UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Um Cubo em Seis Pirâmides: Aulas de Matemática

Ewerton Roosewelt Bernardo da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, fevereiro de 2015.

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EWERTON ROOSEWELT BERNARDO DA SILVA

UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES: AULAS DE MATEMÁTICA

MACEIÓ
2015

EWERTON ROOSEWELT BERNARDO DA SILVA

UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES: AULAS DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

MACEIÓ
2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586c Silva, Ewerton Roosewelt Bernardo da.
Um cubo em seis pirâmides: aulas de matemática. – Maceió, 2015.
88 f. ; il + DVD.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.

Bibliografia: f. 63-64.
Apêndices: f. 65-81
Anexos: f. 82-88.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Geometria espacial. 3. Construções geométricas. 4. Jogos. I. Título.

CDU: 514.11

Folha de Aprovação

EWERTON ROOSEWELT BERNARDO DA SILVA

UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES: AULAS DE MATEMÁTICA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, e aprovada em 27 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Gregório Manoel da Silva Neto

(Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto, UFAL) (Orientador)

Hilário Alencar da Silva

(Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva, UFAL) (Examinador Interno)

Carlos Argolo Pereira Alves

(Prof. Dr. Carlos Argolo Pereira Alves, IFAL) (Examinador Externo)

A DEUS, aos meus pais e à madrinha Luza (*in memoriam*).

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por Suas graças.

À minha família, pelo constante incentivo aos estudos.

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela iniciativa do PROFMAT.

Ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, por seus professores e técnicos, de modo especial, ao Prof. Gregório pela valorosa orientação.

À Myrian pelo carinho, companheirismo e pelo apoio junto ao Centro Educacional Municipal Luiz de Amorim Leão na cidade de Messias/AL.

Aos colegas da turma PROFMAT/IM-UFAL 2013, pelo singular exemplo de dedicação e solidariedade acadêmica.

Eis aqui um problema. Eis como
resolvê-lo. Cairá na prova. Façam
os exercícios. – Que jeito mais
triste de estudar Matemática:
como um chimpanzé adestrado.

LOCKHART, Paul

RESUMO

Este trabalho desenvolve e apresenta produtos educacionais voltados ao ensino de Matemática na Educação Básica, com a finalidade de propor aulas nas quais os alunos são mais autônomos que nas aulas tradicionais. Pretende contribuir com a formação docente, demonstrando a possibilidade do professor exercer sua autonomia a partir da elaboração de seus próprios problemas matemáticos, de modo a fazer da sala de aula um ambiente de investigação, oportunizando aprendizados segundo a Teoria das Situações Didáticas. Para tanto, utilizou-se metodologia assemelhada à Engenharia Didática, na qual estudamos o problema de decompor um cubo em seis pirâmides, descrevendo uma região específica dentro do cubo para evitar a multiplicidade de soluções por simetria. Depois da discretização do problema, apresentamos uma fórmula que fornece o número de soluções para o problema em termos desta discretização. Ainda, elaboramos construções geométricas que resultam nas planificações de algumas pirâmides que utilizamos para desenvolver um jogo e uma sequência didática, essa foi aplicada ao nono ano do ensino fundamental, tratando dos teoremas de Pitágoras e de Tales. Outras atividades são sugeridas ao longo do trabalho. Concluímos que as aulas de Matemática na Educação Básica podem ser mais atrativas e produtivas quando nelas professor e alunos desenvolvem sua autonomia de pensar matemática.

Palavras-chave: Construções Geométricas. Ensino de Matemática. Geometria Espacial. Jogo. Sequências Didáticas.

ABSTRACT

This monograph develops and presents educational products for teaching mathematics in Basic Education, in order to encourage the autonomy of teachers and students into thinking mathematics. We support the idea that teachers can develop their own mathematical problems and transform the classroom into a research environment, promoting learning according to the Theory of Didactic Situations. By using a methodology similar to the Didactic Engineering, we studied the problem of decomposing a cube in six pyramids describing a particular region inside of the cube to avoid the multiplicity of solutions by simmetry and thus. After discretizing the problem, we present a formula that gives the number of solutions to the problem in terms of this discretization. Was also develop geometric constructions that result in planifications of such pyramids, which we use as pieces of a puzzle. We also developed and applied a teaching sequence involving the theorems of Pythagoras and Thales for elementary school. We conclude that the mathematics lessons in Basic Education may be more attractive and productive when teacher and students wish to think mathematics.

Keywords: Geometric Constructions. Mathematics Teaching. Space Geometry. Game. Sequences Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Uma decomposição do cubo em seis pirâmides 18
Figura 2 - Cubo centrado em um sistema de eixos ortogonais 18
Figura 3 - Três pontos simétricos em um mesmo octante 21
Figura 4 - Uma região de pontos assimétricos no cubo 22
Figura 5 - Reticulados no 1º octante 23
Figura 6 - Divisão do segmento AB em função de λ 24
Figura 7 - Pontos que determinam soluções 27
Figura 8 - Representação de uma solução do problema 30
Figura 9 - Uma solução do quebra-cabeça em 3D 34
Figura 10 - Quadrado a partir de uma mediatriz. 36
Figura 11 - Teorema de Pitágoras a partir de régua e compasso 38
Figura 12 - Pirâmide regular de altura b, ABCD-V 39
Figura 13 - Triângulos retângulos no interior da pirâmide 39
Figura 14 - Planificação da pirâmide ABCD-O 40
Figura 15 - Outra planificação da pirâmide ABCD-O 42
Figura 16 - Planificação da pirâmide ABCD-V(x, y, z) 44
Figura 17 - Outra planificação da pirâmide ABCD-V(x, y, z) 45
Figura 18 - Dobraduras que determinam os comprimentos b, b$\sqrt{2}$ e b$\sqrt{3}$. 47
Figura 19 - Planificação da pirâmide que determina região de pontos assimétricos no cubo .. 48
Figura 20 - Tentativa espontânea da construção de uma pirâmide 55
Figura 21 - Planificação de pirâmide concluída 55
Figura 22 - Cubo construído pelos alunos participantes 56
Figura 23 - Alunos trabalhando em equipe 57
Figura 24 - Pirâmides sobrepostas e o teorema de Tales 57
Figura 25 - Como deveriam ser as aulas de Matemática, segundo alunos participantes. 58
Figura 26 - Mapa conceitual estabelecido na experiência 59

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, exemplo 1. 25
Tabela 2 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, exemplo 2. 26
Tabela 3 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, caso geral. 27
Tabela 4 - Relações de congruência em uma decomposição do cubo 31
Tabela 5 - Dobraduras para construção das medidas das b, b√2 e b√3 46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ICM	*International Congress of Mathematicians* (Congresso Internacional de Matemáticos)
IDEB	Índice da Educação Básica
IMO	*International Mathematical Olympiad* (Olimpíada Internacional de Matemática)
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	*Programme for International Student Assessment* (Programa para Avaliação Internacional de Estudantes)
PNE	Plano Nacional da Educação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
2 UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES 17
2.1 Hipóteses do problema 17
2.1.1 Simetrias e Soluções Múltiplas 18
2.1.2 O Conjunto das Alturas, H/{0, |AB|} 22
2.2 Número de soluções 25
2.3 Características das soluções 29
2.4 Aplicações em sala de aula: um quebra-cabeça em 3D 32
3 PLANIFICAÇÕES DE PIRÂMIDES COM RÉGUA E COMPASSO 35
3.1 Construção do quadrado pela mediatriz de um de seus lados 35
3.2 Uma prova do Teorema de Pitágoras com régua e compasso 36
3.3 Construindo a planificação das pirâmides ABCD-V 38
3.3.1 Um Caso Particular: V = (0, 0, 0) 39
3.3.2 O Caso Geral: V = (x, y, z) 42
4 UMA INTERVENÇÃO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL 49
4.1 Uma sequência didática 49
4.2 Relato da experiência em sala de aula 52
4.2.1 Mapa Conceitual 58
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS 60
REFERÊNCIAS 63
APÊNDICE A – Pesquisa com Professores de Matemática da Educação Básica 65
APÊNDICE B – Sobre Engenharia Didática 67
APÊNDICE C – Portfólio e Avaliação em Matemática 69
APÊNDICE D – Sugestões para o portfólio 71
APÊNDICE E – Questionário 1 (inclui resposta de alunos) 72
APÊNDICE F – Questionário 2 74
APÊNDICE G – Questionário 3 76
APÊNDICE H – Sugestões para outras sequências didáticas 77
APÊNDICE I – Números triangulares 80
APÊNDICE J – DVD-ROM 81
ANEXOS 82

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho trata da necessidade de repensar as aulas de matemática na Educação Básica do país, em particular no Estado de Alagoas. De fato, segundo dados do relatório nacional do *Programme for International Student Assessment*[1] (PISA, 2012), que discorre sobre o letramento matemático, o Brasil ocupa a 58ª posição entre 65 países e, apesar de indicar avanço comparado a 2003, 67% dos estudantes ainda não são capazes de interpretar e reconhecer situações em contextos que não exigem mais do que inferência direta, bem como empregar algoritmos e procedimentos de nível básico, situando-se abaixo do nível dois, numa escala de proficiência em Matemática que vai até seis.

O PISA 2012 define letramento matemático como

> A capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e a **agir de maneira consciente** ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos. (PISA, 2012, p. 18, grifo nosso)

Nesse conceito, Alagoas possui o pior desempenho entre os estados brasileiros, mais de 80% dos estudantes situaram-se abaixo do nível dois no PISA 2012. Vale ressaltar que esse seria o nível mínimo para o exercício pleno da cidadania conforme a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico[2] (OCDE). Igualmente, registrou-se neste Estado os piores desempenhos no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica[3] (IDEB 2013). Mesmo em nível nacional tal avaliação revela a Educação Básica abaixo das metas do próprio avaliador, o Governo Federal. Em particular, a nota média nacional da rede pública no Ensino Médio foi 3,4 numa escala de zero a dez, enquanto a meta para aquele ano foi 3,6. Na rede pública estadual de Alagoas a nota correspondente foi 2,6, sete décimos abaixo da respectiva meta.

Contrapondo essa realidade, o Brasil é considerado centro de referência na pesquisa em Matemática de reconhecimento internacional, atestado pela confirmação de sediar a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) em 2017 e o Congresso Internacional de Matemáticos (ICM) em 2018, sendo o país latino-americano com maior número de medalhas desde que

---

[1] Avaliação aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos.
[2] Desenvolve e coordena o PISA. No Brasil, o Pisa é também é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).
[3] Indicador para verificação do cumprimento de metas relativas ao Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE).

começou a participar da IMO, segundo veiculações do Portal Brasil[4]. Ainda, durante o ICM 2014 em Seul, o brasileiro Arthur Ávila foi premiado com a Medalha Fields[5], mais uma evidência da qualidade dos trabalhos desenvolvidos por matemáticos brasileiros, como é o caso do alagoano Fernando Codá Marques que recentemente contribuiu para a prova da Conjectura de Wilmore, resolvendo um problema em aberto desde a década de 1960[6].

Essa situação torna o presente trabalho relevante, pois, apesar de ser um país com excelência na pesquisa em Matemática, o Brasil ainda possui um percentual baixo de pessoas letradas em Matemática. Assim, cabe indagar, como a Matemática pode destacar o país e o Estado de Alagoas tanto positivamente, na pesquisa científica, como negativamente, na Educação Básica? Embora essa situação pareça controversa, é de conhecimento geral que poucos alunos decidem prosseguir seus estudos nessa área, apesar da profissão de matemático ser considerada a melhor da atualidade segundo Careercast.com[7]. Além disso, será que a matemática da sala de aula da Educação Básica preserva a mesma essência da Matemática da pesquisa científica? Ou seja, será que as atividades desenvolvidas nas aulas tradicionais de Matemática na Educação Básica correspondem, na devida proporção, àquelas desenvolvidas no trabalho de um matemático?

Sabe-se que não é adequado definir número real a partir do axioma da continuidade de Dedekind-Cantor[8] no Ensino Fundamental, bem como iniciar o estudo dos números racionais com crianças de onze anos de idade, afirmando que os números inteiros não são racionais, mas que existe uma cópia dos inteiros nos racionais, um isomorfismo. Essa passagem do conceito matemático tratado na academia para seu ensino na escola é considerada na Teoria da Transposição Didática. Segundo Machado (2010), o saber a ser ensinado difere do objeto de ensino, isto é, o saber científico sofre transformações até ser apresentado ao aluno na escola. Logo, o conhecimento que foi desenvolvido na pesquisa em Matemática (na academia) não é o mesmo da escola, ver Anexo A. Mas isso significa que as aulas de Matemática na Educação Básica não são aulas de Matemática de fato?

---

[4] BRASIL. Governo Federal. **Portal Brasil**. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/ciencia-e-tecnologib013/07/ brasil-conquistou-quatro-medalhas-na-olimpiada-internacional-de-matematica> Acesso em: 05/11/2014

[5] Medalha internacional de descobrimentos proeminentes em Matemática, premiação concedida a pesquisadores jovens durante os Congressos Internacionais de Matemáticos a cada quatro anos.

[6] ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS. **O matemático que solucionou um problema cinquentenário.** Disponível em: <http://www.abc.org.br/impressao.php3?id_article=3342> Acesso em: 08/12/2014.

[7] CAREERCAST.COM. **The best jobs of 2014**. Disponível em: <http://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2014> Acesso em: 22/10/2014.

[8] Em qualquer corte (A, B), existe sempre um ponto da reta que separa duas classes (A) e (B). (ÁVILA, 2006).

A aula tradicional – expositiva e com muitos exercícios – é um dos principais problemas do ensino de Matemática atual segundo Lockhart (2014). Na verdade, ele considera que a Matemática está ausente das atividades desenvolvidas na Educação Básica, desmotivando e conduzindo os alunos ao fracasso escolar, de forma que aulas expositivas seguidas da resolução de exercícios se distanciam da essência da Matemática e beneficiam apenas aqueles que tem facilidade em memorizar e executar regras. Mesmo criticando outras questões como o currículo, Lockhart considera o trabalho do professor como determinante para essa situação. Segundo ele, o docente deve levar seus alunos a desenvolver a habilidade de pensar como matemáticos, de propor, investigar e resolver problemas, de constatar verdades. Será que a adoção dessa prática contribuiria para o ensino de Matemática?

A afirmação de René Descartes *apud* D'Amore (2007): "Não lhes explico tudo, para não privá-los do prazer de aprenderem sozinhos" encontra harmonia na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau *apud* Machado (2010) e D'Amore (2007), na qual o aprendizado do conhecimento matemático ocorre por adaptação do aluno a um ambiente fator de contradições, de dificuldades e desequilíbrios, onde a aprendizagem se produz por meio da solução de problemas que foram de interesse do aluno, ver Anexo B. Assim, caberia ao professor favorecer o surgimento dessas situações didáticas, motivando o protagonismo dos discentes para que assumam para si a resolução de problemas.

Piletti (2013) resume diversos movimentos na História da Educação em todo mundo, nota-se que em muitos deles há uma ideia comum, de que toda formação tem como objetivo essencial atribuir ao formando um maior grau de autonomia. Freire (1996, p. 95) afirma: "como professor não me é possível ajudar o educando a superar sua ignorância se não supero permanentemente a minha." Nessa tônica, o próprio professor deve ser autônomo, capaz de repensar a Matemática apresentada em suas aulas, de elaborar problemas matemáticos que levem seus alunos a pensar e a aprender. Sobre a resolução de problemas, considerada uma metodologia de ensino, discorre Wachilisk (2012),

> Faz-se necessário lembrarmos que os alunos somente ficam motivados a encontrarem outros caminhos ou soluções aos problemas, se realmente compreendem e, principalmente, se **realizam as soluções de maneira autônoma**, ou seja, sem muita interferência do professor. Nesse sentido, o docente pode questionar as resoluções apresentadas pelos alunos não de maneira a gerar dúvidas e insegurança, mas de forma a levá-los à reflexão sobre todo o processo. (WACHILISK, 2012, p. 33, grifo nosso)

Dessa forma, os problemas deveriam ser envolventes e o professor mais auxiliar os alunos a os compreenderem que fornecer soluções prontas. Mas, dentre as diversas naturezas de problemas matemáticos, os problemas geométricos encontram lugar especial no ensino de Matemática, segundo Freudhental *apud* Fonseca (2009, p. 92-93), "[...] as descobertas feitas pelos próprios olhos e mãos são mais surpreendentes e convincentes. Até que possa de algum modo ser dispensadas, as formas no espaço são um guia insubstituível para a pesquisa e a descoberta." Mas será que a resolução de problemas que levam os alunos a pensar Matemática é uma atividade constante na Educação Básica da rede pública de ensino de Alagoas?

O Apêndice A deste trabalho aponta resultados de uma pesquisa[9] com professores da rede pública de Alagoas. Nela, verificou-se que dificilmente os alunos são levados a pensar como matemáticos[10] durante as aulas, que a matemática escolar atual raramente desenvolve nos estudantes a capacidade de utilizar a Matemática como linguagem para pensar, inclusive na vida extraclasse. Ainda, os professores participantes elegeram os problemas geométricos como aqueles que causam maior interesse nos alunos, sendo que 60% desses docentes lembram de já ter ministrado boa parte do currículo a partir de problemas dessa natureza.

Diante do exposto, considera-se indícios de que algumas dificuldades no ensino de Matemática na Educação Básica estão relacionadas à abordagem dos conteúdos adotada pelo professor, de tal forma que quanto mais se inibe o pensamento dos estudantes, mais a "aula de matemática" se distancia da Matemática, que fica cada vez mais ausente da escola, daí uma hipótese para a dificuldade em atingir o letramento matemático, assim justificando a elaboração deste trabalho pela importância de repensar como essas aulas ocorrem, para que seja sempre possível formar pessoas com uma visão coerente da Matemática, capazes de exercer sua cidadania plenamente, porventura, ampliando o número de interessados em Matemática na sociedade e na academia.

Dessa forma, o objetivo principal deste trabalho é apresentar aos professores de Matemática da Educação Básica uma abordagem não tradicional dos conteúdos, que envolve outra postura frente à Matemática. Propõe-se que o professor e seus alunos assumam o papel de matemáticos em investigação, respeitando as condições inerentes à Educação Básica como o nível de aprofundamento dos conteúdos, e que haja uma fuga das fórmulas a decorar, da passividade e da monotonia potencialmente repetida tantas vezes quantas ocorrem o evento chamado aula (tradicional) de Matemática.

Ainda, buscou-se criar e resolver um problema matemático com o objetivo específico de elaborar uma sequência didática a ser desenvolvida em aulas coerentes com a proposta. Este

[9] Pesquisa desenvolvida pelo autor.
[10] Pensar examinando hipóteses, selecionando variáveis, identificando padrões, enfim, resolvendo problemas de modo autônomo.

trabalho também se presta a desenvolver outros produtos educacionais, a partir das problematizações desenvolvidas, desejando ser uma mensagem aos professores de matemática, sobretudo do Estado de Alagoas, encorajando-os a ir além do exercício e da repetição de técnicas em suas aulas, a pensar e a fazer seus alunos pensarem Matemática.

Assim, adotou-se metodologia assemelhada à Engenharia Didática, ver Apêndice B. No primeiro momento fez-se uma análise preliminar sobre um problema matemático, em seguida uma análise *a priori* a fim de delimitar algumas variáveis, como os saberes a ensinar e a turma a aprender, perceber situações didáticas e desenvolver uma sequência de atividades. No passo seguinte, ocorreu a experimentação, uma intervenção no nono ano do ensino fundamental, e por fim uma análise *a posteriori* a respeito dos registros fornecidos na experiência a fim de validar a seguinte hipótese: é possível ensinar matemática na Educação Básica respeitando sua essência e a autonomia do professor e dos alunos.

Quanto à avaliação da aprendizagem dos estudantes participantes da experiência, considerou-se apenas o aspecto formativo, ou seja, não foi preocupação atribuir notas ou conceitos, mas através da observação das intervenções dos discentes, da aplicação de questionários e pela elaboração de portfólio[11], que reuniu alguns trabalhos desenvolvidos pelos alunos, procurou-se perceber o andamento das aprendizagens de modo a favorecê-las.

Este trabalho segue organizado em mais quatro capítulos. Será visto no capítulo 2 uma investigação matemática, a nível de Educação Básica, a partir do problema de decompor um cubo em seis pirâmides, bem como a apresentação de um jogo e de outras sugestões de aplicações em sala de aula. No capítulo 3, abordou-se a construção com régua e compasso da planificação de pirâmides e uma maneira de encontrar suas medidas através de dobraduras. No seguinte, uma sequência didática aplicada ao nono do ensino Fundamental e relato da experiência. O quinto e último capítulo trata das conclusões a cerca deste trabalho.

Salienta-se que todas as ilustrações presentes neste são autorais e em grande parte desenvolvidas no GEOGEBRA[12], estas estão disponíveis em mídia (DVD-ROM) que acompanha este material. O leitor ainda encontrará textos complementares nos apêndices, como ideias para o desenvolvimento de outras sequências didáticas. É importante destacar que na gênese dos estudos desenvolvidos neste trabalho está o fato de que ao traçar as diagonais do cubo vê-se formar seis pirâmides congruentes, resultado que fez parte do processo de estudo registrado na monografia de graduação do autor deste[13].

---

[11] Veja mais sobre portfólio e avaliação em matemática no Apêndice C.
[12] *Software* livre de geometria dinâmica, *download* disponível em http://www.geogebra.org/download.
[13] Ver Silva (2011) nas referências deste.

2 UM CUBO EM SEIS PIRÂMIDES

Cubos e pirâmides são objetos que possuem diversas representações na história da humanidade, como as pirâmides do Egito que fascinam o homem até os dias atuais. Essas representações estão presentes no cotidiano dos estudantes da Educação Básica e são revestidas por diversos contextos, seja em um jogo de dados, em atividades com material dourado[14] ou na assimilação de uma dieta saudável pela análise de uma pirâmide alimentar. Além dessas representações no cotidiano, cubos e pirâmides também estão presentes em livros didáticos, pois o estudo desses poliedros é previsto no currículo da Educação Básica.

Neste capítulo, tais objetos serão estudados simultaneamente, a partir do problema de como decompor um cubo em pirâmides. Mas, assim como um polígono pode ser dividido em muitos triângulos, um cubo pode ser decomposto em uma infinidade de pirâmides e cada uma delas em inúmeros tetraedros. Mesmo fixando o número de pirâmides a se obter na decomposição, se houver uma maneira de decompor, então existem infinitas, pois bastaria variar a altura de uma dessas em um intervalo real, como será esclarecido adiante. Assim, outras hipóteses serão adicionadas ao problema.

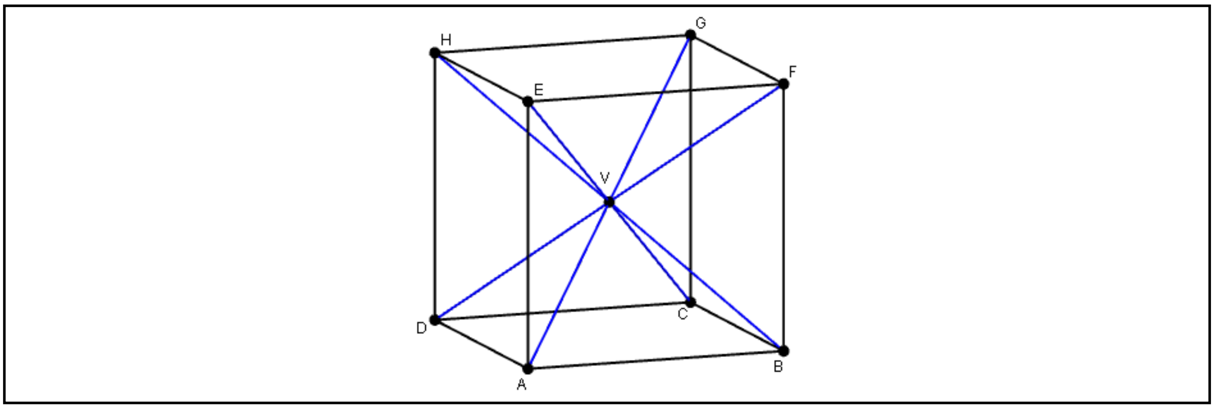
2.1 Hipóteses do problema

Dados um cubo ABCDEFGH e um ponto V em seu interior, tem-se as pirâmides: ABCD-V, ADHE-V, EFGH-V, BCGF-V, ABFE-V e CDHG-V. Dessa forma, uma maneira de decompor o cubo é em seis pirâmides de bases congruentes à face do cubo que as contém, sendo V o vértice comum a todas. Assim, todas as decomposições possíveis são determinadas pelos pontos do interior do cubo e cada ponto determina apenas um conjunto de seis pirâmides como as da Figura 1 (p. 18).

Mas, será que dois pontos podem determinar o mesmo conjunto de seis pirâmides? Ou seja, trata-se de uma aplicação injetiva ou existem soluções múltiplas para o problema de decompor um cubo em pirâmides a partir da escolha de um ponto de seu interior? Para responder a essas perguntas, julgou-se conveniente adotar um sistema de coordenadas e estudar as simetrias do cubo.

[14] Tradicional recurso pedagógico utilizado sobretudo no Ensino Fundamental, como no ensino de frações ou do sistema decimal, consiste num conjunto de numerosos cubos na cor dourada.

Figura 1 - Uma decomposição do cubo em seis pirâmides

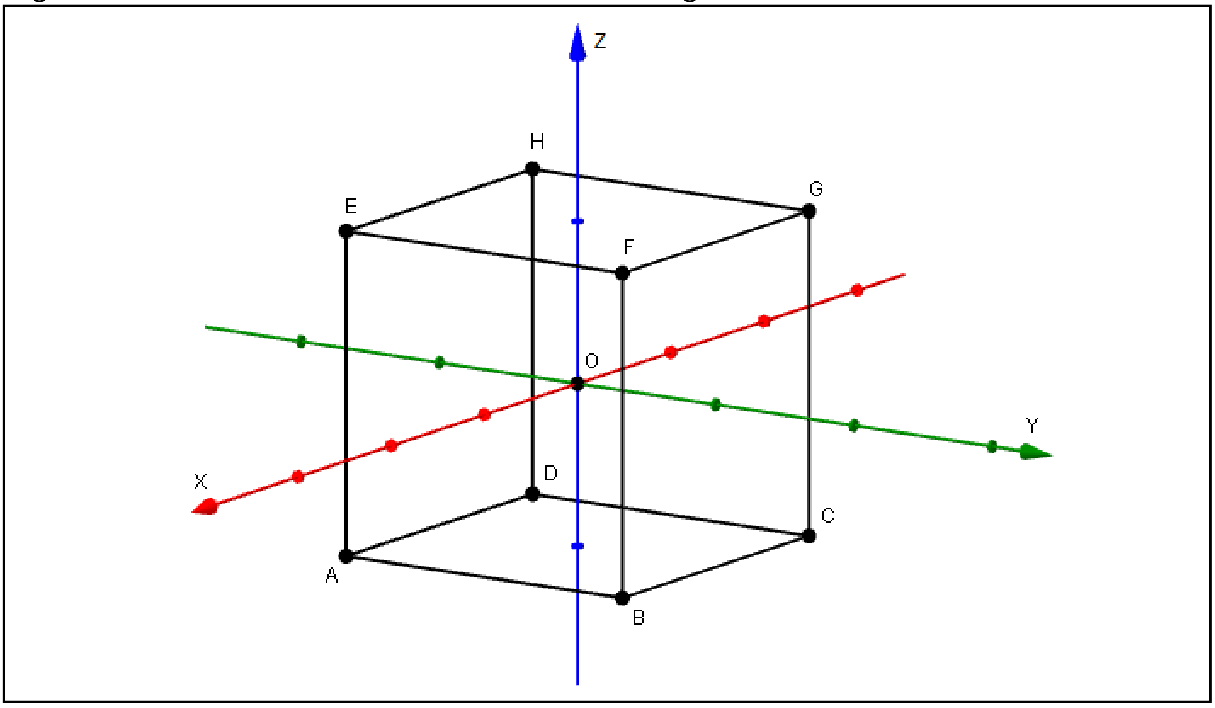


Fonte: Autor, 2015.

2.1.1 Simetrias e Soluções Múltiplas

Seja OXYZ um sistema ortogonal no espaço tridimensional, de origem no centro O do cubo ABCDEFGH, de modo que os planos OXY e OXZ sejam respectivamente paralelos aos planos das faces ABCD e ADHE, como na Figura 2.

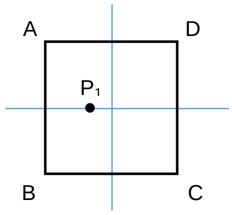
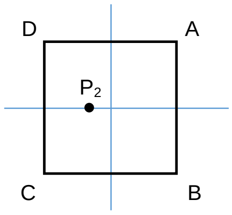
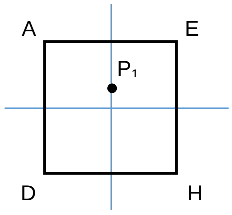
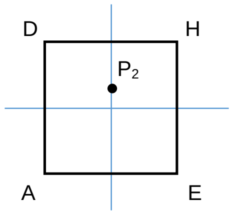
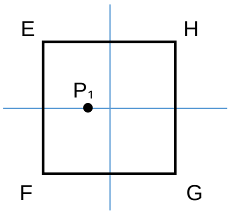
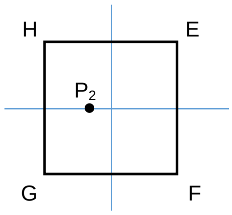
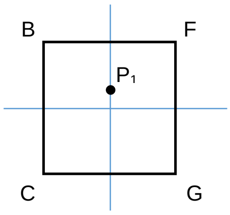
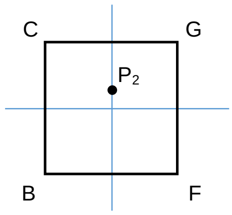
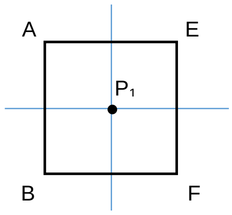
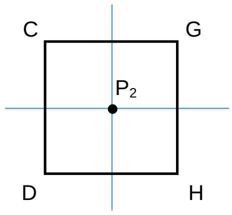
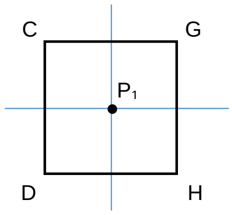
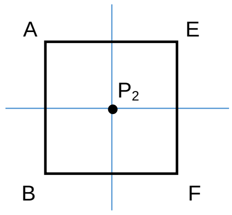
Figura 2 - Cubo centrado em um sistema de eixos ortogonais



Fonte: Autor, 2015.

Observe as decomposições a partir de $V_1\,(x, 0, 0)$ e $V_2\,(-x, 0, 0)$ no Quadro 1 (p. 19).

Quadro 1 - Dados de duas decomposições congruentes

ABCD-V_1			ABCD-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2$			$\lvert AB\rvert/2$
ADHE-V_1			ADHE-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2$			$\lvert AB\rvert/2$
EFGH-V_1			EFGH-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2$			$\lvert AB\rvert/2$
BCGF-V_1			BCGF-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2$			$\lvert AB\rvert/2$
ABFE-V_1			CDHG-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2 - x$			$\lvert AB\rvert/2 - x$
CDHG-V_1			ABFE-V_2	
	$\lvert V_1P_1\rvert$	≡		$\lvert V_2P_2\rvert$
	$\lvert AB\rvert/2 + x$			$\lvert AB\rvert/2 + x$

Fonte: Autor, 2015.

Note que os pontos V_1 (x, 0, 0) e V_2 (-x, 0, 0) são simétricos em relação ao plano OYZ e a decomposição desse cubo em seis pirâmides de vértice comum V_1 (x, 0, 0) coincide com a decomposição que possui V_2 (-x, 0, 0) como vértice comum, pois fornecem as mesmas seis pirâmides, afinal duas pirâmides de mesma base, mesma projeção ortogonal (P_j) do vértice V_j (ponto interior ao cubo) na base e mesma altura ($|V_jP_j|$), são equivalentes.

Observe que essa equivalência de decomposições ocorre em outros casos de simetria por reflexão dos pontos V. Pois, se V (x, y, z) é um ponto no primeiro octante, por reflexão em relação aos planos OYZ, OXZ e OXY tem-se, respectivamente, os pontos (-x, y, z), (x, -y, z) e (x, y, -z) simétricos ao ponto V nos segundo, quarto e quinto octantes. Mas, analogamente, o ponto (-x, y, z) é simétrico aos pontos (-x, -y, z) e (-x, y, -z) no terceiro e sexto octantes, que por sua vez são simétricos ao ponto (-x, -y, -z) no sétimo octante, por fim, este é simétrico ao ponto (x, -y, -z) no oitavo octante. Logo, em um mesmo octante tem-se representantes dos pontos dos outros sete octantes. Ou seja,

Se (x, y, z) é um ponto no interior do cubo, então (x, y, z) ~ (|x|, |y|, |z|). (1)

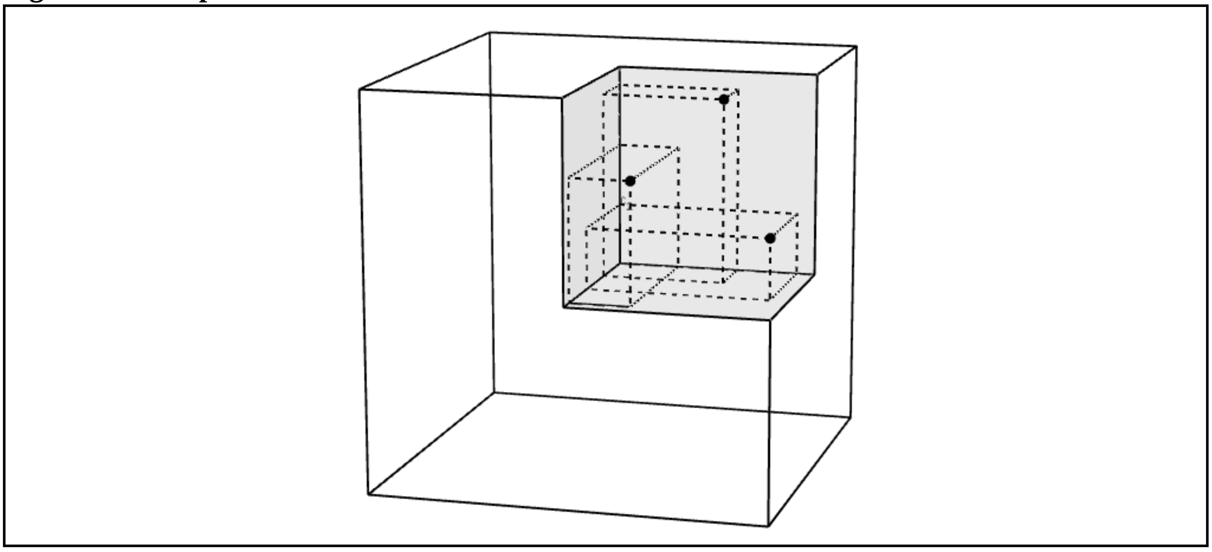
Leia-se o símbolo “ ~ ” como “é simétrico a”.

Assim, bastaria tomar vértices no primeiro octante para eliminar as soluções múltiplas? A resposta é não, pois ainda há pontos simétricos em relação aos planos das faces em um mesmo octante. Note que ao rotacionar o cubo em 90º em torno do eixo OX, e, em seguida, 90º em torno do eixo OZ, sucessivamente, tem-se que (x, y, z) ~ (z, x, y) ~ (y, z, x). Portanto, por essa simetria de rotação,

Se (x, y, z) é um ponto no interior do cubo, então (x, y, z) ~ (z, x, y) ~ (y, z, x). (2)

Ainda, é fácil verificar que esses pontos são vértices de um triângulo equilátero, pois tomados dois a dois, a distância entre eles é a mesma. Outro fato, por se tratar apenas de rotações do cubo, é possível construir uma representação em forma de material manipulável para fins didáticos, exemplificando como as simetrias podem fazer três objetos aparentemente distintos, congruentes, como na Figura 3 (p. 21).

Figura 3 - Três pontos simétricos em um mesmo octante



Fonte: Autor, 2015.

No entanto, sabe-se que:

i) (x, y, z) ~ (x, -y, z), por (1);

ii) (x, -y, z) ~ (y, x, z), por rotação de 90º em torno de OZ;

iii) (y, x, z) ~ (z, y, x) ~ (x, z, y), por rotações sucessivas de 90º em torno de OX e de OZ;

Logo,

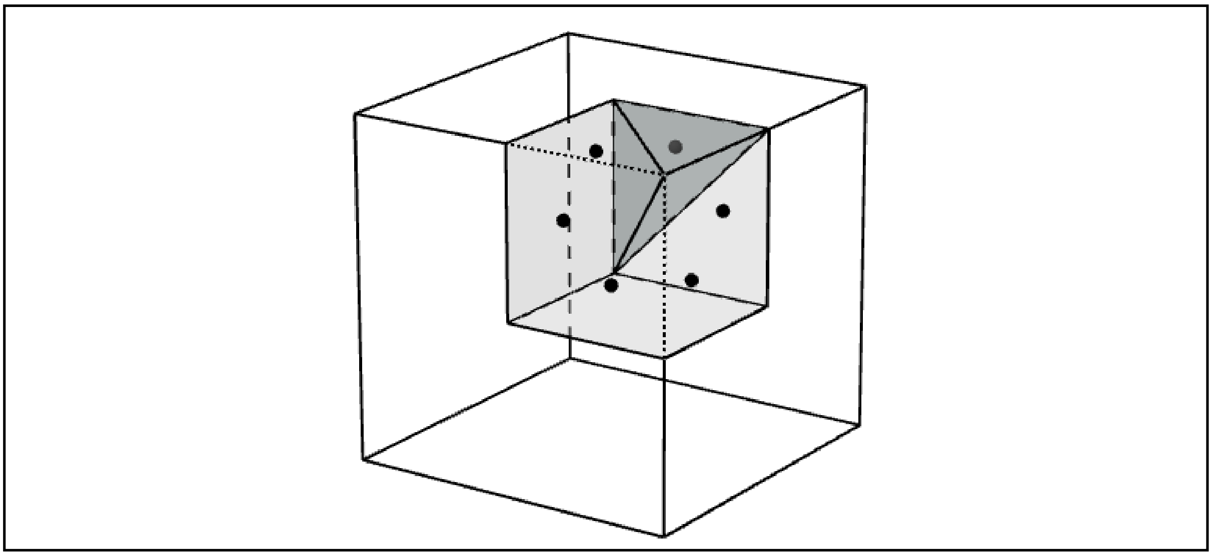
$$\mathbf{(x, y, z) \sim (y, x, z) \sim (z, y, x) \sim (x, z, y)} \tag{3}$$

Portanto, considerando os resultados (1), (2) e (3), tem-se que para cada ponto (x, y, z) há exatamente cinco simétricos a ele no mesmo octante – esses seis pontos formam um hexágono regular, como ilustra a Figura 4 (p. 22) – e há quarenta e dois nos demais octantes. Assim, para cada ponto (x, y, z) no interior de um octante, há exatamente outros quarenta e sete simétricos a ele, são os pontos que possuem |x|, |y| e |z| como coordenadas, em qualquer ordem.

De fato, se Q = (a, b, c) ~ V = (x, y, z) de modo que ambos determinam decomposições equivalentes do cubo em seis pirâmides, então o conjunto das seis distâncias de Q aos planos que contêm as faces do cubo é igual ao conjunto das distâncias de V a esses mesmos planos, isto é, {|AB|/2 ± a, |AB|/2 ± b, |AB|/2 ± c} = {|AB|/2 ± x, |AB|/2 ± y, |AB|/2 ± z}, note que essa igualdade se verifica para os oito casos nos quais a = |x|, b = |y| e c = |z|, assim, permutando a, b e c tem-se exatamente quarenta e oito soluções.

Portanto, uma região que contém apenas pontos assimétricos (no primeiro octante) é aquela compreendida entre os planos y = z, y = x, x = z, z = 0 e, para restringir ao interior do cubo, x e y = |AB|/2, ou seja, a região da pirâmide triangular em destaque na Figura 4 cujo volume é exatamente quarenta e oito avos do volume do cubo.

Figura 4 - Uma região de pontos assimétricos no cubo



Fonte: Autor, 2015.

Assim, restringir o problema a esses pontos traz a bijetividade, já que todas a decomposições (tratadas no problema) são definidas por tais pontos assimétricos, e dois desses pontos sempre determinam decomposições distintas. No entanto, ainda há infinitas formas de decompor o cubo em seis pirâmides tomando como vértice comum somente pontos assimétricos, isto é, o problema ainda é contínuo.

Para aprofundamento em estudos relacionados a simetrias no espaço, recomenda-se ao leitor estudar sobre Grupos de Coxeter[15].

2.1.2 O Conjunto das Alturas, H/{0, |AB|}

Seja V = (x, y, z), um ponto interior ao cubo, como foi visto, V define uma decomposição em seis pirâmides de mesma base (face do cubo). Para reduzir a notação, seja |AB| = 2b. Observe que, no sistema de coordenadas adotado, b – x, b – y e b – z são as alturas

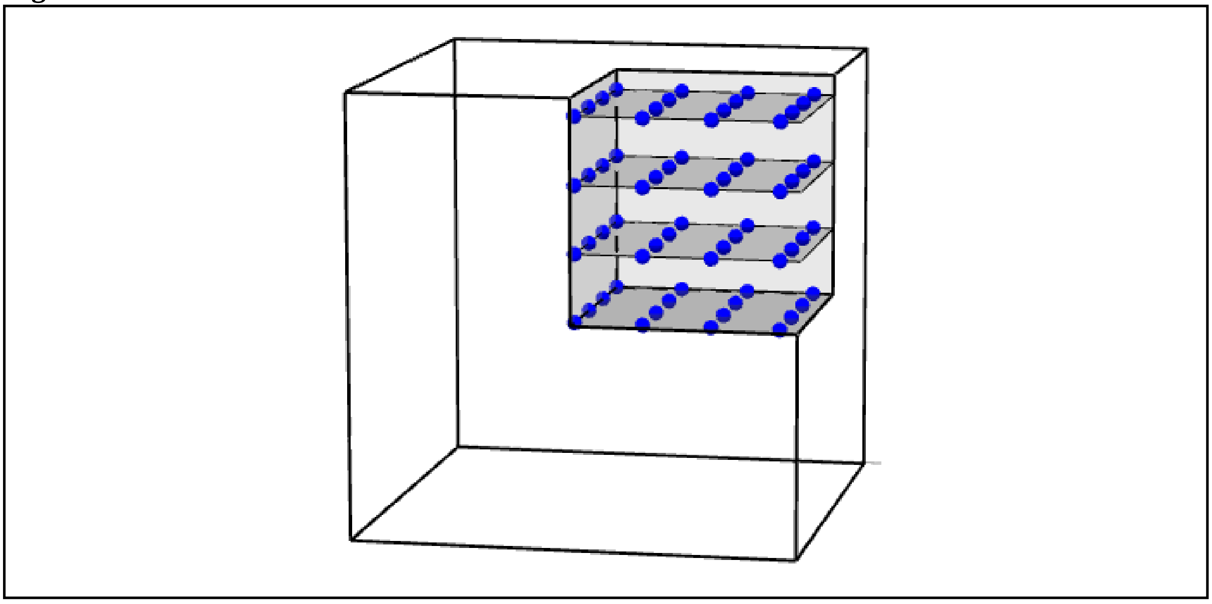
[15] DAVIS, Michael W. **The geometry and topology of Coxeter groups**. USA: Princeton University Press, 2007.

de três pirâmides duas a duas adjacentes[16] na composição do cubo a partir do ponto V, e b + x, b + y e b + z são as alturas das outras três pirâmides, respectivamente opostas[17] às três primeiras. Assim, uma decomposição do cubo também pode ser definida por três alturas de pirâmides duas a duas adjacentes, sendo que essas tomam valores no intervalo real (0, 2b), novamente evidenciando a existência de uma infinidade de decomposições.

Assim, para sair do caso contínuo para o discreto, é suficiente definir um conjunto finito de valores para as alturas das pirâmides e com isso obter um número finito de decomposições. Por outro lado, é conveniente que a escolha desse conjunto não seja aleatória, isto é, que se tenha algum controle sobre a escolha desses valores, por exemplo, para manter um padrão de seccionamento do cubo, facilitando a construção das pirâmides com fins didáticos.

Sejam λ um número real no intervalo contínuo (0, b), k a parte inteira do quociente b/λ e $H = \{h \in \mathbb{R};\ h = b \pm j\lambda,\ j = 0, 1, ..., k\}$. Se as alturas das pirâmides tomam valores em $H/\{0, 2b\}$, além do problema passar a contar com um número finito de soluções, estas determinam os possíveis pontos V_n, vértice comum a todas as pirâmides da enésima decomposição, em reticulados no interior do cubo, conforme a Figura 5. E o número λ corresponde à distância mínima entre dois pontos desses reticulados.

Figura 5 - Reticulados no 1º octante



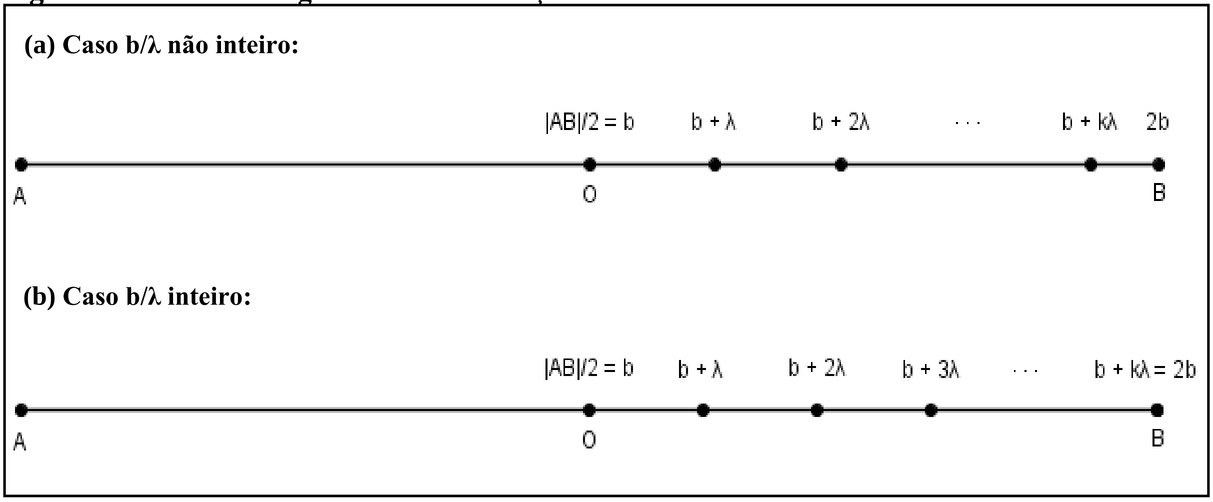
Fonte: Autor, 2015.

[16] Diz-se que duas pirâmides na composição do cubo são adjacentes, quando os planos que contêm as suas bases são perpendiculares.

[17] Diz-se que duas pirâmides na composição do cubo são opostas, quando os planos que contêm as suas bases são paralelos.

Vale ressaltar que há dois casos a considerar, se b/λ não é inteiro, isto é, se $b \neq k\lambda$ conforme Figura 6(a), e se b/λ é inteiro, ou seja, se $b = k\lambda$ conforme Figura 6(b).

Figura 6 - Divisão do segmento AB em função de λ



Fonte: Autor, 2015.

Note que, 0 e $2b \in H$ se, e somente se, $b = k\lambda$, inclusive, a existência de λ nesta igualdade é garantida pela completeza dos números reais, segundo Ávila (2006). Além disso, H sempre será um conjunto finito, apesar do número de elementos de H (denotado por #H) depender do λ escolhido, com isso o problema principal tratado neste capítulo torna-se discreto.

Assumindo $H/\{0, 2b\}$ como o conjunto de valores possíveis para a altura das seis pirâmides que compõem um cubo, tem-se como consequência imediata a determinação da altura mínima e da altura máxima das pirâmides de uma decomposição, quais sejam

$$\mathbf{h_{min} = \lambda \text{ e } h_{máx} = b + (k - 1)\lambda, \text{ se } b = k\lambda.} \quad (4)$$

$$\mathbf{h_{min} = b - k\lambda \text{ e } h_{máx} = b + k\lambda, \text{ se } b \neq k\lambda.} \quad (5)$$

Por outro lado, como foi visto anteriormente, três alturas de pirâmides adjacentes na composição do cubo determinam um vértice comum às seis pirâmides. Logo, é suficiente escolher um subconjunto de H que contenha apenas valores para alturas de pirâmides adjacentes, será escolhido o conjunto H_1 assim definido,

$$\mathbf{H_1 = \{h \in \mathbb{R}; h = b + j\lambda, j = 1, ..., k\}/\{2b\}} \quad (6)$$

Assim surge naturalmente uma indagação: qual o número de soluções do problema? Essa pergunta motiva a próxima seção do trabalho.

2.2 Número de soluções

Seja S o conjunto das soluções do seguinte problema: deseja-se decompor um cubo ABCDEFGH centrado na origem de um sistema de eixos ortogonais, conforme a Figura 2 (p. 18), em seis pirâmides tais que suas bases são congruentes às faces desse cubo, suas alturas medem qualquer valor do conjunto H/{0, 2b} (p.23) e o vértice comum a todas elas é um ponto V_n da região determinada pelo tetraedro de vértices (0, 0, 0), (0, 0, b), (0, b, b) e (b, b, b), sendo 2b a medida da aresta do cubo. Assim, cada elemento de S é uma decomposição distinta do cubo e o número de decomposições distintas fica denotado por #S.

Com isso, V_n pode ser um entre finitos pontos na região destacada na Figura 4 (p. 22), daí determinar o número de soluções do problema corresponde a contar esses pontos. Para tanto, é suficiente realizar o seguinte processo de contagem: tomar os elementos de H_1 três a três, observando as equivalências em (1), (2) e (3) (p. 20-21), assim determinando os possíveis trios de coordenadas de V_n.

Observe o exemplo, seja 2b = 14, λ = 2, daí (b/λ) = 3,5 e k = 3, logo:

i) H/{0, 14} = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13} é o conjunto de valores para as alturas que pirâmides de uma decomposição pode assumir;

ii) H_1 = {7, 9, 11, 13} é um conjunto de valores para as alturas que pirâmides adjacentes em uma decomposição podem assumir;

iii) As coordenadas de V_n serão do tipo jλ, j = 0, 1, 2 e 3.

Realizando a contagem de modo a desconsiderar as combinações das coordenadas, segundo (1), (2) e (3), V_n pode ser qualquer um de vinte pontos, conforme Tabela 1:

Tabela 1 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, exemplo 1.

Pontos de três coordenadas iguais	Pontos de duas coordenadas iguais		Pontos de coordenadas diferentes
	(0, 0, 2)	(4, 4, 0)	
(0, 0, 0)	(0, 0, 4)	(4, 4, 2)	(0, 2, 4)
(2, 2, 2)	(0, 0, 6)	(4, 4, 6)	(0, 2, 6)
(4, 4, 4)	(2, 2, 0)	(6, 6, 0)	(2, 4, 6)
(6, 6, 6)	(2, 2, 4)	(6, 6, 2)	(0, 4, 6)
	(2, 2, 6)	(6, 6, 4)	
4 pontos	12 pontos		4 pontos
(k + 1)	k(k + 1)		(k + 1)!/3!(k – 2)!

Fonte: Autor, 2015.

Portanto, para este caso, no qual $b \neq k\lambda$ e $\#H_1 = k + 1$, o número de soluções foi:

$$\mathbf{\#S = (k + 1) + k(k + 1) + (k + 1)k(k - 1)/6} \tag{7}$$

Veja outro exemplo. Seja $2b = 12$, $\lambda = 2$, daí $(b/\lambda) = 3$, $k = 3$, daí

i) $H/\{0, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$;

ii) $H_1 = \{6, 8, 10\}$;

iii) As coordenadas de V_n serão do tipo $j\lambda$, $j = 0, 1, 2$.

Logo, dez são os possíveis pontos V_n, conforme Tabela 2.

Tabela 2 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, exemplo 2.

Pontos de três coordenadas iguais	Pontos de duas coordenadas iguais	Pontos de coordenadas diferentes
(0, 0, 0) (2, 2, 2) (4, 4, 4)	(0, 0, 2) (2, 2, 4) (0, 0, 4) (4, 4, 0) (2, 2, 0) (4, 4, 2)	(0, 2, 4)
3 pontos	6 pontos	1 ponto
K	k(k – 1)	k!/3!(k – 3)!

Fonte: Autor, 2015.

Neste exemplo, sendo $b = k\lambda$ e $\#H_1 = k$, o número de soluções foi:

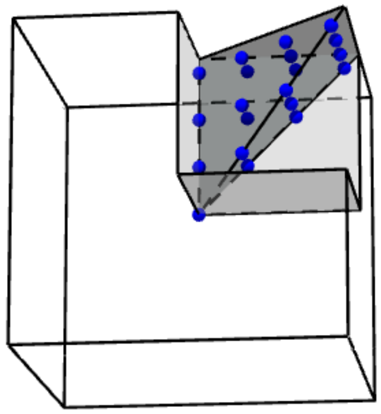
$$\mathbf{\#S = k + k(k - 1) + k(k - 1)(k - 2)/6.} \tag{8}$$

Assim, para o caso geral $\#H_1 = k'$, conjectura-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{\#S} &= \mathbf{k' + 2C_2^{k'} + C_3^{k'}} \\ &= \mathbf{k' + k'(k' - 1) + k'(k' - 1)(k' - 2)/6} \\ &= \mathbf{k'^2 + k'(k' - 1)(k' - 2)/6} \\ &= \mathbf{[6k' + k'^2 - 3k' + 2]k'/6} \\ &= \mathbf{[k'^2 + 3k' + 2]k'/6} \\ &= \mathbf{k'(k'+1)(k'+2)/6.} \end{aligned} \tag{9}$$

Adiante será visto que, de fato, a igualdade (9) fornece o número de soluções para o problema. Antes porém, vale recordar a correspondência biunívoca entre as soluções e os pontos resultantes da interseção entre o lugar geométrico dos pontos assimétricos e os reticulados determinados pelo conjunto H/{0,2b} nos planos z = jλ. Portanto, o número de pontos dessa interseção é exatamente #S e estes estão representados na Figura 7.

Figura 7 - Pontos que determinam soluções



Fonte: Autor, 2015.

Perceba que as quantidades desses pontos nos planos z = jλ formam a sequência dos chamados números triangulares (ver p. 80), veja representação do caso geral na Tabela 3.

Tabela 3 - Vértices determinantes de decomposições do cubo, caso geral.

Valor de j	Valor de z	Pontos assimétricos no plano z = jλ	# pontos assimétricos
0	0	(0, 0, 0)	1
1	Λ	(0, 0, λ) (0, λ, λ) e (λ, λ, λ)	1+2
2	2λ	(0, 0, 2λ) (0, λ, 2λ), (λ, λ, 2λ) (0, 2λ, 2λ), (λ, 2λ, 2λ) e (2λ, 2λ, 2λ)	1+2+3
3	3λ	(0, 0, 3λ) (0, λ, 3λ), (λ, λ, 3λ) (0, 2λ, 3λ), (λ, 2λ, 3λ), (2λ, 2λ, 3λ) (0, 3λ, 3λ), (λ, 3λ, 3λ), (2λ, 3λ, 3λ) e (3λ, 3λ, 3λ)	1+2+3+4
i	iλ	(0, 0, iλ) (0, λ, iλ), (λ, λ, iλ) (0, 2λ, iλ), (λ, 2λ, iλ), (2λ, 2λ, iλ) ... (0, iλ, iλ), (λ, iλ, iλ), (2λ, iλ, iλ) ... (iλ, iλ, iλ)	1+2+...+(i+1)

Fonte: Autor, 2015.

Segundo Eves (2004) esses e outros números figurados representaram um elo entre a Aritmética e a Geometria, além de apresentar propriedades bastante curiosas, por exemplo, se um número é quadrado perfeito então é a soma de dois números triangulares sucessivos e todo número inteiro positivo pode ser escrito pela soma de no máximo três números triangulares.

Voltando ao cálculo do #S, será efetuada a soma dos k' primeiros números triangulares, pois, por definição, k' é o número de elementos de H_1. Note que esse número corresponde à soma das quantidades de pontos assimétricos dos reticulados de z = 0 a z = (k' – 1)λ. Logo,

$$
\begin{aligned}
\#S &= 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + \ldots + \mathbf{1 + 2 + \ldots + i} + \ldots + 1 + 2 + \ldots + k' \\
&= \sum_{i=1}^{k'} \frac{(1+i)i}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'} i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k'} i^2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(k'+1)k'}{2} + \frac{k'(k'+1)(2k'+1)}{6}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{3k'(k'+1) + k'(k'+1)(2k'+1)}{6}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(k'+1)(3k' + 2k'^2 + k')}{6}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(k'+1)2k'(k'+2')}{6}\right] \\
&= \frac{k'(k'+1)(k'+2)}{6}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o número de soluções do problema é

$$\boldsymbol{\#S = \frac{k'(k'+1)(k'+2)}{6}}. \tag{10}$$

Assim, a igualdade (10) verifica a validade da conjectura (9) (p. 26). Mas, como foi visto nos exemplos, pela definição do conjunto H_1 seu número de elementos depende do λ escolhido, de modo que, k' = k + 1 se b/λ não é inteiro, e k' = k se b/λ é inteiro, ver Figura 6 (p. 24).

Em síntese, para determinar #S, o número de decomposições distintas do cubo nas hipóteses do problema, dado |AB| = 2b e um número real λ do intervalo (0, b), determina-se k, a parte inteira do quociente b/λ, daí:

$$\#\mathbf{S} = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{k(k+1)(k+2)}}{\mathbf{6}}, & \mathbf{se\ b = k\lambda}. \\ \dfrac{\mathbf{(k+1)(k+2)(k+3)}}{\mathbf{6}}, & \mathbf{se\ b \neq k\lambda}. \end{cases} \tag{11}$$

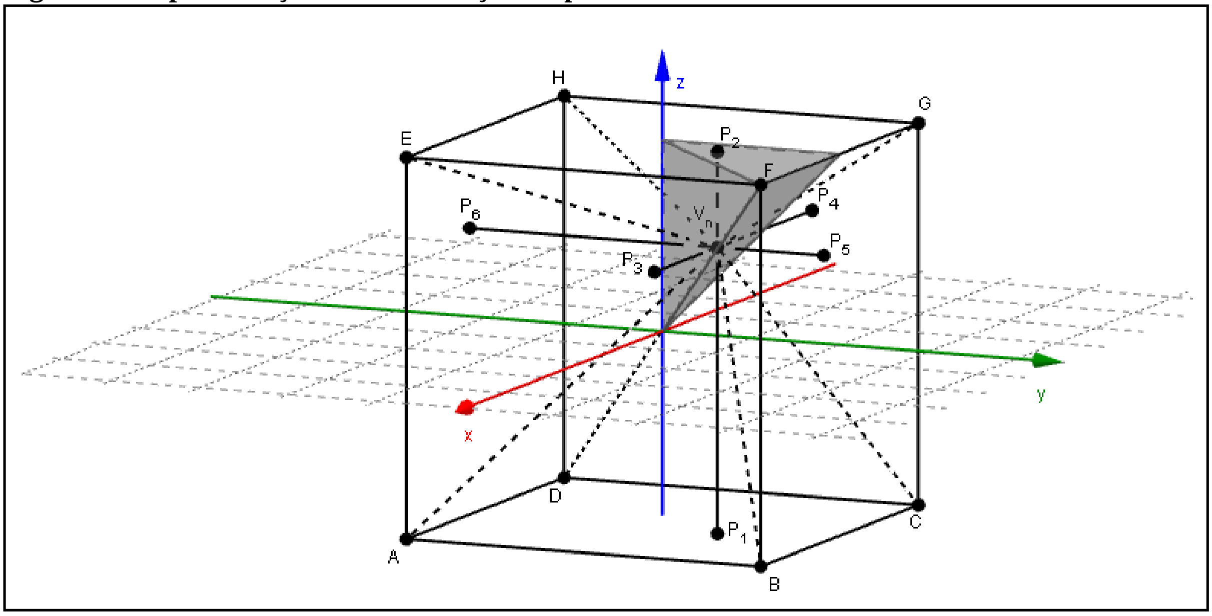
Sendo b = |AB|/2, AB a aresta do cubo, e λ o espaçamento mínimo entre V_i e V_j, vértices comuns de duas decomposições distintas do cubo em seis pirâmides. Os números obtidos por essa fórmula são chamados números tetraédricos.

2.3 Características das soluções

Entende-se por solução do problema em estudo cada conjunto de seis pirâmides provenientes da decomposição do cubo conforme as hipóteses adotadas na seção 2.1. Dessa forma, cada solução possui pelo menos uma pirâmide não congruente às pirâmides de qualquer outra solução, pois se eliminou as soluções múltiplas. Mas, quais são as condições de congruência entre as pirâmides de uma mesma solução?

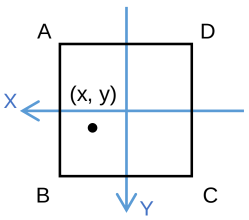
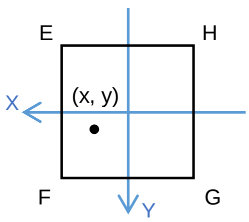
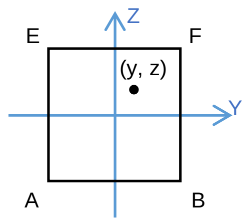
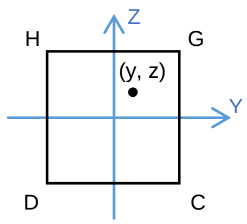
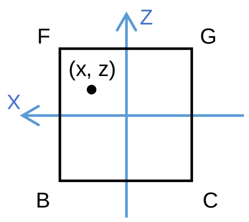
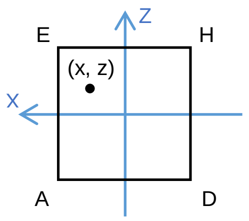
Sabe-se que cada elemento de S, conjunto das soluções, está associado a exatamente um ponto da interseção entre os reticulados definidos pelo conjunto H/{0, 2b} e a região piramidal de pontos assimétricos, Figura 7 (p. 27). Assim, as características de cada solução dependem das coordenadas do ponto que a determina. Seja V_n o ponto que determina a enésima solução, logo duas coordenadas de V_n determinam P_i e P_j, projeções ortogonais de V_n nas bases de duas pirâmides opostas $\mathcal{P}_i$ e $\mathcal{P}_j$, bases paralelas ao plano definido pelos eixos daquelas coordenadas, enquanto a outra coordenada de V_n determina as alturas $|V_nP_i|$ e $|V_nP_j|$ daquelas duas pirâmides. Note que se trata de uma combinação de três coordenadas tomadas duas a duas, ou seja, seis pirâmides conforme a Figura 8 (p. 30) e o Quadro 2 (p. 30) a seguir.

Figura 8 - Representação de uma solução do problema



Fonte: Autor, 2015.

Quadro 2 - Características de uma decomposição do cubo

ABCD-V(x, y, z)		EFGH-V(x, y, z)	
	Altura: b + z		Altura: b – z
	P_1 = (x, y, -b)		P_2 = (x, y, b)
ABFE-V(x, y, z)		CDHG-V(x, y, z)	
	Altura: b – x		Altura: b + x
	P_3 = (y, z, b)		P_4 = (y, z, -b)
BCGF-V(x, y, z)		ADHE-V(x, y, z)	
	Altura: b – y		Altura: b + y
	P_5 = (x, z, -b)		P_6 = (x, z, b)

Fonte: Autor, 2015.

Veja que em cada linha do Quadro 2 (p. 30) estão representadas duas pirâmides opostas, portanto a soma de suas alturas é igual a 2b. Note também que em cada coluna há três pirâmides adjacentes na composição do cubo, apesar de nem todas as três alturas tomarem valor em H_1, assim evidenciando que a escolha de H_1 foi apenas uma convenção.

Observe também que se pode definir a pirâmide $\mathcal{P}_j$ por um ponto e um número, a saber P_j e $|V_nP_j|$. Assim a pirâmide ABCD-V, por exemplo, pode ser denotada por (x, y);(b + z) e a partir das relações de igualdade e casos de nulidade das coordenadas x, y e z, um elemento de S atende necessariamente a um dos casos indicados na Tabela 4.

Tabela 4 - Relações de congruência em uma decomposição do cubo

A	B	C	Exemplo	
			Vértice comum	Arranjo das seis pirâmides
1	3	3	(0, 0, 0)	6 x (0, 0);b
2	0	3	(1, 1, 1)	3 x (1, 1);(b + 1) + 3 x (1, 1);(b – 1)
3	1	2	(0, 1, 1)	2 x (0, 1);(b + 1) + 2 x (0, 1);(b – 1) + 2 x (1, 1);b
3	2	2	(0, 0, 1)	4 x (0, 1);b + 1 x (0, 0);(b+1) + 1 x (0, 0);(b – 1)
4	0	2	(1, 1, 2)	2 x (1, 2);(b + 1) + 2 x (1, 2);(b – 1) + 1 x (1, 1);(b + 2) + 1 x (1, 1);(b – 2)
5	1	0	(0, 1, 2)	1 x (0, 1);(b + 2) + 1 x (0, 1);(b – 2) + 1 x (0, 2);(b + 1) + 1 x (0, 2);(b – 1) + 2 x (1, 2);b
6	0	0	(1, 2, 3)	1 x (1, 2);(b + 3) + 1 x (1, 2);(b – 3) + 1 x (1, 3);(b + 2) + 1 x (1, 3);(b – 2) + 1 x (2, 3);(b + 1) + 1 x (2, 3);(b – 1)
A, número de formatos distintos (tipos) de pirâmides				
B, número de coordenadas nulas do vértice comum				
C, número de coordenadas iguais do vértice comum				

Fonte: Autor, 2015.

Assim, conhecidas as relações de congruências entre as pirâmides de uma solução, denomina-se **decomposição totalmente congruente** o caso em que as seis pirâmides são congruentes (A = 1), e **decomposição totalmente não congruente** o caso em que as seis pirâmides são distintas (A = 6).

Por fim, convém ressaltar que, como o conjunto das soluções fica definido a partir da escolha do número real λ e do conjunto H/{0, 2b}, o vértice comum de uma solução – quando as seis pirâmides compõem o cubo – está a no mínimo λ u.c. do vértice comum de outra solução.

2.4 Aplicações em sala de aula: um quebra-cabeça em 3D

A partir dos estudos apresentados até este ponto, é possível desenvolver algumas atividades para a sala de aula da Educação Básica. Além do estudo dos números triangulares, noções de geometria espacial e de contagem, objetos manipuláveis podem ser construídos para fins didáticos. Por exemplo, construir um cubo a partir de uma decomposição totalmente congruente, preencher as seis pirâmides com isopor picado e em uma delas adicionar areia. Numerar as faces de um a seis, obtendo um dado viciado, daí usar esse objeto para mostrar a alunos do ensino fundamental que nem todo espaço amostral é equiprovável, podendo estender essa discussão a outros contextos e concluir pela necessidade de um pensamento crítico.

Embora haja outras abordagens possíveis, optou-se por desenvolver um jogo, um quebra-cabeça em três dimensões que toma forma a partir da planificação do cubo. Neste trabalho, define-se planificação de um poliedro L como qualquer figura plana F formada por polígonos justapostos, com a propriedade de obter L através de dobraduras sobre os lados dos polígonos de F.

Nestas condições, sabe-se que o cubo possui exatamente onze planificações distintas. A partir de qualquer uma delas podem ser desenvolvidas atividades para a sala de aula, como montar um dado convencional numerado de um a seis, com a propriedade de duas faces opostas somar sete. Assim, o docente pode criar um circuito com as onze planificações, numerando apenas um quadrado em cada uma delas e solicitar que o aluno, ou um grupo deles, perfaça-o.

Uma adaptação para essa atividade é utilizar frações em vez de números inteiros, de modo que a soma das frações de faces opostas seja um inteiro. Neste caso, o professor pode confeccionar seis cartas com uma fração cada, de modo que seja possível concluir a tarefa. Essa atividade pode ser estendida com mais cartas ou aumentando as entradas em cada quadrado da planificação, por exemplo, fornecendo diversas cartas com números inteiros que dois a dois definem um racional, assim em cada quadrado o aluno colocaria duas cartas.

O objetivo desta seção é propor uma ideia de um produto educacional construído a partir de uma planificação do cubo e dos estudos desenvolvidos neste capítulo. Esse produto consiste em uma quebra-cabeça em três dimensões, de modo que, dada uma planificação do cubo e uma de suas decomposições em seis pirâmides, o aluno deverá dispor cada pirâmide sobre cada quadrado da planificação com a finalidade de “guardar” as seis pirâmides no cubo. Neste caso, há duas entradas para cada quadrado: a altura e a posição da pirâmide.

De acordo com os resultados apresentados neste capítulo, pode-se ter até seis pirâmides diferentes em uma decomposição do cubo conforme as hipóteses adotadas, considerando este caso, ao iniciar o quebra-cabeça o aluno poderá escolher qualquer um dos seis quadrados e nele dispor qualquer uma das seis pirâmides, de forma que sua base sobreponha o quadrado escolhido, como essa pirâmide faz parte de uma decomposição totalmente não congruente, há quatro possibilidades para esse último passo, a partir daí só existirá uma única maneira de compor o cubo, pois o vértice comum às seis pirâmides já está definido.

Note que a propriedade de uma peça definir a posição das outras cinco não ocorria nas atividades com cartas mencionadas há pouco, no entanto, nelas era possível verificar a validade das respostas efetuando as adições. A possibilidade de verificar a validade da solução do jogo, isto é, de ter como comprovar se a disposição das peças está correta, é uma das características de um quebra-cabeça. Neste produto, apesar do aluno montar o quebra-cabeça mentalmente, ele tem a possibilidade de verificar a validade de sua resposta, pois a planificação é manipulável de forma a permitir que, de fato, o cubo seja formado, daí validando ou não o raciocínio desenvolvido nas escolhas tomadas durante o jogo.

Espera-se que haja o desenvolvimento de habilidades ligadas à orientação espacial, a percepção de simetrias e de características das pirâmides, envolvendo congruência de triângulos, paralelismo e perpendicularidade, bem como outras habilidades relacionadas à atividade do jogo, como a necessidade de pensar estratégias em contraposição ao “chute”, isto é, a seleção aleatória das posições das pirâmides. Vale salientar, resolver um problema pelo método tentativa-erro não significa aleatoriedade, uma vez que cabe uma nova análise a cada tentativa-erro. Assim, deseja-se que este jogo permita ao professor iniciar uma discussão sobre a postura daquele que tem à frente um problema a resolver.

Para confeccionar o produto descrito a seguir será suficiente dispor de: agulha e linha de costura, caneta, cartolina, cola de isopor, emborrachado (EVA), folha de zinco (ou outro material ferromagnético), imãs, régua, e tesoura. Faz-se necessário decidir o comprimento da aresta do cubo a ser formado, aqui denominado de $|AB|$ cm. Assim, seguem os passos para construção da planificação manipulável.

a. Recorte seis quadrados em emborrachado e seis quadrados em cartolina, todos com lado medindo $|AB|$ cm;
b. Recorte o zinco (ou latão) em seis quadrados de lado medindo ($|AB| - 2$) cm;
c. Disponha os quadrados de borracha conforme a planificação escolhida;
d. Costure para unir os quadrados adjacentes de modo a permitir que um gire sobre o outro pelo menos 90º;

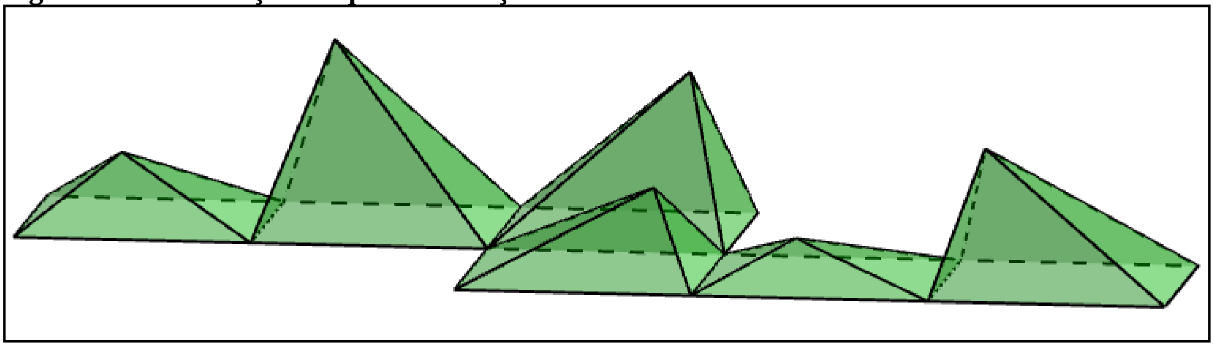
e. Cole as peças na sequencia emborrachado, zinco e cartolina, de modo que em cada quadrado da decomposição, o zinco esteja centralizado em relação aos quadrados de emborrachado;
f. Fazer pressão sobre as peças por alguns instantes.

Após a cola secar, espera-se ter construído a base do quebra-cabeça. A folha de zinco pode ser substituída pelo metal das latas de leite em pó, por exemplo, ou outros provenientes de materiais recicláveis. Para lidar com esses materiais pode ser necessário o uso de ferramentas como alicate, serra ou estilete. Na verdade, outras instruções de confecção são possíveis, como o uso de velcro que encerra a necessidade do imã e do metal ou mecanismos de encaixe. Afinal, a ideia desse produto educacional pode ser concretizada por mais de uma forma.

Mas, para finalizar a construção desse quebra-cabeça em 3D, ainda resta construir as pirâmides e colar um imã na base de cada uma. Caso haja objetivo específico de reciclar, é possível encontrar imãs presos a vários objetos em ferros-velhos, como alto-falantes e no interior da borracha das portas de geladeiras e freezers, contudo, também podem ser comprados em papelarias. O próximo capítulo trata da construção das pirâmides com régua e compasso, enquanto que no DVD que acompanha este trabalho, constam fotos de etapas da construção de um protótipo desse produto educacional.

Uma solução para compor o cubo segundo o protótipo construído está representada na Figura 9, nessa decomposição foi escolhido λ = 10% de |AB| e o ponto $V = \lambda(1, 2, 3)$ como vértice determinante da decomposição. Por outro lado, tem-se que b = 50% de |AB| e k = 5, daí #S = 35, isto é, mantendo a escolha de λ poderiam ser construídos um total 35 conjuntos distintos de peças para esse quebra-cabeça[18].

Figura 9 - Uma solução do quebra-cabeça em 3D



Fonte: Autor, 2015.

[18] Conforme os resultados (1) e (2) (p. 20), dadas seis pirâmides que compõem uma solução, essas podem ser arranjadas de 24 maneiras distintas sobre a planificação do cubo, selecionando pontos simétricos ao ponto V no interior do cubo. Considerando também o resultado (3) (p. 21), os outros 24 pontos simétricos ao ponto V são selecionados a partir de um conjunto de seis pirâmides equivalentes às primeiras em volume e em planificação. Ver Apêndice J.

3 PLANIFICAÇÕES DE PIRÂMIDES COM RÉGUA E COMPASSO

As construções com os instrumentos Euclidianos, régua e compasso, possibilitam o estudo de diversas noções de Geometria. Por exemplo, tem-se na construção seguinte técnicas de desenho geométrico importantes ao desenvolvimento deste trabalho, pois abordam conceitos presentes no currículo de Matemática da Educação Básica, trata-se da construção do quadrado, base da pirâmide em estudo, portanto de noções de perpendicularidade, paralelismo e congruência.

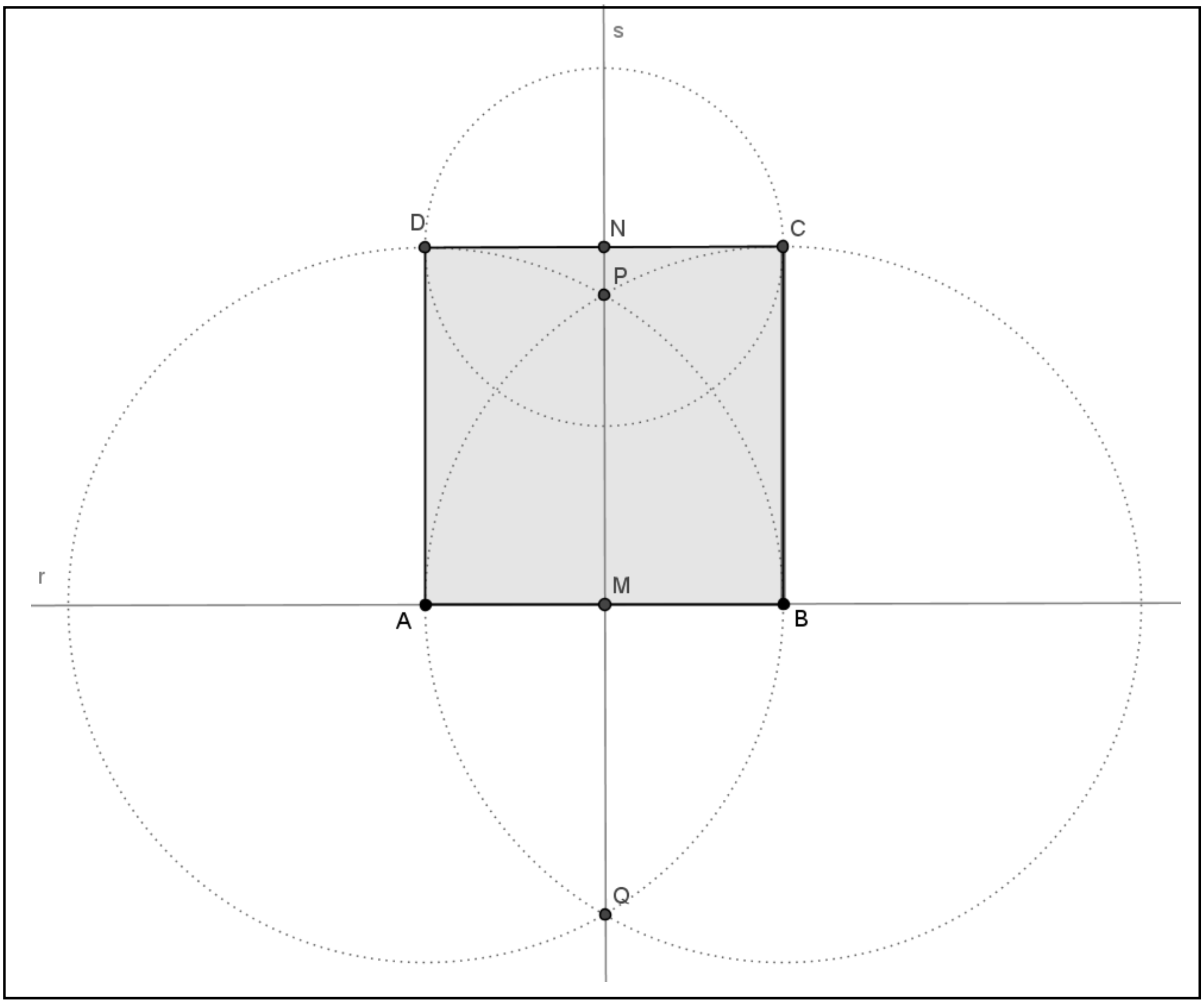
Recomenda-se a leitura de Lima et.al (2005) e Muniz Neto (2012), obras que embasaram os resultados apresentados neste capítulo.

3.1 Construção do quadrado pela mediatriz de um de seus lados

- Trace uma reta r e sobre ela marque os pontos A e B;
- Tome a abertura |AB| e com a ponta seca em A trace uma circunferência;
- Conservando a abertura do compasso e com a ponta seca em B, repita o passo anterior;
- Marque os pontos P e Q, interseções das circunferências;
- Trace a reta s que passa por P e Q, chamada mediatriz do segmento AB;
- Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes a dois pontos fixos, nessa construção verifica-se essa propriedade, em relação aos postos fixos A e B, para todo ponto de s, em particular para o ponto M, interseção entre r e s, portanto ponto médio do segmento AB.
- Marque o ponto M, interseção entre as retas r e s, ponto médio do segmento AB;
- Tome a abertura |AB| e com a ponta seca M marque o ponto N sobre s;
- Tome a abertura |AM| e com ponta seca em N trace uma circunferência;
- Marque os pontos C e D, interseções entre essa circunferência e as duas primeiras;
- Trace o quadrilátero ABCD, conforme Figura 10 (p. 36);
- ABCD é um quadrado. Por construção, |AB| = |BC| = |AD|, mas |CD| = 2|AM| = |AB|, portanto ABCD é um losango. Por outro lado, como |BM| = |CN| tem-se que, BC é paralelo à MN, e como |AM| = |DN| implica que AD é paralelo à MN, mas MN é a mediatriz de AB, então MN é perpendicular à r, daí ABCD também é um retângulo. ■

Se a mediatriz s não é perpendicular à r, então existe um ponto P' não pertencente à s tal que MP' é perpendicular à r, daí MP' é a altura do triângulo ABP' relativa à base AB, mas M é o ponto médio de AB, ou seja, |AM|=|MB|, daí os triângulos AMP' e BMP' são congruentes pelo caso LAL e |AP'| = |BP'|, portanto P' pertence à s, absurdo.

Figura 10 - Quadrado a partir de uma mediatriz.



Fonte: Autor, 2015.

Utilizando a construção do quadrado, pode-se chegar a um resultado matemático famoso e muito importante, que será também de muita utilidade neste trabalho.

3.2 Uma prova do Teorema de Pitágoras com régua e compasso

A seguinte demonstração do Teorema de Pitágoras é uma adaptação daquela devida ao matemático Bháskara, conforme Eves (2004).

Trace um segmento AB e sua mediatriz;

Marque Q o ponto médio de AB;

Tome a abertura $|AQ|$. Com ponta seca em Q trace o arco AB;

Marque o ponto P sobre o arco AB e trace os segmentos AP e BP;

Denota-se M(V)N como o menor ângulo definido pelas semirretas VM e VN.

O triângulo ABP é retângulo em P. Note que os triângulos AQP e BQP são isósceles, pois $|AQ| = |QB| = |QP|$, daí os ângulos A(P)Q e P(A)Q são congruentes, assim como os ângulos B(P)Q e P(B)Q. Como $|A(P)B| = |A(P)Q| + |B(P)Q|$, sendo 180º a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, tem-se que

$$\begin{aligned}
180^{\circ} &= |A(P)B| + |P(B)A| + |P(A)B| \\
&= |A(P)Q| + |B(P)Q| + |P(B)Q| + |P(A)Q| \\
&= |A(P)Q| + |P(A)Q| + |B(P)Q| + |P(B)Q| \\
&= 2|A(P)Q| + 2|B(P)Q| \\
&= 2|A(P)B| \therefore |A(P)B| = 90^{\circ} \blacksquare
\end{aligned}$$

Desenhe o quadrado ABCD de forma que P seja ponto de seu interior;

Tome abertura $|AP|$ e com ponta seca em B, marque o ponto M sobre BP;

Trace o segmento MC;

Os triângulos APB e BMC são congruentes pelo caso LAL. Pois, por construção, temos que $|AB| = |BC|$, $|AP| = |BM|$ e sabe-se que P(B)A e B(P)Q são congruentes, daí

$$|P(B)A| + |C(B)M| = |A(P)Q| + |B(P)Q| \therefore |C(B)M| = |P(A)B| \blacksquare$$

Tome abertura $|AP|$ e ponta seca em C marque o ponto N sobre MC;

Trace o segmento ND;

Tome abertura $|AP|$ e ponta seca em D, marque o ponto O sobre ND. Então obtenha a Figura 11 (p. 38).

Note que P pertence ao segmento AO. Pois por LAL, os triângulos APB, BMC, CND e DOA são congruentes, daí os ângulos D(A)O e P(A)B são complementares.

Como todos os triângulos citados acima são retângulos, MNOP é um quadrado de lado medindo $|BP| – |AP|$. Com isso, deseja-se demonstrar o Teorema de Pitágoras. De fato, ao observar as áreas dessas figuras, bem como quadrado de lado AB, tem-se que

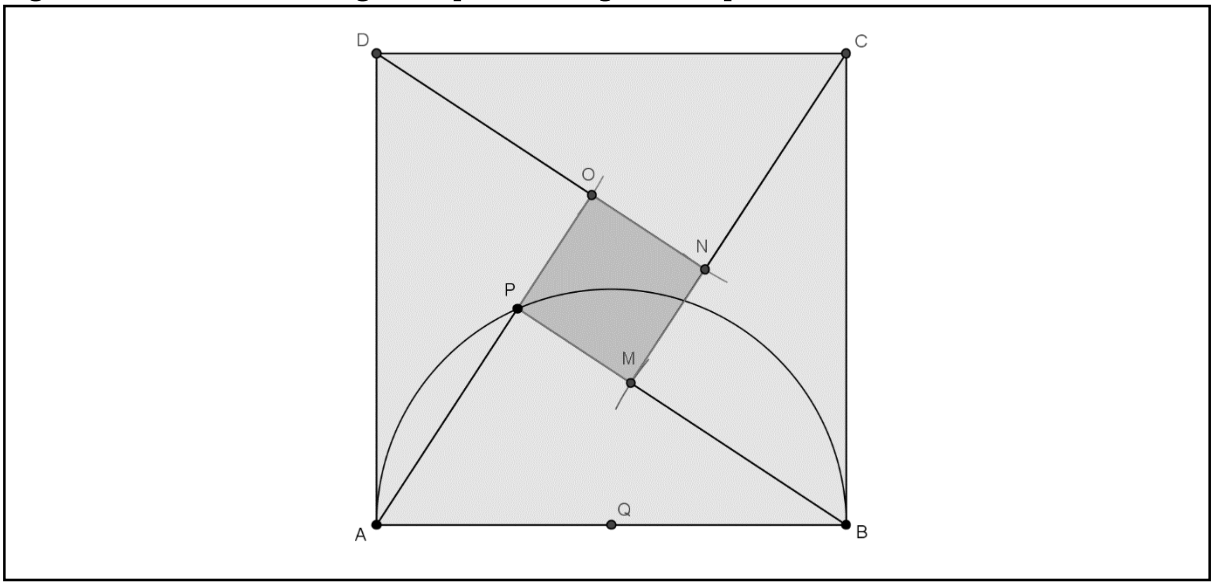
$$\begin{aligned}
|AB|^2 &= (|BP| - |AP|)^2 + 4\,(|BP|\cdot|AP|/2) \\
&= |BP|^2 - 2\,|BP|\cdot|AP| + |AP|^2 + 2\,|BP|\cdot|AP| \\
&= |BP|^2 + |AP|^2 + 2\,|BP|\cdot|AP| - 2\,|BP|\cdot|AP|
\end{aligned}$$

Portanto, se ABP é um triângulo retângulo cujo maior lado é AB, então

$$|AB|^2 = |BP|^2 + |AP|^2 \blacksquare$$

Note ainda que este resultado foi devido ao fato de MNOP ser um quadrado e isso ocorre se, e somente se, ABP é retângulo, ou seja, vale a recíproca do teorema.

Figura 11 - Teorema de Pitágoras a partir de régua e compasso



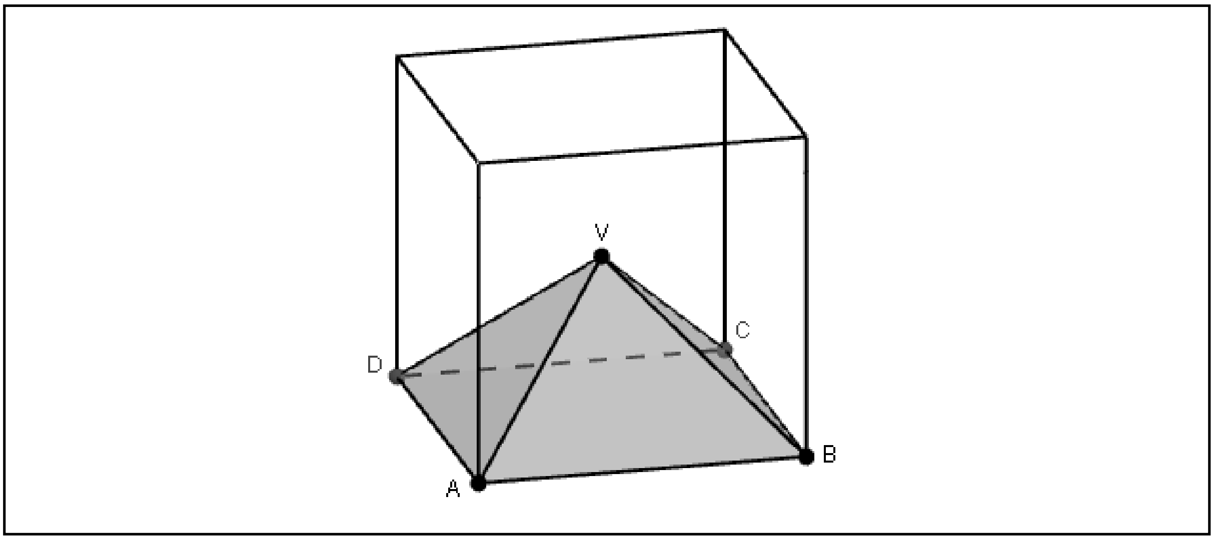
Fonte: Autor, 2015.

3.3 Construindo a planificação das pirâmides ABCD-V

A partir das técnicas de desenho geométrico apresentadas, bem como dos resultados obtidos, surge o objetivo principal deste capítulo, apresentar uma construção com régua e compasso que resulte na planificação de uma pirâmide cuja base é a face do cubo que a contém. Com isso, espera-se não apenas completar a construção do quebra-cabeça em 3D descrito no capítulo anterior, mas principalmente complementar a análise do problema da decomposição do cubo em seis pirâmides, de modo a relacionar outros conteúdos de Matemática Elementar.

A princípio será construída a planificação da pirâmide cujo vértice oposto à sua base se localiza no centro do cubo, ou seja, aquela da decomposição totalmente congruente, conforme Figura 12 (p. 39). Vale salientar que essa e outras construções estão disponíveis em arquivos de geometria dinâmica no Apêndice J.

Figura 12 - Pirâmide regular de altura b, ABCD-V

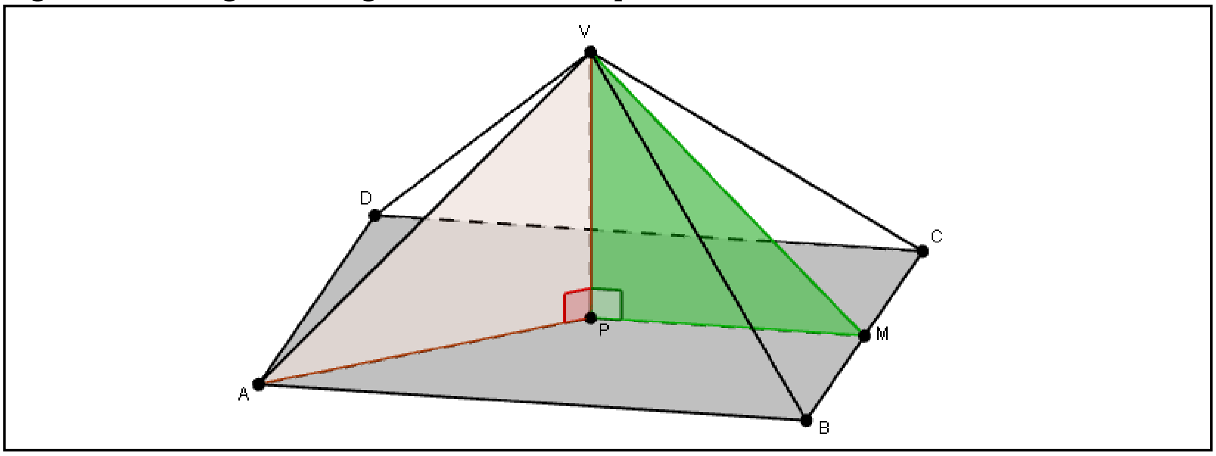


Fonte: Autor, 2015.

3.3.1 Um Caso Particular: V = (0, 0, 0)

Considerando as simetrias do problema, no qual o ponto V coincide com O, origem do sistema de coordenadas conforme Figura 2 (p. 18), tem-se quatro triângulos isósceles congruentes e um quadrado na superfície da pirâmide ABCD-V, ainda, se |AB|/2 = b e P é a projeção de V em ABCD, então a altura de ABCD-V é |VP| = b e P é a interseção das diagonais do quadrado ABCD, pois |AV| = |CV| = |BV| = |DV|, ou seja, a reta que passa por V e P é a mediatriz dos segmentos AC e BD. Assim P é ponto médio de AC e aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo ABC e ao triângulo APV tem-se que $|AP| = b\sqrt{2}$ e $|AV| = b\sqrt{3}$. Por outro lado, sendo M o ponto médio de BC, tem-se que $|PM| = b = |VP|$ e $|VM| = b\sqrt{2} = |AP|$.

Figura 13 - Triângulos retângulos no interior da pirâmide



Fonte: Autor, 2015.

No caso desta pirâmide regular é interessante perceber que a área de sua superfície total é exatamente oito vezes a soma das áreas dos triângulos VPA e VPM, pois o quadrado ABCD pode ser decomposto em oito triângulos congruentes ao VPM, enquanto que cada face triangular desta pirâmide pode ser decomposta em dois triângulos congruentes ao triângulo VPA. Os triângulos VPA e VPM também guardam relação com a região de pontos assimétricos do cubo, como será visto na seção 3.4.

Assim, sabendo das medidas da pirâmide ABCD-V em função de |AB|, bem como dos polígonos que compõem sua superfície, segue uma maneira de planificar ABCD-V.

Construa o quadrado ABCD;

Trace a mediatriz r de AB;

Trace a mediatriz s de BC;

Marque P o ponto de interseção entre r e s;

Marque M o ponto de interseção entre r e AB;

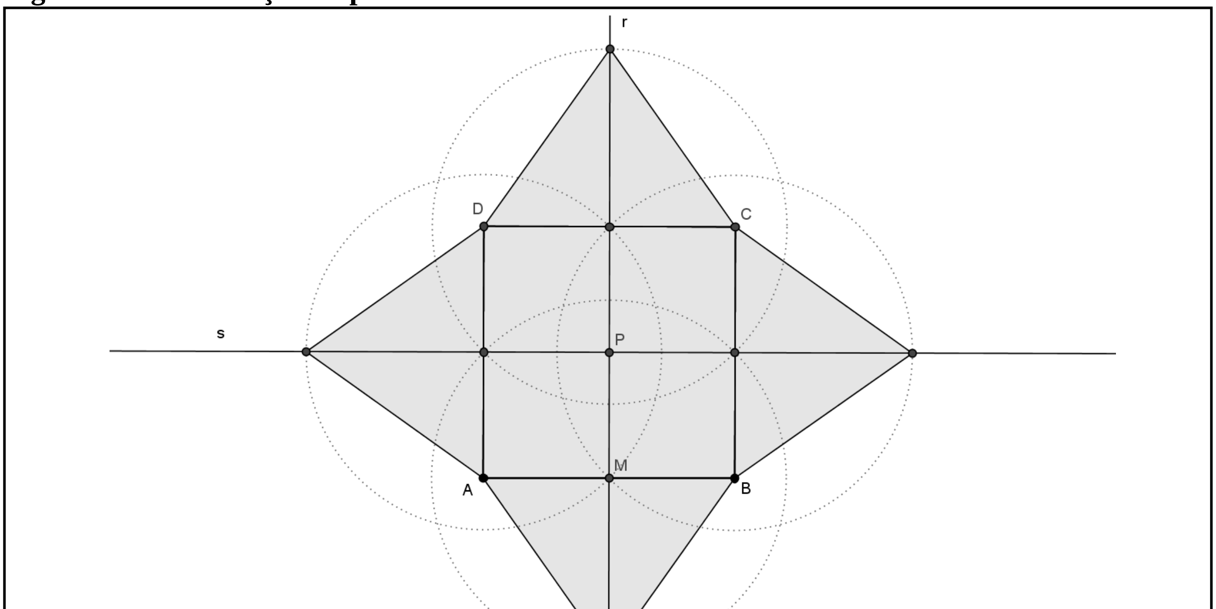
Tome a abertura |AP| e ponta seca em M, marque o ponto V sobre r.

Trace os segmentos AV e BV;

Repita os passos anteriores sobre os lados BC, CD e AD para obter a Figura 14.

Uma alternativa ao passo anterior é tomar o compasso com abertura |BV|, ponta seca em B e marcar V' sobre s e proceder conforme caso geral na seção 3.3.2.

Figura 14 - Planificação da pirâmide ABCD-O



Fonte: Autor, 2015.

Observe que seis pirâmides construídas a partir dessa planificação, compõem a solução trivial do quebra-cabeça descrito no capítulo anterior. Mas, para outros fins didáticos, após compor concretamente o cubo (com papel, tesoura e cola) a partir de tais pirâmides, não será possível visualizar a composição do cubo, passando a ser conveniente poder enxergar através das bases das pirâmides. No entanto, simplesmente excluir o quadrado da Figura 14 (p. 40) perde-se a planificação, conforme a definição enunciada na página 32, pois os triângulos passariam a se ligar apenas pelos vértices e não pelos lados. Assim, segue uma construção para a planificação de ABCD-V sem incluir, incialmente, a construção do quadrado.

Trace a o segmento A'B' de mesmo comprimento de AB.

Trace a mediatriz r em relação ao segmento A'B';

Marque M o ponto de interseção entre r e A'B';

Tome a abertura |A'M|, ponta seca em M marque o ponto N sobre r;

Trace a reta s pelos pontos A' e N;

Trace a reta t que passa por N e por B';

Tome a abertura |A'M|, com a ponta seca em N marque V' sobre t;

A reta t é perpendicular à s, pois |A'N| = |B'N| daí os ângulos N(A')M e N(B')M são congruentes, além disso medem 45º, pois A'N é diagonal de um quadrado já que |A'N| = |MN|. Como o ângulo V'(N)A' é externo ao triângulo NA'B', esse mede |N(A')M| + |N(B')M| = 90º ■

Tome a abertura |A'V'| e trace a circunferência L com a ponta seca em V, outro ponto do plano;

Marque o ponto A sobre L;

Tome a abertura |A'B'| e com a ponta seca em A, marque o ponto B sobre L;

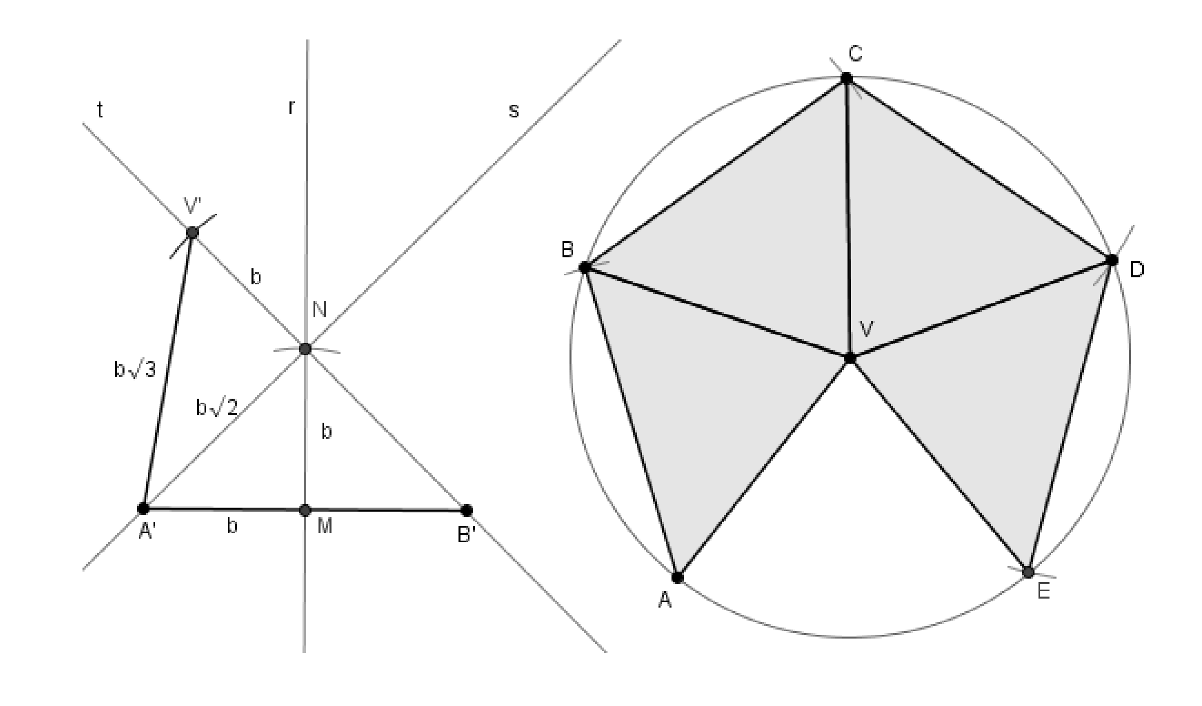
Com a mesma abertura e com ponta seca em B, marque o ponto C sobre L;

Com a mesma abertura e com ponta seca em C, marque o ponto D sobre L;

Com a mesma abertura e com ponta seca em D, marque o ponto E sobre L;

Trace os segmentos triângulos VAB, VBC, VCD e VDE e obtenha a Figura 15 (p. 42).

Figura 15 - Outra planificação da pirâmide ABCD-O



Fonte: Autor, 2015.

Após essa construção, basta realizar dobraduras sobre os lados VA, VB, VC, VD e fazer coincidir os pontos A e E, para obter a pirâmide ABCD-V exibindo apenas sua superfície lateral. É suficiente refazer os últimos sete passos dessa construção para obter outra. Note ainda que, a partir da construção dos segmentos com as medidas necessárias à planificação, obtêm-se os triângulos A’VN e ANM que são respectivamente congruentes aos triângulos VPA e VPM da Figura 13 (p. 39). Outra forma de obter triângulos congruentes aos VPA e VPM e consequentemente as medidas para a planificação de ABCD-V, sendo V = O, é por meio de dobraduras como será visto na seção 3.4, no entanto, tais medidas também podem ser encontradas na planificação anterior (Figura 14, p. 40), nesse sentido, a construção de uma planificação implica na obtenção das dimensões da outra planificação (equivalente).

3.3.2 O Caso Geral: V = (x, y, z)

Tendo desenvolvido uma técnica para um caso particular, pretende-se agora construir uma planificação de uma pirâmide ABCD-V cuja base é a face do cubo que a contém, sendo V qualquer ponto do interior desse cubo. Ao fixar V, tem-se P, a projeção ortogonal de V em ABCD, e |VP| a altura da pirâmide. Vale ressaltar que as coordenadas do ponto P ficam determinadas pelas do ponto V conforme Quadro 2 (p. 30), daí segue a construção da planificação pretendida, ilustrada na Figura 16 (p. 44).

Desenhe o quadrado ABCD e marque P em seu interior;

Trace r, a reta paralela à AB que passa do P e marque o ponto R, a interseção entre r e BC;

Trace a reta s, perpendicular à r que passa por P;

Tome abertura $|VP|$, ponta seca em P, marque o ponto S sobre a reta s;

Tome abertura $|RS|$, ponta seca em R, marque o ponto V_1 sobre r de modo que R esteja entre P e V_1;

De fato, o triângulo PRS é retângulo e $|PS| = |VP|$ é a altura da pirâmide, assim pelo Teorema de Pitágoras uma face da pirâmide terá altura medindo $|RS|$, daí, novamente pelo Teorema de Pitágoras, uma aresta da pirâmide será BV_1;

Trace os segmentos BV_1 e CV_1;

Tome abertura $|CV_1|$ ponta seca em C, marque o ponto V_2 em s;

Trace os segmentos CV_2 e DV_2;

Tome abertura $|DV_2|$ ponta seca em D, marque o ponto V_3 em r;

Trace os segmentos DV_3 e AV_3;

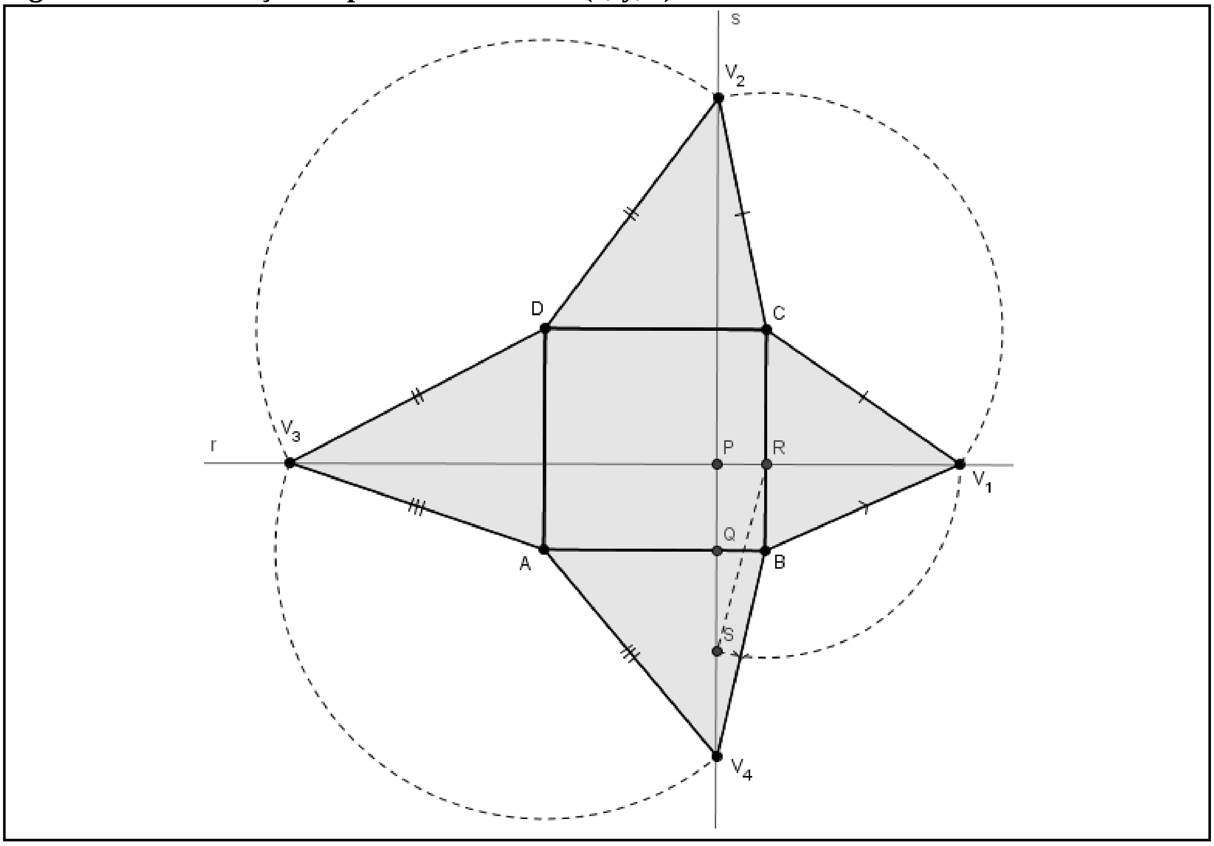
Tome abertura $|AV_3|$ ponta seca em A, marque o ponto V_4 em s;

Trace os segmentos AV_4 e BV_4, finalizando a planificação.

Note que, por construção, $|CV_1| = |CV_2|$, $|DV_2| = |DV_3|$, $|AV_3| = |AV_4|$, resta mostrar que $|BV_4| = |BV_1|$. Seja Q a interseção entre s e o segmento AB, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned}
|BV_4|^2 &= |PQ|^2 + |VP|^2 + |QB|^2 \\
&= |RB|^2 + |VP|^2 + |QB|^2 \\
&= |RV_1|^2 + |RB|^2 \\
&= |BV_1|^2 \quad \therefore \quad |BV_4| = |BV_1| \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Figura 16 - Planificação da pirâmide ABCD-V(x, y, z)



Fonte: Autor, 2015.

Dessa forma, fazendo coincidir os pontos V_1, V_2, V_3 e V_4, recupera-se a pirâmide ABCD-V. Note que, para construir essa planificação é suficiente conhecer as medidas $|AV_4|$, $|BV_1|$, $|CV_2|$ e $|DV_3|$ (medida das arestas da pirâmide), e que a partir dessas, outra planificação equivalente. Mas, desconsiderando a construção anterior, segue outra forma de encontrar essas medidas, bem como de obter a planificação alusiva à Figura 15 (p. 42) para o caso geral.

- Trace o quadrado A'B'C'D', congruente ao ABCD, e P em seu interior, projeção de V;
- Tome a abertura |VP|, ponta seca em A' marque o ponto H_A sobre o segmento A'B';
- Tome a abertura |VP|, ponta seca em B' marque o ponto H_B sobre o segmento A'B';
- Com mesma abertura, ponta seca em C' marque o ponto H_C sobre o segmento C'D';
- Com abertura |VP|, ponta seca em D' marque o ponto H_D sobre o segmento C'D';
- Trace as retas r e s, que passam por A'D' e B'C' respectivamente;
- Tome a abertura |A'P|, ponta seca em A' marque o ponto P_A sobre r;
- Tome a abertura |B'P|, ponta seca em B' marque o ponto P_B sobre s;
- Tome a abertura |C'P|, ponta seca em C' marque o ponto P_C sobre s;
- Tome a abertura |D'P|, ponta seca em D' marque o ponto P_D sobre r;
- Marque V, um ponto qualquer do plano;

Tome a abertura $|P_AH_A|$, ponta seca em V, trace a circunferência S_1;

Tome a abertura $|P_BH_B|$, ponta seca em V, trace a circunferência S_2;

Tome a abertura $|P_CH_C|$, ponta seca em V, trace a circunferência S_3;

Tome a abertura $|P_DH_D|$, ponta seca em V, trace a circunferência S_4;

Marque A, um ponto de S_1;

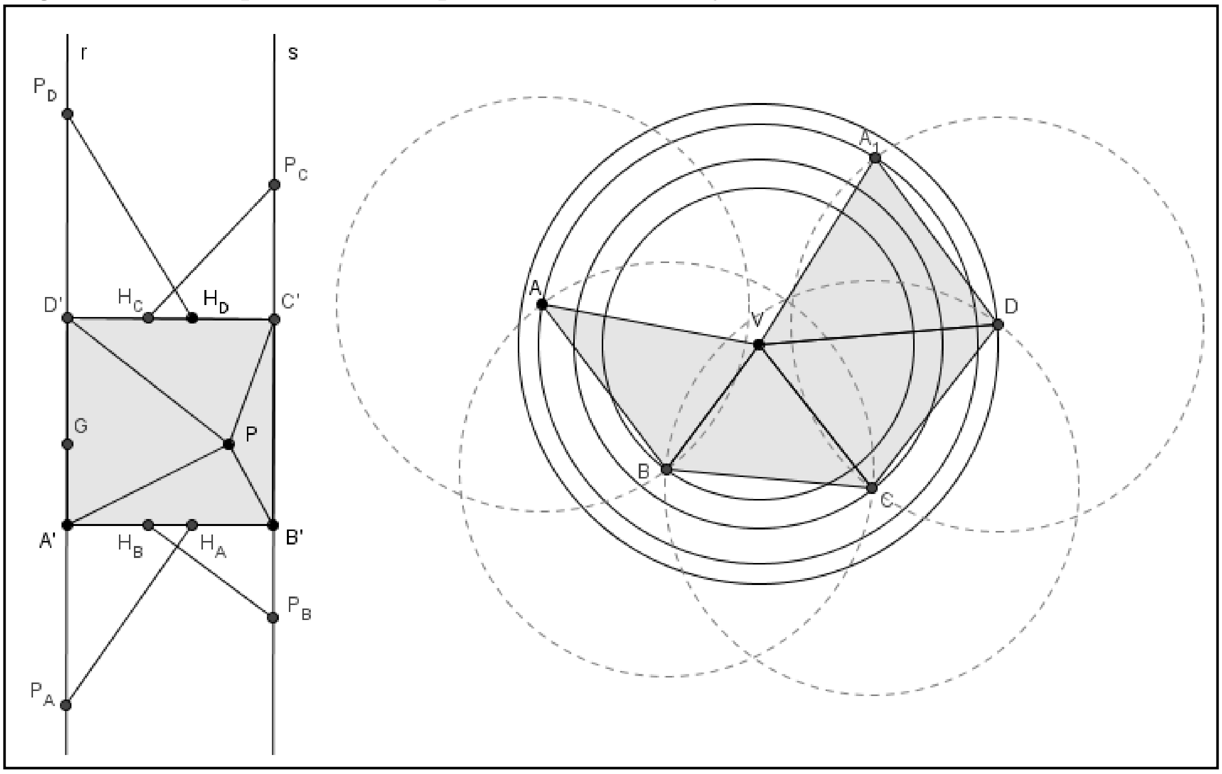
Tome a abertura |A'B'|, ponta seca em A, marque ponto B de S_2;

Tome a abertura |A'B'|, ponta seca em B, marque ponto C de S_3;

Tome a abertura |A'B'|, ponta seca em C, marque ponto D de S_4;

Tome a abertura |A'B'|, ponta seca em D, marque ponto A_1 de S_1, obtenha a Figura 17.

Figura 17 - Outra planificação da pirâmide ABCD-V(x, y, z)



Fonte: Autor, 2015.

Note que o quadrado A'B'C'D' à esquerda na Figura 17 representa a vista de cima da pirâmide a ser obtida a partir das dobraduras sobre os lados dos triângulos da ABV, BCV, CDV e DA_1V, de modo que os pontos A e A_1 se coincidam. Com isso, para obtém-se a planificação de uma pirâmide cuja base é a face do cubo que a contém, assim atingindo o objetivo deste capítulo.

Convém notar que, ao considerar a planificação da Figura 16 (p. 44), a última planificação pode ser resumida aos seus últimos dez passos, pois as medidas $|P_AH_A|$, $|P_BH_B|$,

$|P_CH_C|$ e $|P_DH_D|$ são iguais as medidas $|AV_4|$, $|BV_1|$, $|CV_2|$ e $|DV_3|$, respectivamente, assim basta utilizá-las como medida dos raios das circunferências concêntricas S_1, S_2, S_3 e S_4 (à direita na Figura 17, p. 45).

Para a construção das outras cinco pirâmides que completam a composição do cubo, basta repetir os passos desta construção considerando a projeção do vértice na base e a altura de cada uma delas, conforme dados do Quadro 2 (p. 20).

3.4 Determinando comprimentos a partir de dobraduras

O processo de dobraduras já vem sendo usado neste capítulo a fim de levar uma planificação no sólido correspondente. Como visto anteriormente, para construção com régua e compasso das planificações da pirâmide ABCD–O, foi necessário obter as medidas b, $b\sqrt{2}$ e $b\sqrt{3}$, onde b corresponde à metade de $|AB|$. Nesta seção, apresenta-se uma alternativa para a obtenção desses comprimentos utilizando apenas dobraduras sobre um papel sem forma inicial definida. Também será visto que essas medidas definem a planificação de outra pirâmide já mencionada neste trabalho.

As instruções para as dobraduras que determinam aquelas medidas estão na Tabela 5, bem como a respectiva notação matemática correspondente a cada instrução, que é ilustrada na Figura 18 (p. 47) para uma melhor compreensão do passo a passo.

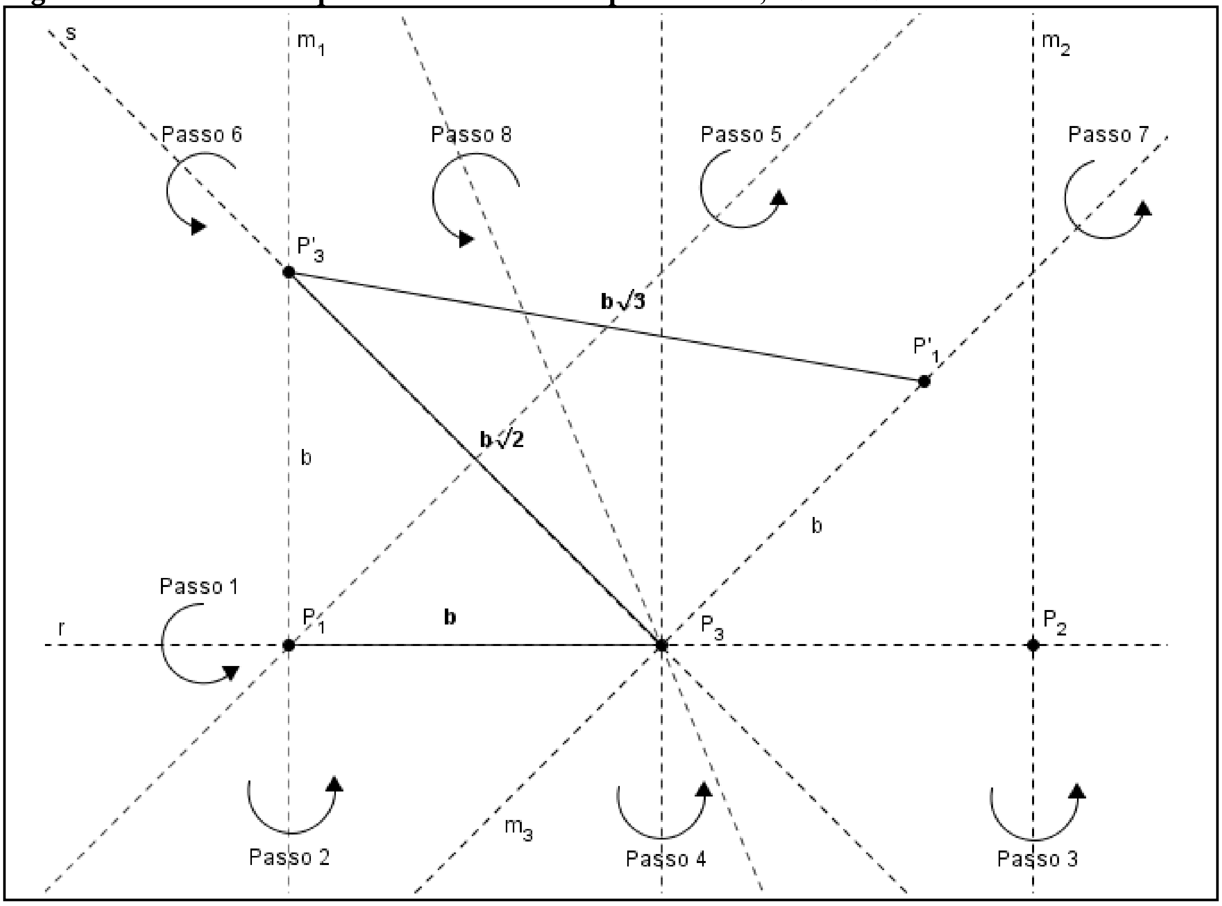
Tabela 5 - Dobraduras para construção das medidas das b, $b\sqrt{2}$ e $b\sqrt{3}$

Passo	Instrução	Notação
1	Dobre o papel para marcar uma reta (r).	r, uma reta
2	Marque dois pontos de r e dobre o papel de modo que esses dois pontos se coincidam, na dobra marque a mediatriz (m_1) desses dois pontos.	$m_1 \perp r$ $P_1 \in m_1 \cap r$
3	Novamente, dobre de modo a coincidir outros dois pontos de r e marque uma nova mediatriz (m_2). Seja “2b” a distância entre os pontos de interseção (P_1 e P_2) das mediatrizes (m_1 e m_2) com a reta r.	$m_2 \perp r$ $P_2 \in m_2 \cap r$; $\lvert P_1P_2\rvert = 2b$
4	Dobre o papel de forma que os pontos (P_1 e P_2) se coincidam, marque o ponto de interseção (P_3) entre essa nova mediatriz (m_3) e a primeira reta (r), a distância desse ponto às outras interseções (P_1 e P_2) será **b**.	$P_3 \in m_3 \cap r$ $\lvert P_1P_3\rvert = \lvert P_3P_2\rvert = \mathbf{b}$

5	Dobre através do ponto P_1 de tal forma que o ponto P_3 recaia sobre a primeira mediatriz m_1, marcando sobre essa o ponto projeção P_3'. assim transportando a medida b.	$P_3' \in m_1$ $\lvert P_1P_3'\rvert = b$
6	Dobre o papel de forma a marcar uma reta (s) pelos pontos P_3 e P_3', a distância entre eles será $\mathbf{b\sqrt{2}}$.	$\therefore \lvert P_3P_3'\rvert = \mathbf{b\sqrt{2}}$
7	Dobre o papel através de P_3 de modo que dois pontos distintos dessa última reta (s) se coincidam, marcando uma reta perpendicular m_3.	$P_3, P_3' \in s$ $m_3 \perp s; P_3 \in m_3$
8	Dobre o papel através de P_3 de tal forma que o ponto P_1 recaia sobre a reta m_3, marcando sobre essa o ponto projeção P_1', então, transportando a medida b, a distância entre os pontos de projeção P_1' e P_3' será $\mathbf{b\sqrt{3}}$.	$P_1' \in m_3$ $\lvert P_3P_1'\rvert = b$ $\therefore \lvert P_1'P_3'\rvert = \mathbf{b\sqrt{3}}$

Fonte: Autor, 2015.

Figura 18 - Dobraduras que determinam os comprimentos b, b√2 e b√3.

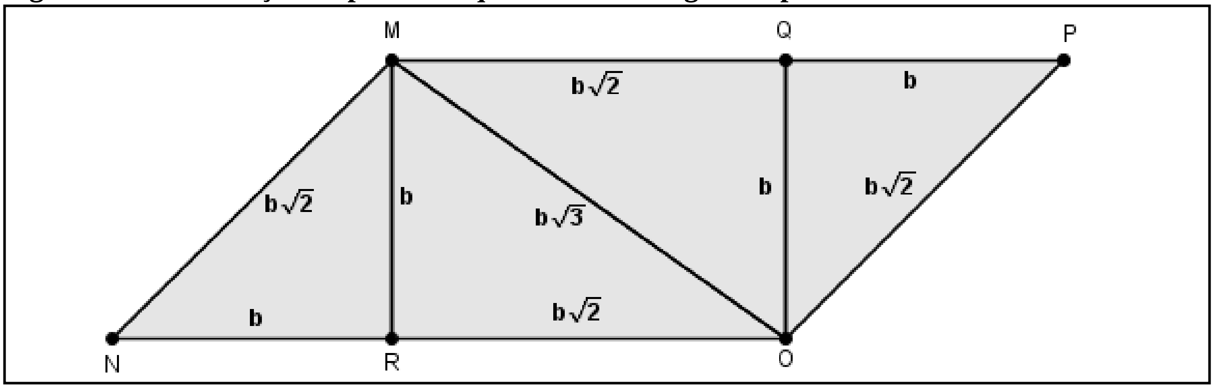


Fonte: Autor, 2015.

Note que esses resultados são consequência do teorema de Pitágoras, e que construção equivalente com régua e compasso possibilita a localização na reta real da raiz quadrada de qualquer número natural. Assim prosseguindo esta construção e considerando b = 1, define-se seguimentos de comprimento 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$,... Assim, uma vez em sala de aula, tais construções também sugerem considerações sobre números irracionais.

Convém observar que a construção da pirâmide da decomposição totalmente congruente (ABCD-O) pode ser a partir da medida $b\sqrt{2}$ ou a partir da medida $b\sqrt{3}$. Além disso, esses números irracionais também definem a planificação da pirâmide correspondente à região de pontos assimétricos do cubo (ver p. 23) que consiste no paralelogramo MNOP representado na figura abaixo.

Figura 19 - Planificação da pirâmide que determina região de pontos assimétricos no cubo



Fonte: Autor, 2015.

Logo, para obter a pirâmide de base triangular (tetraedro não regular) que determina a região em destaque na Figura 4 (p. 22), é suficiente realizar dobraduras sobre os lados dos triângulos que compõem MNOP fazendo M = (b, b, b), N = Q = (0, 0, b), O = (0, 0, 0) e P = R = (0, b, b). Observe que o paralelogramo MNOP é composto exatamente por dois pares de triângulos congruentes aos VPA e VPM da Figura 13 (p. 39), portanto, a área da superfície da pirâmide ABCD-O é exatamente quatro vezes a área total da superfície do tetraedro MNOP.

4 UMA INTERVENÇÃO NO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

A partir do processo de estudo registrado nos capítulos anteriores, elaborou-se atividades para serem desenvolvidas em aulas de Matemática na Educação Básica. É importante ressaltar que o texto seguinte não se trata de um produto acabado e inflexível, pois se adotou o objetivo específico de construir aulas de Matemática em favor de uma construção não linear do currículo, privilegiando as melhores situações de aprendizagem percebidas durante as aulas. Ou seja, o professor leitor que desejar aplicar a sequência didática ora proposta deverá ter em mente que a ordem das atividades, bem como o nível de aprofundamento dos conteúdos são variáveis que podem ser ajustadas a diversas turmas e séries.

Entretanto, considerando os conceitos matemáticos tratados no capítulo anterior, bem como a motivação de construir um cubo a partir de seis pirâmides, este capítulo apresenta uma proposta de sequência didática para o nono ano do ensino fundamental. É importante ressaltar que “o desempenho dos alunos do 9.º ano do ensino fundamental das escolas públicas do País piorou em matemática”, segundo notícia veiculada no jornal O Estado de São Paulo[19], que considerando o IDEB 2013, conclui que, “pelos dados, apenas 25% dos alunos teriam os conhecimentos adequados na matéria.”.

4.1 Uma sequência didática

Contemplando alguns dos principais elementos da Geometria Euclidiana, com ênfase no Teorema de Pitágoras e de Tales, a proposta seguinte foi aplicada em escola da rede pública municipal de Messias[20], cidade com pouco mais de 15,6 mil habitantes, a vinte minutos de Maceió. Assim, a sequência didática seguinte aborda conteúdos, em tese, conhecidos pelos alunos egressos do nono ano do ensino fundamental e exigidos no currículo do ensino médio.

Materiais: para desenvolver a proposta, recomenda-se ao docente a construção de seis pirâmides congruentes de lado AB medindo 10 cm conforme planificação da Figura 15 (p. 42),

---

[19] SAUDAÑA, P. **Alunos do 9º ano pioram em matemática**. In: Estadão Educação. Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,alunos-do-9-ano-pioram-em-matematica,1599632> Acesso em: 29/11/2014.

[20] A nota IDEB 2013 na rede pública municipal de Messias nos anos finais do Ensino Fundamental foi 3,4, cinco décimos abaixo da meta. Enquanto a média em Alagoas para essa mesma rede e nível foi 3,8, um décimo abaixo da meta.

então compor um cubo, doravante denominado cubo 1, e construir ainda a pirâmide da Figura 13 (p. 39), mas com lado da base medindo 15 cm, que será denominada pirâmide 1.

Motivação: montar um cubo a partir de seis pirâmides congruentes.

Objetivo: aprender a construir uma pirâmide regular de base quadrada e altura medindo a metade da medida do lado da base, nos termos deste trabalho, a pirâmide da decomposição totalmente congruente, isto é, semelhante a qualquer uma que resulta da decomposição do cubo a partir de seu centro. E nessa construção, estudar os Teoremas de Pitágoras e de Tales.

Avaliação: O primeiro passo da sequência consiste em uma avaliação, uma prova escrita na forma do questionário do Apêndice E, para verificar a proficiência dos alunos participantes em alguns conceitos matemáticos, bem como a visão que os discentes possuem da Matemática e o domínio de certo vocabulário. Essa atividade não possui a intervenção do docente, pois o objetivo é deixar os estudantes à vontade para responder, não havendo necessidade do aluno assinar a prova, como também de atribuir notas ou conceito. Durante as aulas, sugere-se a administração de um portfólio, ver Apêndices C e D.

Duração: a duração sugerida de toda a sequência é de catorze horas-aula. No entanto, esta é mais uma variável a ser ajustada pelo docente, que ainda poderá estender essa sequência ou mesmo construir outras a partir das sugestões apresentadas no Apêndice H.

Encadeamento das atividades:

i. Aplicar questionário 1 (Apêndice E), durante isso mostrar o cubo 1 e questionar suas características;
ii. Apresentar a pirâmide 1 (semelhante a qualquer uma daquelas pirâmides do cubo 1) e lançar o desafio: como construir uma réplica da pirâmide 1 com lado da base medindo 6cm, a partir de uma folha de papel A4? Questionar o que seria uma réplica. Valorizar os comentários e possíveis soluções dos alunos;
iii. Mostrar a seguinte propriedade: o cubo 1 e a pirâmide 1 se encaixam perfeitamente. Questionar o significado disso. Discutir a noção de objetos semelhantes. Concluir que o desafio consiste na construção de uma pirâmide semelhante às outras apresentadas;
iv. Investigar os polígonos que compõem a superfície da pirâmide 1 a fim de obter uma planificação. Discutir as propriedades da reta mediatriz;
v. Distribuir réguas e compassos e realizar a construção geométrica da seção 3.1, sendo |AB| = 6cm;

vi. Em seguida, observando os triângulos no interior da pirâmide 1, conforme Figura 13 (p. 39), encontrar relação entre o apótema da pirâmide e o lado da base, ou seja, que possuem como medidas as de lados de um triângulo retângulo;

vii. Iniciar a construção geométrica da seção 3.3.1 (Figura 14, p. 40) até a construção da segunda mediatriz. Solicitar que os alunos localizem na figura um triângulo semelhante ao observado no passo anterior e daí continuar a construção;

viii. Concluir o desenho, incluir abas na figura e realizar a colagem para construção das pirâmides;

ix. Verificar que seis delas compõem um cubo e perceber que após a colagem, mas que não é possível observar o interior do cubo. Solicitar que os alunos indiquem uma outra forma de executar a tarefa, de modo que seja possível enxergar as pirâmides, como no cubo 1;

x. Após verificar as soluções apontadas pelos alunos, solicitar que estes repensem o problema, agora considerando a possibilidade de utilizar as medidas do outro triângulo do interior da pirâmide 1;

xi. Propor o desafio de desenhar um triângulo retângulo semelhante àquele do passo anterior e utilizar a recíproca do Teorema de Pitágoras para avaliar o êxito no desafio;

xii. Utilizar o teorema de Pitágoras para deduzir algebricamente as dimensões dos triângulos do interior da pirâmide 1;

xiii. Dividir a turma em dois grupos, um responsável por construir pirâmides semelhantes à pirâmide 1, com lado da base medindo 5 cm, outro com lado da base medindo 7 cm;

xiv. Utilizando a calculadora para encontrar uma aproximação para o número $2{,}5\sqrt{3}$ e $3{,}5\sqrt{3}$, solicitar que tracem segmentos de reta com essa medida. Discutir a definição de número irracional e a sempre possível aproximação por um racional;

xv. Discutir outra maneira de construir os segmentos com essas medidas sem usar a calculadora;

xvi. Iniciar construção da seção 3.3.1 (Figura 15, p. 42). Montar as pirâmides;

xvii. Verificar que tais pirâmides, assim como a pirâmide 1, se encaixam e que quando isso acontece suas bases ficam paralelas;

xviii. Com as pirâmides encaixadas uma na outra, selecionar uma face e reproduzi-las na lousa, escrever suas medidas;

xix. Solicitar que os alunos discutam aquela imagem, tentando justificar o paralelismo da base;

xx. Mostrar que as grandezas postas na lousa são proporcionais e que isso acarreta o paralelismo das bases segundo o teorema de Tales;

xxi. Construir os cubos de aresta 5 cm e aresta 7 cm;

xxii. Aplicar o questionário 2 (Apêndice F), auxiliar nas respostas com mais perguntas;

xxiii. Valorizar a participação dos alunos, esclarecer possíveis dúvidas sobre assuntos relacionados e então formalizar as respostas.

4.2 Relato da experiência em sala de aula

Uma turma do nono ano do ensino fundamental do Centro Educacional Municipal Luiz de Amorim Leão, escola da rede pública municipal de Messias/AL, de aulas regulares no turno matutino, foi convidada a participar de aulas de matemática no turno vespertino (contraturno). Em média, onze alunos compareceram a cada um de sete encontros ocorridos durante o período de 30/10 a 04/12/2014. No primeiro encontro, apenas seis alunos compareceram, em seguida esse número aumentou de modo que vinte e três alunos participaram em pelo menos um dos encontros. A experiência teve duração equivalente a catorze aulas de cinquenta minutos.

No primeiro dia, os alunos foram informados que haveriam alguns encontros, momentos em que se estudaria assuntos de Matemática também importantes para o Ensino Médio. Eles receberam um questionário (Apêndice E) para responder de maneira anônima, individual, escrita e sem consulta. Alguns insistiram em perguntar as respostas, mas a indicação foi que naquele momento era importante registrar o que pensavam sem interferência, nem dos demais alunos, nem do professor.

Sobre as respostas fornecidas, registrou-se uma visão predominante, a de que a matemática estudada na escola iria servir apenas no futuro, para desempenhar uma profissão ou estudos superiores. Mas, um dos alunos preferiu dizer: “Eu acredito que é muito importante e fundamental, mas eu não gosto muito porque como são muitas contas acaba ficando chato até demais”.

Os alunos, vendo o cubo construído a partir de pirâmides como na Figura 1 (p. 18), descreveram-no como feito de quadrados e triângulos, apenas um dos alunos se referiu ao objeto como um cubo, os demais forneceram resposta como “Eu vi vários triângulos juntos que formaram um quadrado, muito interessante". Na tarefa de definir um quadrado, a maioria dos alunos apenas citaram figura com quatro lados iguais, a resposta mais diferente foi: "um quadrado é uma área onde se tem vários valores".

Nenhum deles soube dar exemplo de um número irracional, a maioria dos alunos preferiu não responder as questões não geométricas, assim como ninguém soube desenvolver corretamente o quadrado da soma de dois termos. No entanto, muitos consideravam que triângulos semelhantes são triângulos iguais e apenas um tentou enunciar o teorema de Pitágoras escrevendo "$a^2 = b^2 + c^2$", nenhum deles forneceu uma definição para mediatriz nem para polígono ou poliedro, mas todos afirmaram que já desenharam com régua e compasso.

Para o quanto gostam de matemática, eles se deram notas de quatro a dez, a média das respostas foi seis, sendo que a resposta seguinte se destacou: "para ser sincera eu gosto, mas não sou muito boa não em matemática. A nota que eu gosto é 5". De fato, a maioria listou a Matemática como a disciplina em que obtém as menores notas.

Após devolução dos questionários, utilizando um pequeno quadro negro, o professor forneceu algumas possíveis respostas às questões postas no questionário. Isso foi feito de maneira rápida, com a intenção de aguçar a curiosidade pelos próximos encontros, nos quais eles iriam construir um cubo a partir de seis pirâmides, objeto até então fielmente indescritível para eles. Em seguida, foram solicitados dois trabalhos a serem desenvolvidos durante o projeto, de modo a compor um portfólio, que inclusive afirmaram nunca ter feito. Os trabalhos foram:

i. um resumo sobre as aulas em apenas uma folha;
ii. um glossário sobre o vocabulário de matemática tratado nas aulas.

No segundo encontro, o professor apresentou uma pirâmide (Figura 13, p. 39) semelhante àquela que compunha o objeto apresentado no encontro anterior, de lado da base medindo quinze centímetros, questionou aos alunos como construir uma pirâmide semelhante àquela, mas com apenas seis centímetros no lado da base, utilizando uma folha de papel A4, régua, lápis, tesoura, caneta, cola e compasso. Surgiram três estratégias:

i. recortar quatro triângulos e um quadrado aleatoriamente, com régua e tesoura;
ii. desenhar um quadrado e quatro triângulos equiláteros sobre cada lado do quadrado, usando a régua;
iii. utilizar apenas dobraduras sobre um papel.

Apesar das tentativas, apenas o aluno que utilizou a estratégia "ii" conseguiu montar uma pirâmide, apesar de não ter sido semelhante à pirâmide inicial. Além disso, ninguém usou o compasso, mas todos perceberam uma possível planificação (Figura 14, p. 40) para uma pirâmide de base quadrangular.

Então, iniciou a construção com régua e compasso do quadrado a partir da mediatriz de um de seus lados. Registrou-se dificuldade em utilizar o compasso, de modo que os alunos não tinham sucesso em traçar um arco, pois o compasso sempre aumentava sua abertura, de fato, todos compassos cedidos pela escola apresentaram o mesmo problema. Outro empecilho observado foi a falta de arejamento na sala de aula, obrigando a ligar um ventilador que espalhava as folhas e recortes dos alunos.

Nesse ponto da experiência, as dificuldades da realidade da escola foram se fazendo enxergar, registrando ainda um fato curioso: ao tentar seguir o passo da construção geométrica "ponta seca em A", um aluno centrou o compasso na letra, não no ponto, tornando evidente que a falta de manejo não era apenas no lidar com o material, mas também com a própria linguagem da construção. Dessa forma, mesmo com uma maior intervenção do professor, não foi possível que todos concluíssem a planificação.

No encontro seguinte, discutiu-se o Teorema de Pitágoras como critério para classificação dos triângulos, cada aluno tentou desenhar um triângulo retângulo e em seguida, usando a régua, mediu seus lados para, usando o teorema, perceber o quanto o triângulo se aproximou de um triângulo retângulo. Nessa atividade os alunos apresentaram dificuldade em medir, pois não centralizavam o "zero da régua" no ponto inicial do segmento, bem como não conseguiam operar com decimais, no entanto, após algumas intervenções, todos conseguiram concluir, sendo que dois deles usaram calculadora.

Logo em seguida, receberam uma folha com a planificação iniciada, que continha um quadrado e as mediatrizes de dois lados adjacentes, e manipularam a pirâmide a ser reproduzida observando dois triângulos retângulos em seu interior. Apenas dois alunos afirmaram perceber um triângulo retângulo na planificação iniciada, mas nem todos conseguiram tomar a medida com compasso na primeira tentativa, alguns decidiram novamente usar a régua para medir e assim concluir a planificação. Finalmente todos conseguiram construir a planificação, que foram recortadas, dobradas e coladas para construir a pirâmide, atingindo o objetivo e concluindo os primeiros oito itens da sequência.

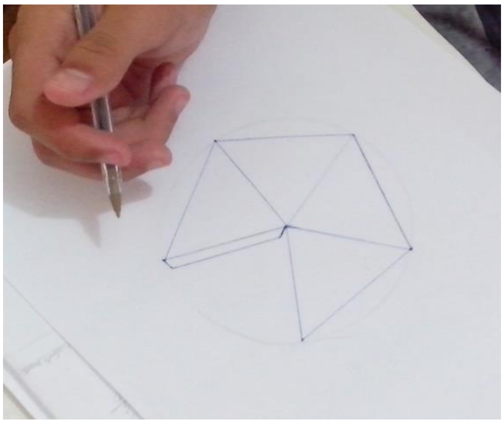
No encontro seguinte, a turma foi questionada sobre como construir uma pirâmide congruente a da aula anterior, mas sem que o quadrado esteja na planificação, de modo que seja possível perceber as pirâmides após construir o cubo. Um aluno dobrou uma folha em suas diagonais (Figura 20, p. 55), mas não obteve sucesso, outro afirmou que bastava recortar o quadrado da planificação anterior, daí guardar apenas os triângulos. No entanto, após intervenção esse aluno percebeu que ao recortar perder-se-ia a planificação, pois iria separar os triângulos não havendo lado em comum.

Figura 20 - Tentativa espontânea da construção de uma pirâmide

Fonte: Autor, 2014.

Na sequência, aplicando o Teorema de Pitágoras mais uma vez, obteve-se a medida para o raio da circunferência, daí desenvolveu-se a planificação da Figura 15 (p. 42), mas para desenhá-la foi preciso a ajuda do professor quanto ao uso do compasso, porém, não se registrou dificuldades em traçar os segmentos. Assim todos os alunos conseguiram chegar ao desenho da Figura 21 abaixo. Ressalta-se que essa atividade ocorreu individualmente, essa escolha foi tomada por considerar a presença inédita de alguns participantes, daí incluindo essa etapa entre os itens doze e treze da sequência.

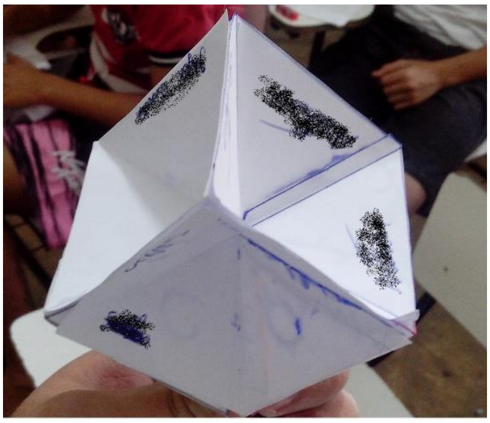
Figura 21 - Planificação de pirâmide concluída



Fonte: Autor, 2014.

Então, cada aluno fez uma pirâmide e pôs seu nome nela, em seguida, juntou-se seis delas e montou-se o cubo, como se vê na Figura (p. 56).

Figura 22 - Cubo construído pelos alunos participantes



Fonte: Autor, 2014.

No encontro seguinte, retomou-se a sequência didática a partir do item treze, os discentes demostraram bastante interesse a cada instrução da construção geométrica. Todos tentaram traçar um segmento com comprimento $b\sqrt{3}$ a partir do valor expressado pela calculadora de seus celulares, utilizando a numeração da régua, a maioria demonstrou dúvida em como localizar esse número e daí encontrar raio da circunferência para então iniciar a planificação.

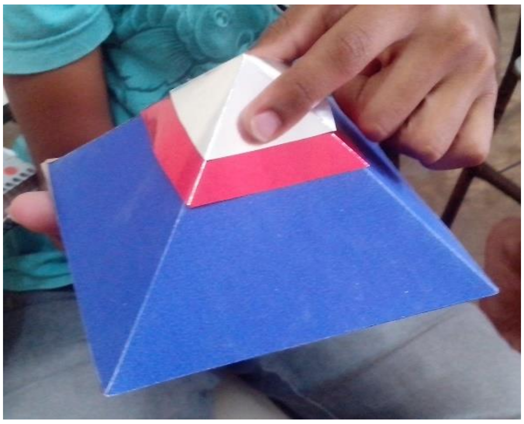
Nesse momento foi possível discutir a aproximação de números irracionais por racionais, bem como a aplicação do teorema de Pitágoras para localizar tais números na reta real. Logo, mais de uma alternativa para construir a medida desejada. Os alunos também apresentaram bom desempenho no trabalho em equipe, ver Figura 23, de modo que os grupos conseguiram construir as pirâmides semelhantes.

Figura 23 - Alunos trabalhando em equipe

Fonte: Autor, 2014.

Continuando a partir do item dezessete da sequência, os discentes perceberam que as pirâmides semelhantes se encaixavam uma na outra como na Figura 24, mas apenas um deles percebeu que, além disso, suas bases eram paralelas. Em seguida, com intervenção do professor, concluíram que a figura apresentada nas faces sobrepostas era na verdade uma representação do Teoremas de Tales. A partir desse ponto foi proveitoso relacionar o conceito de semelhança com o de proporção também algebricamente. Nesse ponto os alunos expuseram algumas dúvidas sobre operação com racionais. Assim, notou-se claramente o desenvolvimento de situações didáticas.

Figura 24 - Pirâmides sobrepostas e o teorema de Tales

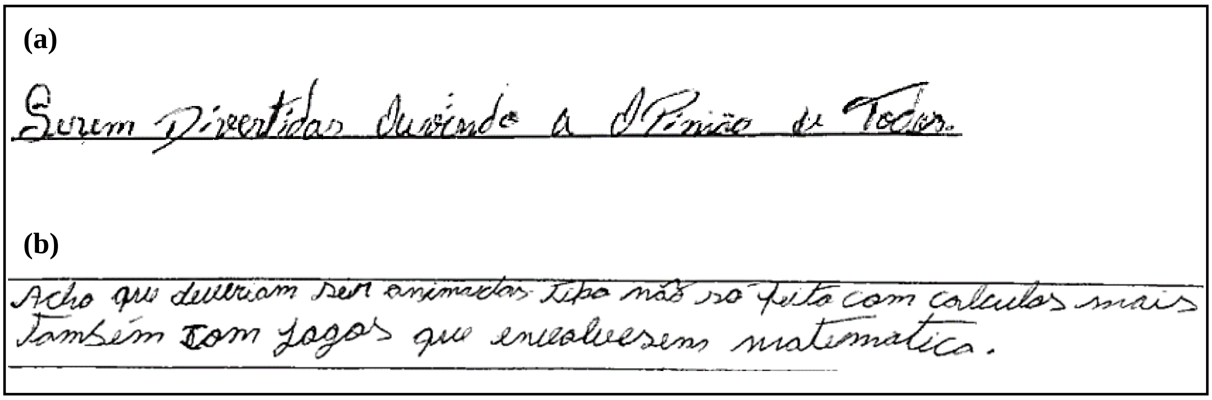


Fonte: Autor, 2014.

Nos dois últimos encontros discutiu-se as questões do questionário do Apêndice F, nas quais foi possível sistematizar os conhecimentos construídos ao longo dessas aulas de Matemática. Nessas atividades os discentes revelaram várias dúvidas, como sobre operações com radicais, do conceito de razão e da lei do corte, bem como dificuldade em desenhar em perspectiva. Registrou-se, como ao longo de toda experiência, maior esclarecimento das dúvidas quando algum objeto manipulável auxiliava numa interpretação geométrica da questão em discussão.

Encerrando a sequência didática, aplicou-se um terceiro questionário (Apêndice G) para auxiliar na avaliação da experiência, para o mesmo fim foi dado visto nos portfólios. Constatou-se registros de aprendizagem que atenderam aos objetivos da experiência, entre esses, os que constam na Figura 25, nos quais alunos participantes da experiência descrevem como acham que deveriam ser as aulas de Matemática.

Figura 25 - Como deveriam ser as aulas de Matemática, segundo alunos participantes.



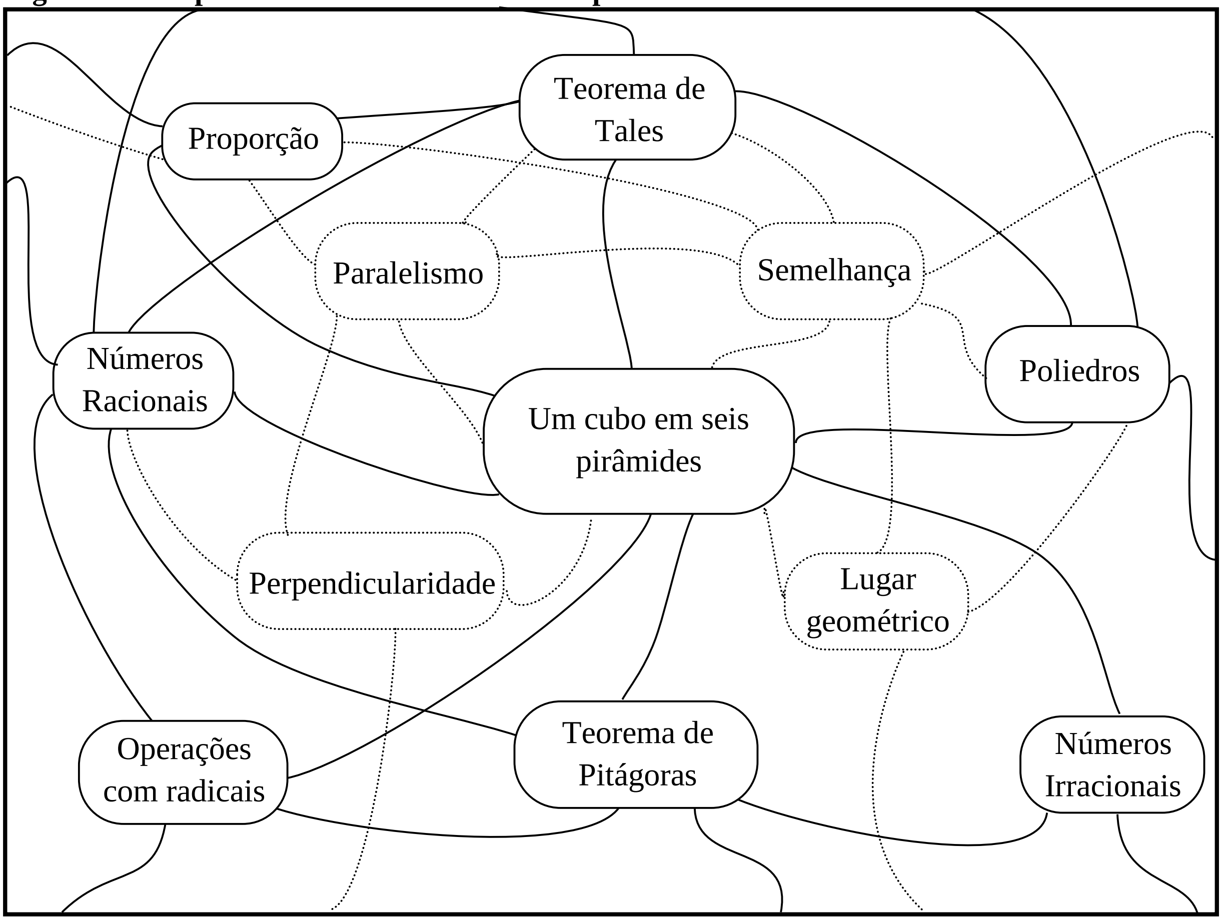
Fonte: Autor, 2014.

4.2.1 Mapa Conceitual

A realização da sequência didática proposta, mesmo com as dificuldades mencionadas, permitiu a criação de um ambiente de investigação que relacionou conceitos matemáticos e proporcionou múltiplas possibilidades de construção do conhecimento.

Esta breve seção tem como objetivo evidenciar as diversas relações desenvolvidas durante a experiência a partir de uma representação gráfica denominada mapa conceitual, que expressa os conceitos relacionados por meio das atividades desenvolvidas em sala de aula. A Figura 26 (p. 59) encerra este capítulo.

Figura 26 - Mapa conceitual estabelecido na experiência



Fonte: Autor, 2015.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante dos estudos e experiências realizados neste trabalho, concluímos que é possível ensinar Matemática na Educação Básica respeitando sua essência e a autonomia do professor e de seus alunos, mais ainda, que dessa forma as aulas podem ser mais atrativas e produtivas do que nas aulas tradicionais (expositivas seguidas de exercícios). Isso ficou claro quando, em investigação, relacionamos os pontos assimétricos do cubo aos números triangulares e daí exibimos uma forma de contá-los, expressando o número de soluções distintas do problema de decompor o cubo em seis pirâmides, para então desenvolver um jogo com fins didáticos.

É importante deixar claro que definimos como soluções distintas aquelas determinadas por pontos não equivalentes por simetria em relação aos planos OXY, OXZ e OYZ. Assim, por simplicidade, chamamos esses de pontos assimétricos. Como o cubo em estudo está convenientemente centrado na origem de um sistema de coordenadas, dois pontos assimétricos preservam distancias diferentes em relação às faces desse cubo, essas distâncias correspondem às alturas das pirâmides. Por outro lado, todas as pirâmides no problema possuem bases congruentes, isso implica que em duas soluções não distintas há correspondências biunívocas entre os volumes das pirâmides e entre suas planificações, mas não, necessariamente, entre os seus formatos. Esse é outro resultado do trabalho considerado na construção do quebra-cabeça.

Portanto, acreditamos ter alcançado o objetivo principal, demonstrando aos professores outra postura a adotar frente à Matemática, inclusive, encorajando uma prática não tradicional de tratar os conteúdos em sala de aula, na qual o docente pode criar e estudar problemas matemáticos e, a partir desse estudo, elaborar suas aulas. Isso ocorreu, por exemplo, nas construções geométricas da planificação de pirâmides e na aplicação do Teorema de Pitágoras em dobraduras que determinam dimensões dessas pirâmides, como visto no terceiro capítulo.

Esses estudos possibilitaram a elaboração de uma sequência didática que, aplicada ao nono do ensino fundamental, possibilitou o surgimento de situações didáticas nas quais os alunos participantes puderam aprender sobre operações com radicais, números racionais, paralelismo, perpendicularidade e outras noções de geometria plana e espacial, sobretudo os teoremas de Pitágoras e de Tales. Logo, foi atingido o objetivo específico de elaborar uma sequência didática a ser desenvolvida em aulas que favoreçam o desempenhar do papel de matemático aos alunos, isto é, em vez de apenas memorizar e aplicar fórmulas agindo como computadores, ou “chimpanzés adestrados” segundo Lockhart, aos discentes foram solicitadas soluções de problemas geométricos, de modo que a contribuição de cada um tornou-se indispensável.

Ressaltamos que foram necessários esforços adicionais para superar algumas dificuldades no desenvolvimento deste trabalho, sobretudo na realização da experiência em sala de aula que ocorreu no último semestre, em turno diferente do regular de estudos dos alunos participantes e com a frequência facultativa, registrou-se significativa rotatividade dos discentes, de modo que poucos alunos frequentaram mais de cinco dos sete encontros. A estrutura física e o material cedido pela escola também ofereceram dificuldades, de tal forma que em determinado momento a sequência proposta quase se tornou inviável. Porém, com ajustes, foi possível atingir os objetivos.

Assim, desejando ser uma mensagem aos professores de Matemática, este trabalho apresentou diversas sugestões de aplicações em sala de aula, além da sequência didática e do quebra-cabeça em 3D, como a construção do objeto manipulável representado na Figura 3 (p. 21), da atividade de probabilidade a partir de uma decomposição totalmente congruente do cubo, bem como ideias para outros jogos na seção 2.4 e de outras sequencias didáticas no Apêndice H. Assim, é possível desenvolver outros trabalhos a partir dessas sugestões. E, para que a mensagem aqui contida seja ainda mais clara, uma mídia contendo construções dinâmicas no GEOGEBRA acompanha este trabalho, essas construções permitem a interação do leitor com a maioria das ilustrações aqui apresentadas e, de certo modo, ressalta aos docentes a utilidade das Tecnologias de Comunicação e Informação na Educação.

Contudo, ressaltamos que a motivação deste veio de considerar que em essência a formação escolar/acadêmica visa possibilitar autonomia ao formando, que pode ser inspirada a partir do professor, bem como da necessidade de repensar a matemática escolar no país, afinal como pode a Matemática ter sua beleza exaltada e ao mesmo tempo ser horrivelmente excludente na sala de aula? Contradição que encontra par no fato da pesquisa brasileira ser reconhecida e premiada internacionalmente, enquanto a maioria dos brasileiros são analfabetos nessa matéria. Nisso se concentra a importância deste trabalho, mas sobretudo do Programa de Pós-Graduação no qual ele foi desenvolvido.

Neste trabalho, como no PROFMAT, acreditamos na melhoria da Educação Básica a partir do melhor letramento matemático dos docentes, de modo que o professor adquira melhor desempenho em expressar Matemática, seja em suas falas em sala de aula, seja no modo como escreve ou no material construído, respondendo melhor às dúvidas dos alunos e demonstrando às turmas mais segurança em suas afirmações sobre essa ciência. Porém, acreditamos que os alunos devem se tornar pessoas autônomas em pensar Matemática, de modo a saber desde a correção do troco à escolha da melhor linha de crédito, desde saber ler gráficos a entender o quanto uma pesquisa eleitoral pode ser tendenciosa, ou seja, de modo a usar essa ciência em seu cotidiano de cidadão, sabendo o que é hipótese, avaliar a reciprocidade das afirmações, resolver problemas diversos, identificar variáveis e padrões, elaborar estratégias, enfim atingir um nível de letramento matemático suficiente para o exercício pleno de sua cidadania.

Pelo todo do trabalho, acreditamos que o professor, inclusive na Educação Básica, deve ser autônomo em sua prática, assim, mais que criticar o livro didático e se desprender de sua linearidade, é possível que o professor repense a matemática escolar, elabore novos problemas matemáticos, relacionando o currículo e outros saberes, abordando-os em aulas nas quais seus alunos pensam, discutem, formulam, verificam, enfim desenvolvem o pensamento matemático. Para tanto, vimos que as teorias da Educação Matemática foram ferramentas importantes, motivo pelo qual recomendamos consulta às referências deste trabalho.

REFERÊNCIAS

ACADEMIA BRASILEIRA DE CIÊNCIAS. **O Matemático que solucionou um problema cinquentenário.** Disponível em: <http://www.abc.org.br/impressao.php3?id_article=3342> Acesso em: 08/12/2014.

ÁVILA, Geraldo. **Análise matemática para licenciatura.** São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BOTH, I. J. **Avaliação**: "voz da consciência" da aprendizagem. 2 ed. Curitiba: Ibpex, 2012.

BRASIL. Governo Federal. **Portal Brasil**. Disponível em: <http://www.brasil.gov.br/ciencia-e-tecnologib013/07/ brasil-conquistou-quatro-medalhas-na-olimpiada-internacional-de-matematica> Acesso em: 05/11/2014.

______ Ministério da Educação. **Portal IDEB**. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/portal-ideb> Acesso em: 23/10/2014.

______ Ministério da Educação. **Relatório nacional PISA 2012**: resultados brasileiros. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/pisa-programa-internacional-de-avaliacao-de-alunos> Acesso em: 23/10/2014.

CAREERCAST.COM. **The best jobs of 2014**. Disponível em: <http://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2014> Acesso em: 22/10/2014.

COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. 2d ed. New York: Wiley, 1969.

D'AMORE, B. **Elementos de didática da matemática**. São Paulo: Liv. da Física, 2007.

DAVIS, Michael W. **The geometry and topology of Coxeter groups**. USA: Princeton University Press, 2007

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 2004.

FONSECA, M. C. F. R., ET AL. **O Ensino da geometria na escola fundamental:** três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa, 28ª ed., São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura).

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 3 v. (Coleção do professor de matemática).

LOCKHART, P. **O lamento de um matemático**. Revista Cálculo, v. 37, n. 4, p. 44-65, 2014. ISSN 2179-1384.

MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010.

MATOS FILO, M. A. S. et.al. **A transposição didática em Chevallard, as deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula**. In: Congresso Nacional de Educação, VIII, 2008, Curitiba, Anais, 09/10/2008.

MUNIZ NETO, A.C. **Tópicos de matemática elementar**. Vol. 2. Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PAIS, L.C. **Didática da matemática:** uma análise da influência francesa. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PILETTI, C; PILETTI, N. **História da Educação**: de Confúcio a Paulo Freire. São Paulo: Contexto, 2013.

SAUDAÑA, P. **Alunos do 9º ano pioram em matemática**. In: Estadão Educação. Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,alunos-do-9-ano-pioram-em-matematica,1599632> Acesso em: 29/11/2014.

SILVA, E. R. B. da. **O conceito de função no 7º ano do ensino fundamental:** uma experiência com o cubo geométrico. Maceió, AL, 2011. 15 f. : Monografia (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática, Maceió, AL, 2011.

TEIXEIRA, P. J. M; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE, Unicamp, v. 21, n.39, jan/jun 2013.

VILLAS BOA, B. M. F. **Portfólio, avaliação e trabalho pedagógico**. Campinas-SP: Papirus, 2004.

WACHILISK, M. **Didática e Avaliação**: algumas perspectivas da Educação Matemática. Curitiba: Intersaberes, 2012.

APÊNDICE A – Pesquisa com Professores de Matemática da Educação Básica

No segundo semestre do ano de 2014, vinte professores de matemática na Educação Básica, atuantes na rede pública de ensino do Estado de Alagoas em diversas cidades (Arapiraca, Chã Preta, Igaci, Maceió, Messias, Olivença, Palmeira dos Índios, Passo de Camaragibe, Penedo, Rio Largo, Santana do Mundaú e Teotônio Vilela), frente a um questionário forneceram as seguintes respostas:

Atualmente, nas escolas que você conhece, com que frequência tem-se conseguido levar os alunos a pensar como matemáticos?

Sempre	0%
Às vezes	55%
Raramente	45%
Nunca	0%

Atualmente, a disciplina de Matemática apresentada nas escolas, no currículo e nos livros didáticos, faz como que os alunos desenvolvam a capacidade de usar a Matemática como linguagem para pensar, dentro e fora da escola?

Sim, certamente.	0%
Sim, na maioria das escolas.	10%
Sim, mas em poucas escolas.	55%
Não, raramente um aluno desenvolve tal capacidade.	35%
Não, nenhum aluno desenvolve tal capacidade.	0%
Outra	0%

É comum a apresentação de teoremas sem demonstrações na Educação Básica. Com que frequência seus alunos questionam suas afirmações sobre os conteúdos de Matemática?

Sempre	0,0%
Às vezes	30,0%
Raramente	55,0%
Nunca	15,0%

Em que momento há mais interesse dos alunos em suas aulas de Matemática? Numere de 1 a 6, sendo 6 para o maior interesse e 1 para o menor interesse.

Na exposição de fórmulas.	-----
Nos exercícios de aritmética.	-----
Nos exercícios de geometria.	-----
Na resolução de problemas de aritmética.	-----
Na resolução de problemas de geometria	-----
Outro	-----

Sem resultado. Alguns enumeram de 1 a 6, outros atribuíram notas para cada item.

De modo geral, seus alunos costumam responder as atividades propostas?

Sim, mais as de sala.	60%
Sim, mais as de casa.	0%
Sim, igualmente.	10%
Não	30%

Você lembra já ter apresentado para seus alunos um problema geométrico que permitiu trabalhar boa parte do currículo de matemática do bimestre?

Sim	60%
Não	40%

Você conhece o problema de decompor um cubo em seis pirâmides?

Sim	30%
Não	70%

Já usou o portfólio como instrumento avaliativo?

Sim	15%
Não	85%

Dê uma nota média para seus alunos de Matemática na Educação Básica (de 0 a 10):

Interesse e atenção	5,30
Aprendizado de conceitos	5,15
Resultados de prova escrita	5,05
Participação ativa, com questionamentos	4,20
Aprendizado de técnicas	5,05
Percepção de significados no cotidiano	4,95

Os professores participantes também responderam sobre sua visão a respeito da afirmação "usar a matemática como linguagem para pensar", seguem algumas respostas.

a) Os conceitos matemáticos bem como a formalidade matemática podem ser usada para avaliar proposições de qualquer outra área do conhecimento.

b) Significa que a matemática pode e deve ser usada em diversas situações do cotidiano em que o indivíduo precise dela para resolver problemas.

c) Significa extrair todos os dados fornecidos pela questão, para que haja uma boa exploração.

d) USAR OS CONCEITOS, DEFINIÇÕES E RESULTADOS MATEMÁTICOS COMO MODELOS EFICIENTES PARA RESOLVER PROBLEMAS DO COTIDIANO.

e) USAR DE FORMA DESAFIADORA, ENVOLVENDO O ALUNO DE FORMA A INSTIGAR A CRIATIVIDADE, DESPERTAR À AUTONOMIA E DESENVOLVER HABILIDADES DE USO COTIDIANO.

APÊNDICE B – Sobre Engenharia Didática

Conforme Machado (2010) e Pais (2001), segue resumo sobre Engenharia Didática.

Engenharia didática é a metodologia de pesquisa que se constitui com a finalidade de analisar as situações didáticas, esse termo é empregado nas pesquisas da didática da matemática desde a década de 1980. E essa ideia traz implícita uma analogia entre o trabalho do pesquisador em didática e o trabalho do engenheiro, no que diz respeito à concepção, planejamento e execução de um projeto. Artigue *apud* Machado caracteriza a engenharia didática como um esquema experimental baseado sobre "realizações didáticas" em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observância e análise de sequências de ensino.

A microengenharia, pesquisas que têm como objetivo o estudo de um determinado assunto, são localizadas e levam em conta a complexidade dos fenômenos em sala de aula. Por outro lado as pesquisas da macroengenharia são aquelas que permitem compor a complexidade das pesquisas de microengenharia com a dos fenômenos ligados à duração nas relações ensino/aprendizagem.

A engenharia didática caracteriza-se também pelo registro dos estudos feitos sobre o caso em questão e pela validação que é feita na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori. Na engenharia didática a validação é interna, existem várias outras metodologias de pesquisa em didática, tais como o tipo etnográfico e as que se baseiam em métodos estatísticos. Mas a singularidade da engenharia didática não repousa em seus objetivos, mas em suas características de funcionamento metodológico.

A primeira fase da metodologia da engenharia didática é a das análises preliminares: são as análises epistemológicas dos conteúdos contemplados pelo ensino, a análise do ensino atual e de seus efeitos, a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução; análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática. Todas essas análises são feitas principalmente para embasar a concepção da engenharia e são retomadas durante todo o transcorrer do trabalho.

A segunda fase é a da concepção e análise a priori, onde o pesquisador delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comando, essas Artigue distinguem em variáveis macrodidáticas ou globais, concernentes à organização global da engenharia e variáveis microdidáticas ou locais, à organização local da engenharia, ou seja, de uma sessão ou de uma fase. Essas variáveis podem ser de ordem geral ou específica a depender do conteúdo didático a ser ensinado. É nessa fase que o processo de validação se instaura. Observando que as escolhas de ordem geral, globais, precedem a descrição de cada fase de engenharia, quando influem as escolhas locais, mas são interdependentes.

A análise a priori comporta uma parte de descrição e outra de previsão, essa análise deve: descrever cada escolha local feita, analisar qual o desafio da situação para o aluno, prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos. Assim essa fase objetiva a consideração do aluno sob dois aspectos: o descritivo e o previsível, onde ele é considerado ator principal.

A fase terceira é a da experimentação, é clássica, inicia-se no momento em que se dá o contato pesquisador/professor/observador como a população de alunos e supõe: a explicação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos, o estabelecimento do contrato didático, aplicação dos instrumentos de pesquisa e registro das observações feitas durante a experimentação.

A última fase é a da análise a posteriori e da validação, é nessa que se dá o tratamento dos dados. O importante é que essa análise atinja a realidade da produção dos alunos, quando possível, desvelando seus procedimentos de raciocínio. Dessa maneira enquanto procedimento metodológico, a engenharia didática se fundamenta em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada.

Finalmente é da confrontação das análises a priori e a posteriori que se validam ou se refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia. Logo do ponto de vista metodológico, a validação é uma etapa onde a vigilância deve ser ampliada, pois se trata de garantir a essência do caráter científico.

Contudo, método deve ser entendido com a escolha de um caminho a ser seguido na busca do conhecimento, trata-se de uma posição filosófica e que embasa a realização da pesquisa por meio de um conjunto de procedimentos e considera seus vínculos com as questões maiores do fenômeno investigado. Assim a expressão técnica de pesquisa é mais apropriada para caracterizar a engenharia didática em vez de metodologia dessa última apesar de ser amplamente utilizada na didática da matemática.

APÊNDICE C – Portfólio e Avaliação em Matemática

É de conhecimento comum que a prova escrita é o tradicional instrumento de verificação da aprendizagem em Matemática na Educação Básica. Mas, segundo Both (2012):

> A repetição dos mesmos instrumentos de avaliação por determinado tempo poderá demonstrar certa injustiça com relação a um e a outro aluno. Isso porque alguns alunos conseguem demonstrar domínio de conhecimentos mediante o uso de certo tipo de instrumento e com relação a outros, tal fato poderá não ocorrer com a mesma fluência e desenvoltura. (BOTH, 2012, p.168)

Dessa citação, infere-se que é interessante pensar em outros instrumentos avaliativos. Acredita-se que com a administração do portfólio tem-se, de fato, mais um recurso para enriquecer o processo de avaliação da aprendizagem. Veja nos parágrafos seguintes, baseados em Villas Boas (2004), definição e características desse instrumento avaliativo.

Segundo Easley e Mitchell (2003, p.21 e 33) *apud* Villas Boas "um portfólio é uma coleção especial dos melhores trabalhos organizados pelos próprios alunos" e difere de um arquivo, pois "é parte de um processo de avaliação que ensina os alunos a avaliar e apresentar seus próprios trabalhos". Assim o portfólio acaba revelando parte da identidade do aluno e tem muito em comum com os registros pessoais, porém não são abandonados com o tempo, pertence ao aluno, mas é compartilhado com os professores.

Assim, o portfólio na escola reúne trabalhos escolares dos alunos, não somente para o seu arquivamento e vai além da função de facilitar a apresentação desses documentos. Barton e Collins (1997, p.2) *apud* Villas Boas discorrem sobre características essenciais presentes na elaboração de um portfólio que contribuem com o processo de avaliação, segundo os autores, os portfólios incluem múltiplos recursos, são autênticos, constatam o desenvolvimento dos alunos ao longo do tempo, possuem objetivos determinados e de conhecimento dos alunos, há integração entre as atividades escolares e a vivência dos alunos, são únicos e possuem natureza multipropositál.

Considerando tais características, percebe-se que a avaliação por meio da administração de um portfólio é essencialmente de caráter formativo, isto é, coloca-se em prol da aprendizagem sem interesse de traduzir o desempenho do estudante em notas ou conceito. Além disso, sendo os alunos participantes ativos desse processo, surge a autoavaliação que conduz a autorregulação da aprendizagem, segundo Vilas Boas "quando os alunos estão conscientes do estado do seu desenvolvimento, eles podem efetivamente direcionar a aprendizagem rumo aos objetivos estabelecidos” e “nesse contexto, a avaliação se compromete com a aprendizagem de cada aluno e deixa de ser classificatória e unilateral”.

Assim, atribuir ao aluno a tarefa de elaborar um portfólio, de modo que esse selecione seus melhores trabalhos, pode contribuir com o processo avaliativo e, por consequência, no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo experiência de ensino do autor deste, na prática, pode-se solicitar aos alunos que elaborem três tipos de trabalhos:

i) gerais: trabalhos comuns a toda turma;
ii) específicos: trabalhos individuais considerando a ritmo de aprendizagem de cada um;
iii) espontâneos: trabalhos que o aluno deseje fazer sem a solicitação do professor.

É importante ressaltar que todos esses trabalhos devem estar relacionados com os conteúdos do bimestre e nem todos necessariamente comporão o portfólio do aluno, apenas aqueles que ele selecionar. Além disso, ressalta-se a seriedade em elaborar um portfólio, pois esse poderá acompanhar o aluno série a série da Educação Básica, de modo que seu próximo professor possa ter acesso e daí ter uma noção do que cada aluno vem se dedicando a fazer em Matemática. Nesta mesma tônica, o docente deve deixar claro a problemática do plágio e do famoso “copiar, colar, imprimir”, sendo uma opção solicitar trabalhos feitos à mão.

A avaliação por portfólio pode ainda favorecer outros instrumentos de avaliação, como a ideia de seminários e até mesmo a prova escrita, uma vez que na elaboração do portfólio, em tese, o aluno aprende e/ou percebe dificuldades em sua aprendizagem, daí seu rendimento escolar tende a melhorar. Portanto, uma possibilidade para avaliar a recuperação paralela, que consiste em atividades desempenhadas fora do turno regular das aulas e voltadas para os alunos com rendimento escolar considerado baixo.

Por fim, tem-se no portfólio um instrumento interessante para a avaliação da aprendizagem em matemática.

APÊNDICE D – Sugestões para o portfólio

Seguem alguns trabalhos gerais que podem ser sugeridos para os alunos participantes da sequência didática apresentada no capítulo quatro deste trabalho.

- Elaborar um resumo dos fatos que mais julgaram interessante;
- Elaborar um glossário contendo palavras próprias da linguagem matemática utilizada em aula;
- Construir uma espiral que forneça a raiz enésima de um número natural;
- Reunir as construções com régua e compasso trabalhadas em sala;
- Registrar outra demonstração do Teorema de Pitágoras;
- Exibir as onze planificações do cubo;
- Exibir as planificações de seis pirâmides que compõem um cubo de modo que pelo menos uma das pirâmides não seja congruente às demais.

Uma sugestão ao professor é fazer fotos dos objetos construídos em sala, selecionar os melhores trabalhos, segundo os próprios alunos, e digitaliza-los, daí criar e compartilhar o portfólio da turma na internet através de um blog.

APÊNDICE E – Questionário 1 (inclui resposta de alunos)

1 – Para que serve a Matemática que você aprende na escola?

2 – Descreva, com suas palavras, o objeto apresentado.

3 – O que é um quadrado?

4 – Na medição do comprimento de três lápis novos, foram obtidos os seguintes valores a = 15,04,b = 15,08 e c= 15,12. Qual a média aritmética desses valores?

5 – O que você entende por triângulos semelhantes?

6 – Desenvolva:

a) $(x + y)^2 =$

b) $(x + y)^3 =$

7 – Enuncie o Teorema de Pitágoras.

8 – Cite três exemplos de números irracionais.

9 – Dê uma nota de zero a dez para o quanto você gosta de Matemática.

10 – Quais as disciplinas que você tem

a) as maiores notas:

b) as menores notas:

11 – O que é um espaço amostral equiprovável?

12 – Você já desenhou com régua e compasso?

13 – Qual a diferença entre polígono e poliedro?

14 – Você já construiu um portfólio com assuntos de Matemática?

15 – O que é uma mediatriz?

Respostas citadas no capítulo 4

1- Eu Acredito que é importante e fundamental, mas eu não gosto muito porque como é muitas contas Acaba ficando chato até de mais.

2- Eu vi varios Triangulos juntos que formarom um quadrado. muito interesante.

9ª) Pra ser cinsera eu gosto, mais não sou muita boa não em matematica, ~~Eu do~~ A mate que eu gosto é 5.

APÊNDICE F – Questionário 2

1) Um cubo, de aresta medindo 10 cm, foi dividido em seis pirâmides congruentes. O que se pode afirmar sobre cada uma dessas pirâmides? Marque V para verdadeiro e F para falso.

(   ) Sua base é triangular.

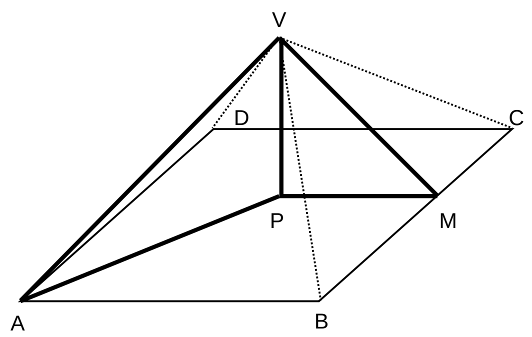
(   ) Sua altura mede 5cm.

(   ) Sua superfície possui 4 triângulos congruentes e 1 quadrado.

(   ) Cada triângulo de sua superfície tem altura medindo $5\sqrt{2}$ cm, altura relativa ao lado do quadrado.

(   ) O lado de sua base mede $5\sqrt{3}$ cm.

2) Observe a figura abaixo, em destaque estão os triângulos retângulos VAP e VMP no interior de uma pirâmide de base quadrangular (de lado medindo 8cm). Sabe-se que seis pirâmides como essa formam um cubo.



a) Determine as dimensões dos triângulos VAP e VMP.

b) Em relação ao quadrado ABCD, qual o raio da circunferência inscrita? E o da circunscrita?

c) Calcule a soma das áreas dos triângulos VAP e VMP.

d) Qual a área da superfície total da pirâmide V-ABCD?

e) Qual a razão entre as grandezas encontradas nos dois itens anteriores?

f) Será que a razão encontrada no item anterior se mantém seja qual for a medida do lado da base?

3) Uma pirâmide sofreu um corte por um plano paralelo à sua base quadrada, destacando uma nova pirâmide.

a) Faça um desenho dessa situação.

b) A pirâmide menor e a maior são congruentes?

c) Justifique a afirmação: a pirâmide menor e a maior são semelhantes.

d) Se a base da pirâmide maior tem área igual a 64cm² e a base da pirâmide menor tem área igual a 36cm², qual a razão de semelhança entre as faces dessas pirâmides?

e) Tente responder ao item anterior utilizando uma estratégia diferente.

APÊNDICE G – Questionário 3

1 – Quais as três primeiras palavras que vêm a sua mente ao lembrar dos nossos encontros nesse projeto?

2 – É possível aprender Matemática se divertindo?

3 – Como você queria que fossem suas aulas de Matemática na escola?

4 – O que é uma bissetriz?

5 – Desenvolva $(a + b)^2$.

6 – Com suas palavras, enuncie o Teorema de Pitágoras.

APÊNDICE H – Sugestões para outras sequências didáticas

H.1 Mais sobre semelhança

Motivação: Replicar uma pirâmide em escala diferente.

i. Apresentar um pouco da história das pirâmides nas civilizações e uma definição matemática;
ii. Apresentar a “Pirâmide 1” da Figura 13 (p. 39), sendo |AB| = 15 cm, evidenciando os triângulos retângulos em seu interior;
iii. Apresentar a “Pirâmide 2” (|A’B’| = 10 cm) e a “Pirâmide 3” (|A”B”| = 10 cm), sendo a Pirâmide 2 semelhante à Pirâmide 1 e à outra não, apesar de todas elas possuírem base quadrada e as duas últimas, a mesma altura;
iv. Discutir com a turma a relação de semelhança entre as pirâmides em função das semelhanças entre os triângulos interiores às pirâmides;
v. Expor o desafio: construir uma pirâmide semelhante à Pirâmide 3 mas com 6 cm de lado da base;
vi. Definir semelhança usando a ideia de ampliação/redução de imagem, em seguida definir escala;
vii. Construir os triângulos do interior da pirâmide nova (Pirâmide 4) a partir do interior da pirâmide a ser replicada em escala menor (Pirâmide 3), utilizando o conceito de paralelismo como a preservação de distância, o que pode ser feito com régua e compasso.
viii. Obter todas as medidas da nova pirâmide a partir dos triângulos de seu interior;
ix. Através dessas medidas, construir uma planificação com régua e compasso, o que pode ser feito em adaptação à construção da seção 3.3.1;
x. Montar a Pirâmide 4 a partir da planificação construída;
xi. Discutir a semelhança entre os triângulos das faces das Pirâmides 3 e 4;
xii. Formalizar os casos de semelhança entre triângulos.

O docente pode estender esta sequência a partir de outro desafio: descobrir a razão de semelhança entre os triângulos das faces das pirâmides semelhantes, bem como a razão entre as áreas da superfície total e dos volumes das Pirâmides 1 e 2 e Pirâmides 3 e 4.

H.2 Relações Métricas no Triângulo Retângulo.

Objetivo: Deduzir Teorema de Pitágoras;

i. Exibir os triângulos definidos pela altura de uma pirâmide conforme Figura 13 (p. 39), de modo que AVM seja retângulo.
ii. Solicitar que os alunos realizem as medições dos lados de VPA e VPM;
iii. Solicitar que os alunos observem as semelhanças e anotem as proporções;
iv. Identificar as relações métricas no triângulo AVM;
v. Solicitar que os alunos, com uso da calculadora, deduzam o teorema de Pitágoras;
vi. Demonstrar algebricamente a partir das relações métricas;
vii. Demonstrar geometricamente, conforme seção 3.2.

H.3 Propagações do Erro nas Oficinas de Construção Geométrica

Como foi discutido na seção 3.3, na planificação da pirâmide ABCD-O tem-se números irracionais como medidas, a saber $b\sqrt{2}$ e $b\sqrt{3}$, sendo necessário aproximá-los por racionais ao medir os segmentos correspondentes com régua escolar, ou quando se decide construir a partir da exibição desses números na tela de uma calculadora. Essas aproximações geram erros que se propagam na superfície e no volume das pirâmides, mesmo o manuseio individual dos instrumentos euclidianos pelos discentes, gera erros nos comprimentos.

Mensurar o erro e entender sua propagação seja nas medições, no corte de peças, na estimativa de consumo e em tantos outros contextos, possui grande valia para a indústria, por exemplo. Daí uma motivação para desenvolver uma sequência didática como a seguinte:

i. A partir do quadrado ABCD construído na planificação da pirâmide ABCD-O, solicitar a medição dos seus lados;
ii. Calcular a média desses valores;
iii. Comparar essa média com o valor adotado, por exemplo $|AB| = 6$ cm e calcular o erro médio;
iv. Usando produtos notáveis, verificar a propagação desse erro na área do quadrado e no volume do cubo;
v. Verificar a relação entre a propagação do erro e a função derivada polinomial.

H.4 Noções sobre função.

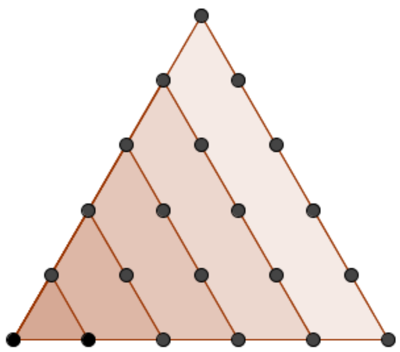
O problema desenvolvido no segundo capítulo deste trabalho pode servir de base para a construção de uma sequência didática dedicada ao processo de ensino-aprendizagem do conceito de função no Ensino Médio, pois permite a discussão da definição de uma função como uma relação especial entre dois conjuntos não necessariamente numéricos, bem como das noções de injetividade, sobrejetividade e bijetividade de uma função.

Disponíveis no Apêndice J, as construções em software de geometria dinâmica tridimensional podem ser utilizadas como recurso didático. Essas apresentam elementos relacionados à função que leva pontos do interior de um cubo em conjuntos de seis pirâmides.

APÊNDICE I – Números triangulares

Os números triangulares podem ser caracterizados da seguinte forma: n é um número triangular, se, e somente se, 8n + 1 é um quadrado perfeito. Segundo Eves (2004), esses números se originaram com os membros antigos da escola pitagórica.

Sabemos que, considerando os pontos definidos pela interseção entre os pontos dos planos $j\lambda$ definidos pelo conjunto H e uma região de assimétricos no cubo (ver Figura 7, p.27), temos a seguinte sequência numérica: 1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, 1 + 2 + 3 + 4, ..., 1 + ... + i, ... Esses números também representam as quantidades de pontos sobre os lados de triângulos equiláteros, como na figura abaixo. Esse fato motiva o termo "triangulares".



Assim, os números n = 1, 3, 6 e 10 são exemplos de números triangulares e, de fato, 9, 25, 49 e 81 são quadrados perfeitos resultantes da expressão 8n + 1. Isso sempre ocorre, pois se $T_i = 1 + 2 + ... + i = (i^2 + i)/2$ é o i-ésimo número triangular, temos que

$$8T_i + 1 = 4i^2 + 4i + 1 = (2i + 1)^2.$$

Por outro lado, se $8n + 1 = k^2$, k inteiro maior do que dois, então n é um número triangular. Note que k^2 é ímpar, logo k também é ímpar. Seja k = 2m + 1, m inteiro não nulo, escrevendo n em função de m, temos que

$$n = N(m) = [(2m + 1)^2 – 1]/8 = (4m^2 + 4m)/8 = (m^2 + m)/2 = T_m.$$

Como exemplos, $N(1) = 1 = T_1$, $N(2) = 3 = T_2$ e $N(3) = 6 = T_3$.

APÊNDICE J – DVD-ROM

Nesta mídia constam arquivos do software livre GEOBEBRA desenvolvidos para criação de ilustrações presentes neste trabalho. Uma vez em software de geometria dinâmica, essas figuras possibilitam uma melhor compreensão dos objetos que representam, portanto um importante recurso didático.

Este DVD-ROM, formatado como um produto educacional, também arquiva fotos que ilustram o passo a passo da construção do jogo tratado na seção 2.4, bem como outros registros deste trabalho. Esses dados também estão disponíveis no endereço abaixo descrito.

https://www.dropbox.com/sh/gygibimbqp41o3e/AADacvAZEuva1OoaCkWAw0OEa?dl=0

Caso o leitor esteja em um computador com acesso à internet, basta clicar na imagem seguinte para ter acesso ao conteúdo digital que suplementa este trabalho.

ANEXO A

Recorte do artigo de Matos Filho et. al. disponível nos anais do VIII Educere 2008

A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA EM CHEVALLARD, AS DEFORMAÇÕES/TRANSFORMAÇÕES SOFRIDAS PELO CONCEITO DE FUNÇÃO EM SALA DE AULA

MATOS FILHO, Maurício A. Saraiva de – UFRPE
mmsaraiva@hotmail.com
MENEZES, Josinalva Estácio – UFRPE
jomene@ded.ufrpe.br
SILVA, Ronald de Santana da – UFRPE
ronaldss21@gmail.com
QUEIROZ, Simone Moura – UFRPE
simonemq@hotmail.com
Área Temática: Teorias, Metodologias e Práticas
Agência Financiadora: Não contou com financiamento

[...]

Yves Chevallard (1991) examina que o saber não chega à sala de aula tal qual ele foi produzido no contexto científico. Ele passa por um processo de transformação, que implica em lhe dar uma "roupagem didática" para que ele possa ser ensinado. Isso acontece porque o objetivo da comunidade científica e da escola é diferente. À Ciência cabe o papel de responder as perguntas que são formuladas e necessárias de serem respondidas em um determinado contexto histórico e social. Por outro lado, esses novos saberes precisam ser comunicados à comunidade científica, em um primeiro plano, e à própria sociedade, em um segundo plano.

Nesse processo de comunicação dos saberes, existem também aqueles que são selecionados como saberes que devem ser ensinados, que devem adentrar a sala de aula e serem socializados naquela instituição. Estes têm por objetivo, como diz Brousseau (1986), fazer com que os alunos se apropriem de saberes constituídos ou em vias de constituição. É então que entra em cena a Transposição Didática. Esse processo diz respeito à passagem do Saber de uma Instituição à outra; passagem esta que imprime novas formas a esse saber, e que consiste em etapas distintas. O livro didático constitui-se então numa destas instituições. Sendo ferramenta básica para o professor, a partir dele o docente transpõe os saberes que vai considerar fundamentais e fazer nova transposição, por sua vez, para os alunos.

Desta forma, esta pesquisa se propõe a realizar uma breve análise da abordagem dada ao conceito de função, pelo professor, no espaço de uma sala de aula da Educação de Jovens e Adultos. Neste sentido, o referencial teórico para a análise será a noção de Transposição Didática, desenvolvida por Chevallard (1991) no âmbito da Didática da Matemática de influência francesa.

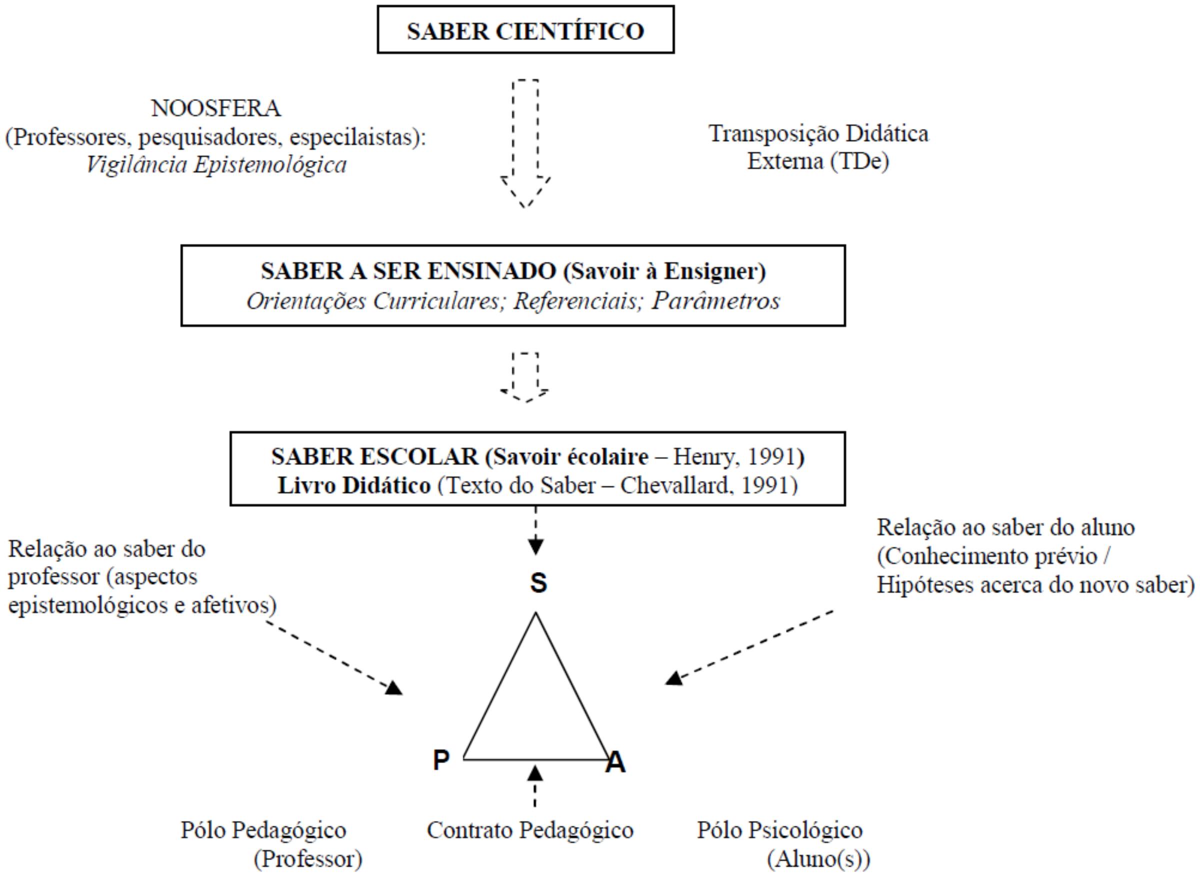
A Transposição Didática

O estudo da Transposição Didática por Chevallard se insere num campo maior de estudo: a Didática da Matemática. O próprio Chevallard (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001) propõe que a Didática da Matemática é uma Ciência e, como tal, tem o Sistema de Ensino como seu objeto de estudo.

Chevallard (1991) reflete que a Transposição Didática é feita por uma Instituição 'invisível', uma 'esfera pensante' que ele nomeou de Noosfera. Tal instituição é formada por pesquisadores, técnicos, professores, especialistas, enfim, por aqueles que ligados a outras Instituições: Universidades, Ministérios de Educação, Redes de Ensino; que irão definir que saberes devem ser ensinados e com que roupagem eles devem chegar à sala de aula. No Brasil, o resultado do trabalho da Noosfera aparece nos Referenciais Curriculares (MEC, 1997, 2006), nos documentos que trazem as diretrizes curriculares e orientam o ensino de uma determinada disciplina científica.

Conforme ilustramos neste documento (ilustração 1) a trajetória do saber, do momento em que o mesmo é produzido (Saber Científico), até chegar à porta da escola (Saber a ser Ensinado), e por fim um saber ensinado (dentro da Sala de Aula). Esta última etapa expressa o momento em que acontece o que Chevallard (1991) chamou de *trabalho interno de transposição*, que tem no professor o responsável por esse novo momento de transformação do saber.

Iustração1 - Esquema da trajetória do Saber na Transposição Didática



Nesse processo de transposição didática interna é o professor que vai transformar esse saber para os alunos, negociando com eles a sua gestão, os papéis que cada um deverá assumir, para que esse saber possa ser ensinado e aprendido (BRITO MENEZES, 2007).

Neste sentido o professor imbui o saber a ser ensinado com seus aspectos particulares, subjetivos. Que segundo Câmara dos Santos (1995, 1997a apud BRITO MENEZES, 2006) “o professor dá uma nova roupagem ao saber, cria um texto didático impregnado pela sua relação ao saber e pela sua subjetividade.”(p. 85).

[...]

REFERÊNCIAS

BASTOS, M. S. O Livro Didático nas aulas de Matemática: um estudo a partir das concepções dos professores. Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Recife: UFPE - ENEM, 2004.

BATISTA, A. A. G.; ROJO, R.; ZÚÑIGA, N. C. Produzindo livros didáticos em tempo de mudanças (1999-2002). In: Livros Didáticos de Língua Portuguesa: letramento e cidadania, Val, M. G. C.; Marcuschi, B. (Orgs.). Belo Horizonte: CEALE, 2003.

BELFORT, E. Reflexões sobre o Papel do Livro Texto em Matemática: um Carcereiro ou um Bom Companheiro?. Anais do XI Congresso Inter-Americano de Educação Matemática. Blumenau: FURB-CIAEM, 2003.

BRASIL, Ministério da Educação. (1997). Parâmetros Curriculares Nacionais - Introdução. Brasília: MEC.

BRASIL, Ministério da Educação. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias – Brasília, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, vol. 2, 2006. 135p.

BROUSSEAU, G. (1986) Fondementes e méthodes de la didactique dês mathématiques. Recherche en Didactique des Mathématiques, 7(2), 33-115.

BRITO MENEZES, A.P.A.. Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado não publicada, UFPE, 2006.

CHEVALLARD, Y. (1991) La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage.

_____________, BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2001) Estudar Matemáticas: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

SILVA, J. D.; FERNANDES, V. S. MATEMÁTICA. Coleção Horizontes. Ed. IBEP – ISBN 85-342-0288-5.

ANEXO B

Recorte do artigo de Teixeira e Passos publicado na revista Zetetiké – FE Unicamp – v. 21, n.39 – jan/jun 2013

Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau

Paulo Jorge Magalhães Teixeira e Claudio Cesar Manso Passos

[...] Brousseau (1986) define a Didática como uma relação específica entre conteúdos de ensino, a maneira como os alunos adquirem conhecimentos e os métodos. Em vista disso, ele desenvolveu uma teoria para compreender as relações que acontecem entre os alunos, o professor e o saber em sala de aula e, ao mesmo tempo, propôs situações que foram experimentadas e analisadas "cientificamente".

Em sua teoria, conhecida como Teoria das Situações Didáticas, docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente. Brousseau procedeu, assim, no sentido inverso de Comenius. Partiu de traços/vestígios da atividade cultural que produz precisamente tal conhecimento matemático a ser ensinado (um texto) e buscou estabelecer condições para que essa atividade possa ir ao encontro de um modo de aculturação para um jovem iniciante. Dos textos aos problemas, depois às situações matemáticas... e, enfim, às condições didáticas que permitem sustentar essas situações e fazê-las produzir a aculturação visada.

Para Brousseau (1986), a Didática da Matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

Poder-se-ia complementar que a Didática da Matemática seria, também, a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem de um saber matemático por parte de um sujeito. Brousseau (1986) estudou mais profundamente as condições que levariam um sujeito a usar seus conhecimentos para tomar decisões e a estudar as razões dessas tomadas de decisões. A teoria de Brousseau esclarece a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais no campo da Educação Matemática, permitindo, assim, a compreensão das interações sociais que ocorrem na sala de aula entre alunos e professores e das condições e da forma com que o conhecimento matemático pode ser apropriado e aprendido. Segundo ele, o controle dessas condições permitiria reproduzir e aperfeiçoar os processos de aquisição do conhecimento matemático escolar.

Esta teoria tem, como um dos objetivos primordiais da didática da matemática, a caracterização de um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações reprodutíveis, denominadas de situações didáticas, que estabelecem os fatores determinantes para a evolução do comportamento dos alunos. Assim, o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, aluno e saber. Algum erro cometido pelo aluno, nessa teoria, quando identificado, constitui-se como valiosa fonte de informação para a elaboração de boas questões ou para novas situações problemas que possam atender, mais claramente, os objetivos desejáveis.

Como consideração pertinente para este trabalho, tem-se a preocupação de criar condições favoráveis ao professor, no sentido de promover situações didáticas de ensino-aprendizagem que favoreçam a apreensão de conhecimentos por parte dos alunos, levando o professor a refletir sobre as etapas que Brousseau (1986) considera importantes para tal.

[...]

Inicialmente, é necessário definir alguns termos dentro da teoria de Brousseau (2008):
* Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado, reunindo as circunstâncias nas quais uma pessoa se encontra e as relações que a unem ao *milieu*.
* *Milieu* seria subsistema autônomo, antagônico ao sujeito.
*Situações didáticas, na década de 1970, eram aquelas que serviam para ensinar, sem que fosse levado em consideração o papel do professor. Posteriormente, "os modelos que descrevem as atividades do professor e do aluno [...] é todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor, o sistema educacional" (Brousseau, 2008, p.10).

Segundo Brousseau (1986), um dispositivo deve ser colocado em ação para que uma pessoa ensine um conhecimento e controle a sua aquisição. Tal dispositivo compreende um *milieu* material: peças de um jogo, uma prova, um problema, uma ficha, e regras de interações do aprendiz com aquele dispositivo — no caso, o jogo propriamente dito.

[...]

A Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), é um modelo teórico, apresentando conteúdos matemáticos, que ilustra algumas situações fundamentais e que começa a servir de fundamentação teórica para novos trabalhos de pesquisa em didática e para a prática de professores de matemática. É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes.

[...]

Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...]. O trabalho do aluno deveria, pelo menos, em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos.

Brousseau (1986) acredita que a forma didática em que se assenta a estruturação de uma sequência didática possa influenciar o aluno, em relação aos significados, de modo que ele consiga interiorizar os conteúdos subjacentes, quando a situação didática lhe é apresentada, permitindo a intervenção preparada.

[...]

No entanto, a atividade do professor não pode restringir-se a mera comunicação de um saber. Ao professor cabe a responsabilidade de apresentar um "bom problema", que seria o desencadeador para a busca de um novo saber; e, ao aluno, aceitar o desafio da resolução do problema, dando início ao processo de aprendizagem.

Na progressão da aprendizagem, há algumas variáveis sobre as quais o professor não exerce qualquer controle e outras, razoavelmente controláveis pela ação didática.

O aluno reconhece que aquele "bom problema" foi escolhido para que ele adquirisse um saber novo; percebe que a importância desse saber é justificada pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo, sem recorrer a razões didáticas. O aluno só terá adquirido esse saber, quando for capaz de aplicá-lo, por si próprio, às situações enfrentadas fora do contexto de ensino e na ausência de qualquer indicação intencional.

Assim, o professor não tem o controle direto das variáveis que incidirão na situação. Ao conjunto dessas variáveis podemos chamar, então, de situação adidática. Não é qualquer situação adidática que o aluno poderá resolver. Portanto, cabe ao professor lhe fornecer aquelas que estarão ao seu alcance. Assim, para Brousseau (1986), a situação adidática é representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem.

Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática.

A aprendizagem por adaptação é analisada por Brousseau (1986). Nela o aluno se depara com a necessidade de adequar a sua cognição a um determinado problema envolvido numa situação didática. Em contraposição, a aprendizagem formal evidencia a memorização, a técnica e os processos de automatismo para a compreensão verdadeira das ideias matemáticas.

A natureza específica do trabalho com a resolução de problemas evidencia a caracterização de uma situação didática. Em Educação Matemática, a apresentação de um saber poderá envolver algum tipo de problema, em razão de dificuldades específicas na relação entre o problema e o saber já construído e aquele a ser construído.

Na situação adidática, o aluno deve ser sempre estimulado a esforçar-se para superar seus limites, na direção de adquirir novas competências com o seu próprio esforço. Portanto, é necessário que o professor oportunize ao aluno o máximo de independência, para que ele possa desenvolver seus próprios mecanismos para a resolução de problemas por meio de suas elaborações e de seus conceitos. O professor deverá encontrar um equilíbrio na quantidade de informações que devem ser passadas ao aluno.

Tipologia das situações didáticas

Brousseau (1986) desenvolveu uma tipologia de situações didáticas, analisando as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática:
- situação didática de devolução: ato pelo qual o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, incluindo-o no jogo e assumindo os riscos por tal ato;
- situação didática de ação: o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
- situação didática de formulação: ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar;
- situação didática de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador. Essas quatro situações têm um componente psicológico favorável, uma vez que, engajando o aluno no seu processo de aprendizagem, elas o predispõem a ser o seu coautor, dentro de um projeto pessoal.

Ocorre ainda uma quinta situação – a de institucionalização –, em que a institucionalização do saber é destinada a estabelecer convenções sociais e a intenção do professor é revelada. O professor, aí, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. Há, portanto, uma real aprendizagem, reconhecida pelo professor. Brousseau (2008, p. 21) pondera que o papel da institucionalização é “prover sentido de um saber”.

O foco sobre a Teoria das Situações Didáticas deve privilegiar os procedimentos adotados dentro das situações de devolução, de ação, de formulação, de validação e, finalmente, de institucionalização. O professor, obedecendo àqueles procedimentos, não fornece, ele mesmo, a resposta, fazendo com que o aluno participe efetivamente da elaboração da cognição. O aluno pode, então, desenvolver novos saberes com base em suas experiências pessoais, com sua própria interação com o meio.

Referências

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (Org.). *Didática das matemáticas*. Tradução de M. J. Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v.9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. Les différents rôles du maître. *Bulletin de l' A.M.Q.*, Montréal, n. 23, p.14-24 1988.

COLL, C. et al. *O construtivismo na sala de aula*. São Paulo: Ática, 2001.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-object. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.