a = 1 - \frac{1}{5}a \Rightarrow 1 + 5a = 5 - a \Rightarrow a = \frac{2}{3}.$$

### 3.1. ARCO SOMA E FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA INVERSA

---

Logo, como:  $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} a \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$  (Afirmação 1)

Seja:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} b.$$

Fazendo:

$$\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ e \end{array} \iff \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e \end{array}, \left( t \in \mathbb{R} \text{ e } t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) (**).$$

$$t = \operatorname{arctg} b \quad \operatorname{tg} t = b$$

Portanto, da igualdade:  $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} b$ , vem:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} = x + t \iff \operatorname{tg}(x + t) = \frac{2}{3}.$$

Daí:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} t}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{tg} t = 2 - 2 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} t. \text{ Mas, por } (**) \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \text{ e } \operatorname{tg} t = b. \text{ Substituindo, vem:}$$

$$\frac{3}{5} + 3 \cdot b = 2 - \frac{2}{5} \cdot b \Rightarrow 3 + 15 \cdot b = 10 - 2 \cdot b \Rightarrow b = \frac{7}{17}.$$

Logo, como:  $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$  (Afirmação 1).

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17} \text{ (Afirmação 2)}.$$

Seja:

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} c.$$

Fazendo:

$$\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \\ e \end{array} \iff \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \\ e \end{array}, \left( w \in \mathbb{R} \text{ e } w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right) (***)$$

$$w = \operatorname{arctg} c \quad \operatorname{tg} w = c$$

Portanto, da igualdade:  $\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} c$ , vem:

$$\operatorname{arctg} \frac{7}{17} = x + w \iff \operatorname{tg}(x + w) = \frac{7}{17}.$$

Daí:

$$\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} w}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w} = \frac{7}{17} \Rightarrow 17 \operatorname{tg} x + 17 \operatorname{tg} w = 7 - 7 \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} w. \text{ Mas, por } (**)$$

\*)  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{5}$  e  $\operatorname{tg} w = c$ . Substituindo, vem:

$$\frac{17}{5} + 17c = 7 - \frac{7}{5}c \Rightarrow 17 + 85c = 35 - 7c \Rightarrow c = \frac{9}{46}.$$

Logo, como  $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{7}{17}$  (Afirmação 2)

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 3 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{9}{46}$$

**Observação 3.1** Procedendo desta forma, John Machin (1680 - 1751) calculou para  $\pi$  uma aproximação com 100 casas decimais. O mesmo procedimento foi utilizado por William Shanks (1812 - 1882) Calculando para  $\pi$  uma aproximação com 707 casas decimais.

## 3.2 Equações trigonométricas no campo complexo

- 02) Verifique no campo complexo o número de soluções para a equação  $\operatorname{sen} z = 3$ , onde  $z = x + yi$  ( $x$  e  $y$  reais).

**Solução: 3.2**  $\operatorname{sen} z = 3$  (por definição  $\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ), daí:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 3 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 6i \Leftrightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} - 6i = 0 \text{ (multiplicando ambos os membros por } e^{iz}\text{), vem:}$$

$(e^{iz})^2 - 6i(e^{iz}) - 1 = 0$  (fazendo  $e^{iz} = w$ ), temos:  $w^2 - 6iw - 1 = 0$  (equação do segundo grau em  $w$ ). Logo:

$$\Delta = (-6i)^2 - 4(1)(-1)$$

$$\Delta = 36i^2 + 4 \text{ (como } 4 = -4i^2\text{)}$$

$$\Delta = 36i^2 - 4i^2$$

$$\Delta = 32i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot i^2}$$

$$\sqrt{\Delta} = 4i\sqrt{2}. \text{ Como: } w = \frac{6i \pm 4i\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow w = (3 \pm 2\sqrt{2})i.$$

Porém, como  $e^{iz} = w$ , vem:

$$e^{(x+yi)i} = (3 \pm 2\sqrt{2})i (z = x + yi) \Leftrightarrow e^{xi+yi^2} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \Leftrightarrow e^{-y} \cdot e^{xi} = (3 \pm 2\sqrt{2})i \text{ (propriedade multiplicativa)} \Leftrightarrow e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 \pm 2\sqrt{2})i \text{ (relação de Euler)}$$

Analisando cada possibilidade

I)  $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 + 2\sqrt{2})i$ . Note que o número no segundo membro da igualdade é Imaginário puro, logo:

$$\cos x = 0, \text{ isto é, } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } e^{-y} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 3 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow -y = \ln(3 + 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 + 2\sqrt{2}). \text{ Logo: números complexos da forma } z = \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \ln(3 + 2\sqrt{2}) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ satisfazem a equação } \operatorname{sen} z = 3.$$

II)  $e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) = (3 - 2\sqrt{2})i$ . Note que  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (por motivos análogo a solução anterior) e  $e^{-y} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 3 - 2\sqrt{2}$ , daí:

$$-y = \ln(3 - 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow y = -\ln(3 - 2\sqrt{2}). \text{ Logo: números complexos da forma } z = \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) - i \ln(3 - 2\sqrt{2}) \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ satisfazem a equação } \operatorname{sen} z = 3. \text{ Portanto, no campo dos números complexos, a equação } \operatorname{sen} z = 3 \text{ possui infinitas soluções.}$$

### 3.3 Identidades

03) Usando argumentos trigonométricos, prove cada identidade abaixo para  $m$  e  $n$  inteiros:

a)  $\operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$

b)  $\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$

c)  $\operatorname{sen}(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x]$

**Solução: 3.3** De fato:

$$\text{De } \cos(m+n)x = \cos(mx) \cos(nx) - \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \text{ (*)}$$

Trocando  $n$  por  $-n$  e sendo ímpar a função seno e par a função cosseno, escrevemos:

$$\cos(m-n)x = \cos(mx) \cos(nx) + \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) (**).$$

Fazendo:  $(**) - (*)$  e  $(**) + (*)$ , vem:

$\cos(m-n)x - \cos(m+n)x = 2 \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx)$  e  $\cos(m-n)x + \cos(m+n)x = 2 \cos(mx) \cos(nx)$ . Daí:

$$[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) \text{ e } [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] \cdot \frac{1}{2} = \cos(mx) \cos(nx).$$

De  $\operatorname{sen}(m+n)x = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) + \operatorname{sen}(nx) \cos(mx)$  (1).

De modo análogo ao exercício anterior, escrevemos:

$$\operatorname{sen}(m-n)x = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) - \operatorname{sen}(nx) \cos(mx) \text{ (2)}.$$

Fazendo: (1) + (2), vem:

$$\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x = 2 \operatorname{sen}(mx) \cos(nx). \text{ Daí: } [\operatorname{sen}(m+n)x + \operatorname{sen}(m-n)x] \cdot \frac{1}{2} = \operatorname{sen}(mx) \cos(nx).$$

### 3.4 Igualdades

04) Mostre que:

a)  $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$ ; Para  $m \neq n$  inteiros

b)  $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$ ; para todo  $m$  e  $n$  (inteiros)

c)  $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx$  para  $m = n$  (inteiro).

**Solução: 3.4** a)  $m \neq n$ , daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}(m-n)x}{(m-n)} - \frac{\operatorname{sen}(m+n)x}{(m+n)} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(nx) dx = 0, \text{ e:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x + \cos(m+n)x] dx \text{ de modo análogo, temos:}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 0.$$

b) Primeiro caso  $m \neq n$ , vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(m+n)x + \text{sen}(m-n)x] dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(m+n)x}{(m+n)} + \frac{-\cos(m-n)x}{(m-n)} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0$$

Segundo caso  $m = n$ , vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(2nx)}{2} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\text{sen}(2nx)] dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(2nx)}{2n} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \cos(nx) dx = 0.$$

c) Para  $m = n$ , vem:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}^2(nx) dx \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx.$$

Daí:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos^2(nx)] dx \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nx) \right) dx.$$

Segue-se que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) dx = 2\pi - \left( \pi + \frac{1}{2} \cdot 0 \right) \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = 2\pi \cdot \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(mx) \text{sen}(nx) dx = \pi \quad e \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx = \pi.$$

### 3.5 Aplicação 1 para a Série de Fourier

- 05) Seja  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável tal que  $f(x) = ax$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ ). Ache a Série de Fourier de  $f(x)$ .

**Solução: 3.5** I) *coeficientes de Fourier.*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \, dx \text{ e } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \cos(nx) \, dx$$

( $n \geq 1$ ). *como  $ax$  e  $ax \cdot \cos(nx)$  são funções ímpares, temos  $a_0 = 0$  e  $a_n = 0$ .*

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx) \, dx \text{ (} n \geq 1 \text{)}. \text{ como } ax \cdot \text{sen}(nx) \text{ é função par, temos:}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} ax \cdot \text{sen}(nx) \, dx.$$

*Integrando por partes, segue-se que:*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ \left( -\frac{ax}{n} \cos(nx) \right) \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{n} \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ (-1) \left( \frac{a\pi}{n} \right) (-1)^n + \frac{a}{n} \left( \frac{\text{sen}(nx)}{n} + w \right) \Big|_0^{\pi} \right].$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[ (-1)^{n+1} \frac{a\pi}{n} \right] = (-1)^{n+1} \frac{2a}{n}.$$

*Logo, a Série de Fourier procurada é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2a}{n} \cdot \text{sen}(nx), \quad n \geq 1.$$

### 3.6 Aplicação 2 para a Série de Fourier

- 06) Uma onda quadrada é uma função periódica simples de forma analítica  $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Esta forma de onda Básica é encontrada frequentemente nas áreas da eletrônica e do processamento de sinais, ela alterna regularmente e instantaneamente entre dois níveis. Na figura 3.1, tem-se um exemplo de uma onda quadrada.

Determine a Série de Fourier da onda exposta na figura 3.1.

**Solução: 3.6** *Os coeficientes de Fourier:*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

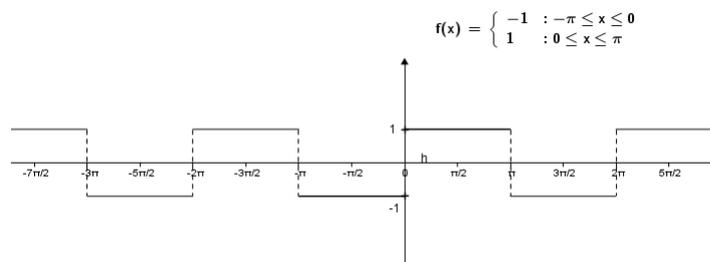


Figura 3.1: Onda Quadrada

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -1 \, dx + \int_0^{\pi} 1 \, dx \right)$$

$$a_0 = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\cos(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \cos(nx) \, dx \right)$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen}(nx) \, dx + \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \, dx \right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left( \frac{-\cos(nx)}{n} \right) \Big|_0^{\pi} \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ -\left( -\frac{1}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n} \right) + \left( -\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{n} - \frac{2 \cos(n\pi)}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)).$$

Logo:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \operatorname{sen}(nx)$  é a Série de Fourier da função  $f(x)$ .

### 3.7 Lei do cosseno e Lei do seno

07) Prove que:

### 3.7. LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

- a) Em um triângulo qualquer (ver figuras 3.2 3.3), vale a relação:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$ .

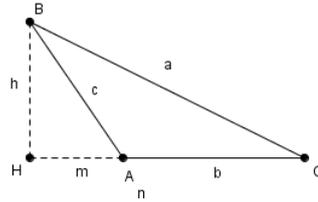
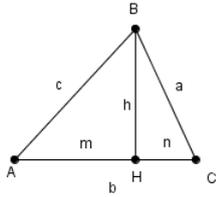


Figura 3.2: Triângulo Acutângulo  $ABC$  com Ângulo Agudo Fixo em  $A$       Figura 3.3: Triângulo Obtusângulo  $ABC$  com Ângulo Obtuso Fixo em  $A$

- b) Em um triângulo qualquer inscrito em uma circunferência de raio  $R$  (ver figura 3.4), vale a relação:  $\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R$

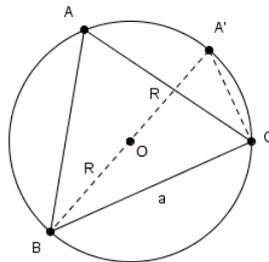


Figura 3.4: Triângulo Inscrito  $ABC$  no Circulo de Centro  $O$  e Raio  $R$

**Solução: 3.7** a) *Caso*  $\hat{A} < 90^\circ$

- Do  $\Delta_{AHB}$ ; vem:  $c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2$  (1)
- Do  $\Delta_{CHB}$ ; vem:  $a^2 = h^2 + n^2$  (2)
- Do  $\Delta_{ABC}$ ; vem:  $m + n = b \Leftrightarrow n = b - m$  (3).

Substituindo em (2) os valores de  $h^2$  e  $n$  escritos em (1) e (3), temos:

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b - m)^2 \Leftrightarrow a^2 = c^2 - m^2 + b^2 - 2bm + m^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

mas,  $m = c \cdot \cos(\hat{A})$ . Logo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$$

Caso  $90^\circ < A < 180^\circ$

$$\rightarrow \text{Do } \Delta_{AHB}; \text{ vem: } c^2 = h^2 + m^2 \Leftrightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (1)$$

$$\rightarrow \text{Do } \Delta_{BHC}; \text{ vem: } a^2 = h^2 + n^2 \quad (2).$$

Como  $n = b + m$  (3) e substituindo os valores de  $h^2$  e  $n$  encontrados em (1) e (3) em (2), vem:

$$a^2 = c^2 - m^2 + (b + m)^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm. \text{ mas, } m = c \cdot \cos(180^\circ - A) \text{ ou } m = -c \cdot \cos \hat{A}. \text{ Logo:}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}.$$

b) Do  $\Delta_{A'CB}$ , vem:  $\hat{C} = 90^\circ$  (ângulo inscrito tendo como lado oposto um diâmetro da circunferência e  $\hat{A} = \hat{A}'$ ) ângulos inscritos na mesma circunferência correspondentes a arcos de mesma medida.

Logo:

$$a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A}' \Leftrightarrow a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A} \Leftrightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R.$$

### 3.8 Aplicação da Lei do cosseno e Lei do seno

08) De um ponto  $P$  a beira mar, Egdemos avista duas ilhas  $C$  e  $D$  (ver figura 3.5)

Para ele a questão é: como procederia um topografo dispondo de trenas, teodolito e fazendo uso de conceitos básicos de trigonometria, para calcular a distância que separa essas ilhas sem recorrer à medição direta?

**Solução: 3.8** • *Primeiro passo:*

*Escolhem-se na praia dois pontos  $A$  e  $B$ , de onde se possam ver as ilhas. usando a trena calcula-se a distância  $AB$  (digamos  $x$ ).*

3.8. APLICAÇÃO DA LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

---

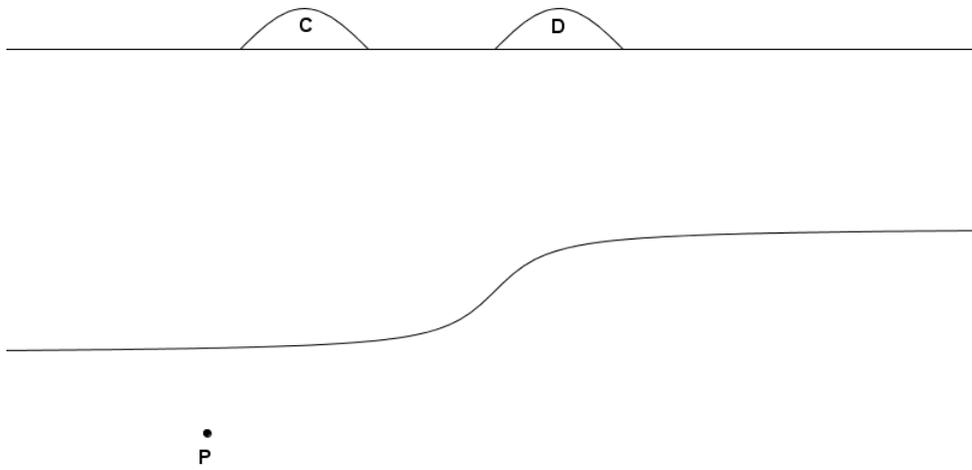


Figura 3.5: Ilhas  $C$  e  $D$

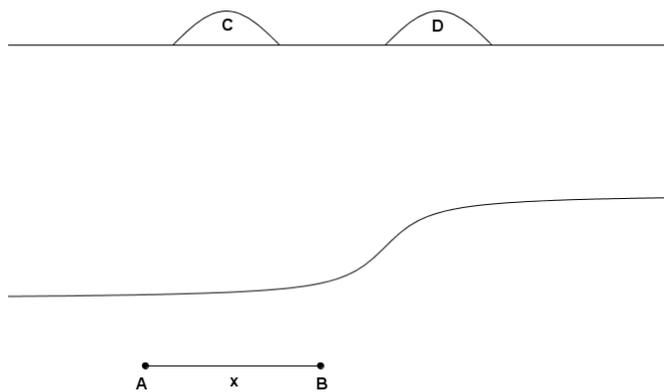


Figura 3.6: Segmento  $AB$

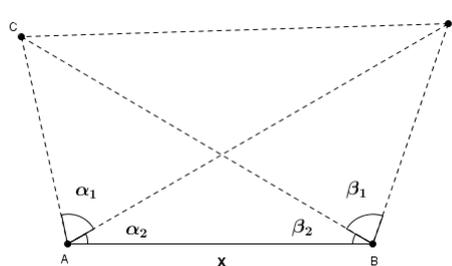


Figura 3.7: Quadrilátero  $ABCD$

- *Segundo passo:*

### 3.8. APLICAÇÃO DA LEI DO COSSENO E LEI DO SENO

---

Medem-se os ângulos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  com o teodolito (ver figura 3.7).

- *Terceiro passo:*

*Destaquemos dois triângulos ( $\Delta_{ABC}$  e  $\Delta_{ABD}$ ).*

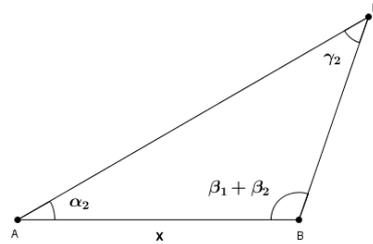
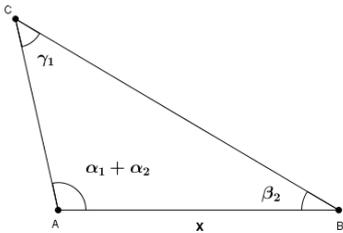


Figura 3.8: Triângulo  $ABC$  Interno na Fi- Figura 3.9: Triângulo  $ABD$  Interno na Fi-  
gura 3.7 gura 3.7

*Mas:*  $\gamma_1 = 180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2)$

*Pela lei dos senos*

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } \beta_2} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_1} \Leftrightarrow \overline{AC} = x \cdot \frac{\text{sen } \beta_2}{\text{sen } \gamma_1} \quad (1)$$

*Mas:*  $\gamma_2 = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2 + \alpha_2)$  *pela lei dos senos*  $\frac{\overline{AD}}{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen } \gamma_2} \Leftrightarrow$

$$\overline{AD} = x \cdot \frac{\text{sen}(\beta_1 + \beta_2)}{\text{sen } \gamma_2} \quad (2)$$

- *Quarto passo (final)*

*Destaquemos o triângulo  $ACD$ :*

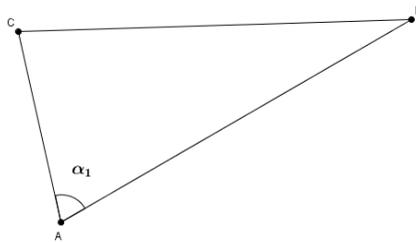


Figura 3.10: Triângulo  $ACD$  Interno na Figura 3.7

Note que são conhecidas as medidas de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  e  $\alpha_1$ . Pela lei dos cosenos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha_1 \Leftrightarrow \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos \alpha_1}$$

### 3.9 Razões trigonométricas e teorema de Pitágoras

- 09) Suponha que uma pessoa está deitada em uma praia observando o pôr do sol em um oceano tranquilamente, a pessoa liga um cronômetro assim que a ponta mais alta do sol desaparece. A pessoa então fica em pé, eleva seus olhos de uma altura  $h$ , e para o cronômetro quando a parte mais alta do sol desaparece novamente. Se o tempo decorrido no relógio é  $t$  segundos, determine um valor aproximado para o raio da Terra usando  $h = 1,70 \text{ m}$  e  $t = 11,1$  segundos.

**Solução: 3.9** Lembre-se que, à medida que o sol desaparece, a linha de visão do observador até a parte de cima do sol é tangente à superfície da Terra.

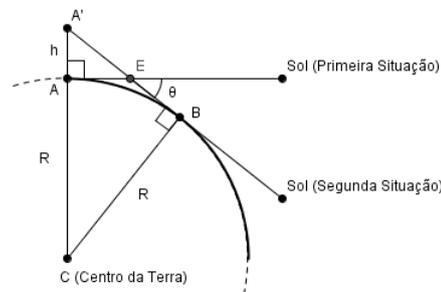


Figura 3.11: Triângulo  $A'BC$  com Ângulo Fixo  $\theta$

Do  $\Delta_{A'BC}$  Retângulo, vem:

$(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$  e  $\overline{A'B} = R \cdot \text{tg } \theta$ . Mas como o ângulo  $\theta$  é o ângulo descrito pelo sol em torno da Terra durante o tempo medido  $t = 11,1$  segundos e durante um dia inteiro (aproximadamente 24 horas), o sol descreve um ângulo de  $360^\circ$  em torno da Terra, isto sugere uma regra de três simples e direta:

### 3.9. RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E TEOREMA DE PITÁGORAS

---

<i>Tempo</i>	_____	<i>Ângulo</i>
24 horas	_____	360°
11,1 segundos	_____	$\theta(\text{graus})$

$$\text{Daí: } \theta = \frac{(11,1) \cdot (360^\circ)}{24 \cdot 60 \cdot 60}$$

$\theta = 0,04625^\circ$ . Portanto, de:  $(R+h)^2 = (\overline{A'B})^2 + R^2$  e  $\overline{A'B} = R \cdot \text{tg } \theta$ , temos,  $R^2 + 2Rh + h^2 = (R \text{tg } \theta)^2 + R^2 \Leftrightarrow 2Rh + h^2 = R^2 \cdot \text{tg}^2 \theta$ . Como  $h$  é bem menor que o raio da Terra, então  $h^2$  é bem menor em relação a  $2Rh$ , podendo ser desprezado a sua medida. Daí:

$$2Rh = R^2 \text{tg}^2 \theta \Leftrightarrow \frac{2h}{\text{tg}^2 \theta} = R. \text{ Mas: } h = 1,70 \text{ m e } \theta = 0,04625^\circ. \text{ Substituindo, vem:}$$

$$R = \frac{2(1,70 \text{ m})}{\text{tg}^2(0,4625^\circ)} \text{ (usando uma calculadora científica)}$$

$R \cong 5.220.000 \text{ m}$  (o valor aceito para o raio (médio) da Terra é 6.370.000 m, cujo resultado anterior não difere mais que 20% deste valor).

# Referências Bibliográficas

- [1] Willian G. MacCallum - Álgebra : Forma e Função / produzido pelo Calculus Consortium e Financiado inicialmente por uma bolsa da National Science Foundation; tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio - Rio de Janeiro : LTC, 2011
- [2] Antunes, Fernando do Coltro - Matemática por assunto - Trigonometria - São Paulo: Scipione 1988
- [3] GOMES, Carlos A. - Pode um seno ser maior do que 1? - RPM revista do professor de matemática. Ed. 81, ano 31. 2013. Grafica e Editora Cruzado Ltda.
- [4] Gidorizzi, Hamilton Luiz - Um Curso de Cálculo - 2 ed vol 4 - Rio de Janeiro: 1997
- [5] Dante, Luiz Roberto - Matemática: Contexto e Aplicações - 2 ed - São Paulo: 2013
- [6] Iezzi, Gelson, 1939 - Fundamentos de Matemática elementar, 3 : Trigonometria - 7 ed - São Paulo : Atual 1993
- [7] Júnior, Francisco Ramalho, 1940 - Júnior, Nicolau Gilberto Ferraro, Paulo Antônio de Toledo Soares - Os Fundamentos da Física / 5ª edição - São Paulo : Moderna 1988
- [8] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 1: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013
- [9] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszanjn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida - Matemática: Ciência e aplicações, Volume 2: ensino médio - 7 ed - São Paulo : Saraiva 2013
- [10] Neto, Aref Antar - Geometria Analítica: 2º grau - São Paulo: Moderna 1980

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- [11] Rooney, Anne - A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. 2012 - São Paulo - M.Books do Brasil Editora LTDA.
- [12] HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. - Fundamentos de Física - 6 ed - Rio d Janeiro: Editora LTC. 2002
- [13] Wiley, John; Inc, Sons. - Livros Técnicos e Científicos : Contexto e Aplicações - 2 ed - Rio de Janeiro: Editora S.A. 2002