Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA COM AUXÍLIO DO MULTIPLANO E BLOCOS CÚBICOS

por

João Paulo Arruda da Silva

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática

AGOSTO/2014
João Pessoa - PB

Catalogação na publicação

Universidade Federal da Paraíba

Biblioteca Setorial do CCEN

S586f Silva, João Paulo Arruda Silva.
Funções afim e quadrática com auxílio do multiplano e blocos cúbicos/ João Paulo Arruda da Silva.– João Pessoa, 2014.
55f. : il.
Orientador: Manassés Xavier de Souza
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN.
1. Matemática. 2. Função afim. 3. Função quadrática. 4.Bloco de cubos. 5. Multiplano. 6. Forma canônica.

UFPB/BC CDU: 51(043)

FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA COM AUXÍLIO DO MULTIPLANO E BLOCOS CÚBICOS

por

João Paulo Arruda da Silva

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Manassés Xavier de Souza

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi - UFPB

Tarciana Mª S Silva

Profa. Dra. Tarciana Maria Santos da Silva - UFRPE

AGOSTO/2014

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus em primeiro lugar, por me dar a oportunidade de poder realizar mais um sonho em minha vida.

Aos meus pais por me apoiarem e me incentivarem aos estudos.

À minha querida esposa Rilma Arruda pela compreensão e paciência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza que tanto me ajudou na confecção e correção das ideias utilizadas nesse trabalho.

A todos os Professores do Curso PROFMAT da Universidade Federal da Paraíba em João Pessoa que tanto auxiliaram nossa turma nos diversos momentos de dificuldade e desânimo, contribuindo bastante conosco com sabedoria e paciência.

Aos meus colegas de turma, em especial, Antônio, Demilson, Edjane, Eli Paulo, José Marcondes, Josildo e Renato Beserra, grandes amigos que fiz no curso e que compartilharam muitas noites e madrugadas de estudos comigo.

À Banca composta pelos Professores Dr. Manassés Xavier de Souza , Dr. Alberto Masayoshi Faria Ohashi e Dra. Tarciana Maria Santos da Silva.

Às minhas amadas filhas Paola Arruda, Paula Arruda e Sarah Arruda pela felicidade que me proporcionam todos os dias.

À CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo incentivo financeiro dado através da concessão da bolsa de estudos.

A meu inesquecível pai
Genival Ferreira da Silva
(in memorian).

Resumo

Este trabalho apresenta uma nova maneira de se discutir conceitos envolvendo função, função afim e função quadrática. Através de atividades simples com uso dos blocos de cubos, do multiplano e de softwares como o Geogebra, o aluno passará de uma posição passiva, como simples ouvinte, a integrante ativo do processo de ensino-aprendizagem, possibilitando ao mesmo adquirir uma noção mais ampla do conceito de função e aplicá-lo posteriormente na resolução de problemas na escola e em sua vida cotidiana. Além dessas atividades diversificadas, tópicos que geralmente não são colocados em destaque na maioria dos livros de ensino médio tais quais a análise da forma canônica da função quadrática e o Teorema de caracterização da função afim terão um importante papel no desenvolvimento que se espera dos estudantes a respeito dessa importante área da Matemática.
Todas as atividades foram desenvolvidas com alunos da 1^a série do ensino médio da Escola Estadual Natalícia Maria Figueiroa da Silva, localizada na cidade de Surubim no Estado de Pernambuco.

Palavras Chave: Função afim, Função quadrática, Bloco de cubos, Multiplano, Forma canônica, Caracterização.

Abstract

This paper presents a new way of discussing concepts involving function, affine function and quadratic function. Through simple activities with the use of blocks of cubes, and the multiplane software such as GeoGebra, students will move from a passive position, as simple listener, the active member of the teaching-learning process, enabling them to acquire a broader notion the concept of function and apply it later in solving problems in school and in their daily lives. Besides these diversified activities, topics that are usually not given prominence in most books of high school such that the analysis of the canonical form of the quadratic function and the theorem of characterization of affine function will play an important role in developing what is expected of students about this important area of mathematics.
All activities were conducted with 1st grade students of high school Natalicia Maria Figueiroa da Silva, located in the city of Surubim, in the state of Pernambuco.

Key words: Affine function, Quadratic function, Block of cubes, Multiplane, Canonical form, Characterization.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

O conceito de *função* é um dos mais importantes da Matemática, ocupando lugar de destaque em vários de seus segmentos e em diversas outras áreas do conhecimento. É bastante comum expressar fenômenos físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções. Todos esses aspectos justificam um estudo mais detalhado desse importante tópico no Ensino Médio.

O tópico *funções* é abordado nas escolas na última série do Ensino Fundamental II porém, ao chegarem na 1ª série do ensino médio a grande maioria dos estudantes não conseguem compreender sequer as noções mais básicas envolvendo o conceito de funções, gerando grandes dificuldades de aprendizagem e construção de conhecimento. Apesar do conteúdo *função* estar presente em todos os livros da 1ª série do ensino médio, este vem, muitas vezes, apresentado de maneira mecânica, parecendo ser algo distante, sem conexão alguma com problemas do cotidiano dos estudantes. Desse modo, além de gerar certo desinteresse por parte dos estudantes, os conceitos fundamentais envolvendo função não são assimilados de forma satisfatória, levando os mesmos a cometerem diversos erros quando se deparam com situações-problema envolvendo o conceito de função.

Nesta proposta de atividade, primeiramente será elaborada uma avaliação diagnóstica contendo quinze questões de múltipla escolha envolvendo noções básicas sobre função, função afim e função quadrática, que será aplicada em duas turmas da 1ª série do ensino médio da Escola Estadual Natalícia Figueiroa, localizada na Cidade de Surubim no Estado de Pernambuco. Essa avaliação será resolvida individualmente, durante duas horas e não haverá consulta de material didático nem calculadora. Após a aplicação desse exame diagnóstico, será feita uma análise detalhada dos resultados obtidos pelos estudantes, levando em consideração os pontos fortes e, principalmente, as principais dificuldades encontradas por eles na resolução das questões e, com base nesses dados, será elaborado o Capítulo 2 desta proposta, contendo um material didático abordando tópicos a respeito de função, função afim e função quadrática, tendo como fontes os livros da 1ª série do ensino médio, Matemática, Contextos e Aplicações, do professor Luiz Roberto Dante, Fundamentos da Matemática Elementar, volume 1, do professor Gelson Iezzi, além dos trabalhos do professor Elon Lages Lima.

Além desse material de apoio para as aulas serão realizadas oficinas com diversas atividades com uso de alguns materiais, em especial, o multiplano e os blocos cúbicos, no laboratório de Matemática da escola, para que haja um maior interesse, participação e, consequentemente, os estudantes consigam ter uma boa assimilação dos conceitos de função.

Finalmente, após o estudo de todo material e realização das oficinas, será elaborado e aplicado com as mesmas turmas, um segundo exame diagnóstico contendo dez questões de múltipla escolha a respeito de função, função afim e função quadrática. Os resultados obtidos pelos estudantes serão analisados e, finalmente comparados com os resultados do exame inicial.

Capítulo 1

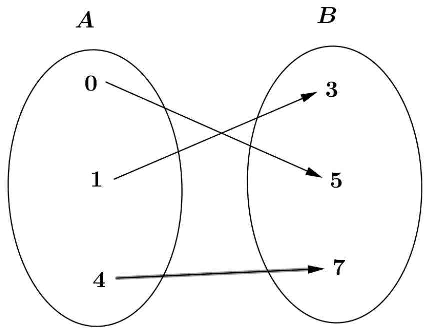
Questões propostas no exame diagnóstico e análise dos resultados

O exame diagnóstico a seguir foi aplicado com alunos de duas turmas da 1ª série do ensino médio da Escola Estadual Natalícia Maria Figueiroa da Silva, localizada na cidade de Surubim-PE.

O objetivo do teste era verificar as principais dificuldades encontradas pelos alunos ao se depararem com situações-problema envolvendo o conceito de função, função afim e função quadrática.

O exame possui quinze questões, onde são abordadas noções básicas sobre conceito de função, resolução de problemas com função afim e função quadrática. Primeiramente serão analisadas as respostas dos estudantes em cada questão e serão feitas observações sobre as possíveis causas de alguns erros. A seguir podemos observar as questões do teste e, ao lado das alternativas de cada questão, temos o percentual de alunos que a marcaram.

Questão 01: Utilizando os conceitos de domínio e imagem da função e considerando o diagrama abaixo, que representa uma função de A em B, podemos afirmar que a imagem da função é igual a:



(a) $\{1, 0, 4\}$ 30% (b) $\{4, 7\}$ 20% (c) $\{3, 5, 7\}$ 46,7%

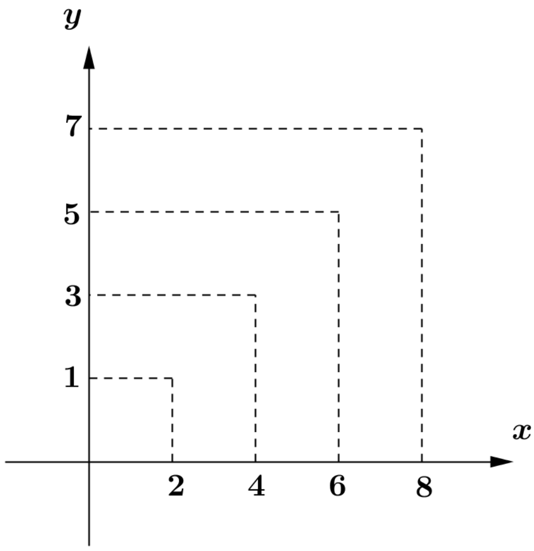
(d) $\{3, 7\}$ 3,3% (e) $\{5, 7\}$ 0%

Alternativa correta : **C**

A questão tinha como objetivo verificar o conhecimento dos alunos a respeito do conceito de função, domínio, contradomínio e imagem de uma função através da análise do Diagrama de "flechas".

Após a análise cuidadosa dos resultados, verificou-se que 46,7% dos estudantes respondeu corretamente a questão **(alternativa(C)**$\{3,5,7\}$**)** porém, 30% dos estudantes assinalaram a alternativa **(A)** $\{1,0,4\}$ o que demonstra claramente que há uma inversão entre os conceitos de domínio e imagem de uma função.

Questão 02: Sejam os conjuntos $A = \{2,4,6,8\}$ e $B = \{1,3,5,7\}$. Seja R uma relação em $A \times B$, tal que $R = \{(x,y) \in A \times B, y = x - 1\}$ apresentada pelo seu gráfico cartesiano. Identifique a única afirmação falsa:



(a) (2,1) pertence à relação	5%	**(b)** (8,7) pertence à relação	25%
(c) (4,3)pertence à relação	6,7%	**(d)** (6,5) pertence à relação	1,7%
(e) (8,9) pertence à relação	61,7%		

Alternativa correta : E

A questão tinha como objetivo verificar se os alunos têm noção do conceito de relação binária e da representação de pontos de um produto cartesiano em um sistema cartesiano ortogonal. Após a análise dos resultados, verificou-se que 61,7% dos estudantes respondeu corretamente a questão **(alternativa (E) (8,9) pertence à relação)** porém 25% dos estudantes assinalaram a alternativa **(B) (8,7) pertence à relação**, que é uma afirmação verdadeira, porém esse percentual de alunos não percebeu a *lei* da relação R através da análise do gráfico.

Questão 03: Zero ou raiz de uma função, por definição, é o valor de x que anula a função. Dada a função $f(x) = -2x + 6$. Qual dos conjuntos contém o zero ou raiz da função f ?

(a) $\{-3\}$	26,7%	**(b)** $\{-2\}$	18,3%	**(c)** $\{-1\}$	15%
(d) $\{0\}$	13,3%	**(e)** $\{3\}$	26,7%		

Alternativa correta : E

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes possuem noção do conceito de zero de uma função afim e, através da resolução da equação de 1º grau, pudessem calcular esse valor.

Verificou-se nos resultados que 26,7% dos estudantes respondeu corretamente a questão (**alternativa (E)** $\{3\}$) porém, 26,6% dos estudantes assinalaram a alternativa **(A)** $\{-3\}$. Verifica-se que a maioria dos estudantes não entendeu enunciado da questão, já que no mesmo já aparece a definição de zero da função. Observa-se também que parte dos estudantes confundiu os sinais ao calcularem o valor da função f no ponto de abscissa $x = -3$.

Questão 04: O salário de um vendedor é composto de uma parte fixa no valor de R$ 800,00, mais uma parte variável de 10% sobre o valor de suas vendas no mês. Caso ele consiga vender R$4500,00, qual será o valor de seu salário?

(a) R$845,00 23,3% **(b)** R$1000,00 5% **(c)** R$1100,00 8,3%

(d) R$1250,00 50% **(e)** R$1500,00 8%

Alternativa correta : D

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam desenvolver uma expressão que relacionasse as variáveis, salário e total de vendas, a fim de encontrar uma função entre essas variáveis e, finalmente, calcular o valor dessa função em determinado ponto. Verificou-se nos resultados que 50% dos estudantes respondeu corretamente a questão **(alternativa (D) R$1250,00)** porém, 23,3% dos estudantes assinalaram a **alternativa (A) R$845,00**. Percebe-se que esses alunos calcularam de forma incorreta o percentual de 10% sobre o total de vendas (R$ 4500,00) encontrando R$45,00, que corresponde a 1% de R$4500,00 , levando essa parcela de estudantes a cometer esse equívoco.

Uma importante observação a ser feita é que, como o problema se trata de uma situação do cotidiano dos estudantes, o percentual de acertos foi bem maior que em outras questões.

Questão 05: Dada a função do 1º grau $f(x) = 2x - 5$. Determine o valor da expressão

$$\frac{f(-3) + f(3)}{f(0)}.$$

(a) 1 21,7% **(b)** 2 23,3% **(c)** 3 40%

(d) 4 5% **(e)** 5 10%

Alternativa correta : B

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam calcular o valor da função ao resolver a expressão dada. Verificou-se nos resultados que 23,3% dos estudantes responderam corretamente a questão **(alternativa (B) 2)** porém, 40% dos estudantes, a maioria, assinalaram a **alternativa (C) 3** o que comprova a dificuldade que esses alunos possuem em calcular o valor de expressões numéricas corretamente.

Questão 06: Para transformar graus Fahrenheit em graus Celsius usa-se a fórmula:

$$C = \frac{5(F-32)}{9},$$

onde F é o número de graus Fahrenheit e C é o número de graus Celsius. Qual valor, em graus Celsius, corresponderá a 95 graus Fahrenheit ?

(a) $0°C$ 1,7% **(b)** $10°C$ 11,7% **(c)** $15°C$ 13,3%

(d) $25°C$ 15% **(e)** $35°C$ 58,3%

Alternativa correta : E

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam determinar o valor da função dada em certo número. Verificou-se nos resultados que 58,3% dos estudantes responderam corretamente a questão (**alternativa (E)** $35°C$), mostrando que houve uma melhora nos índices de acertos, porém, 15% dos estudantes assinalou a **alternativa (D)** $25°C$, o que nos leva a crer que realizaram incorretamente a subtração entre parênteses **(F-32)**, chegando ao resultado **45**, levando consequentemente, ao erro.

Questão 07: Admitindo-se que $f(x) = mx + n$ possui 3 como zero e $f(1) = -8$. Quais os valores de m e n ?

(a) $m = 4$ e $n = -12$ 36,7% **(b)** $m = -4$ e $n = 10$ 16,7%

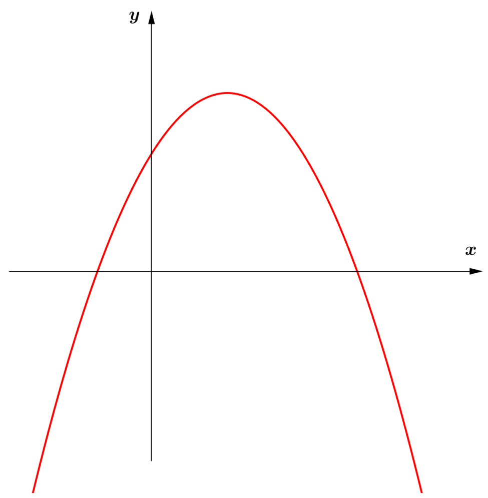
(c) $m = 3$ e $n = 4$ 26,7% **(d)** $m = 14$ e $n = 1$ 6,7%

(e) $m = 4$ e $n = -10$ 13,3%

Alternativa correta : A

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam determinar uma função afim através de dois de seus pontos.Verificou-se nos resultados que 36,7% dos estudantes responderam corretamente (**alternativa (A)** $m = 4$ **e** $n = -12$) porém, 26,7% dos estudantes assinalaram a alternativa (**(C)** $m = 3$ **e** $n = 4$) o que demonstrou a enorme dificuldade que esses alunos têm em resolver um simples sistema de equações do 1º grau.

Questão 08: A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



(a) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$ 10% **(b)** $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$ 33,3%

(c) $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ 13,3% **(d)** $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$ 21,7%

(e) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$ 21,7%

Alternativa correta : E

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam identificar o comportamento do gráfico da função quadrática através da análise de seus parâmetros a, b e c . Verificou-se nos resultados que 21,7% dos estudantes responderam corretamente **(alternativa (E)** $a < 0$**,** $b > 0$ **e** $c > 0$), porém, 33,3%(maioria) dos estudantes assinalaram a **alternativa (B)** $a > 0$**,** $b > 0$ **e** $c < 0$, demonstrando que esses estudantes não possuem sequer a noção mais básica na construção do gráfico da função quadrática que é a determinação da concavidade da parábola através da análise do parâmetro a.

Questão 09: O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y = -40x^2 + 200x$. Onde y representa a altura, em metros, atingida pelo projétil e x representa o instante de tempo, em segundos. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar corresponde, respectivamente, a:

(a) $6,25m$, $5s$ 11,7% **(b)** $250m$, $0s$ 5% **(c)** $250m$, $5s$ 60%

(d) $250m$, $200s$ 20% **(e)** $10000m$, $5s$ 3,3%

Alternativa correta : C

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam determinar as coordenadas do vértice da função quadrática e, consequentemente, seu valor máximo. Verificou-se nos resultados que 60% dos estudantes responderam corretamente **(alternativa (C) 250m,5s)**, porém, 20% dos estudantes assinalaram a **alternativa (D)250m,200s**, demonstrando que esses estudantes confundiram-se ao calcular as coordenadas do vértice da função dada e /ou tiveram dificuldades quanto a interpretação do enunciado do problema.

Questão 10: Quais as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função $y = (x-2)^2 + 2$?

(a) $(-2,-2)$ 10% **(b)** $(-2,0)$ 11,7% **(c)** $(-2,2)$ 41,7%

(d) $(2,-2)$ 18,3% **(e)** $(2,2)$ 18,3%

Alternativa correta : E

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conhecem a forma canônica de uma função quadrática. Verificou-se nos resultados que 18,3% dos estudantes responderam corretamente **(alternativa (E)(2,2))**, porém, 41,7% dos estudantes(maioria) assinalaram a alternativa **(C) (-2,2)**, pois foram "guiados" apenas pelos valores dos coeficientes visualizados na função.

Questão 11: Quais são os zeros da função quadrática a seguir $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$?

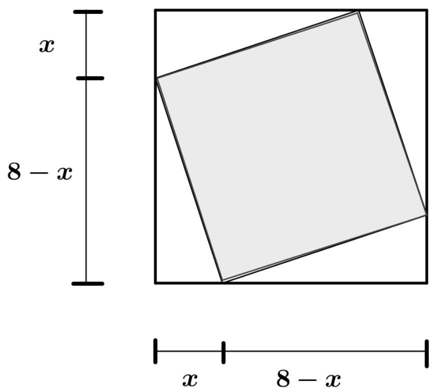
(a) $\frac{1}{2}$ e 2 33,3% **(b)** $\frac{1}{2}$ e 3 30% **(c)** $\frac{1}{2}$ 15%

(d) 0 e 3 10% **(e)** 0 e 2 5%

Alternativa correta : A

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam calcular os zeros de uma função quadrática. Verificou-se nos resultados que 33,3% dos estudantes responderam corretamente **(alternativa (A)$\frac{1}{2}$ e 2)**, porém, 30% dos estudantes assinalaram a **(alternativa (B)$\frac{1}{2}$ e 3)**, pois se confundiram ao resolver a equação do 2º grau.

Questão 12: Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado. Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Após esse cálculo, verifica-se que essa área resultante A é função da medida x. O valor mínimo de A é:



(a) $16cm$ 36,7% **(b)** $24cm$ 16,7% **(c)** $28cm$ 10%

(d) $32cm$ 31,7% **(e)** $48cm$ 5%

Alternativa correta : D

A questão tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam determinar uma expressão algébrica ao tentar encontrar o valor da área hachurada da figura dada. Verificou-se nos resultados que 31,7% dos estudantes responderam corretamente **(alternativa (D)32cm)**, porém, 36,7%(maioria) dos estudantes assinalaram a **alternativa (A)16 cm** pois se confundiram ao calcular a área solicitada e pelo não conhecimento de como determinar as coordenadas do vértice de uma função quadrática.

Texto a ser utilizado nas próximas duas questões:

Um corpo lançado do solo verticalmente para cima tem posição em função do tempo dada pela função $f(t) = 40t - 5t^2$ ***onde a altura f(t) é dada em metros e o tempo t é dado em segundos. De acordo com essas informações responda as questões 13 e 14***.

Questão 13: Qual o instante de tempo, em segundos, em que o corpo atingiu a altura máxima?

(a) 2 3,3% (b) 3 15% (c) 8 43,3%

(d) 4 10% (e) $28,3$ 28,3%

Alternativa correta : D

Questão 14: A altura máxima atingida pelo corpo, em metros, foi de:

(a) 80 25% (b) 40 30% (c) 60 15%

(d) 30 13,3% (e) 20 16,7%

Alternativa correta : A

A questões **13** e **14** tinham como objetivo verificar se os estudantes conseguiriam determinar as coordenadas do vértice de uma parábola. O percentual de erros já foi comentada em questões anteriores envolvendo o mesmo tópico.

Questão 15: O gráfico da função $f(x) = -x^2 - 6x - 9$ intersecta o eixo x em:

(a) $x' = 1$ e $x'' = 1$ 5% (b) $x' = -3$ e $x'' = -3$ 36,7%

(c) $x' = 1$ e $x'' = -3$ 18,3% (d) $x' = -1$ e $x'' = 3$ 25%

(e) $x' = 1$ e $x'' = -1$ 15%

Alternativa correta : B

A questão 15 tinha como objetivo verificar se os estudantes conseguem determinar os zeros de uma função quadrática e o percentual de erros foi semelhante à questão anterior sobre o mesmo tópico e o resultado já foi comentado nessas questões.

1.1 Análise dos resultados

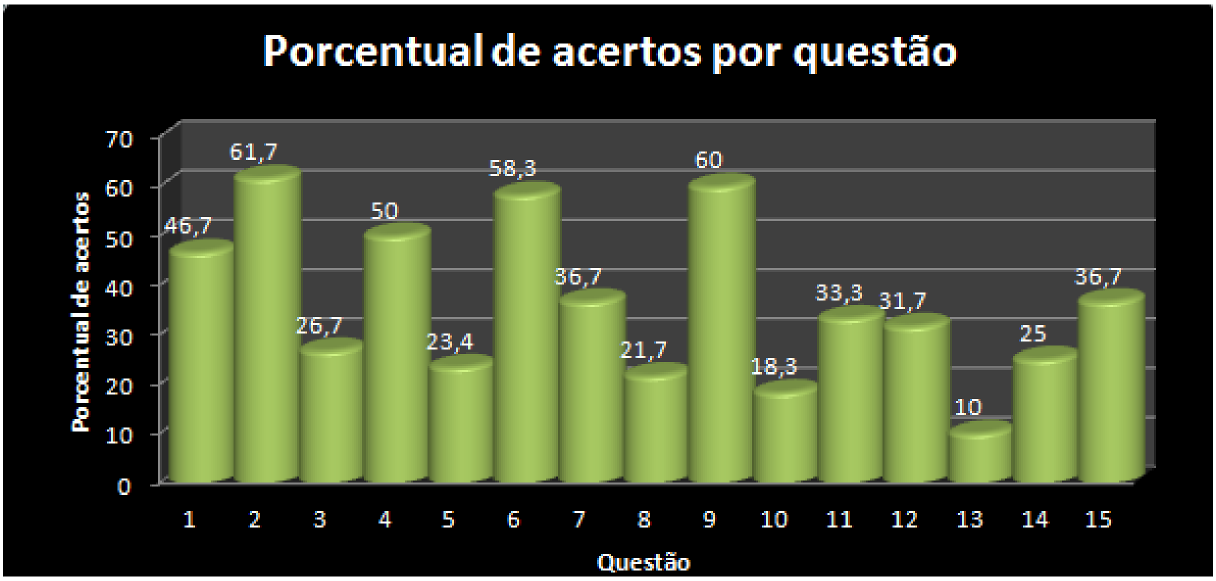
1.1.1 Porcentagem de acertos por questão

A tabela e o gráfico abaixo mostram o porcentual de alunos (de um total de 60 participantes) que acertaram cada questão. O porcentual médio de acertos por questão foi de 36% aproximadamente.

Questão	Porcentual de acertos
01	46,7%
02	61,7%
03	26,7%
04	50%
05	23,3%
06	58,3%
07	36,7%
08	21,7%
09	60%
10	18,3%
11	33,3%
12	31,7%
13	10%
14	25%
15	36,7%

1.1.2 Gráfico com o número de acertos por questão

O gráfico de barras a seguir expressa o porcentual de alunos que acertou cada questão do exame diagnóstico. Através da análise desse gráfico será feito um levantamento dos pontos onde os estudantes possuem maiores dificuldades a respeito dos conceitos abordados.



Após criteriosa análise do gráfico, pode-se concluir que a questão com maior índice de acertos foi a número **02(37 acertos)**, enquanto isso, a questão que os alunos mais se equivocaram foi a de número **13(6 acertos)**.

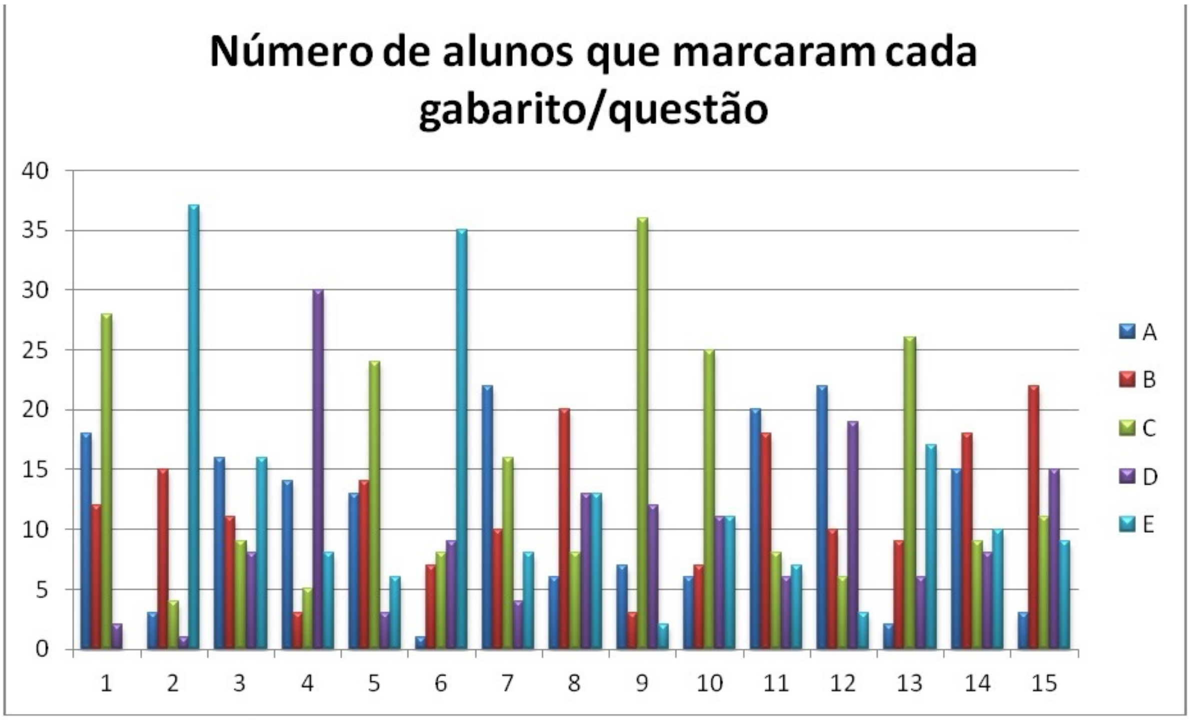
1.1.3 Tabela com questões e alternativas assinaladas

A tabela abaixo mostra o porcentual de alunos que marcaram cada alternativa por questão. As Células em negrito representam os gabaritos corretos.

Questão/Gabarito	A	B	C	D	E
1	18	12	**28**	2	0
2	3	15	4	1	**37**
3	16	11	9	8	**16**
4	14	3	5	**30**	8
5	13	**14**	24	3	6
6	1	7	8	9	**35**
7	**22**	10	16	4	8
8	6	20	8	13	**13**
9	7	3	**36**	12	2
10	6	7	25	11	**11**
11	**20**	18	8	6	7
12	22	10	6	**19**	3
13	2	9	26	**6**	17
14	**15**	18	9	8	10
15	3	**22**	11	15	9

1.1.4 Número de alunos por gabarito

O gráfico abaixo apresenta uma visão a respeito das alternativas assinaladas pelos estudantes em cada questão, dando uma visão mais ampla sobre os resultados da avaliação.



1.1.5 Lista dos pontos de maiores dificuldades apresentados pelos estudantes

Segue abaixo uma tabela na qual constam os tópicos que os estudantes apresentaram mais dificuldades na resolução de problemas. Essa tabela irá servir como parâmetro auxiliar para a elaboração do capítulo 2.

Questão	Índice de acertos *versus* objetivos
03	26,7% X Calcular o zero de uma função afim
05	5% X Determinar o valor da imagem de uma função em um ponto
08	21,7% X Analisar o comportamento da parábola pelos parâmetros a,b e c
10	18,3% X Determinar as coordenadas do vértice de uma função quadrática
13	10% X Determinar as coordenadas do vértice de uma função quadrática

Capítulo 2

Noções elementares sobre Função

Nesta parte da proposta de trabalho será apresentado um material de apoio que, posteriormente, será utilizado em sala com os estudantes das turmas que realizaram o exame diagnóstico envolvendo os principais conceitos de função, função afim e função quadrática, apresentado no capítulo 1. Será dado ênfase, principalmente, aos tópicos envolvendo interpretação de gráficos de funções, crescimento e decrescimento, função injetiva e sobrejetiva, teorema de caracterização e problemas envolvendo função afim, enquanto no item envolvendo função quadrática serão explorados tópicos envolvendo problemas com função quadrática que abordem interpretação de gráficos, cálculo de zeros da função e das coordenadas do vértice, determinação de máximos/mínimos e análise do gráfico por intermédio dos parâmetros reais a, b e c.

Primeiramente serão expostas algumas ideias como o par ordenado, o sistema cartesiano ortogonal e o conceito básico de relação binária. Em seguida, os estudantes serão encaminhados ao laboratório de Matemática onde irão discutir situações-problema a respeito das funções, trabalhadas no capítulo, e realizar atividades diversas com o multiplano e os blocos cúbicos, facilitando assim a visualização de gráficos e a assimilação de alguns conceitos fundamentais.

2.1 Coordenadas Cartesianas

O adjetivo Cartesiano se refere ao matemático e filósofo francês René Descartes que, dentre outras coisas, desenvolveu uma síntese da álgebra com a geometria euclidiana. Os seus trabalhos permitiram o desenvolvimento de áreas científicas como a geometria analítica, o cálculo e a cartografia. A ideia para o sistema de coordenadas foi desenvolvida em 1637 em duas obras de Descartes. Em uma dessas obras, *Discurso sobre o método*, Descartes apresenta a ideia de especificar a posição de um ponto ou objeto numa superfície, usando dois eixos que se intersectam.

Um sistema de referência consiste em um ponto de origem, direção e sentido, que pode ser obtido de várias maneiras, porém, o sistema de coordenadas cartesianas é o mais próximo do mundo real, pois nos permite observar as formas do modo mais aproximado possível do nosso de enxergar o universo.

2.1.1 Sistema Cartesiano Ortogonal

O Sistema formado pelos eixos **Ox** e **Oy**, perpendiculares e de mesma origem **O** é chamado Sistema Cartesiano Ortogonal. A figura abaixo ilustra esse sistema e a representação dos quatro quadrantes em que o mesmo fica dividido.

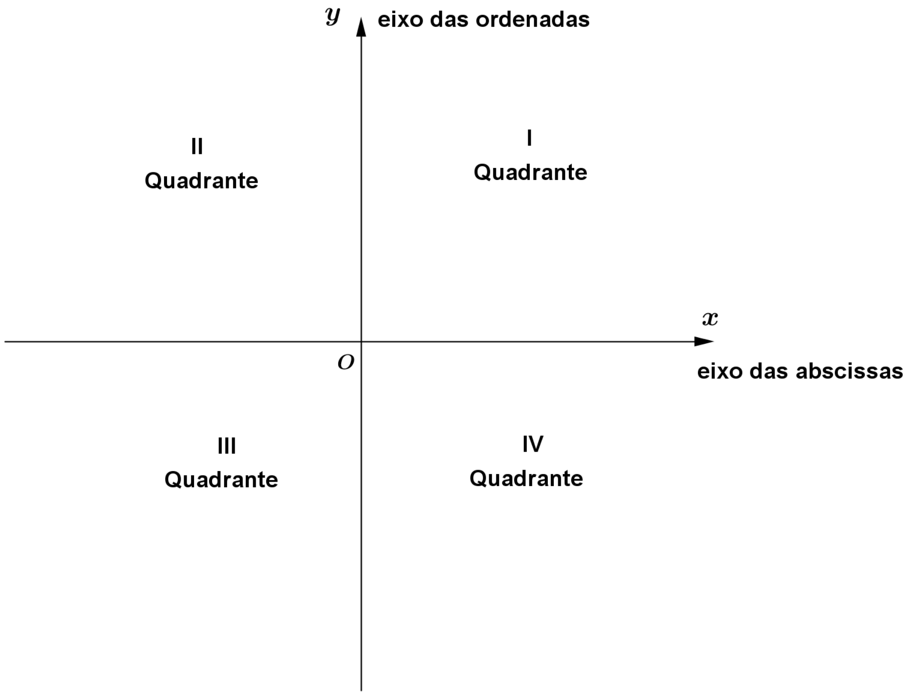


Figura 2.1: Sistema Cartesiano Ortogonal

O Plano Cartesiano é dividido pelos eixos ortogonais em quatro regiões chamadas quadrantes. Através desse sistema podemos localizar pontos no plano. No Sistema Cartesiano cada ponto do Plano pode ser representado por um par ordenado (x, y) e vice-versa. Essa correspondência é chamada biunívoca e permite representar conceitos geométrico em linguagem algébrica e interpretar geometricamente relações entre números reais.

Um par ordenado $p = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a primeira coordenada de p e um objeto y, chamado a segunda coordenada de p. Dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (u, v)$ serão chamados iguais quando $x = u$ e $y = v$, isto é, quando tiverem a mesma primeira coordenada e a mesma segunda coordenada.

No gráfico a seguir, temos representados os pontos $A = (4, 3), B = (1, 2), C = (-2, 4)$, $D = (-3, -4)$ e $E = (3, -3)$.

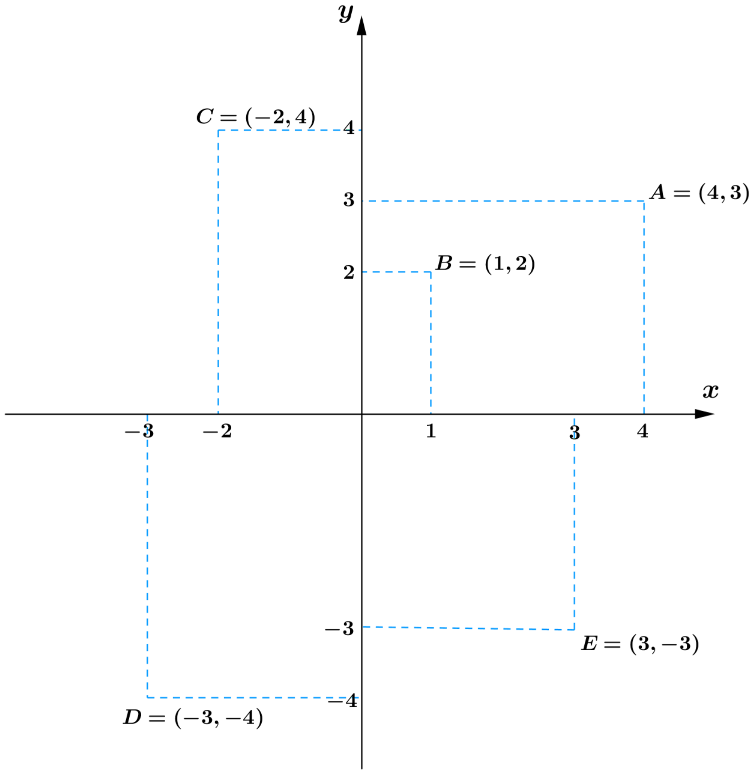


Figura 2.2: Pontos no Plano

2.1.2 Produto Cartesiano

O produto cartesiano $A \times B$ de dois conjuntos A e B é o conjunto $A \times B$ formado por todos os pares ordenados (x, y) cuja primeira coordenada x pertence a A e cuja segunda coordenada y pertence a B. Simbolicamente:

$$A \times B = \{(x, y)/\ x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

$A \times B$ (lê-se A cartesiano B).

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{1, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Determinar:

a) $A \times B$

Para que determinemos o conjunto $A \times B$ basta que tomemos todos os pares ordenados (x, y) onde x pertence ao conjunto A e y pertence ao conjunto B. Desse modo,teremos: $A \times B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

b) $B \times A$

Para que determinemos o conjunto $B \times A$ basta que tomemos todos os pares ordenados (x, y) onde x pertence ao conjunto B e y pertence ao conjunto A. Desse modo, teremos: $B \times A = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\}$.

c) A^2

Para determinar o produto cartesiano A^2 basta que tomemos pares ordenados (x, y), onde x e y serão elementos do conjunto A. Desse modo, teremos:
$A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$.

d) B^2

Para determinar o produto cartesiano B^2 basta que tomemos pares ordenados (x, y), onde x e y serão elementos do conjunto B. Desse modo, teremos:
$B^2 = B \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$.

2.2 Relação Binária

O produto cartesiano $X \times Y$ acha-se intimamente ligado à ideia de relação ou, mais precisamente, relação binária. Uma relação (binária) R entre elementos do conjunto X e elementos do conjunto Y é uma condição ou um conjunto de condições que permitem determinar, dados $x \in X$ e $y \in Y$, se x está ou não relacionado com y segundo R. No caso afirmativo, escreve-se xRy.

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0,2,4\}$ e $B = \{1,3,5\}$. Calculando-se $A \times B$ obtemos: $A \times B = \{(0,1),(0,3),(0,5),(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$.

Tomando-se alguns subconjuntos de $A \times B$, teremos algumas relações de A em B:

$$
\begin{aligned}
&R_1 = \{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\};\\
&R_2 = \{(0,1),(0,3),(0,5)\};\\
&R_3 = \phi;\\
&R_4 = \{(0,1),(0,3),(0,5),(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\} = A \times B.
\end{aligned}
$$

R_1, R_2, R_3 e R_4 são relações de A em B, pois seus elementos são pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$.

2.2.1 Domínio e Imagem de uma relação

Seja R uma relação de A em B, define-se:

Domínio de R é o conjunto formado pelos primeiros elementos dos pares ordenados $(x, y) \in R$. Indica-se por $D(R) = \{x \in A/(x, y) \in R\}$.

Imagem de R é o conjunto formado pelos segundos elementos dos pares ordenados $(x, y) \in R$. Indica-se por $Im(R) = \{y \in B/(x, y) \in R\}$.

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0, 2\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$. Calculando-se $A \times B$ obtemos: $A \times B = \{(0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$.
Na Relação $R = \{(0, 2), (0, 4), (0, 6)\}$ contida no produto cartesiano $A \times B$, temos que: $D(R) = \{0\}$ e $Im(R) = \{2, 4, 6\}$.

2.3 Função

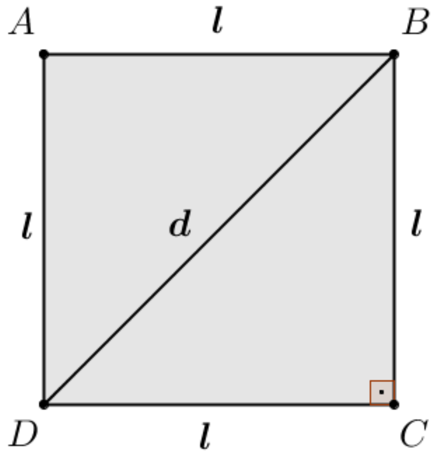
O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, ocupando destaque em diversas áreas do conhecimento. Iniciaremos este tópico dando ênfase às ideias intuitivas sobre noção de função e, posteriormente, iremos tratar com mais rigor matemático esse indispensável conceito.

2.3.1 Função-Noção Intuitiva

Analisemos a seguir alguns problemas:

1º Perímetro de um quadrado em função do lado

Lado(L)	Perímetro(P)
1	4
2	8
3	12
3,5	14
4	16
...	...
L	4L



No exemplo acima observamos que o perímetro do quadrado é função do valor de seu lado. A fórmula $P = 4L$ é a lei da função. Nesse caso o perímetro é chamado variável dependente, pois depende do valor do lado do quadrado, e o lado do quadrado é chamado variável independente.

2º Número de camisetas e preço a pagar

Consideremos a tabela a seguir que relaciona o número de camisetas compradas em uma fábrica e o valor total a pagar por elas. Podemos observar que o preço a pagar é função do número de camisetas compradas.

Número de camisetas (n)	Valor a ser pago (p)
1	8
2	16
3	24
4	32
5	40
$\cdots$	$\cdots$
n	$8n$

Observe que o valor a ser pago depende do número de camisetas compradas, ou seja, o valor a ser pago é função do números de camisetas compradas. A fórmula $p = 8n$ é a lei da função. Nesse caso o valor a ser pago p é chamado variável dependente, pois depende do número de camisetas compradas, e o número de camisetas n é chamado variável independente.

2.3.2 Definição de função

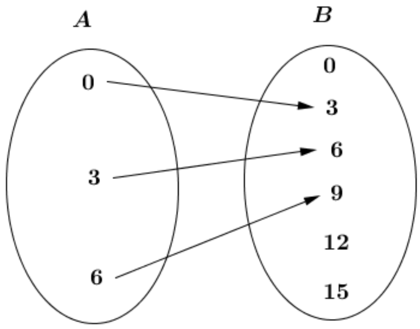
Uma função pode ser definida como um tipo especial de relação da seguinte maneira:

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e f uma relação de A em B. Essa relação f é uma função de A em B quando a cada elemento x pertencente ao conjunto A está associado um único elemento y pertencente ao conjunto B.

Através da definição acima apresentada, podemos concluir que uma relação f de A em B é considerada função se, e somente se, todo elemento do conjunto A estiver associado a um único elemento de B.

Vejamos alguns exemplos que representam relações e analisemos se as mesmas representam ou não funções:

1º) Sejam os conjuntos $A = \{0, 3, 6\}$ e $B = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$ e a relação R de A em B expressa pela fórmula $y = x + 3$, com $x \in A$ e $y \in B$

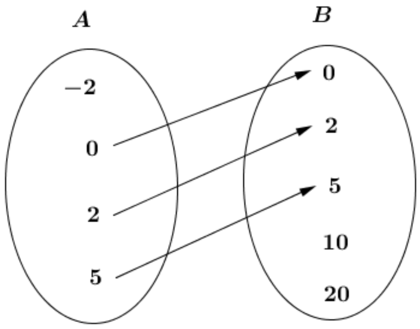


Utilizando a lei de formação da relação chegamos a:

$$f(0) = 0 + 3 = 3$$
$$f(3) = 3 + 3 = 6$$
$$f(6) = 6 + 3 = 9$$

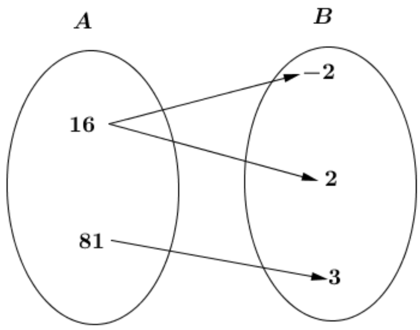
Observa-se que:
A cada elemento do x conjunto A associa-se um único elemento y do conjunto B.
Logo, a relação R é uma função de A em B.

2º) Sejam os conjuntos $A = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $B = \{0, 2, 5, 10, 20, \}$ e a relação R de A em B expressa pela fórmula $y = x$, com $x \in A$ e $y \in B$



Observa-se que este exemplo não expressa uma função de A em B, pois o elemento -2 do conjunto A não tem correspondente em B.

3º) Sejam os conjuntos $A = \{16, 81\}$ e $B = \{-2, 2, 3\}$ e a relação R de A em B expressa pela fórmula $y^4 = x$, com $x \in A$ e $y \in B$



Observa-se que este exemplo não expressa uma função de A em B, pois o elemento 16 do conjunto A está associado a dois elementos (-2 e 2) do conjunto B.

2.3.3 Domínio, Contradomínio e Conjunto Imagem de uma função

Seja uma função qualquer f onde tomamos A como um conjunto de partida e B como conjunto de chegada.

i) A representa o domínio da função f.

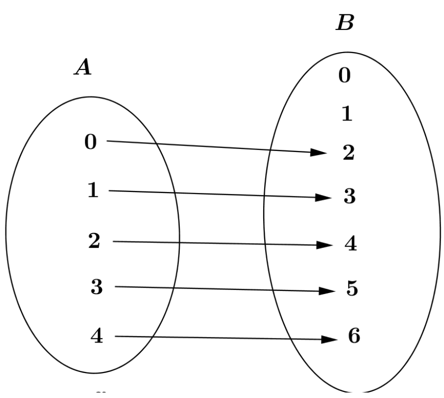
ii) B representa o contradomínio da função f.

iii) Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ é denominado imagem de x pela função f e o representamos por $f(x)$. O conjunto de todos os valores y obtidos por f é chamado de conjunto imagem de f.

Denotaremos uma função f de A em B por $f : A \to B$(f de A em B).

Exemplo:

Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$, vamos considerar a função $f : A \to B$ tal que $f(x) = x + 2$.



Denotando-se o domínio da função f por $D(f)$, o contra-domínio por $CD(f)$ e a imagem por $Im(f)$, pode-se observar que:

$$D(f) = A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$
$$CD(f) = B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$
$$Im(f) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Analisando-se as associações entre os elementos dos conjuntos A e B, nota-se que:

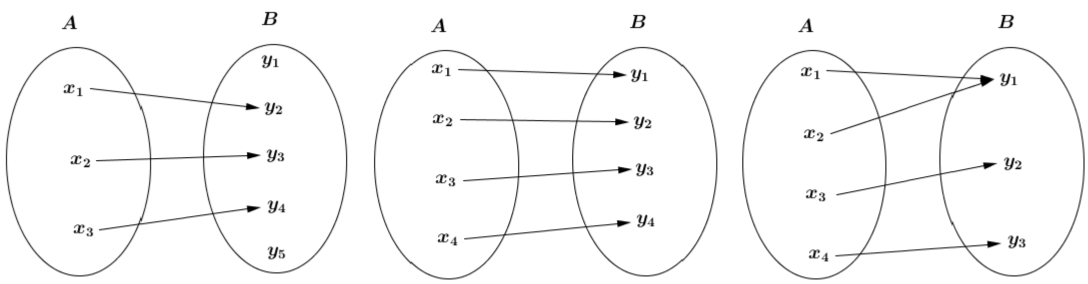
$$f(0) = 2, f(1) = 3, f(2) = 4$$
$$f(3) = 5, f(4) = 6.$$

2.4 Função injetiva e função sobrejetiva

Função Injetiva

Dada uma função $f : A \to B$. Dizemos que essa função é *injetiva* quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim, f é injetiva quando:

$$x_1 \neq x_2 \text{ em } A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \text{ em } B.$$

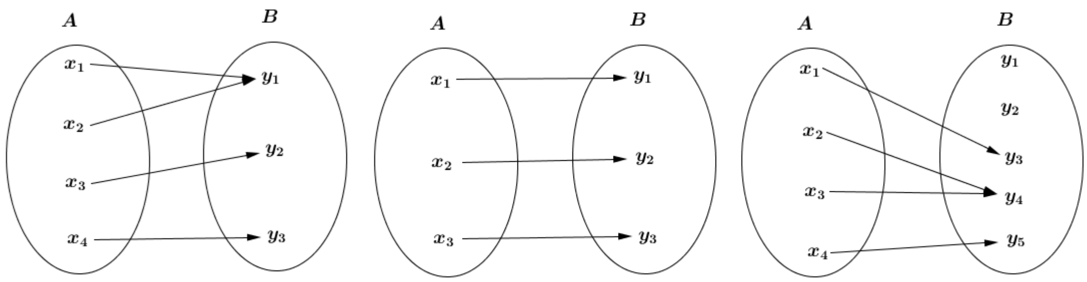


função injetiva   *função injetiva*   *função não injetiva*

Função Sobrejetiva

Dada uma função $f : A \to B$. Dizemos que essa função é *sobrejetiva* quando para todo elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, $Im(f) = B$. Assim, f é sobrejetiva quando:

$$Im(f) = CD(f).$$



função sobrejetiva
$Im(f) = B$

função sobrejetiva
$Im(f) = B$

função não sobrejetiva
(Os elementos y_1 e y_2 em B não possuem correspondente em A, logo $Im(f) \neq B$)

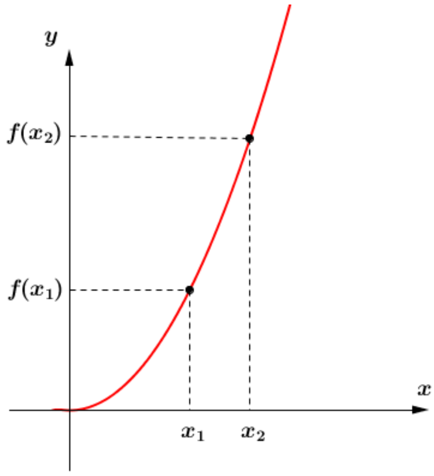
Observação: Uma função f é *bijetiva* se for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva.

2.5 Função Crescente e função decrescente

Função crescente

Uma função $f : A \to B$ é crescente se, quando $x_2 > x_1$ tem-se $f(x_2) > f(x_1)$, para todo x_1, x_2 em A.

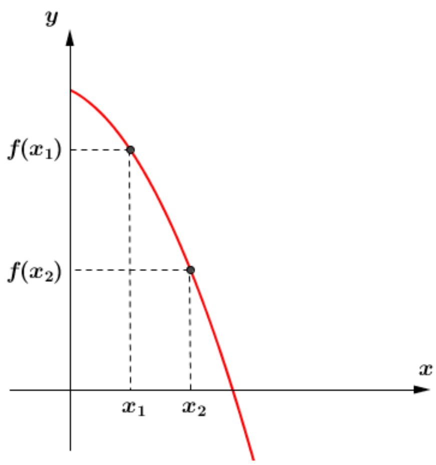
O gráfico abaixo representado, apresenta um modelo de uma função crescente:



Função decrescente

Uma função $f : A \to B$ é decrescente se, quando $x_2 > x_1$ tem-se $f(x_2) < f(x_1)$,para todo x_1, x_2 em A.

O gráfico abaixo representado, apresenta um modelo de uma função decrescente:



2.6 Função Afim

A ideia de proporcionalidade é natural para nós, pois a aplicamos no dia a dia em ações bastante simples. Podemos observar intuitivamente o uso das proporções ao comprarmos alimentos, no preparo de um bolo, ao abastecermos um veículo, etc. O modelo de grandezas diretamente proporcionais pode ser representado através de uma função chamada linear.

A função linear pode ser vista como um caso particular da função afim cujas aplicações e conceitos serão abordados neste próximo tópico.

Definição de função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

A função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é afim. São consideradas também afins as translações $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$ e os casos particulares onde $f(x) = ax$ que são as funções lineares e, ainda, as funções constantes $f(x) = b$.

Vejamos a seguir algumas situações-problema envolvendo função afim:

Situação-problema 1:

Um vendedor recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma fixa no valor de R\$1000,00 e outra variável correspondente a uma comissão de 3% sobre o total de vendas realizadas por ele durante o mês. Nesse caso, podemos perceber que:

Salário Mensal $= 1000 + 0,03.$(total de vendas do mês).

Nota-se que o salário desse vendedor durante o mês é determinado em função do total de vendas que o mesmo realiza durante o mês, logo:

$s(v) = 1000 + 0,03v$ ou $s = 1000 + 0,03v$, em que v representa o total de vendas do mês.

A relação acima é um exemplo de função afim.

Situação-problema 2:

Na produção de revistas uma gráfica cobra um valor fixo de R\$10,00 pelos custos mais R\$0,80 para cada página da revista.

Note que existe uma relação de dependência entre duas grandezas, o número de páginas da revista e o seu custo total.

Para cada quantidade de páginas existe um valor único para a apostila. Esse problema representa uma função afim que pode ser representada por: $f(x) = 10 + 0,80x$, onde x representa o número de páginas da revista e $f(x)$ o custo total da produção.

Determinação da imagem de uma função afim

Seja a função $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$. A imagem dessa função em uma abscissa $x = k_0$ é dado por $f(k_0) = ak_0 + b$.

Exemplo: Dada função afim $f(x) = 6x + 1$. Vamos determinar o valor de:
$f(0) = 6.0 + 1 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow f(0) = 1$.
$f(1/2) = 6.(1/2) + 1 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow f(1/2) = 4$.
$f(x + h) = 6.(x + h) + 1 = 6x + 6h + 1$.

Determinação de uma função afim através de dois pontos pertencentes ao seu gráfico

Dada a função afim $f(x) = ax+b$. Seja $x_1 \neq x_2$, como f é injetiva $f(x_1) \neq f(x_2)$, x_1 e x_2 números reais. Podemos determinar a lei de formação de uma função afim conhecendo-se dois pontos que pertençam ao seu gráfico da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) = ax_1 & + & b, \\ y_2 = f(x_2) = ax_2 & + & b. \end{cases}$$

Subtraindo-se, membro a membro, as duas equações do sistema obtemos:

$y_2 - y_1 = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$. Donde, obtemos:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Substituindo o valor encontrado de a em y_1, obtemos o valor de b da seguinte forma:

$$y_1 = (\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}) \cdot x_1 + b.$$

Assim:

$$y_1 \cdot (x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b \cdot (x_2 - x_1).$$

Efetuando-se as devidas multiplicações e usando a propriedade distributiva da multiplicação, chegamos a:

$$y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1 = b \cdot (x_2 - x_1)$$

Isolando-se **b** no 1º membro da equação, obtemos a expresssão:

$$b = \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

Taxa de variação

Chama-se taxa de variação da função afim $f(x) = ax+b$ o valor do parâmetro a. Para que possamos determinar o valor desse parâmetro basta que conheçamos dois pontos quaisquer pertencentes ao gráfico dessa função.

Tomemos os pontos genéricos $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ pertencentes à função. Temos que $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Logo, $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$, portanto $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, quando $x_2 \neq x_1$.

O valor da taxa de variação de um função afim é constante e essa é uma das características mais importantes desse tipo de função.

Gráfico de uma função afim

O gráfico de uma função afim é uma reta. Provaremos isso mostrando que três pontos quaisquer do gráfico são sempre colineares, ou seja, pertencem a uma mesma reta.

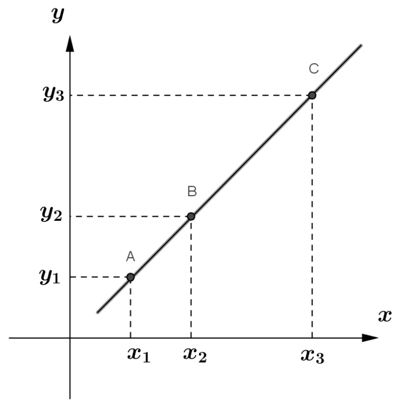


Figura 2.3:

Suponhamos, sem perda de generalidade, que B está entre A e C, como ilustrado na figura acima. Para que isso ocorra é necessário e suficiente que um dos três números $d(A,B)$, $d(B,C)$ e $d(A,C)$ seja igual à soma dos outros dois. Podemos supor que $x_1 < x_2 < x_3$ e demonstrar então, que:

$$d(A,C) = d(A,B) + d(B,C).$$

Sabendo-se que $y_1 = ax_1 + b, y_2 = ax_2 + b$ e $y_3 = ax_3 + b$, temos:

$$\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + ((ax_2 + b) - (ax_1 + b))^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\
&= \sqrt{(1 + a^2)(x_2 - x_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}
\end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que:

$$d(B,C) = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \text{ e } d(A,C) = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
d(A,B) + d(B,C) &= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} \\
&= d(A,C)
\end{aligned}$$

Assim, três pontos quaisquer pertencentes ao gráfico da função afim são sempre colineares, logo esse gráfico será uma reta.

Geometricamente, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo Oy, pois para $x = 0$ temos $f(0) = a.0 + b = b$.

O número a representa a taxa de variação dessa reta em relação ao eixo horizontal e o número b chama-se coeficiente linear dessa reta.

Zero da função afim

Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim. Chama-se zero dessa função o número x pertencente ao domínio da função, tal que $ax + b = 0$.
Resolvendo-se essa equação de 1º grau, chegamos a: $x = -b/a$.

Observação: O gráfico da função afim $f(x) = ax+b$ intersecta o eixo Oy no ponto $(0, b)$.

Estudo do Sinal da função afim

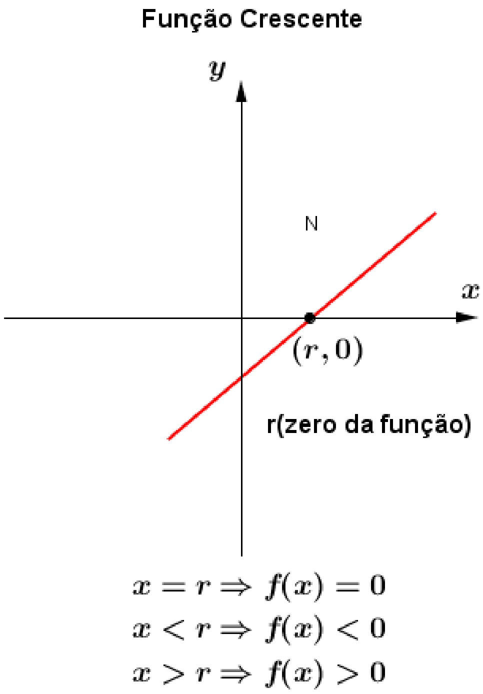
Um comerciante gastou R$ 500,00 na compra de um lote de peras. Como cada pera será vendida a R$ 2,00, ele deseja saber quantas peras ele deverá vender para ele obter lucro no final das vendas.

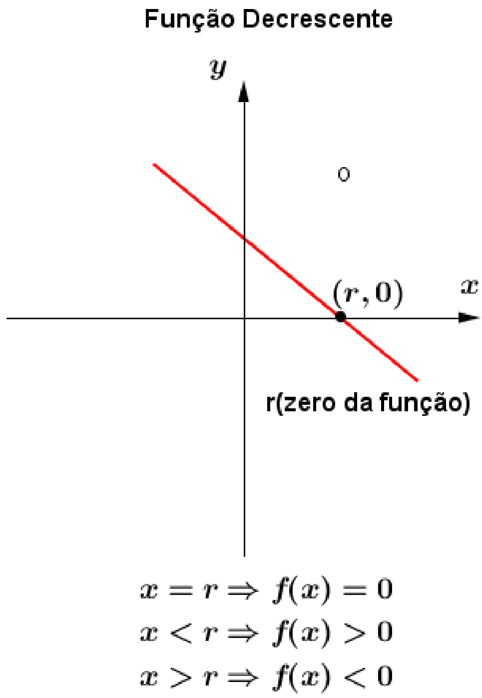
Obseva-se que o resultado final(receita menos despesa) é dado em função do número de peras vendidas, que poderá ser representada pela variável x, e a lei de formação da função é $f(x) = 2x - 500$.
• Vendendo-se 250 peras não haverá lucro nem prejuízo.
Para $x = 250$, temos $f(x) = 0$.
• Vendendo-se mais de 250 peras haverá lucro.
Para $x > 250$, temos $f(x) > 0$.
• Vendendo-se menos de 250 peras haverá prejuízo.
Para $x < 250$, temos $f(x) < 0$.

Em situações como esta, foi feito um estudo do sinal da função, que consiste em determinar os valores x do domínio para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Interpretação Geométrica

Analisando-se o gráfico abaixo, onde r é o zero da função afim, podemos realizar o estudo do sinal de uma função afim, seja ela crescente ou decrescente:





2.7 Teorema Fundamental da Proporcionalidade

Teorema 1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) $f(nx) = nf(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$*;*

(2) Pondo $a = f(1)$, tem-se $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$*;*

(3) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Provaremos as implicações $(1) \Rightarrow (2)$, $(2) \Rightarrow (3)$ e $(3) \Rightarrow (1)$.

Afim de demonstrar que $(1) \Rightarrow (2)$, provemos inicialmente que, para todo número racional $r = m/n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$ a hipótese (1) acarreta que $f(rx) = rf(x)$, seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Com efeito, tem-se $n.f(rx) = f(nrx) = f(mx) = m.f(x)$. Logo, $f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r.f(x)$.

Seja $a = f(1)$. Como $f(0) = f(0 \cdot 0) = 0 \cdot f(0) = 0$, a monotonicidade de f nos dá $a = f(1) > f(0) = 0$. Assim, a é positivo. Além disso, temos:

$$f(r) = f(r \cdot 1) = r \cdot f(1) = r \cdot a = ar,$$

para todo $r \in \mathbb{Q}$.

Mostremos agora que se tem $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Vamos usar aqui a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Suponha, por absurdo, que exista algum número irracional x tal que

$f(x) \neq ax$. Para fixar ideias, admitamos $f(x) < ax$ (O caso $f(x) > ax$ seria tratado de modo análogo), assim temos: $f(x)/a < x$. Tomemos um número racional r (aqui usamos a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$) tal que $f(x)/a < r < x$. Então $f(x) < ar < ax$, ou seja, $f(x) < f(r) < ax$. Mas isto é absurdo, pois f é crescente logo, como $r < x$, deveríamos ter $f(r) < f(x)$. Esta contradição completa a prova de que (1) $\Rightarrow$ (2).

As implicações (2) $\Rightarrow$ (3) e (3) $\Rightarrow$ (1) são imediatas.

2.8 Caracterização da Função Afim

Teorema 2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o valor do acréscimo $f(x+h) - f(x)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim.*

Demonstração: A demonstração deste teorema, que faremos agora, é uma aplicação do *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*. Para fixar ideias, suporemos que a função f seja crescente. Então $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\varphi(h) = f(x+h) - f(x)$, também é crescente, com $\varphi(0) = 0$. Além disso, para quaisquer $h, k \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned} \varphi(h+k) &= f(x+h+k) - f(x) \\ &= f((x+k)+h) - f(x+k) + f(x+k) - f(x) \\ &= \varphi(h) + \varphi(k). \end{aligned}$$

Logo, pelo *Teorema Fundamental da Proporcionalidade*, pondo-se $a = \varphi(1)$, tem-se $\varphi(h) = ah$ para todo $h \in \mathbb{R}$. Isto quer dizer que $f(x+h) - f(x) = ah$. Chamando $f(0)$ de b, resulta $f(h) = ah + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

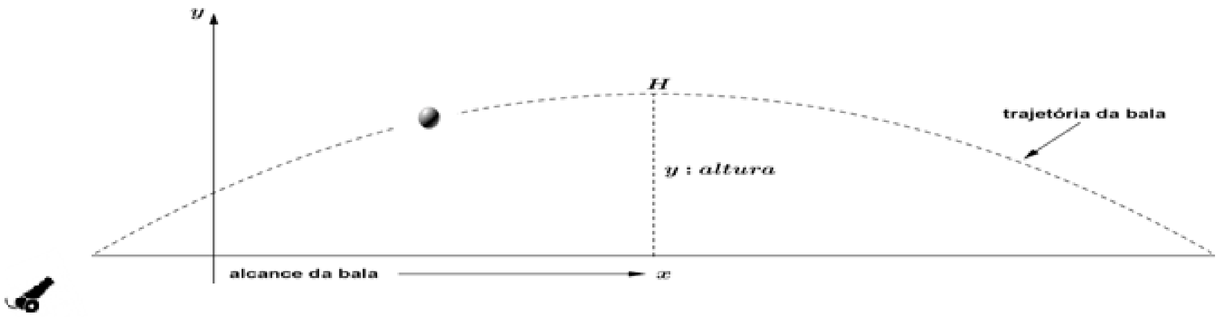
Observação 1 A recíproca do teorema acima é óbvia. Se $f(x) = ax + b$ então $f(x+h) - f(x) = ah$ não depende de x. A hipótese de que $f(x+h) - f(x)$ não depende de x às vezes se exprime dizendo que a acréscimos iguais de x correspondem acréscimos iguais para $f(x)$. Outra maneira de exprimir esta hipótese consiste em dizer que os acréscimos sofridos por $f(x)$ são proporcionais aos acréscimos dados a x.

2.9 Função Quadrática

A noção de função quadrática associa-se originalmente à ideia de equação do 2º grau. Por volta de 300 a.C., o matemático grego Euclides(325-265 a.C) desenvolveu uma nova técnica denominada Álgebra Geométrica. No Renascimento destacou-se as tentativas de explicar o movimento de queda livre de um corpo ou trajetória de uma bala de canhão. Vários teóricos dos séculos XVI e XVII tentaram explicar essa trajetória, sem obter a parábola, tais explicações foram aperfeiçoadas até se chegar à parábola associada à curva de 2º grau, o que acelerou a necessidade de se relacionar curvas a equações, de modo geral, Álgebra e Geometria.

Os primeiros canhões começaram a ser usados por volta de 1400. Eram armas tão rudimentares que causavam danos tanto a seus possuidores quanto a seus inimigos. Com ajuda dos cientistas da época os canhões foram aos poucos sendo aperfeiçoados. Por volta de 1630, Galileu Galilei(1564-1642) realizou um estudo matemático das balas de canhão, que contribuiu bastante para que eles acertassem seus alvos.

A figura a seguir ilustra o lançamento de uma bala de canhão e sua trajetória em relação aos eixos Ox e Oy:



Veremos nas próximas seções do capítulo que a altura y da bala é dada por uma expressão do tipo $y = ax^2 + bx + c$, na qual x é a distância horizontal da bala até o canhão.

Definição. Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada quadrática se existem $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas, seguidos dos valores de seus coeficientes:

(a) $f(x) = x^2 - 2$, onde $a = 1, b = 0$ e $c = -2$.

(b) $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$, onde $a = 5, b = 2$ e $c = 1$.

(c) $f(x) = -3x^2$, onde $a = -3, b = 0$ e $c = 0$.

(d) $f(x) = -x^2 + 2x$, onde $a = -1, b = 2$ e $c = 0$.

Valor da função quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$. O valor numérico dessa função em um ponto qualquer x_0 é determinado substituindo-se, na função, x por x_0, ou seja, $f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$.

Exemplo:

Seja $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Podemos determinar $f(3)$ da seguinte forma:

$f(3) = 2.3^2 - 3.3 + 1 = 2.9 - 9 + 1 = 18 - 9 + 1 = 10$.

Expressão para cálculo dos zeros de uma função quadrática

Seja f uma função quadrática. Chama-se zero dessa função quadrática os valores de x cuja imagem é nula, ou seja, em que o gráfico corta o "eixo x". Nesse caso, temos que $f(x) = 0$, ou seja, $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Vejamos uma das maneiras de isolar o valor de x nessa equação:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$$

.

Como $a \neq 0$, podemos dividir os dois membros da equação por a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}.$$

Completando quadrado no binômio do 1º membro da equação, temos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Realizando-se a fatoração do trinômio quadrado perfeito do 1º membro, chegamos a:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}.$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}.$$

Isolando-se x no 1º membro da equação, teremos:

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Somando-se as duas parcelas do 2º membro da equação, chegamos ao seguinte resultado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Usualmente, a expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante da equação e é representado pela letra grega $\triangle$ (delta).

Logo, podemos escrever $x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$, onde $\triangle = b^2 - 4ac$.

- Se $\triangle > 0$, existirão duas raízes distintas uma vez que $\sqrt{\triangle}$ é um número real positivo.
- Se $\triangle = 0$, então as duas raízes são iguais, uma vez que $\sqrt{\triangle} = 0$.
- Se $\triangle < 0$, então não existirão raízes reais, uma vez que $\sqrt{\triangle} \notin \mathbb{R}$.

2.9.1 Forma canônica da função quadrática e determinação das coordenadas do vértice

Seja a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x-p)^2 + k. \ (\textit{forma canônica}).$$

Onde $p = -b/2a$ e $k = -(b^2 - 4ac)/4a$.

Como vimos, $\triangle = b^2 - 4ac$, logo $k = - \triangle /4a$.

A forma canônica $a(x-p)^2 + k$ é bastante útil para que possamos analisar comportamento do gráfico de uma função quadrática qualquer.

Devemos observar que o sinal de $a(x-p)^2$ é definido pelo sinal de a, onde teremos dois casos a analisar:

(1º) Se $a < 0$, então $a(x-p)^2 < 0$ e $f(p) = k$ será o maior valor assumido por f.

(2º) Se $a > 0$, então $a(x-p)^2 > 0$ e $f(p) = k$ será o menor valor assumido por f.

Logo, quando $x = p = -b/2a$ a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ atinge seu valor máximo/mínimo $k = -(b^2 - 4ac)/4a$.

Analisando-se a forma canônica, observa-se que $f(x) = f(x')$, onde $x \neq x'$, se, e somente se,

$$\left(\frac{x+b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{x'+b}{2a}\right)^2.$$

Como estamos supondo $x \neq x'$, isto significa que:

$$\frac{x'+b}{2a} = -\left(\frac{x+b}{2a}\right),$$

isto é

$$\frac{x+x'}{2} = \frac{-b}{2a}.$$

Portanto, a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ assume o mesmo valor $f(x) = f(x')$ para $x \neq x'$ se, e somente se, os pontos x e x' são equidistantes de $-b/2a$.

Ao ponto do eixo Ox dado por $x = -b/2a$ chamaremos abscissa do vértice da parábola e, como visto nesta seção, o mesmo possui ordenada $y = -(b^2 - 4ac)/4a$ que representa a ordenada do vértice da parábola. O ponto $V = [-b/2a, -(b^2 - 4ac)/4a]$ será chamado *vértice da parábola* e, o mesmo, determinará o ponto máximo/mínimo do gráfico da função.

2.9.2 Gráfico da função quadrática

O gráfico de uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, é o conjunto $G \subset \mathbb{R}^2$ formado pelos pontos do plano cuja abscissa é um número real x e a ordenada é o valor da função $f(x)$, ou seja,

$$G(f) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax^2 + bx + c\right\}.$$

O gráfico de uma função quadrática é representado por uma parábola onde o comportamento da mesma depende dos parâmetros a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Vamos analisar a seguir a influência dos parâmetros a, b e c no gráfico de uma função quadrática:

Parâmetro a

O parâmetro **a** é responsável pela concavidade e abertura da parábola. Quanto maior for o valor absoluto de **a** menor será a abertura da parábola, independentemente da concavidade.

As figuras 2.4 e 2.5 a seguir ilustram as situações nas quais a concavidade da parábola são determinadas pelo parâmetro a, onde poderemos observar que, para $a > 0$, a concavidade da parábola ficará voltada para cima e, caso $a < 0$ a concavidade da parábola ficará voltada para baixo.

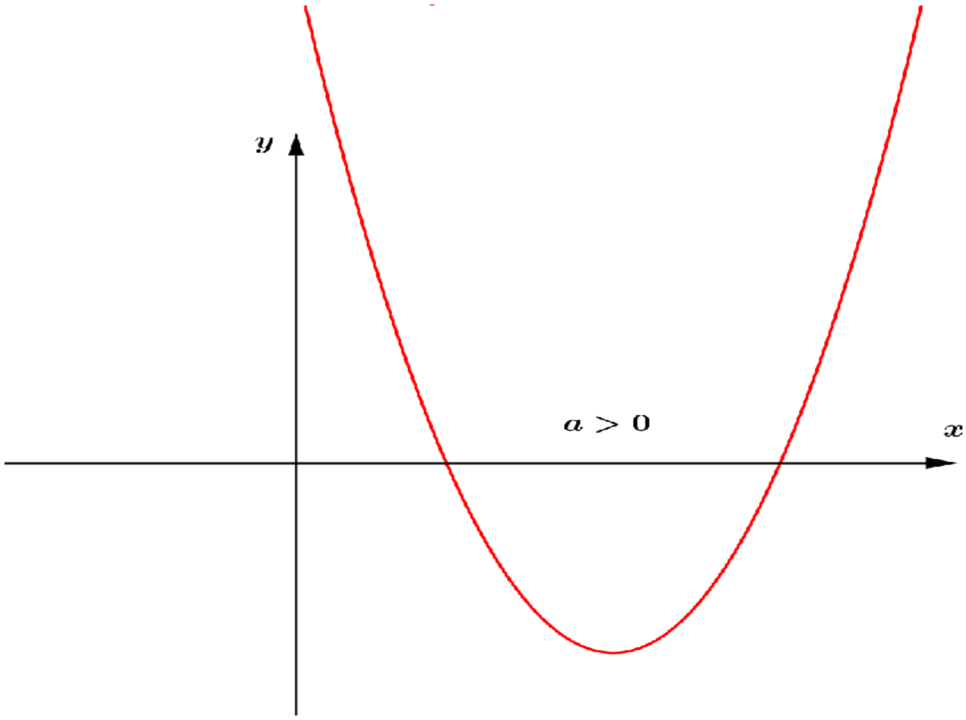


Figura 2.4: Caso $a > 0$

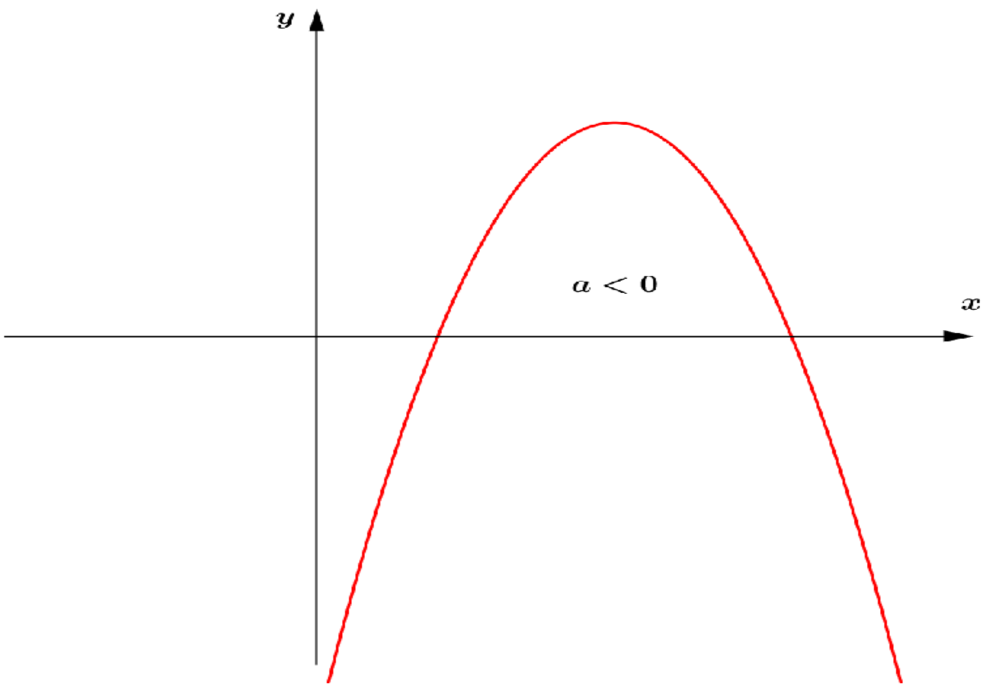
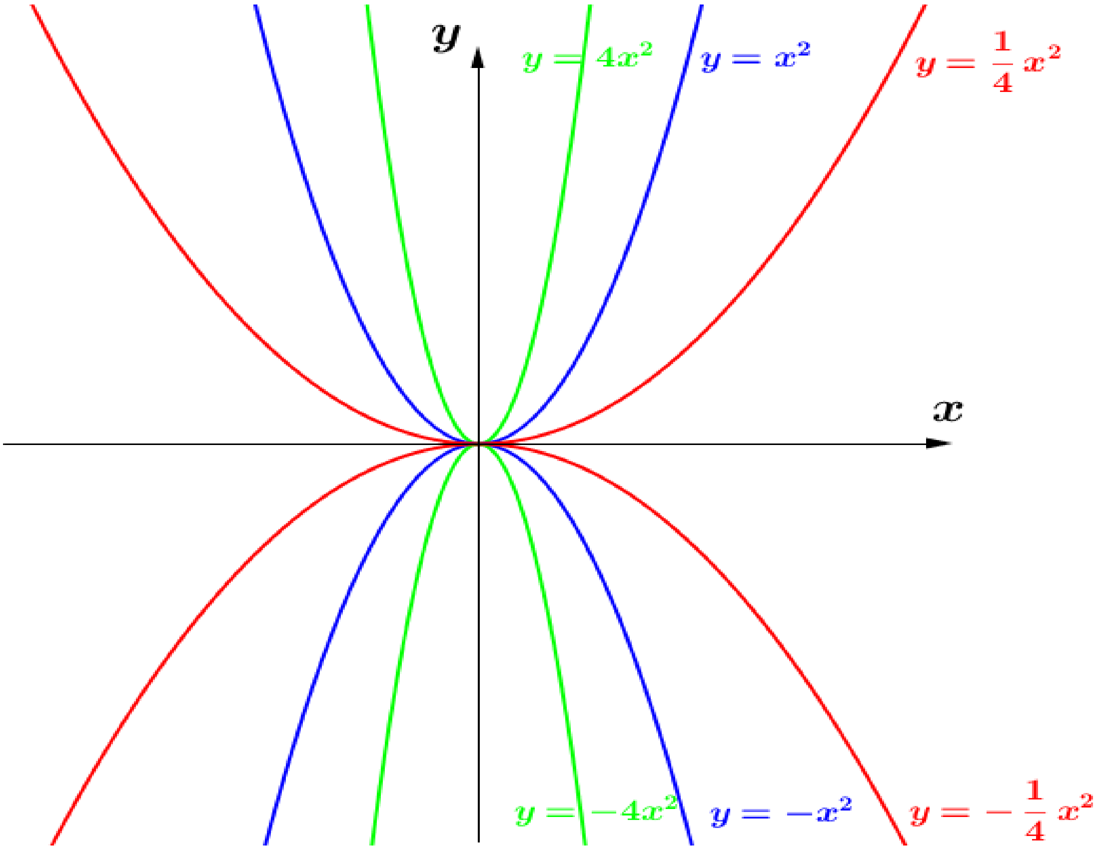


Figura 2.5: Caso $a < 0$

A figura abaixo apresenta o gráfico de algumas parábolas onde o valor do parâmetro **a** é alterado. Através da análise desse gráfico, nota-se que o parâmetro **a**, além de determinar a concavidade da parábola, também determina a abertura da mesma e, essa abertura é inversamente proporcional ao valor absoluto do parâmetro **a**.

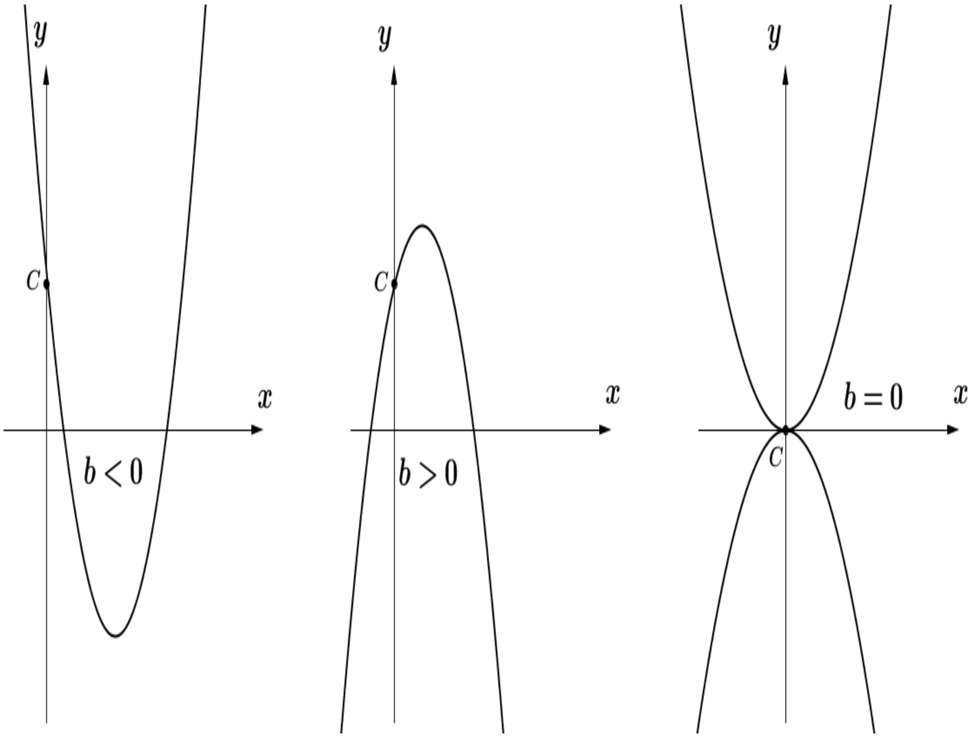


Parâmetro b

O parâmetro **b** indica se a parábola intersecta o eixo Oy em seu intervalo de crescimento $(b > 0)$ ou em seu intervalo de decrescimento$(b < 0)$.

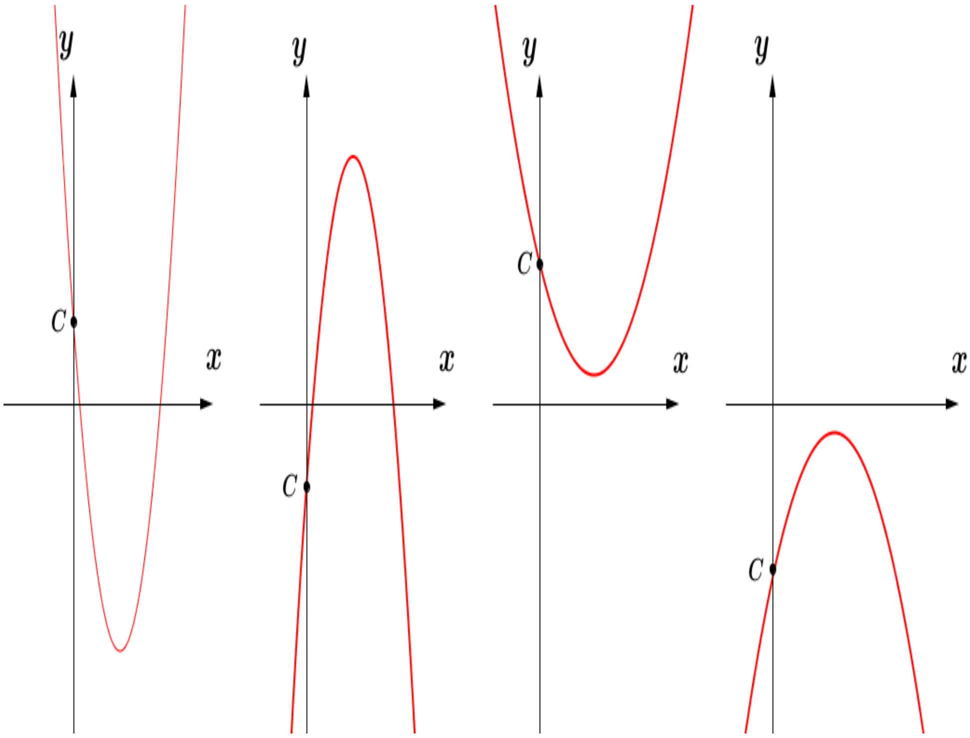
Caso o gráfico da função quadrática intercepte o eixo Oy no eixo de simetria, ou seja, caso o eixo de simetria coincida com o eixo Oy o parâmetro b será nulo.

A figura a seguir ilustra duas situações onde temos a variação do sinal do parâmetro b :



Parâmetro c

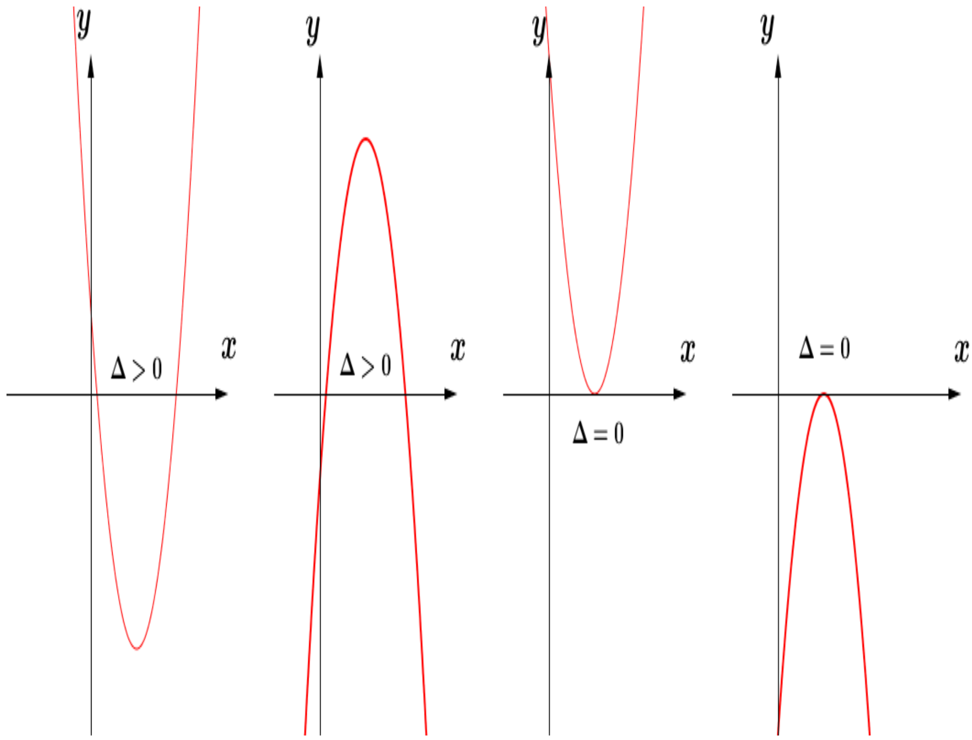
O parâmetro **c** indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo Oy. Na figura abaixo, podemos observar algumas situações onde a parábola intersecta o eixo Oy.

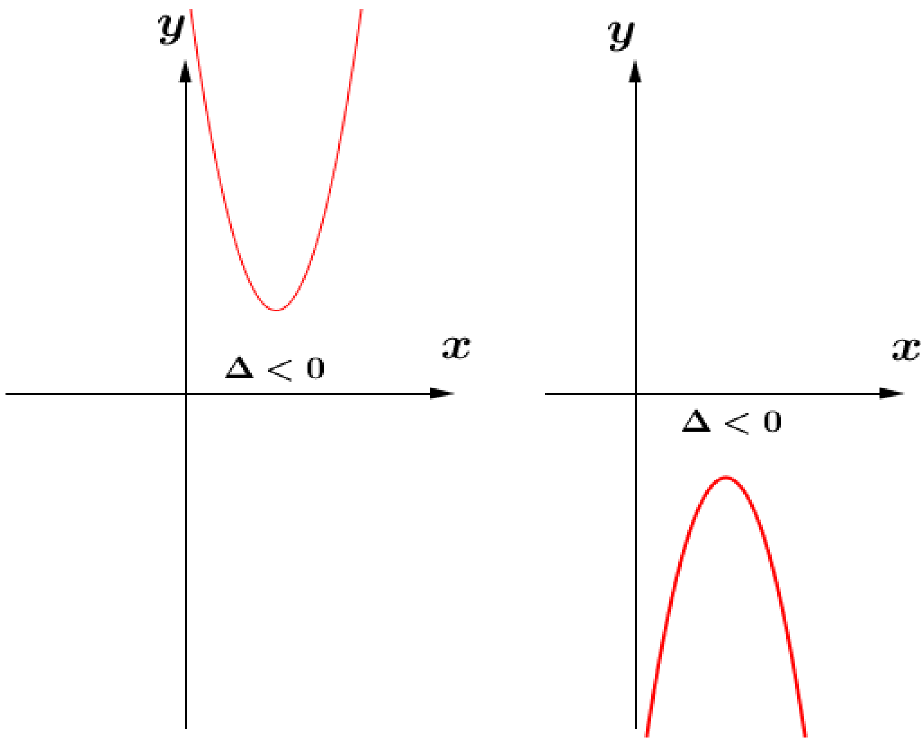


Observação: A parábola pode também intersectar o eixo Ox em dois, um ou nenhum ponto, de acordo com o valor de $\triangle$.

- $\triangle = 0$: a parábola intersecta x em um único ponto.
- $\triangle > 0$: a parábola intersecta x em dois pontos distintos.
- $\triangle < 0$: a parábola não intersecta o eixo x.

Nas figuras a seguir poderemos observar diversas situações onde a parábola intercepta o eixo Ox em dois, um ou nenhum ponto de acordo com o valor de $\triangle$ e, consequentemente, número de **zeros** da função.





Máximo e Mínimo

Teorema 3 *A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo/mínimo $y = -\Delta/4a$ em $x = -b/2a$ se, e somente se, $a < 0 (a > 0)$.*

Demonstração: Consideremos a função quadrática na forma canônica

$$y = ax^2 + bx + c = a \cdot \left[(x + \tfrac{b}{2a})^2 - \tfrac{b^2 - 4ac}{4a} \right], \text{ onde } b^2 - 4ac = \triangle.$$

Considerando que $(x + b/2a)^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e $y = -\Delta/4a$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo/mínimo quando $a < 0 (a > 0)$ e a diferença

$$(x + b/2a)^2 - \frac{\triangle}{4a^2}$$

for o menor possível, isto é,

$$(x + b/2a)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo $x = -b/2a$ em (2.1) temos :

$$y = a \left[\left(\frac{-b}{2a} + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\triangle}{4a^2} \right] = a . \frac{-\triangle}{4a^2} = \frac{-\triangle}{4a}.$$

Vértice da parábola

Definição. O ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

O vértice de uma parábola representa o ponto mínimo/máximo alcançado pelo gráfico da função. As figuras a seguir mostram situações em que ocorrem pontos de máximo/mínimo.

Notemos que:

$$V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\triangle}{4a}\right)$$

- Se $a > 0$ o ponto V será o ponto de mínimo do gráfico da função.
- Se $a < 0$ o ponto V será o ponto de máximo do gráfico da função.

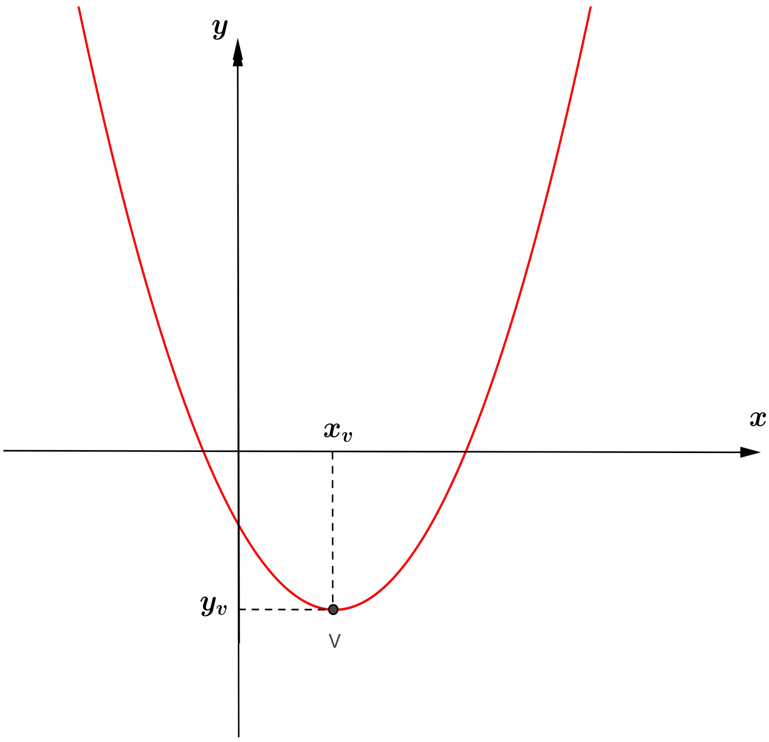


Figura 2.6: Caso a>0

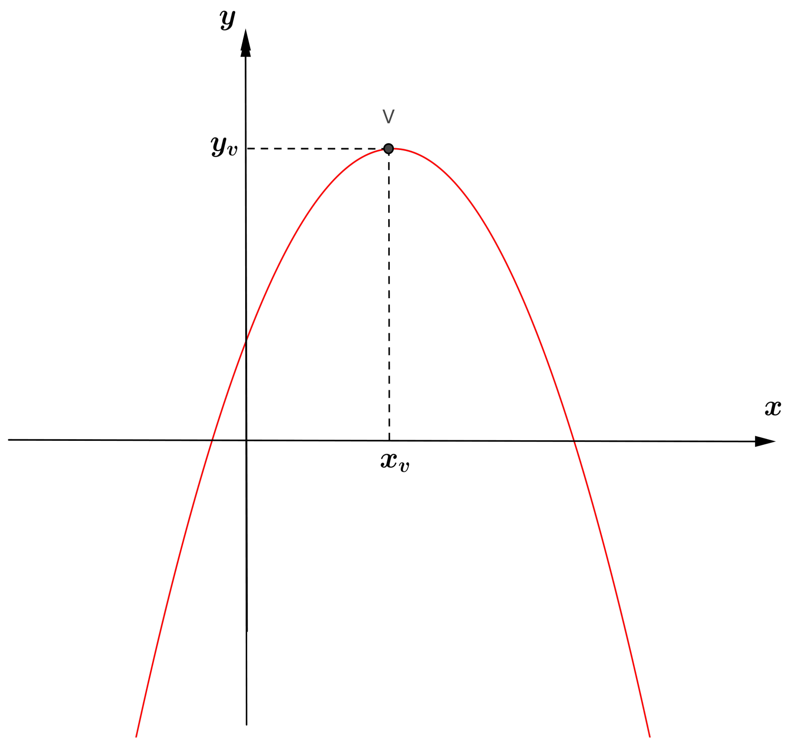


Figura 2.7: Caso a<0

Os valores de máximo ou mínimo são utilizados em diversas aplicações cotidianas em que as situações-problema poderão ser representadas através de modelos simplificados com o uso da parábola. São atribuídas à parábola situações que envolvam lucro/prejuízo, produção máxima/mínima entre outras aplicações presentes na Física, Química, Contabilidade, Engenharia, etc.

Capítulo 3

Atividades desenvolvidas com auxílio do GeoGebra, Multiplano e Blocos Cúbicos

Neste capítulo serão apresentadas algumas atividades explorando tópicos a respeito de gráfico de função afim e função quadrática, análise do gráfico da função quadrática através da variação dos parâmetros a,b e c e a generalização de modelos matemáticos com auxílio de alguns materiais de laboratório de matemática. Estas atividades serão trabalhadas com os estudantes da 1ª série do ensino médio que participaram do exame diagnóstico mencionado no Capítulo 1. Para o desenvolvimento destas atividades serão necessários caderno, lápis comum, multiplanos, blocos cúbicos e alguns computadores com o programa GeoGebra instalado.

3.1 Atividade com o Multiplano

Objetivos: Esta atividade tem como objetivo mostrar o comportamento do gráfico de uma função afim e o gráfico de uma função quadrática, visualizando funções crescentes, decrescentes e identificando a taxa de variação e o coeficiente linear(no caso das funções afins), além de fazer uma análise mais abrangente do comportamento de funções quadráticas, analisando os zeros da função(quando existirem), a intersecção com os eixos coordenados, o valor máximo/mínimo, o ponto máximo/mínimo, os intervalos de crescimento e de decrescimento, etc. Nessa atividade os alunos serão levados ao Laboratório de Matemática da escola e realizarão a construção de gráficos de função afim e de função quadrática com auxilio do multiplano, material este que foi desenvolvido com a intenção de aprimorar em alunos com deficiência visual a noção de gráfico de uma função e algumas noções sobre funções. Através do uso desse material os alunos poderão abstrair alguns conceitos matemáticos com mais facilidade, uma vez que terão contato direto com o objeto de estudo.

3.1.1 Função Afim

Objetivos: Esta atividade deverá ser desenvolvida em uma aula, e seu objetivo é construir e interpretar gráficos de funções afins no Multiplano.

Conhecimentos Necessários: Para desenvolver esta atividade os estudantes devem conhecer o sistema cartesiano ortogonal.

Atividade 1: Um vendedor recebe um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$1000,00, e uma variável, que corresponde a uma comissão de 10% do total de vendas que ele realizou no mês.

Utilizando os multiplanos disponíveis e, para cada R$100,00, usar 1 unidade de distância nos eixos, realizar/resolver as seguintes atividades:

a) Construir no Multiplano o gráfico $s = f(v)$, onde v é o total de vendas mensais e s o salário mensal do vendedor;
b) Expressar a lei da função que representa o salário mensal do vendedor;
c) Analisar no gráfico construído no multiplano a partir de quantos reais em vendas mensais o vendedor conseguirá ter um salário superior a R$1500,00;
d) Qual o salário do vendedor, sabendo que ele vendeu durante o mês R$1000,00?

Comentários: Solucionando-se os itens propostos os estudantes utilizarão representação gráfica de funções, analisando lei de formação, domínio e imagem, além de observar o comportamento do gráfico de uma função afim.

3.1.2 Função Quadrática

Objetivos: Esta atividade deverá ser desenvolvida em uma aula, e seu objetivo é construir e interpretar gráficos de funções quadráticas no Multiplano.

Conhecimentos Necessários: Para desenvolver esta atividade os estudantes devem conhecer os conceitos de função quadrática, assim como o comportamento de seu gráfico.

Atividade 2: Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$2,00. Apartir daí o preço de cada fruta decresce R$0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.

Utilizando os multiplanos disponíveis e, para cada 10 unidades, usar 1 unidade de distância nos eixos, realizar/resolver as seguintes atividades:

a) Construir uma tabela que expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita;
b) Construir no Multiplano o gráfico $G = f(n)$, onde n é o dia da colheita e G o ganho do fruticultor;
c) Expressar a lei da função;
d) Qual o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor?

Comentários: Solucionando-se os itens propostos os estudantes utilizarão representação gráfica de funções, analisando lei de formação, domínio e imagem, além de observar o comportamento do gráfico de uma função quadrática.

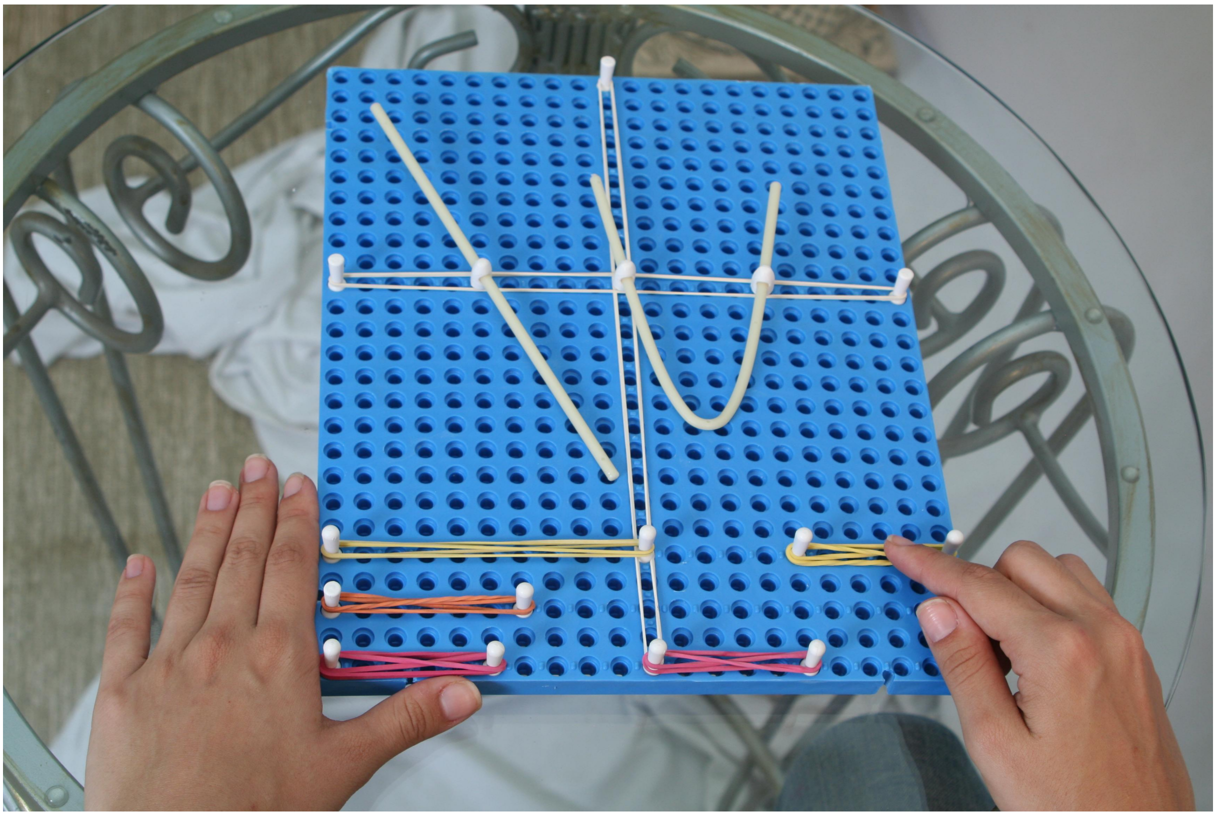


Figura 3.1: Multiplano

3.2 Aula com uso do Geogebra

Objetivos: Esta atividade tem o objetivo analisar o comportamento do gráfico de uma função quadrática através da análise da variação de seus parâmetros a, b e c com uso do Software GeoGebra. Os alunos serão levados à sala de multimídia da escola e poderão observar em projeções gráficos de funções afim e quadrática, assim como seu comportamento, tendo em vista seus parâmetros, facilitando assim a compreensão desses gráficos.

3.2.1 Funções

Objetivos: Esta atividade deverá ser desenvolvida em uma aula, e seu objetivo é construir e interpretar gráficos de funções GeoGebra.

Conhecimentos Necessários: Para desenvolver esta atividade os estudantes devem conhecer o sistema cartesiano ortogonal e conceitos envolvendo função quadrática e o comportamento do gráfico da função quadrática.

Atividade 3: Uma pedra é lançada do solo verticalmente para cima. Ao fim de t segundos, atinge a altura h, dada por: $h = 40t - 5t^2$.

Utilizando o GeoGebra nos computadores disponíveis, realizar/resolver as seguintes atividades:

a) Construir o gráfico $h = f(t)$;
b) Qual a posição da pedra no instante $2s$?
c) Qual(is) o(s) instante(s) em que a pedra passa posição $75m$?
d) Determine a altura máxima que a pedra atinge.

Comentários: Solucionando-se os itens propostos os estudantes utilizarão representação gráfica de funções, analisando lei de formação, domínio e imagem, além de observar o comportamento do gráfico de uma função quadrática.

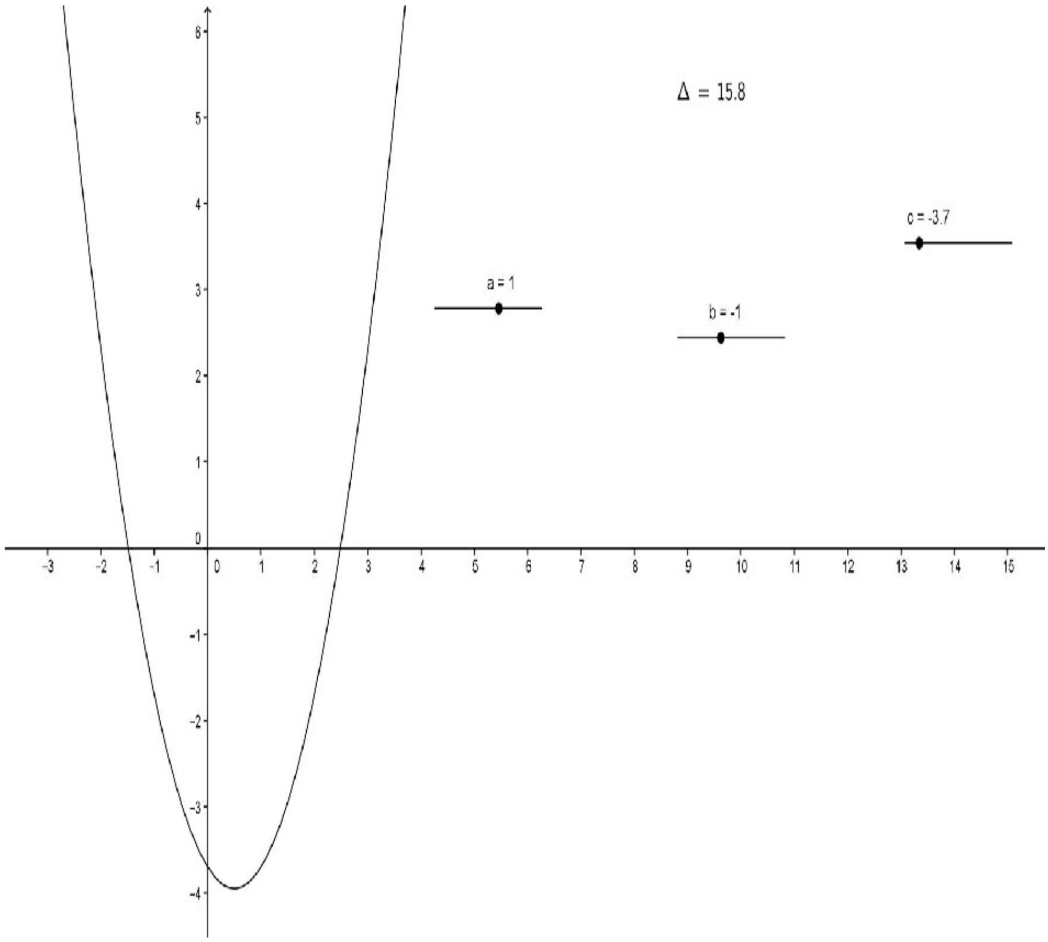


Figura 3.2: Geogebra

3.3 Aula/atividade com uso dos blocos cúbicos

Objetivos: O objetivo principal desta aula/atividade é realizar a montagem de modelos matemáticos através da manipulação dos blocos cúbicos e, posteriormente, realizar generalizações. Os alunos serão levados ao laboratório de matemática e irão manipular os blocos cúbicos onde poderão, em uma dessas atividades, determinar o número de faces que podem ser visualizadas em cubos compostos pelos blocos cúbicos com volumes iguais a $1u^3$, $8u^3$, $27u^3$ e, finalmente, nu^3. Nela os estudantes construirão tabelas, modelos e generalizaram situações-problema chegando a modelos algébricos expressos através de funções.

3.3.1 Função/Generalização de Modelos

Objetivos: Esta atividade deverá ser desenvolvida em duas aulas, e seu objetivo é construir e generalizar modelos de problemas, representando-os por meio de funções.

Conhecimentos Necessários: Para desenvolver esta atividade os estudantes devem conhecer o noções de Geometria Espacial e Volume.

Atividade 4: Construa com os *Blocos Cúbicos*, usando um cubinho como unidade, cubos de arestas medindo $1u$, $2u$ e $3u$.

Nos casos propostos nas construções acima sugeridas, construa uma tabela anotando quantos cubinhos do cubo construído mostra 1 face, 2 faces, 3 faces, 4 faces, 5 faces e 6 faces.

Atividade 5: Construa com os *Blocos Cúbicos*, usando um cubinho como unidade, modelos de cubos de arestas medindo $4u$, $5u$ e $6u$.

Nos casos propostos nas construções acima sugeridas, construa uma tabela anotando quantos cubinhos do cubo construído mostra 1 face, 2 faces, 3 faces, 4 faces, 5 faces e 6 faces.

Observação 2. Nos casos das construções a partir de 4 faces os cubinhos serão insuficientes, por isso sugeriu-se o esboço de modelos.

Atividade 6: Determine funções que serão válidas para visualização de faces de um cubo genérico com n unidades de aresta, onde n é um número natural positivo qualquer.

Na Atividade 6 espera-se que os estudantes, através do uso de recorrência, encontrem funções $f(n)$, onde n representa o valor da aresta de um cubo qualquer e $f(n)$ representa o número de faces visualizadas. No caso da visualização de 1 face, por exemplo, espera-se que os estudantes encontrem a expressão $f(n) = 4.(n-2).(n-1) + (n-2)^2$, pois teremos 4 faces laterais nas quais apenas os cubinhos localizados no centro mostram uma única face, por isso, aparece na função a expressão $4.(n-2).(n-1)$ e, na face superior, os cubinhos localizados também na parte central, mostram uma única face, por isso a expressão $(n-2)^2$.

Observação 3. As demais situações, onde serão analisados os casos onde os cubinhos mostram 0, 2, 3, 4, 5 ou 6 faces, serão solucionadas utilizando-se também recorrência aos casos mais simples.

Comentários: Solucionando-se os itens propostos os estudantes utilizarão noções sobre geometria espacial, analisando volume de um cubo, e generalizar modelos através de funções afim e quadrática.

Figura 3.3: Blocos Cúbicos

Capítulo 4

Exame Diagnóstico Final

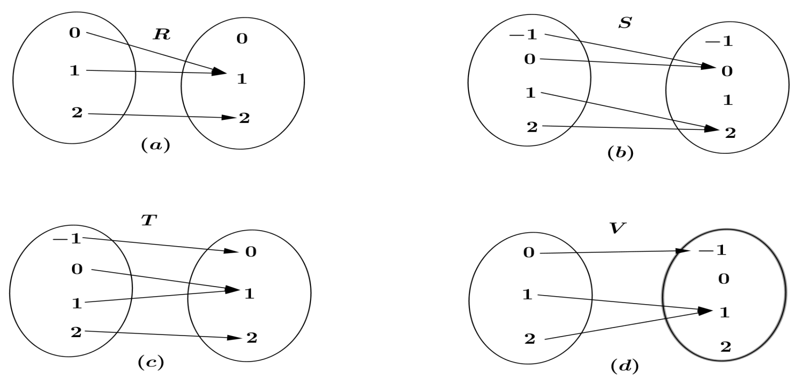
4.1 Justificativa

Neste capítulo foi elaborado um exame diagnóstico envolvendo conceitos de função, função afim e função quadrática. Esse exame foi realizado com os mesmos alunos que realizaram o teste diagnóstico inicial. Na próxima seção estão apresentadas as questões do exame diagnóstico aplicado, seguidas das respostas dadas pelos alunos, acompanhadas de uma análise criteriosa das questões e do desenvolvimento alcançado pelos estudantes após terem sido submetidos a esse processo intensivo de estudos e aulas práticas.

4.2 Exame Diagnóstico Final

Questões seguidas de suas análises

Questão 01: Qual dos esquemas abaixo definem uma função de $A = \{0, 1, 2\}$ em $B = \{-1, 0, 1, 2\}$?



Alternativa correta: **D**

Todos os estudantes responderam corretamente a questão.

Questão 02: Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, assinale a única alternativa que define uma função de A em B.

(a) $\{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\}$

(b) $\{(a, 3), (b, 1), (c, 5), (a, 1)\}$

(c) $\{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (d, 1)\}$

(d) $\{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5)\}$

(e) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d), (5, a)\}$

Alternativa correta: **C**

Todos os estudantes responderam corretamente a questão.

Questão 03: Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2 - x$, assinale a alternativa correta:

(a) $f(-2) = 0$ 3,33% **(b)** $f(-1) = -3$ 3,33% **(c)** $f(0) = -2$ 10%

(d) $f(1) = 3$ 0% **(e)** $f(-3) = 5$ 83,33%

Alternativa correta: **E**

Questão 04: Em que ponto a função $f(x) = -3x + 6$ intercecta o eixo das abscissas?

(a) $(\frac{1}{2}, 0)$ 0% **(b)** $(2, 0)$ 86,67% **(c)** $(0, \frac{1}{2})$ 0%

(d) $(-2, 0)$ 10% **(e)** $(0, 6)$ 3,33%

Alternativa correta: **B**

Questão 05: O valor de uma moto popular decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que o preço de fábrica é R\$ 7500,00 e que, depois de 6 anos de uso, é R\$ 1200,00, seu valor após 4 anos de uso, em reais é:

(a) 2100 3,33% **(b)** 2400 23,33% **(c)** 3150 3,33%

(d) 3300 60% **(e)** 1500 10%

Alternativa correta: **D**

Questão 06: Seu Renato assustou-se com sua última conta de celular. Ela veio com o valor 250,00 (em reais). Ele, como uma pessoa que não gosta de gastar dinheiro à toa, só liga nos horários de descontos e para telefones fixos (*PARA CELULAR JAMAIS!*). Sendo assim a função que descreve o valor da conta telefônica é **P=31,00+0,25t**, onde P é o valor da conta telefônica, **t** é o número de pulsos, (31,00 é o valor da assinatura básica, 0,25 é o valor de cada pulso por minuto). Quantos pulsos seu Renato usou para que sua conta chegasse com este valor absurdo (250,00)?

(**a**) 492 6,67% (**b**) 500 3,33% (**c**) 876 66,67%

(**d**) 356 10% (**e**) 510 13,33%

Alternativa correta: **C**

Questão 07: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 2x + 5$. Pode-se afirmar corretamente que:

(**a**) vértice do gráfico de f é o ponto $(1, 4)$ 56,67%

(**b**) f possui dois zeros reais e distintos 6,67%

(**c**) f atinge um máximo para $x = 1$ 13,33%

(**d**) gráfico de f é tangente ao eixo das abscissas 3,33%

(**e**) n.d.r. 20%

Alternativa correta: **A**

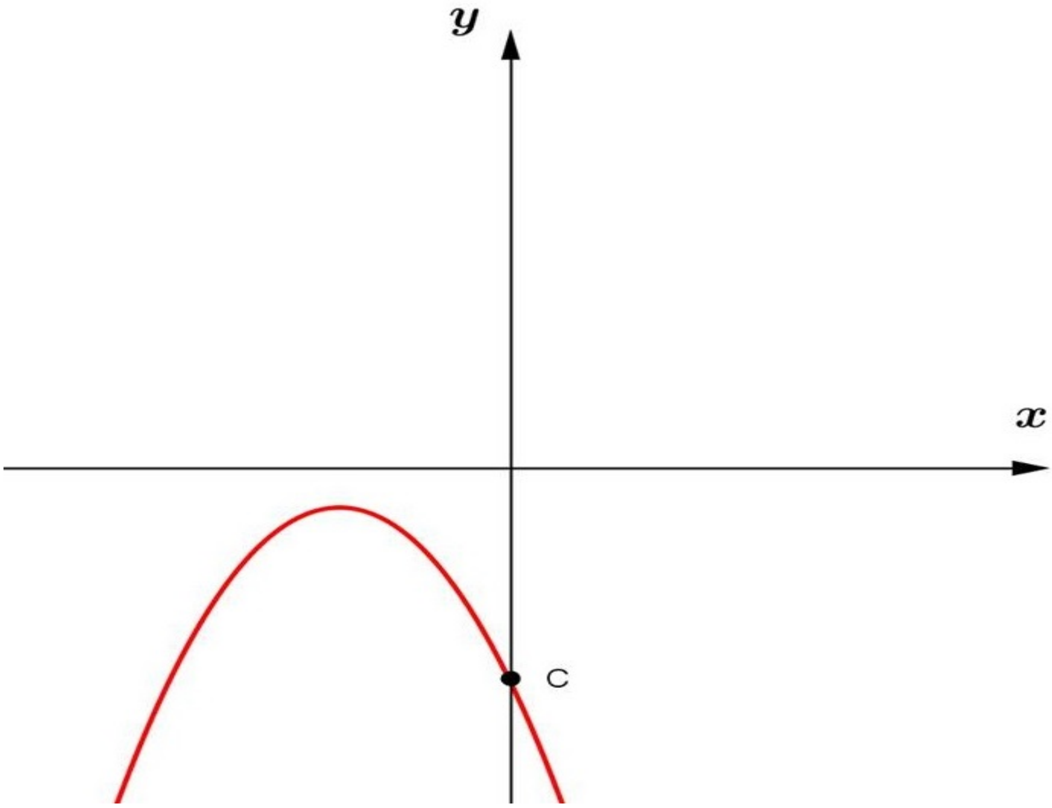
Questão 08: A potência elétrica lançada por um circuito num gerador é $P = 10i - 5i^2$, onde i é a intensidade da corrente elétrica. Qual a intensidade da corrente elétrica para que se possa obter a potência máxima do gerador?

(**a**) 1/2 10% (**b**) 1/4 13,33% (**c**) -1 16,67%

(**d**) 1 60% (**e**) -2 0%

Alternativa correta: **D**

Questão 09: O gráfico abaixo representa a função $f(x) = ax^2 + bx + c$.



Pode se afirmar que:

(a) $a < 0, b > 0$ e $c < 0$ 10%

(b) $a < 0, b = 0$ e $c < 0$ 0%

(c) $a < 0, b > 0$ e $c > 0$ 3,33%

(d) $a > 0, b < 0$ e $c < 0$ 3,33%

(e) $a < 0, b < 0$ e $c < 0$ 83,33%

Alternativa correta: E

Questão 10: Qual o valor mínimo da função $y = (x - 6)^2 + 6$?

(a) 0 6,67% **(b)** -6 0% **(c)** 6 83,33%

(d) 1 0% **(e)** 12 10%

Alternativa correta: C

4.3 Análise dos resultados da atividade por tópico

Questões 01 e 02
As questões **01** e **02** tinham o objetivo de verificar o conhecimento dos estudantes a respeito do conceito de função, tais como, a análise do domínio e imagem e comportamento das funções através de diagramas. Os resultados obtidos nessas questões foram surpreendentes, já que 100% dos estudantes obtiveram êxito em suas respostas mostrando que adquiriram conhecimentos necessários para resolver esse tipo de questão.

Questão 03
A questão tinha como objetivo calcular o "valor" de uma função em determinado ponto. No resultado observado constatou-se uma excelente progressão dos estudantes a respeito desse tópico, uma vez que 83,33% respondeu a questão corretamente.

Questão 04
A questão tinha como objetivo calcular encontrar o ponto de intersecção do gráfico de uma função afim com o eixo das abscissas, através do cálculo do "zero" dessa função. No resultado observado constatou-se uma excelente progressão dos estudantes já que 86,67% dos estudantes respondeu corretamente a questão.

Questão 05
A questão tinha como objetivo analisar a relação entre o crescimento das grandezas relacionadas na situação-problema e modelá-lo como uma função afim, resolvendo então o problema. No resultado observado constatou-se que 60% dos estudantes responderam corretamente a questão. Apesar da melhora nos índices, observou-se que uma parcela considerável dos estudantes que participaram da atividade ainda apresentam dificuldades na resolução de sistemas de equações do 1º grau a duas incógnitas.

Questão 06
A questão visava analisar se os estudantes conseguiriam resolver situações-problema envolvendo funções afim. Observou-se no resultado obtido pelos estudantes que boa parcela destes(**66,67%**) responderam corretamente a questão, porém notou-se também que parte dos estudantes que erraram a resposta ainda se confundem ao decidir entre qual é a variável independente e variável dependente, errando consequentemente suas respostas.

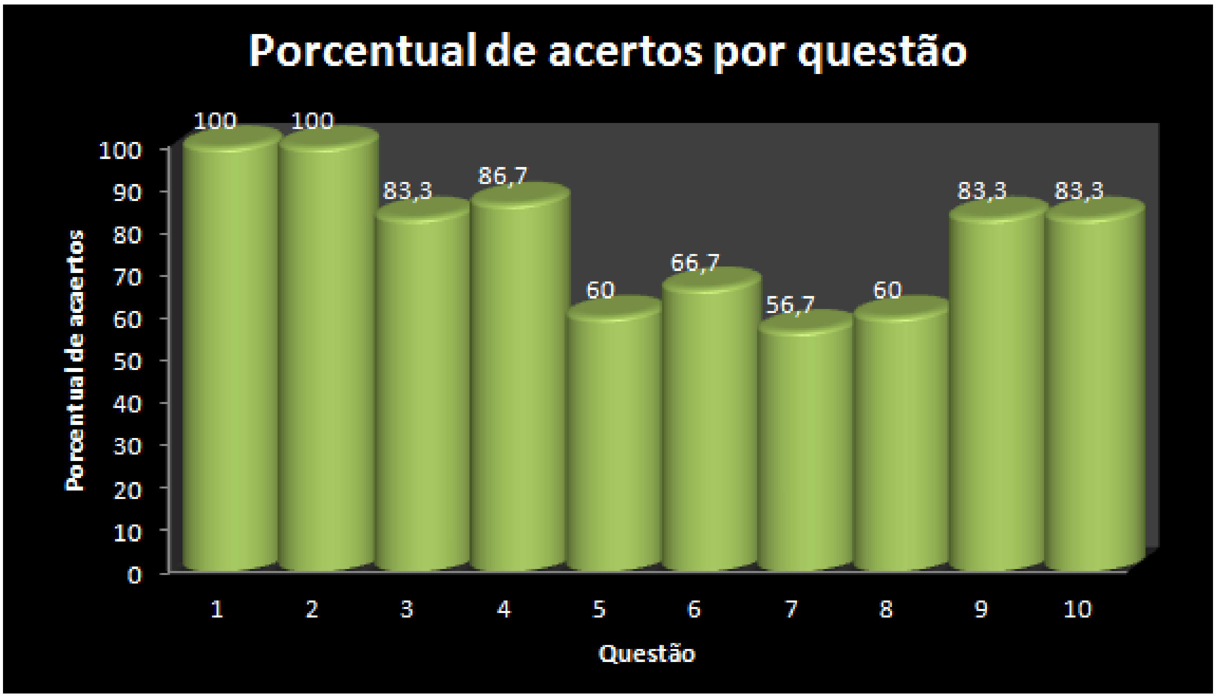
Observação. As questões **05** e **06** do exame final exploraram os mesmos objetivos da questão **04** do exame inicial porém, os índices de acertos das mesmas foram bem superiores.

Questões 07, 08 e 10
As questões tinham como objetivo analisar os conhecimentos dos estudantes a respeito de coordenadas do vértice e, consequentemente, o cálculo de máximos ou mínimos nas funções quadráticas. Na questão **08** especificamente os alunos teriam que analisar uma função quadrática apresentada na sua forma canônica e analisar consequentemente seu mínimo. Os resultados obtidos foram considerados bons uma vez que os índices de acertos para as questões **07**, **08** e **10** foram, respectivamente, **56,67%**, **60%** e **83,33%**.

Questões 09
A questão tinha como objetivo analisar o comportamento do gráfico de uma função quadrática por meio dos sinais dos parâmetros $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$. Observou-se nos resultados que a maioria dos estudantes(**83,33%**) respondeu corretamente a questão, mostrando que compreenderam bem as noções apresentadas no capítulo *02*.

4.3.1 Gráfico com o número de acertos por questão

O gráfico de barras a seguir expressa o porcentual de alunos que acertou cada questão do exame diagnóstico após todo o trabalho realizado com a turma com o Capítulo 2 e os materiais de laboratório.



4.3.2 Tabela de questões com alternativas marcadas

A tabela abaixo mostra o porcentual de alunos que marcaram cada alternativa por questão. As Células em negrito representam os gabaritos corretos.

Questão/Gabarito	A	B	C	D	E
1	0	0	0	**60**	0
2	0	0	**60**	0	0
3	2	2	6	0	**50**
4	0	**50**	0	6	2
5	2	14	2	**36**	6
6	4	2	**40**	6	8
7	**34**	4	8	2	12
8	6	8	10	**36**	0
9	6	0	2	2	**50**
10	4	0	**50**	0	6

Considerações Finais

Através do desenvolvimento dessa proposta de atividade, na qual os estudantes puderam ter acesso a algumas informações sobre o conceito inicial de função, função afim e função quadrática, através do manuseio de materiais do Laboratório de Matemática e de softwares educacionais, pôde ser observado que os estudantes adquiriram uma maturidade maior a respeito desse importante tópico apresentado, montando modelos e generalizações matemáticas antes inviáveis apenas com o desenvolvimento de aulas tradicionais. Desse modo os conteúdos passaram a ter uma maior significado na vida desses estudantes, que se dedicaram bastante no desenvolvimento de cada tarefa e desafio apresentados, compreendendo com mais ênfase os conceitos apresentados.

Diante dessa situação, conclui-se que, apesar de inúmeras dificuldades apresentadas para o desenvolvimento de tais tipos de atividades pelos professores de Matemática do Ensino Básico, tais como, a falta de tempo para estudo, a carga horária excessiva pelo acúmulo de funções, etc., seria interessante que os Professores dessa fascinante e importante disciplina, indispensável para o desenvolvimento de qualquer nação, tentassem trabalhar com os estudantes com diversos recursos a fim de que a aprendizagem dos mesmos seja cada vez mais significativa.

Fotos de atividades desenvolvidas com os estudantes

Figura 4.1: Avaliação diagnóstica inicial

Figura 4.2: Avaliação diagnóstica final

Figura 4.3: Blocos Cúbicos

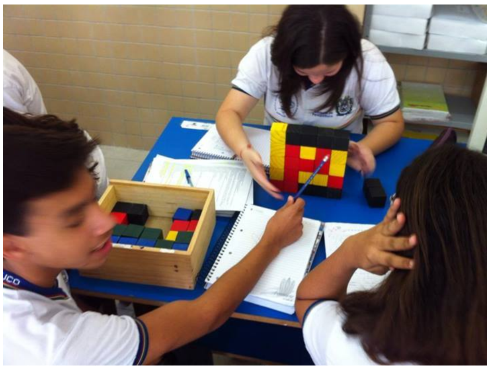


Figura 4.4: Blocos Cúbicos

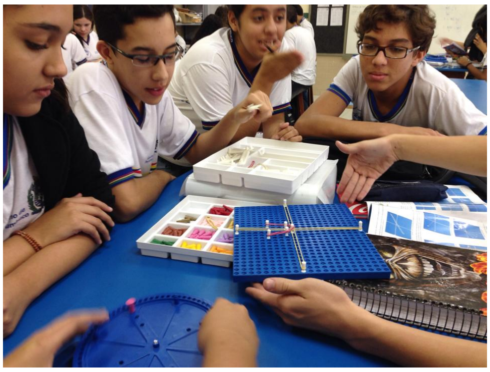


Figura 4.5: Multiplano

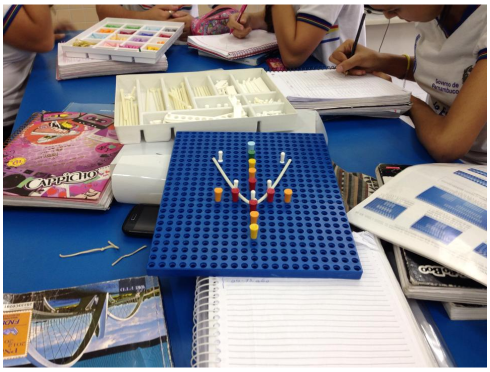


Figura 4.6: Multiplano

Figura 4.7: Multiplano

Figura 4.8: Multiplano

Figura 4.9: Multiplano

Referências Bibliográficas

[1] DANTE, Luiz Roberto. *Aprendendo Matemática. 1ª edição.* São Paulo: FTD, 1999.

[2] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática. Volume Único. 1ª edição.* São Paulo: Editora Ática, 2005.

[3] GIOVANNI, José Ruy. *Aprendendo Matemática.* São Paulo: FTD, 1999.

[4] LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio. 9ª edição.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

[5] IEZZI, Gelson, *Fundamentos da Matemática Elementar. 3ª edição.* São Paulo: Atual, 1977.