UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

FRANCIEL ARAÚJO DO NASCIMENTO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS: uma abordagem voltada para o ensino médio

Boa Vista, RR

2015

FRANCIEL ARAÚJO DO NASCIMENTO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS: uma abordagem voltada para o ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira

Boa Vista, RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

N244f Nascimento, Franciel Araújo do.
Funções trigonométricas complexas : uma abordagem voltada para o ensino médio / Franciel Araújo do Nascimento – Boa Vista, 2015.
112 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Matemática. 2 – Trigonometria. 3 – Ensino de matemática. 4 – Números complexos. I - Título. II – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU – 514.116

FRANCIEL ARAÚJO DO NASCIMENTO

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS: uma abordagem voltada para o ensino médio

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como pré-requisito para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Defendida em 22 de Abril de 2015, e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Joselito de Oliveira

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
Orientador / UFRR

Nilomar Vieira de Oliveira

Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
UFAM

Lindeval F. Lima

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
UFRR

A Deus,
por me presentear
com o dom da vida,
e à minha família
por ser minha fonte
de educação, força e fé.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela vida e por renovar minha força todos os dias para lutar.

Ao meu pai, Francisco do Nascimento, pela educação, pela força, paciência, atenção, apoio e por tudo, por ser um exemplo de pai e guerreiro.

A minha mãe, Maria Isabel de Carvalho Nascimento, pela educação, paciência, pelo carinho e amor que tem por mim, por ser também (sem dúvidas) um exemplo de mãe, batalhadora e guerreira.

Aos meus irmãos, Francinaldo, Francivaldo, Francilene e Francivan, pela força, respeito, por serem especiais e fazer parte da minha vida.

Agradeço ao professor Joselito de Oliveira por tê-lo como orientador deste trabalho, pelas cobranças constantes que me fez, por estar sempre presente, além de sua forte dedicação ao PROFMAT.

Agradeço a todos os professores presenciais do PROFMAT, Alberto Martin Martinez Castañeda, Aldo Vieira Pinto, Lindeval Fernandes de Lima, Luciano Ferreira Silva, Raimundo Nonato Araujo Pedro, Silvestre da Cruz Monteiro e também aos professores não presenciais que deram suas contribuições.

Agradeço ainda, aos companheiros de curso da turma PROFMAT 2013, Admilson, Clarissa, Eduardo, Fabiana, Joerk, Luiz Anderson, Ornélio, Osmilcy e alunos da turma 2012 pela parceria que tivemos na troca de conhecimento.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro durante o curso, à Universidade Federal de Roraima e ao PROFMAT/SBM, pela oportunidade de me tornar mestre.

Por fim, agradeço aos meus familiares e amigos pelo incetivo, e a todas àquelas pessoas que contribuíram de forma direta e indiretamente para que este trabalho fosse concluído.

”A beleza do mundo complexo na matemática vai além da imaginação".

RESUMO

Esta dissertação apresenta um estudo das funções trigonométricas com variável complexa com foco na educação básica. A motivação vem do fato de que se tem dado pouca importância aos números complexos no ensino médio, uma vez que a abordagem atual se restringe às definições, propriedades e exercícios de aplicação teórica e imediata, conforme consta, por exemplo, nos PCN'S. Apresenta-se uma abordagem matricial dos números complexos, sem perder de vista a maneira em que esse números são apresentados, como pares ordenados, na matemática básica. Em seguida, apresenta-se as funções com variáveis complexas, suas propriedades e consequentemente um estudo das funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante com variável complexa. Comparações entre algumas funções reais e complexas são realizadas. Finalmente, apresenta-se uma aplicação das funções trigonométricas complexa na Física.

Palavras-chave: Trigonometria. Números complexos. Trigonometria complexa.

ABSTRACT

This dissertation present a study of trigonometric functions with complex variable with a focus on basic education. The motivation comes from the fact that it has given little importance to complex numbers in school, since the current approach is restricted the settings, properties and theoretical exercises and immediate application, as shown, for example, the NCP'S. Presents a approach of the complex numbers through matrix, without losing sight of the way in which those numbers are presented, as ordered pairs, in the basic mathematic. It then presents the functions with complex variables, their properties and consequently a study of sine functions, cosine, tangent, cotangent, secant and cosecant with complex variable. Some comparisons between real and complex functions are performed. Finally, we present an application of complex trigonometric functions in physics.

Key-words: Trigonometry. Complex numbers. Complex trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática desempenha um papel muito importante na vida dos indivíduos, pois é capaz de desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, projetar e generalizar situações em que ela esteja presente. Também, representa uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Quando se trata de funções trigonométricas com variáveis reais, vemos o quão é relevante este conhecimento para resolver diversas situações problemas do nosso cotidiano. Isto é possível, pelo fato das funções trigonométricas possuir uma propriedade fundamental, que elas são periódicas. Por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais abundam no universo: movimento de planetas, som, corrente elétrica alternada, circulação do sangue, batimentos cardíacos etc (LIMA et al., 2006a).

Destacamos acima a grande relevância das funções trigonométricas reais que tem em nosso cotidiano, sendo uma ferramenta muito útil para resolver diversas situações problemas. Neste sentido não podemos deixar de destacar a importância das funções trigonométricas com variável complexa, uma vez que, tem também aplicabilidade.

Mas no contexto do ensino médio, os números complexos são trabalhados apenas como um novo conjunto numérico, abordando nada mais do que as definições, propriedades e exercícios de aplicação. De acordo com Brasil (2006, p. 122),

> Tradicionalmente, a Matemática do ensino médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas.

Levando em conta a citação acima, vemos que é dada pouca importância aos números complexos no ensino médio. Porém, sabemos que existem várias aplicações quando tratamos de funções trigonométricas de variáveis complexas, como por exemplo, na física, em diversos ramos da engenharia, eletrônica, aeronáutica e, claro, na matemática.

De acordo CHURCHILL (1975), teoria das funções de uma variável complexa é uma das partes básicas da análise matemática. Sua influência pode ser notada em quase todos os ramos da matemática. Além de ser proeminente na matemática pura e de possuir uma estrutura lógica elegante, a teoria representa um dos instrumentos mais poderosos dos matemáticos aplicados, engenheiros e físicos.

Portanto, como vimos acima que a teoria das funções de uma variável complexa é aplicável, temos como objetivo realizar no presente trabalho uma abordagem básica sobre os conteúdos relacionados ao tema, adaptando os assuntos de forma a facilitar a aprendizagem dos alunos do ensino médio. Dessa forma, será apresentado um estudo das funções trigonométricas complexas e suas aplicações voltada para o ensino médio.

Para melhor entendimento, o trabalho foi desenvolvido em três capítulos, sendo o primeiro dedicado a tratar sobre função de Euler, proposições importantes da trigonometria e funções trigonométricas reais, que serão utilizadas posteriormente.

No capítulo dois, foi feito um estudo sobre o conjunto dos números complexos. Iniciando com uma abordagem histórica, e em seguida, mostrando uma maneira diferente de definir números complexos, que é por meio de matrizes quadradas de ordem dois. Depois disso, lembramos a forma tradicional dos números complexos, por meio de pares ordenados.

No capítulo três, faremos um estudo sobre as funções de variáveis complexas em geral, definindo e mostrando suas propriedades, em seguida, abordaremos sobre o nosso objetivo principal, as funções trigonométricas com variáveis complexas. Mais precisamente, estudaremos as funções seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante. Finalmente, uma aplicação das funções trigonométricas, em Física, é apresentada.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo faremos um estudo sobre as funções trigonométricas em $\mathbb{R}$ como pré-requisito para o nosso objetivo principal, que é tratar sobre as funções trigonométricas com variável complexa.

1.1 FUNÇÃO DE EULER

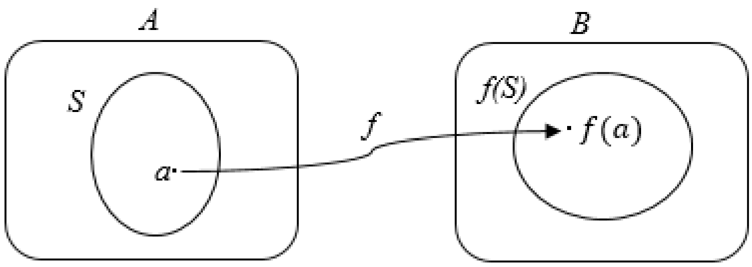
Para apresentarmos a definição da função de Euler[1], vamos relembrar antes o conceito de função. Assim, seja a seguinte definição.

Definição 1.1.1 (Função)**.** *Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B é uma lei de correspondência que associa cada elemento $a \in A$ a um único elemento $f(a)$ de B, chamado o valor de f em a.*

O conjunto A é chamado de domínio da função f e o B de contradomínio. A função f de A em B é indicada por $f : A \longrightarrow B$. Se $S \subset A$, define-se a imagem de S por f como sendo o conjunto $f(S) = \{f(a) : a \in S\}$. O conjunto $f(A)$ é chamado imagem de f, também denotada por $Im(f)$.

Veja a figura a seguir ilustrando a definição de função.

Figura 1: Função f de A em B



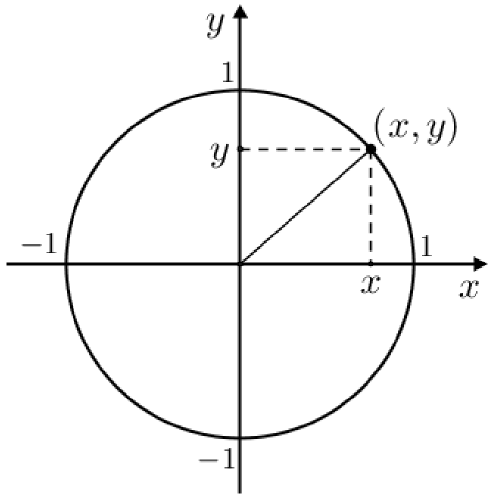
Fonte: Autor

A função f é dita ***sobrejetiva*** quando para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. E é denominada ***injetiva*** quando dados $x_1, x_2 \in A$ qualquer, com $x_1 \neq x_2$ implicar que $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, por fim, é chamada de ***bijetiva*** quando for sobrejetiva e injetiva ao mesmo tempo.

[1] Leonhard Euler foi um grande matemático e físico suíço, que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha. Euler fez importantes descobertas em campos variados em matemática, física e astronomia.

Segundo LIMA (2013, p. 220), para definir as funções trigonométricas em $\mathbb{R}$, devemos ter como ponto de partida a função de Euler. Para isso, vamos considerar uma circunferência unitária C no plano cartesiano centrada na origem. Temos, portanto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

Figura 2: Circunferência unitária centrada na origem



Fonte: Autor

Observação 1.1.1. *Note que, para todo ponto* $(x, y) \in C$ *tem-se* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *e* $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

A partir daí, sendo α um número real qualquer, define-se a função de Euler da seguinte maneira.

Definição 1.1.2. *A função de Euler* $E : \mathbb{R} \longrightarrow C$ *faz corresponder a cada número real* α *o ponto* $E(\alpha) = (x(\alpha), y(\alpha))$ *de* C *do seguinte modo:*

i) $E(0) = (1, 0)$;

ii) Se $\alpha > 0$, *percorremos sobre a circunferência* C, *a partir do ponto* $(1, 0)$, *um caminho de comprimento* α, *andando sempre no sentido anti-horário. O ponto final do caminho será chamado* $E(\alpha)$;

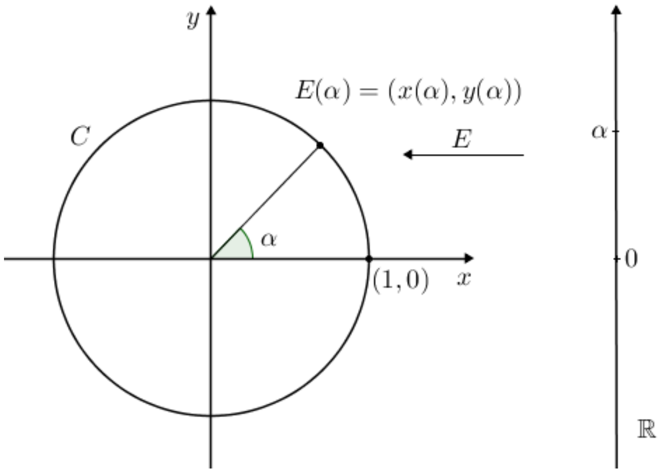
iii) Se $\alpha < 0$, $E(\alpha)$ *será a extremidade final de um caminho sobre* C, *de comprimento* $|\alpha|$, *que parte do ponto* $(1, 0)$ *e percorre* C *sempre no sentido horário.*

Proposição 1.1.1. *A função* E *dada na definição 1.1.2 é sobrejetiva.*

Demonstração. Devemos mostrar que para todo ponto $B \in C$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$. De fato, seja $B \in C$. Assim, temos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $|\alpha|$ é o comprimento do arco $\widehat{AB}$, onde $A = (1, 0)$. Portanto, segue da definição 1.1.2 que $E(\alpha) = B$, ou seja, E é sobrejetora. $\square$

É interessante observar como funciona a função de Euler geometricamente, ela pode ser vista como uma forma de enrolar a reta sobre a circunferência C de maneira que o ponto $0 \in \mathbb{R}$ coincida com o ponto $(1, 0) \in C$. Para melhor compreensão, analise a figura 3.

Figura 3: Função de Euler geometricamente



Fonte: Autor

Note que, quando α descreve um intervalo de comprimento t na reta, sua imagem $E(\alpha)$ percorre um arco na circunferência de comprimento t. Em particular, como a circunferência é unitária, temos que seu comprimento é 2π. Assim, quando α descreve um intervalo de comprimento 2π na reta, sua imagem $E(\alpha)$ da uma volta completa na circunferência voltando ao ponto de partida. Daí, podemos concluir que

$$E(\alpha + 2\pi) = E(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

e, mais geralmente, se $E(\alpha)$ realizar um número k de voltas (no sentido horário ou anti-horário), temos que, para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

É válido também a recíproca deste resultado. Mostraremos com mais detalhes este fato na proposição a seguir.

Proposição 1.1.2. *Sejam $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Então $E(\alpha') = E(\alpha)$ se, e somente se, $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Vamos provar primeiro que, se $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, então $E(\alpha') = E(\alpha)$.

i) De fato, suponha primeiramente que $\alpha < \alpha'$. Assim, tem-se que k é inteiro positivo. Logo, quando o ponto α descreve um intervalo de comprimento $2k\pi$ na reta, até

α', sua imagem $E(\alpha)$ dá k voltas sobre C no sentido anti-horário, retornando ao ponto de partida. Com isso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha),$$

ou seja,

$$E(\alpha') = E(\alpha).$$

Se $\alpha > \alpha'$, tem-se $k < 0$. Assim, quando o ponto α descreve um intervalo de comprimento de $2|k|\pi$ na reta, até α', sua imagem $E(\alpha)$ dá $|k|$ voltas sobre C no sentido horário, retornando ao ponto de partida. Com isso, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha),$$

ou seja,

$$E(\alpha') = E(\alpha).$$

Se $\alpha = \alpha'$, tem-se $k = 0$. Assim, segue diretamente do conceito de função que

$$E(\alpha') = E(\alpha).$$

Agora, vamos provar que, se $E(\alpha') = E(\alpha)$ então $\alpha' = \alpha + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

ii) Sejam $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ tais que $E(\alpha') = E(\alpha)$. Se $\alpha < \alpha'$, temos que quando um ponto p da reta varia de α a α' sua imagem $E(p)$ se desloca sobre C, no sentido anti-horário, partindo de $E(\alpha)$, dando um número inteiro k de voltas e retornando ao ponto de partida $E(\alpha) = E(\alpha')$. Assim, a distância total percorrida por $E(p)$ é igual a $2k\pi$, logo:

$$\alpha' = \alpha + 2k\pi,$$

pois o caminho percorrido por $E(p)$ é, por definição, igual à distância percorrida por p sobre a reta.

Se $\alpha > \alpha'$, temos que quando um ponto p da reta varia de α a α' sua imagem $E(p)$ se desloca sobre C, no sentido horário, partindo de $E(\alpha)$, dando um número inteiro $|k|$ de voltas e retornando ao ponto de partida $E(\alpha) = E(\alpha')$. Assim, a distância total percorrida por $E(p)$ é igual a $2|k|\pi$, logo:

$$\alpha' = \alpha + 2k\pi,$$

pois o caminho percorrido por $E(p)$ é, por definição, igual à distância percorrida por p sobre a reta.

Se $\alpha = \alpha'$, tem-se $k = 0$. Assim, e portanto $\alpha' = \alpha + 2 \cdot 0 \cdot \pi$.

□

Quando uma função apresenta características como visto acima, dizemos que ela é periódica. Definiremos a seguir, formalmente, uma função periódica.

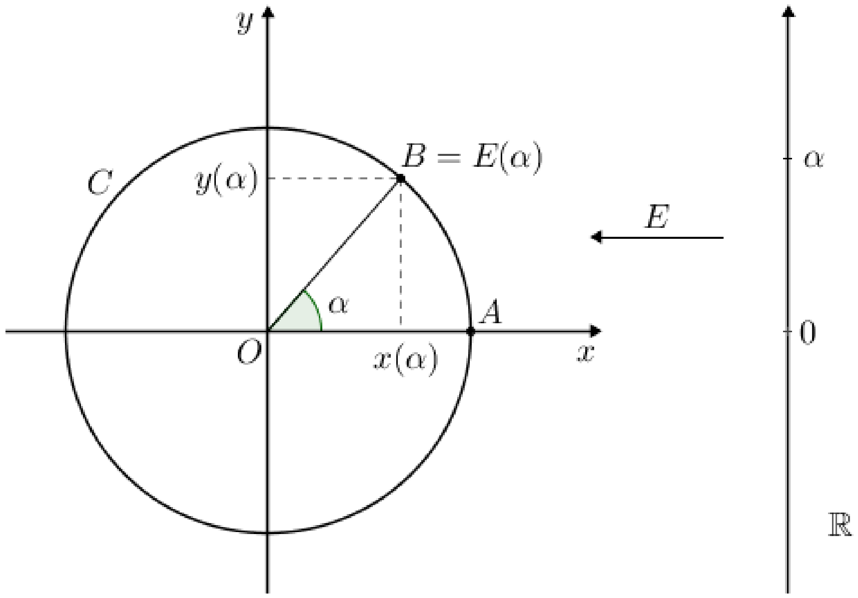
Definição 1.1.3. *Seja a função $f : A \longrightarrow B$. Dizemos que f é* ***periódica*** *de existe $p \in \mathbb{R}^*$, tal que*

$$f(x+p) = f(x), \forall x \in A.$$

Chamamos ***período de*** *f o menor valor positivo de p que satisfaz a condição acima.*

Agora, vamos considerar C a circunferência da figura 4, os pontos $A = (1, 0)$ e $B = (x, y)$ pertencentes a C e α a medida (no sentido horário ou anti-horário) do arco $\widehat{AB}$. Ponhamos $B = E(\alpha)$. Assim temos a seguinte definição.

Figura 4: Função de Euler geometricamente



Fonte: Autor

Definição 1.1.4.

$$\begin{aligned}
sen\,\alpha &= y(\alpha)\ (ordenada\ de\ B);\\
cos\,\alpha &= x(\alpha)\ (abscissa\ de\ B);\\
tg\,\alpha &= \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha},\ onde\ cos\,\alpha \neq 0;\\
cotg\,\alpha &= \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha},\ onde\ sen\,\alpha \neq 0;\\
sec\,\alpha &= \frac{1}{cos\,\alpha},\ onde\ cos\,\alpha \neq 0;\\
cossec\,\alpha &= \frac{1}{sen\,\alpha},\ onde\ sen\,\alpha \neq 0.
\end{aligned}$$

Observação 1.1.2. *Considerando a figura 4, temos:*

- *A unidade de medida do ângulo $A\hat{O}B$ é dada em radianos*[2]*, ou seja, o ângulo $A\hat{O}B$ mede α radianos.*

- *Pode-se ter $B = E(\alpha)$ com $\alpha < 0$. Portanto, esta forma de medida é orientada, isto é, um ângulo pode ter medida negativa.*

- *A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é determinada apenas por um múltiplo inteiro de 2π, visto que, $B = E(\alpha)$ implica que $B = E(\alpha + 2k\pi)$. Assim, por exemplo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de $1 - 2\pi$ radianos.*

Mostraremos agora algumas proposições importantes da trigonometria que serão utilizadas como recursos para demonstrar as proposições da seção seguinte que trata sobre funções trigonométricas em $\mathbb{R}$. Para isso, serão muito úteis as seguintes identidades trigonométricas, que podem ser encontradas em CARMO, MORGADO e WAGNER (2005, p. 57):

$$sen(\phi \pm \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta \pm sen\,\theta \cdot cos\,\phi$$

e

$$cos(\phi \pm \theta) = cos\,\phi \cdot cos\,\theta \mp sen\,\phi \cdot sen\,\theta,$$

para todo $\phi, \theta \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.1.3. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, temos as seguintes afirmações:*

1. $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha;$
2. $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha;$
3. $sen\,(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha;$
4. $cos\,(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha;$
5. $-1 \leqslant sen\,\alpha \leqslant 1;$
6. $-1 \leqslant cos\,\alpha \leqslant 1.$

Demonstração. De fato, temos que:

1. Para provar que $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha$, vamos considerar a seguinte identidade trigonométrica

$$sen(\phi - \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\theta \cdot cos\,\phi, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

[2] A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em um círculo (cujo o centro é o vértice do ângulo) e o comprimento do raio do círculo (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 33).

De fato, tomando $\phi = 0$ e $\theta = \alpha$, temos que:

$$\begin{aligned} sen(0-\alpha) &= sen\,0 \cdot cos\,\alpha - sen\,\alpha \cdot cos\,0 \\ &= 0 \cdot cos\,\alpha - sen\,\alpha \cdot 1 \\ &= -sen\,\alpha \end{aligned}$$

Portanto, $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

2. Para provar que $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$, vamos considerar a seguinte identidade trigonométrica

$$cos(\phi - \theta) = cos\,\phi \cdot cos\,\theta + sen\,\phi \cdot sen\,\theta, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, tomando $\phi = 0$ e $\theta = \alpha$, temos que:

$$\begin{aligned} cos(0-\alpha) &= cos\,0 \cdot cos\,\alpha + sen\,0 \cdot sen\,\alpha \\ &= 1 \cdot cos\,\alpha + 0 \cdot sen\,\alpha \\ &= cos\,\alpha \end{aligned}$$

Portanto, $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

3. Para provar que $sen\,(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha$, vamos considerar a seguinte identidade trigonométrica

$$sen\,(\phi + \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta + sen\,\theta \cdot cos\,\phi, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, tomando $\phi = \alpha$ e $\theta = 2\pi$, temos que

$$\begin{aligned} sen\,(\alpha + 2\pi) &= sen\,\alpha \cdot cos\,2\pi + sen\,2\pi \cdot cos\,\alpha \\ &= sen\,\alpha \cdot 1 + 0 \cdot cos\,\alpha \\ &= sen\,\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $sen(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4. Para provar que $cos\,(\alpha + 2\pi) = sen\,\alpha$, vamos considerar a seguinte identidade trigonométrica

$$cos\,(\phi + \theta) = cos\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\phi \cdot sen\,\theta, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, tomando $\phi = \alpha$ e $\theta = 2\pi$, temos que

$$\begin{aligned} cos\,(\alpha + 2\pi) &= cos\,\alpha \cdot cos\,2\pi - sen\,\alpha \cdot sen\,2\pi \\ &= cos\,\alpha \cdot 1 - sen\,\alpha \cdot 0 \\ &= cos\,\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $cos(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

5. Da observação 1.1.1 e da definição 1.1.4 segue o resultado.

6. Da observação 1.1.1 e da definição 1.1.4 segue o resultado.

$\square$

Observação 1.1.3. *Nos itens* 3 *e* 4 *da proposição anterior, temos de forma geral que, dado* $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$sen\,(\alpha + 2k\pi) = sen\,\alpha \quad \text{e} \quad cos\,(\alpha + 2k\pi) = cos\,\alpha, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Para $k = 1$ *temos o período do seno e cosseno, que será visto posteriormente.*

Proposição 1.1.4. *Dado* $y \in [-1, 1]$*, então existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $sen\,\alpha = y$*.*

Demonstração. Vamos mostrar inicialmente que para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in [-1, 1]$ tal que $B(\alpha, y)$ pertença à circunferência unitária de centro na origem.

Note que, dado $-1 \leqslant y \leqslant 1$, temos que $1 - y^2 \geqslant 0$, isto é, $\sqrt{1 - y^2} \geqslant 0$. Dessa forma, dado $y \in [-1, 1]$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha^2 + y^2 = 1$. De fato, tomemos $\alpha = \pm\sqrt{1 - y^2}$, Daí, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + y^2 &= (\pm\sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 \\ &= (1 - y^2) + y^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, o ponto $B(\alpha, y)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Assim, pela proposição 1.1.1, juntamente com a definição de seno, segue o resultado.

$\square$

Proposição 1.1.5. *Dado* $x \in [-1, 1]$*, então existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $cos\,\alpha = x$*.*

Demonstração. Vamos mostrar que dado $x \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $B(\alpha, y)$ pertença à circunferência unitária de centro na origem.

Da proposição 1.1.4, tomemos $\alpha = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Daí, temos que:

$$x^2 + \alpha^2 = 1.$$

Logo, o ponto $B(x, \alpha)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Assim, pela proposição 1.1.1, juntamente com a definição de cosseno, segue o resultado.

$\square$

Proposição 1.1.6. *Dado* $y \in \mathbb{R}$*, então existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $tg\,\alpha = y$*.*

Demonstração. Por definição, $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$, com $cos\,\alpha \neq 0$. Assim, basta mostrar que dado $y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = y.$$

De fato, note que para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} \in [-1,1]$ e $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 &= \frac{1+y^2}{1+y^2} \\ &= 1.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Portanto, dado $y \in \mathbb{R}$ tomemos $p = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ e $q = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$. Logo, de 1.1, o ponto $B(p,q)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Segue da proposição 1.1.1 que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$, onde E é dada na definição 1.1.2. Assim, temos por definição que:

$$cos\,\alpha = p \quad \text{e} \quad sen\,\alpha = q.$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned}\frac{q}{p} &= \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} \\ &= y.\end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = y,$$

ou seja,

$$tg\,\alpha = y.$$

□

Proposição 1.1.7. *Dado $y \in \mathbb{R}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $cotg\,\alpha = y$.*

Demonstração. Por definição, $cotg\,\alpha = \dfrac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha}$, com $sen\,\alpha \neq 0$. Assim, basta mostrar que dado $y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = y.$$

De fato, note que para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} \in [-1,1]$ e $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}} \neq 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 &= \frac{1+y^2}{1+y^2} \\ &= 1.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Portanto, dado $y \in \mathbb{R}$ tomemos $p = \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ e $q = \dfrac{1}{\sqrt{1+y^2}}$. Logo, de 1.2, o ponto $B(p,q)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Segue da proposição 1.1.1 que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$, onde E é dada na definição 1.1.2. Assim, temos por definição que:

$$cos\,\alpha = p \quad \text{e} \quad sen\,\alpha = q.$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} = y,$$

ou seja,

$$cotg\,\alpha = y.$$

$\square$

Para as proposições 1.1.8 e 1.1.9 a seguir, consideremos o seguinte conjunto:

$$A = \{a \in \mathbb{R} : |a| \geqslant 1\}.$$

Proposição 1.1.8. *Dado $y \in A$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $sec\,\alpha = y$.*

Demonstração. Por definição, $sec\,\alpha = \dfrac{1}{cos\,\alpha}$. Com isso, basta mostrar que dado $y \in A$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{cos\,\alpha} = y.$$

De fato, note que para todo $y \in A$, temos que $y^2 - 1 \geqslant 0$, ou seja, $\sqrt{y^2-1} \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant \sqrt{y^2-1} < |y|$. Assim, temos:

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{y^2-1}}{|y|} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{1}{|y|} \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Note ainda que, de 1.3, para todo $y \in A$ temos que $\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}, \dfrac{1}{y} \in [-1, 1]$ e $\dfrac{1}{y} \neq 0$. Além disso:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 &= \frac{y^2-1+1}{y^2} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Portanto, dado $y \in A$ tomemos $p = \dfrac{1}{y}$ e $q = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$. Logo, de 1.4, o ponto $B(p,q)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Segue da proposição 1.1.1 que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$, onde E é dada na definição 1.1.2. Assim, temos por definição de cosseno que:

$$cos\,\alpha = p \neq 0.$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{\frac{1}{y}} \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in A$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{cos\,\alpha} = y,$$

ou seja,

$$sec\,\alpha = y.$$

$\square$

Proposição 1.1.9. *Dado $y \in A$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $cossec\,\alpha = y$.*

Demonstração. Por definição, $cossec\,\alpha = \dfrac{1}{sen\,\alpha}$. Com isso, basta mostrar que dado $y \in A$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{sen\,\alpha} = y.$$

De fato, note que para todo $y \in A$, temos que $y^2 - 1 \geqslant 0$, ou seja, $\sqrt{y^2-1} \in \mathbb{R}$ e $0 \leqslant \sqrt{y^2-1} < |y|$. Assim, temos:

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{y^2-1}}{|y|} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{1}{|y|} \leqslant 1. \tag{1.5}$$

Note ainda que, de 1.5, para todo $y \in A$ temos que $\dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}, \dfrac{1}{y} \in [-1,1]$ e $\dfrac{1}{y} \neq 0$. Além disso:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 &= \frac{y^2-1+1}{y^2} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Portanto, dado $y \in A$ tomemos $p = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$ e $q = \dfrac{1}{y}$. Logo, de 1.6, o ponto $B(p,q)$ pertence à circunferência unitária centrada na origem. Segue da proposição 1.1.1 que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $E(\alpha) = B$, onde E é dada na definição 1.1.2. Assim, temos por definição de seno que:

$$sen\,\alpha = q \neq 0.$$

Logo, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} &= \frac{1}{\frac{1}{y}} \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, para cada $y \in A$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\frac{1}{sen\,\alpha} = y,$$

ou seja,

$$cossec\,\alpha = y.$$

$\square$

Proposição 1.1.10. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então temos as seguintes afirmações:*

1. $sen\,\alpha = -sen(\alpha + \pi)$
2. $cos\,\alpha = -cos(\alpha + \pi)$

Demonstração. Para provar 1, vamos considerar a seguinte identidade trigonométrica

$$sen\,(\phi + \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta + sen\,\theta \cdot cos\,\phi, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, tomando $\phi = \alpha$ e $\theta = \pi$, temos que:

$$\begin{aligned} sen\,(\alpha + \pi) &= sen\,\alpha \cdot cos\,\pi + sen\,\pi \cdot cos\,\alpha \\ &= sen\,\alpha \cdot (-1) + 0 \cdot cos\,\alpha \\ &= -sen\,\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $sen\,\alpha = -sen(\alpha + \pi), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Para provar 2, Consideremos agora a seguinte identidade trigonométrica

$$cos\,(\phi + \theta) = cos\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\phi \cdot sen\,\theta, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}.$$

De fato, tomando $\phi = \alpha$ e $\theta = \pi$, temos que:

$$\begin{aligned} cos\,(\alpha + \pi) &= cos\,\alpha \cdot cos\,\pi - sen\,\alpha \cdot sen\,\pi \\ &= cos\,\alpha \cdot (-1) + sen\,\alpha \cdot 0 \\ &= -cos\,\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $cos\,\alpha = -cos(\alpha + \pi), \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

□

Proposição 1.1.11. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $cos\,\alpha \neq 0$. Então temos a seguinte afirmação:*

$$tg\,\alpha = tg\,(\alpha + \pi)$$

Demonstração. De fato, consideramos a definição de tangente e a propriedade anterior, temos:

$$\begin{aligned} tg\,\alpha &= \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \\ &= \frac{-sen\,(\alpha + \pi)}{-cos\,(\alpha + \pi)} \\ &= \frac{sen\,(\alpha + \pi)}{cos\,(\alpha + \pi)} \\ &= tg\,(\alpha + \pi) \end{aligned}$$

Portanto, $tg\,\alpha = tg\,(\alpha + \pi), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, com $cos\,\alpha \neq 0$.

□

Proposição 1.1.12. *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $sen\,\alpha \neq 0$. *Então temos a seguinte afirmação:*

$$cotg\,\alpha = cotg\,(\alpha + \pi)$$

Demonstração. De fato, consideramos a definição de cotangente e a propriedade 1.1.10, temos:

$$\begin{aligned} cotg\,\alpha &= \frac{cos\,\alpha}{sen\,\alpha} \\ &= \frac{-cos\,(\alpha + \pi)}{-sen\,(\alpha + \pi)} \\ &= \frac{cos\,(\alpha + \pi)}{sen\,(\alpha + \pi)} \\ &= cotg\,(\alpha + \pi) \end{aligned}$$

Portanto, $cotg\,\alpha = cotg\,(\alpha + \pi), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, com $sen\,\alpha \neq 0$.

□

1.2 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{R}$

Nesta seção, temos como objetivo tratar sobre as funções trigonométricas seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante em $\mathbb{R}$. O estudo das referidas funções que serão dadas a seguir, pode ser visto em SANTOS (2014).

1.2.1 Função Seno

Definição 1.2.1. *A função seno* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = sen\,x.$$

Proposição 1.2.1. *A função seno é:*

1. *uma função ímpar;*
2. *função periódica de período* 2π*;*
3. *e possui imagem igual a* $[-1, 1]$.

Demonstração. Da definição 1.2.1, sendo f a função $f(x) = sen\,x$, com $x \in \mathbb{R}$, temos:

1. Devemos mostrar que f é ímpar, ou seja, $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, logo
$$f(-x) = sen\,(-x).$$

Da proposição 1.1.3, vimos que $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= -sen\,x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é ímpar.

2. Devemos mostrar que f é periódica de período 2π, ou seja, que $f(x+2\pi) = f(x)$,$\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, por definição, temos que:

$$f(x+2\pi) = sen\,(x+2\pi)$$

Da proposição 1.1.3, vimos que $sen\,(\alpha+2\pi) = sen\,\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, temos que

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= sen\,x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é uma função periódica de período 2π.

3. Devemos mostrar que $Im(f) = [-1,1]$. Assim, temos:

i) Provemos que $Im(f) \subset [-1,1]$, onde $Im(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. De fato, dado $y \in Im(f)$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = sen\,x$. Da proposição 1.1.3, temos que $-1 \leqslant sen\,\alpha \leqslant 1$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$. Assim

$$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

ou seja,

$$-1 \leqslant y \leqslant 1.$$

Logo,

$$Im(f) \subset [-1,1].$$

ii) Dado $y \in [-1,1]$, da proposição 1.1.4 existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $sen\,x = y$, isto é, $f(x) = y$. Daí

$$[-1,1] \subset Im(f).$$

Portanto, de i) e ii) segue que

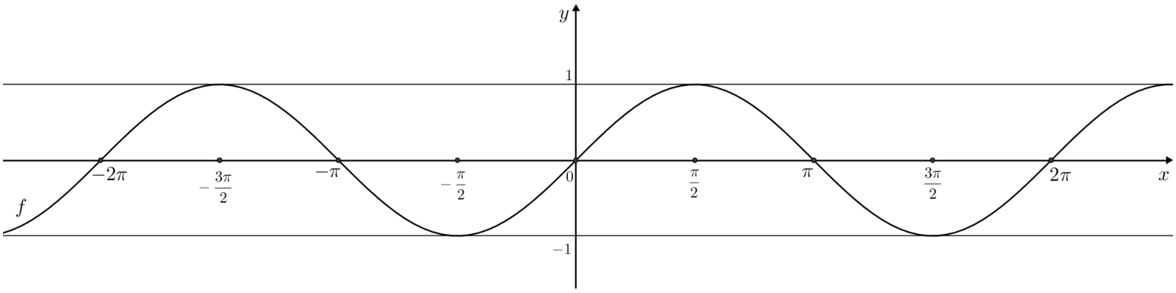
$$Im(f) = [-1,1].$$

□

Para construir o gráfico de cada função trigonométrica, utiliza-se recursos de cálculo, como por exemplo, conceitos de derivadas, máximos e mínimos, concavidade, ponto de inflexão, veja por exemplo LEITHOLD (1994). E isso, foge do objetivo do trabalho. Dessa forma, vamos utilizar um programa matemático denominado GeoGebra[3] para obter os gráficos das referidas funções. No caso da função seno, temos:

[3] GeoGebra é um software gratuito de matemática desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática, que pode ser baixado no site http://www.geogebra.org/.

Figura 5: Gráfico da função seno



Fonte: Autor

1.2.2 Função Cosseno

Definição 1.2.2. *A função cosseno* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é definida por:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = cos\, x.$$

Proposição 1.2.2. *A função cosseno é:*

1. *uma função par;*
2. *função periódica de período* 2π*;*
3. *e possui imagem igual a* $[-1, 1]$.

Demonstração. Da definição 1.2.2, seja f a função cosseno $f(x) = cos\, x$, com $x \in \mathbb{R}$, temos:

1. Devemos mostrar que f é uma função par, ou seja, $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, dado $x \in \mathbb{R}$, logo
$$f(-x) = cos\,(-x).$$
Da proposição 1.1.3, $cos\,(-\alpha) = cos\,\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos que
$$\begin{array}{rcl} f(-x) & = & cos\, x \\ & = & f(x) \end{array}$$
Portanto, f é par.

2. Devemos mostrar que f é periódica de período 2π, isto é, que $f(x + 2\pi) = f(x)$,$\forall x \in \mathbb{R}$. De fato, por definição, temos que:
$$f(x + 2\pi) = cos\,(x + 2\pi)$$

Da proposição 1.1.3, $cos\,(\alpha + 2\pi) = cos\,\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= cos\,x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Portanto, f é uma função periódica de período 2π.

3. Devemos mostrar que $Im(f) = [-1, 1]$. Assim, temos:

   i) Provemos que $Im(f) \subset [-1, 1]$, onde $Im(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$. De fato, dado $y \in Im(f)$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = cos\,x$. Da proposição 1.1.3, temos que $-1 \leqslant cos\,\alpha \leqslant 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Assim

   $$-1 \leqslant f(x) \leqslant 1,$$

   ou seja,

   $$-1 \leqslant y \leqslant 1.$$

   Logo,

   $$Im(f) \subset [-1, 1].$$

   ii) Dado $y \in [-1, 1]$, da proposição 1.1.5 existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $cos\,x = y$, isto é, $f(x) = y$. Daí

   $$[-1, 1] \subset Im(f).$$

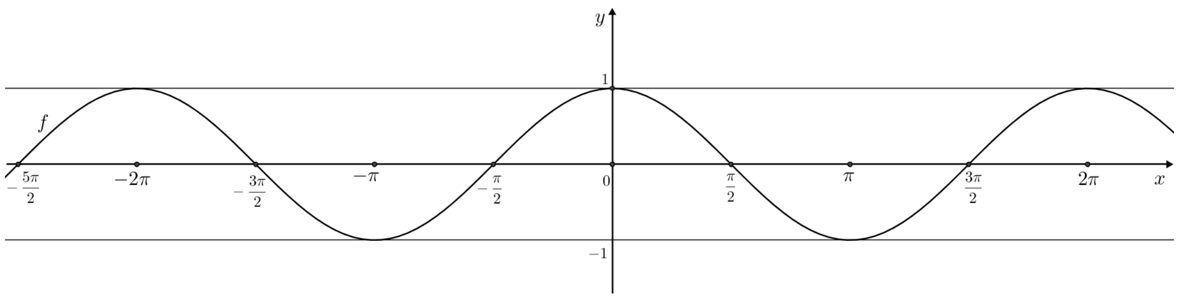
   Portanto, de i) e ii) segue que

   $$Im(f) = [-1, 1].$$

$\square$

A função cosseno tem o seguinte gráfico.

Figura 6: Gráfico da função cosseno



Fonte: Autor

1.2.3 Função Tangente

Sabemos que não existe a tangente de todos os números reais x, pois sendo, $tg\, x = \dfrac{sen\, x}{cos\, x}$, onde $cos\, x \neq 0$, devemos ter $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para definirmos a função tangente, vamos considerar o seguinte conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.2.3. *A função tangente $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:*

$$\forall x \in A, f(x) = tg\, x.$$

Proposição 1.2.3. *A função tangente é:*

1. *uma função ímpar;*

2. *sobrejetiva;*

3. *periódica de período π;*

4. *crescente em cada intervalo $I_k = \left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + k\pi\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pela definição de tangente, $f(x)$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{sen\, x}{cos\, x}. \tag{1.7}$$

1. Devemos mostrar que f é ímpar, ou seja, que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$. De fato, de 1.7, segue que
$$f(-x) = \frac{sen\,(-x)}{cos\,(-x)},$$
como a função seno é ímpar, $sen\,(-x) = -sen\, x$, e a função cosseno é par, $cos\,(-x) = cos\, x$, temos que
$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{sen\, x}{cos\, x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$
Portanto, f é ímpar.

2. Vamos mostrar que f é sobrejetiva, ou seja, mostrar que para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Da proposição 1.1.6, dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que $tg\, x = y$, isto é, $f(x) = y$.

3. Devemos mostrar que f é periódica de período π, isto é, $f(x + \pi) = f(x)$. De fato, da proposição 1.1.11, para cada $x \in A$, temos
$$tg\,(x + \pi) = tg\, x,$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= tg\,(x+\pi) \\ &= tg\,x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Portanto, $f(x+\pi) = f(x), \forall x \in A$.

4. Vamos mostrar que f é crescente no intervalo I_k. Assim, basta mostrar que dados $x_1, x_2 \in I_k$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$. De fato, sejam $x_1, x_2 \in I_k$ tais que $x_1 < x_2$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{sen\,x_1}{cos\,x_1} - \frac{sen\,x_2}{cos\,x_2} \\ &= \frac{sen\,x_1 \cdot cos\,x_2 - sen\,x_2 \cdot cos\,x_1}{cos\,x_1 \cdot cos\,x_2}. \end{aligned}$$

Da identidade trigonométrica $sen\,(\phi - \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\theta \cdot cos\,\phi, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{sen\,(x_1 - x_2)}{cos\,x_1 \cdot cos\,x_2}. \tag{1.8}$$

Como $x_1, x_2 \in I_k$, implica que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1 = a + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{e} \quad x_2 = b + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Da identidade trigonométrica $cos\,(\phi + \theta) = cos\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\phi \cdot sen\,\theta, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}$ e considerando que $cos\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, temos

$$\begin{aligned} cos\,x_1 &= = cos\,a \cdot cos\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - sen\,a \cdot sen\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= -sen\,a \cdot sen\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{aligned} \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} cos\,x_2 &= = cos\,b \cdot cos\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - sen\,a \cdot sen\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= -sen\,b \cdot sen\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned} \tag{1.10}$$

De 1.9 e 1.10, e do fato de $sen\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1$, temos que:

$$\begin{aligned} cos\,x_1 \cdot cos\,x_2 &= sen\,a \cdot sen\,b \cdot sen^2\,\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= sen\,a \cdot sen\,b, \end{aligned} \tag{1.11}$$

como $\frac{\pi}{2} + k\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} + k\pi$, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + k\pi &< a + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Longrightarrow 0 < a; \\ a + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &< b + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \Longrightarrow a < b; \\ b + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &< \frac{3\pi}{2} + k\pi \qquad \Longrightarrow b < \pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < a < b < \pi, \quad \text{ou seja,} \quad -\pi < a - b < 0.$$

De $0 < a < b < \pi$, segue que:

$$sen\, a > 0 \quad \text{e} \quad sen\, b > 0,$$

isto é,

$$sen\, a \cdot sen\, b > 0. \tag{1.12}$$

Assim, de 1.11 e 1.12, temos

$$cos\, x_1 \cdot cos\, x_2 > 0. \tag{1.13}$$

De $-\pi < a - b < 0$, e considerando que $x_1 - x_2 = a - b$, temos que

$$sen\,(x_1 - x_2) < 0. \tag{1.14}$$

Logo, de 1.13 e 1.14

$$\frac{sen\,(x_1 - x_2)}{cos\, x_1 \cdot cos\, x_2} < 0. \tag{1.15}$$

Portanto, de 1.8 e 1.15 temos que:

$$f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

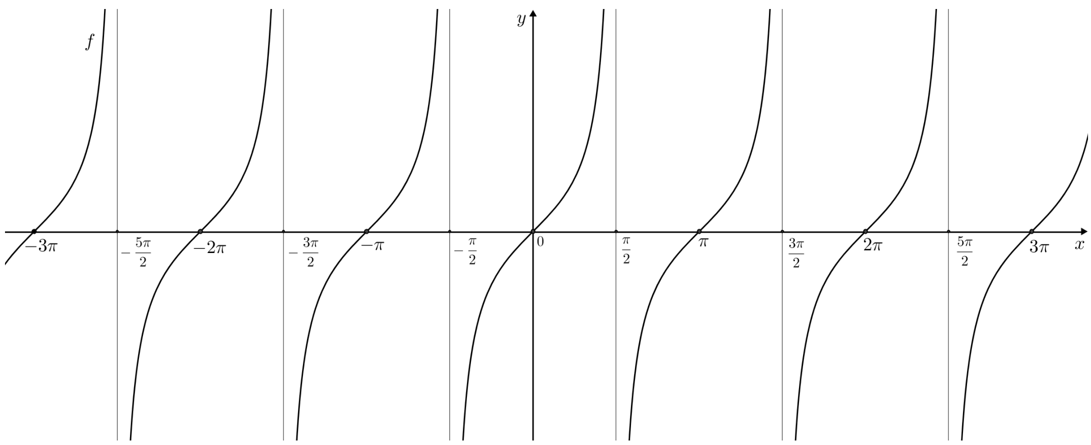
isto é,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

□

A função tangente tem o seguinte gráfico.

Figura 7: Gráfico da função tangente



Fonte: Autor

1.2.4 Função Cotangente

Sabemos que não existe a cotangente de todos os números reais x, pois sendo, $cotg\, x = \dfrac{cos\, x}{sen\, x}$, onde $sen\, x \neq 0$, devemos ter $x \neq k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para definirmos a função cotangente, vamos considerar o seguinte conjunto

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.2.4. *A função cotangente $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:*

$$\forall x \in B, f(x) = cotg\, x.$$

Proposição 1.2.4. *A função cotangente é:*

1. *uma função ímpar;*
2. *sobrejetiva;*
3. *periódica de período π;*
4. *decrescente no intervalo $I_k = (k\pi, (k+1)\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Pela definição de cotangente, $f(x)$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{cos\, x}{sen\, x}. \tag{1.16}$$

1. Vamos mostrar que f é ímpar, ou seja, que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in B$. De fato, de 1.16, segue que
$$f(-x) = \frac{cos\,(-x)}{sen\,(-x)},$$
como a função seno é ímpar, $sen\,(-x) = -sen\, x$, e a função cosseno é par, $cos\,(-x) = cos\, x$, temos que
$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{cos\, x}{sen\, x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$
Portanto, f é ímpar.

2. Vamos provar que f é sobrejetiva, isto é, que para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in B$ tal que $f(x) = y$. Da proposição 1.1.7, dado $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que $cotg\, x = y$, isto é,
$$f(x) = y.$$

3. Devemos mostrar que f é periódica de período π, ou seja, que $f(x+\pi) = f(x)$. De fato, da proposição 1.1.12, para cada $x \in B$, temos

$$cotg\,(x+\pi) = cotg\,x,$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= cotg\,(x+\pi) \\ &= cotg\,x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Portanto, $f(x+\pi) = f(x), \forall x \in B$.

4. Vamos mostrar que f é decrescente no intervalo I, isto é, que dados $x_1, x_2 \in I_k$ com $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. De fato, sejam $x_1, x_2 \in I_k$ tais que $x_1 < x_2$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{cos\,x_1}{sen\,x_1} - \frac{cos\,x_2}{sen\,x_2} \\ &= \frac{cos\,x_1 \cdot sen\,x_2 - cos\,x_2 \cdot sen\,x_1}{sen\,x_1 \cdot sen\,x_2}. \end{aligned}$$

Da identidade trigonométrica $sen\,(\phi - \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta - sen\,\theta \cdot cos\,\phi, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}$, temos que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{sen\,(x_2 - x_1)}{sen\,x_1 \cdot sen\,x_2}. \tag{1.17}$$

Como $x_1, x_2 \in I_k$, implica que existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$x_1 = a + k\pi \quad \text{e} \quad x_2 = b + k\pi, \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Da identidade trigonométrica $sen\,(\phi + \theta) = sen\,\phi \cdot cos\,\theta + cos\,\phi \cdot sen\,\theta, \forall \phi, \theta \in \mathbb{R}$ e considerando que $sen\,(k\pi) = 0$, temos

$$\begin{aligned} sen\,x_1 &= sen\,a \cdot cos\,(k\pi) - cos\,a \cdot sen\,(k\pi) \\ &= sen\,a \cdot cos\,(k\pi) \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} sen\,x_2 &= sen\,b \cdot cos\,(k\pi) - cos\,b \cdot sen\,(k\pi) \\ &= sen\,b \cdot cos\,(k\pi) \end{aligned} \tag{1.19}$$

De 1.18 e 1.19, e do fato de $cos\,(k\pi) = \pm 1$, temos que:

$$\begin{aligned} sen\,x_1 \cdot sen\,x_2 &= sen\,a \cdot sen\,b \cdot cos^2\,(k\pi) \\ &= sen\,a \cdot sen\,b, \end{aligned} \tag{1.20}$$

como $k\pi < x_1 < x_2 < (k+1)\pi$, temos que:

$$\begin{aligned} k\pi &< a + k\pi \Longrightarrow 0 < a; \\ a + k\pi &< b + k\pi \Longrightarrow a < b; \\ b + k\pi &< (k+1)\pi \Longrightarrow b < \pi. \end{aligned}$$

Logo,

$$0 < a < b < \pi, \quad \text{ou seja,} \quad 0 < b - a < \pi.$$

De $0 < a < b < \pi$, segue que:

$$sen\, a > 0 \quad \text{e} \quad sen\, b > 0,$$

isto é,

$$sen\, a \cdot sen\, b > 0. \tag{1.21}$$

Assim, de 1.20 e 1.21, temos

$$sen\, x_1 \cdot sen\, x_2 > 0. \tag{1.22}$$

De $0 < b - a < \pi$, e considerando que $x_2 - x_1 = b - a$, temos que

$$sen\, (x_2 - x_1) > 0. \tag{1.23}$$

Logo, de 1.22 e 1.23

$$\frac{sen\, (x_2 - x_1)}{sen\, x_1 \cdot sen\, x_2} > 0. \tag{1.24}$$

Portanto, de 1.17 e 1.24 temos que:

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

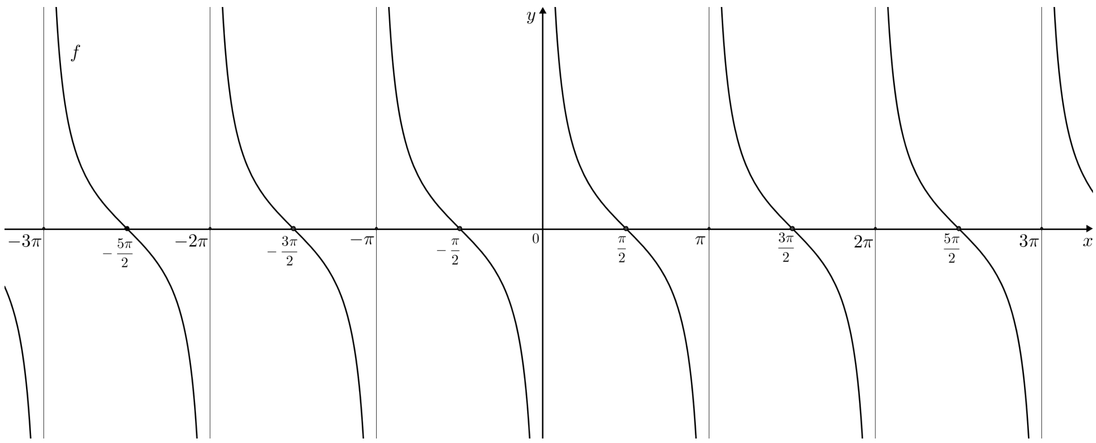
isto é,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

□

A função cotangente tem o seguinte gráfico.

Figura 8: Gráfico da função cotangente



Fonte: Autor

1.2.5 Função Secante

Sabemos que não existe a secante de todos os números reais x, pois sendo, $sec\,x = \dfrac{1}{cos\,x}$, onde $cos\,x \neq 0$, devemos ter $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para definirmos a função secante, vamos considerar o seguinte conjunto

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.2.5. *A função secante $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:*

$$\forall x \in A, f(x) = sec\,x.$$

Proposição 1.2.5. *A função secante é:*

1. *uma função par;*
2. *periódica de período 2π;*
3. $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Demonstração. Pela definição de secante, $f(x)$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{1}{cos\,x}. \tag{1.25}$$

1. Vamos provar que f é par, ou seja, que $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$. De fato, de 1.25, segue que
$$f(-x) = \frac{1}{cos\,(-x)},$$
como a função cosseno é par, $cos\,(-x) = cos\,x$, temos que
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{cos\,x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$
Portanto, f é par.

2. Dado $x \in A$. Pela proposição 1.1.3 a função cosseno é periódica de período 2π. Assim,
$$cos\,(x + 2\pi) = cos\,x \tag{1.26}$$
Segue de 1.25 e 1.26 que $f(x + 2\pi) = f(x)$. Logo, f é periódica de período 2π.

3. Queremos mostrar que $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

   a) Dado $y \in Im(f)$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$. Da proposição 1.1.3, temos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant cos\,x \leqslant 1$, ou seja:

$$-1 \leqslant cos\, x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leqslant cos\, x \leqslant 1.$$

Sabemos que, $cos\, x = 0$ se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; $cos\, x = -1$ se, e somente se, $x = k\pi$ e k inteiro ímpar; e $cos\, x = 1$ se, e somente se, $x = k\pi$ e k é um inteiro par. Assim, dado $x \in A$, então:

$$-1 \leqslant cos\, x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < cos\, x \leqslant 1.$$

De $-1 \leqslant cos\, x < 0$, temos:

$$\frac{1}{cos\, x} \leqslant -1. \tag{1.27}$$

De $0 < cos\, x \leqslant 1$, temos:

$$\frac{1}{cos\, x} \geqslant 1. \tag{1.28}$$

Substituindo 1.25 em 1.27 e 1.28, conclui-se, respectivamente, que, dado $x \in A$,

$$f(x) \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad f(x) \geqslant 1,$$

isto é, $y = f(x) \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Logo, $Im(f) \subset (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) Dado $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ então $y \leqslant -1$ ou $y \geqslant 1$, ou seja, $|y| \geqslant 1$. Pela proposição 1.1.8 existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $sec\, x = y$, ou seja, $y = f(x)$. Logo, $y \in Im(f)$, daí

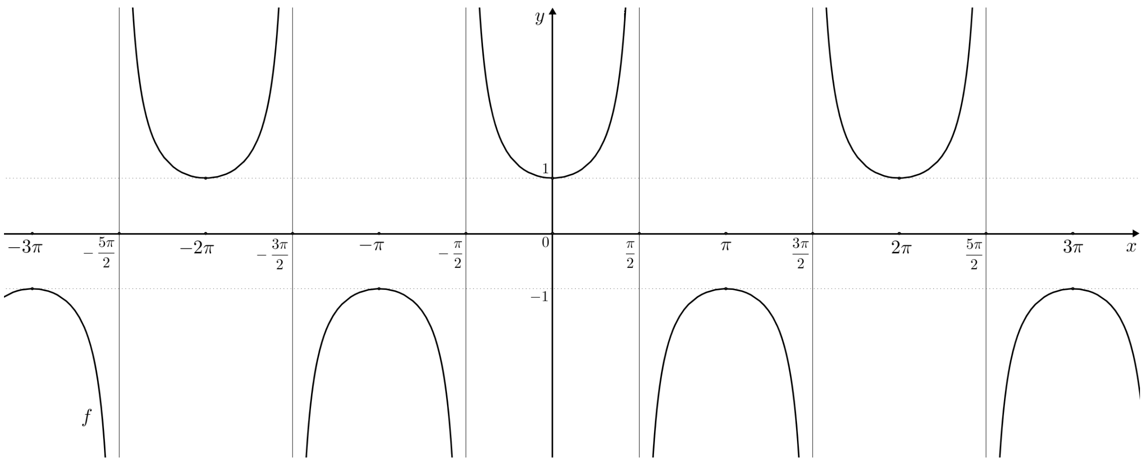
$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \subset Im(f).$$

De (a) e (b) segue que $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$\square$

A função secante tem o seguinte gráfico.

Figura 9: Gráfico da função secante



Fonte: Autor

1.2.6 Função Cossecante

Sabemos que não existe a cossecante de todos os números reais x, pois sendo, $cossec\, x = \dfrac{1}{sen\, x}$, onde $sen\, x \neq 0$, devemos ter $x \neq k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Assim, para definirmos a função cossecante, vamos considerar o seguinte conjunto

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Definição 1.2.6. *A função cossecante $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por:*

$$\forall x \in B, f(x) = cossec\, x.$$

Proposição 1.2.6. *A função cossecante é:*

1. *uma função ímpar;*
2. *periódica de período 2π;*
3. *$Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.*

Demonstração. Pela definição de cossecante, $f(x)$ pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{1}{sen\, x}. \tag{1.29}$$

1. Vamos mostrar que f é ímpar, isto é, que $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in B$. De fato, de 1.29, segue que
$$f(-x) = \frac{1}{sen\,(-x)},$$
como a função seno é ímpar, $sen\,(-x) = -sen\, x$, temos que
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{-sen\, x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$
Portanto, f é ímpar.

2. Dado $x \in B$. Pela proposição 1.1.3 a função seno é periódica de período 2π. Assim,
$$sen\,(x + 2\pi) = sen\, x \tag{1.30}$$
Segue de 1.29 e 1.30 que $f(x + 2\pi) = f(x)$. Logo, f é periódica de período 2π.

3. Queremos mostrar que $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

   a) Dado $y \in Im(f)$ existe $x \in B$ tal que $y = f(x)$. Da proposição 1.1.3, temos que, para cada $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant sen\, x \leqslant 1$, ou seja:

$$-1 \leqslant sen\, x \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leqslant sen\, x \leqslant 1.$$

Sabemos que, $sen\, x = 0$ se, e somente se, $x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$; $sen\, x = -1$ se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e k inteiro ímpar; e $sen\, x = 1$ se, e somente se, $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ e k é um inteiro par. Assim, dado $x \in A$, então:

$$-1 \leqslant sen\, x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < sen\, x \leqslant 1.$$

De $-1 \leqslant sen\, x < 0$, temos:

$$\frac{1}{sen\, x} \leqslant -1. \tag{1.31}$$

De $0 < sen\, x \leqslant 1$, temos:

$$\frac{1}{sen\, x} \geqslant 1. \tag{1.32}$$

Substituindo 1.29 em 1.31 e 1.32, conclui-se, respectivamente, que, dado $x \in A$,

$$f(x) \leqslant -1 \quad \text{ou} \quad f(x) \geqslant 1,$$

isto é, $y = f(x) \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Logo, $Im(f) \subset (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

b) Dado $y \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ então $y \leqslant -1$ ou $y \geqslant 1$, ou seja, $|y| \geqslant 1$. Pela proposição 1.1.9 existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $cossec\, x = y$, ou seja, $y = f(x)$. Logo, $y \in Im(f)$, daí

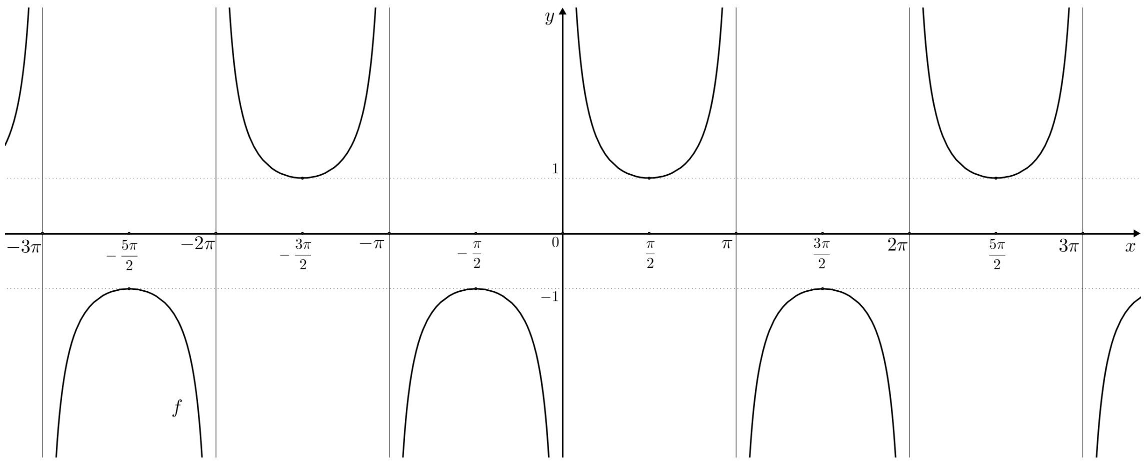
$$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \subset Im(f).$$

De (a) e (b) segue que $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

□

A função cossecante tem o seguinte gráfico.

Figura 10: Gráfico da função cossecante



Fonte: Autor

2 NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 UM POUCO DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Para resolvermos a equação do 2º grau $x^2 - 4x + 13 = 0$, utilizando a fórmula de Bháskara, encontramos:

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{-36}}{2}$$

Para determinar o valor das raízes, é preciso calcular a raiz quadrada de -36. Em $\mathbb{R}$, porém, isso é impossível, pois não existe um número a real tal que[1]

Muitos pensam que os números complexos surgiram com a finalidade de resolver equações do segundo grau que recai no caso em que o descriminante é negativo, mas esta concepção não é verídica. O maior passo que foi dado para que fosse admitida sua existência foi com o resultado dos estudos sobre raízes de equações do terceiro grau.

Uma construção abstrata presente nos vários domínios da matemática, os números complexos foram um grande desafio imposto aos matemáticos. No entanto, como justificar sua existência e constituição?

Um primeiro avanço importante foi dado pelo matemático Girolamo Cardano (1501-1576) em seu livro "*Ars Magna*" publicado em 1545, na qual mostrou um método de resolver equações do terceiro grau, que hoje é denominada Fórmula de Cardano. Muitos autores chamam a Fórmula de Cardano-Tartaglia, pois a fórmula foi descoberta por Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) que revelou para Cardano sob o juramento de que não publicaria antes que Tartaglia o fizesse.

Na obra de Cardano, a fórmula foi definida para equações do terceiro grau do tipo $x^3 + ax + b = 0$, que continha também uma maneira de reduzir uma equação da forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ para $y^3 + py + q = 0$, para isso, basta fazer $x = y - \frac{a}{3}$. E ainda mais, a obra continha outra notável descoberta, devido a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano: um método para reduzir equações do quarto grau a equações cúbicas. Assim, temos que as soluções de equações do terceiro e quarto grau gira em torno da fórmula de Cardano, que é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

[1] O produto de dois números reais de mesmo sinal, resulta sempre em um número real positivo, isso pode ser visto em (LIMA, 2012, p. 65).

O matemático Rafael Bombelli (1526-1572) estudou profundamente o trabalho de Cardano, e ao aplicar a fórmula para a resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, obteve o valor $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Como sabia que 4 era uma raiz dessa equação, Bombelli concluiu que essa raiz poderia ser obtida pela fórmula, desde que se calculasse $\sqrt{-121}$. Embora não se sentisse a vontade em relação às raízes quadradas de números negativos, ele operou livremente elas, aplicando as regras usuais da Álgebra (LIMA et al., 2006b, p. 160). No caso, Bombelli mostrou que:

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3\cdot 2\cdot(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\
&= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\
&= 2 + 11\sqrt{-1} \\
&= 2 + \sqrt{-121}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, encontrou $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. A partir daí, os matemáticos admitiram a existências de números da forma $a + b\sqrt{-1}$, em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$. Bombelli trabalhava sistematicamente com a quantidade $\sqrt{-1}$, que hoje é chamada de unidade imaginária.

O matemático Leonhard Euler (1707-1783), deu também suas contribuições para constituição dos números complexos. Num trabalho de 1777, mas só publicado em 1794, definiu $\sqrt{-1}$ como sendo i, de forma que $i^2 = -1$. Essa mesma notação foi utilizada anos depois (1801) pelo matemático alemão Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855), e dada sua autoridade, esse notação acabou se tornado padrão.

Responsável pela legitimação de toda teoria estudada nos dias de hoje e inventor do termo "números complexos", Gauss foi o primeiro matemático a ter uma ideia mais clara sobre os números. Em 1831, publicou um trabalho detalhado sobre os números complexos, apoiando-se na representação desses números no plano cartesiano. Antes disso, matemáticos como o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam tratado sobre a representação dos complexos no plano, mas por serem pouco reconhecidos, seus trabalhos não alcançaram notoriedade.

Finalmente, em 1837, o irlandês Hamilton (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) finalizou as descobertas, definindo os números complexos como sendo pares ordenados de números reais (a, b), e definindo também a forma de somar e multiplicar (SOARES, 2001, p. 5). Hamilton reescreveu o número complexo (a, b) em outra forma, denominada forma algébrica do número complexo, que é dado por $a + bi$, onde a, b são reais e $i = \sqrt{-1}$.

2.2 DEFINIÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS

Vamos iniciar o estudo dos números complexos da forma tradicional, que é por meio de pares ordenados de números reais. Temos também, uma outra maneira interessante que encontramos na literatura, para tratar sobre números complexos, que é por meio de matrizes quadradas de ordem dois. Essa abordagem matricial dos números complexos encontra-se no apêndice A.

Agora, vejamos a definição de números complexos por meio de pares ordenados.

Definição 2.2.1. *Um número complexo z é um par ordenado de números reais $z = (a, b)$ satisfazendo as seguintes operações de soma e produto. Assim, dados $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ então:*

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$

De acordo com esta definição, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2.1. *A soma e o produto têm as seguintes propriedades para todo número complexo $z = (a, b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. *Associatividade da soma*

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

2. *Comutatividade da soma*

$$(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$$

3. *Elemento neutro da soma*

$$(a, b) + (0, 0) = (a, b)$$

4. *Inverso aditivo*

$$(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$$

5. *Associatividade do produto*

$$[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (e, f) = (a, b) \cdot [(c, d) \cdot (e, f)]$$

6. *Comutatividade do produto*

$$(a, b) \cdot (c, d) = (c, d) \cdot (a, b)$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (à esquerda e à direita)*

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$$

8. *Elemento neutro do produto*

$$(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$$

9. *Inverso multiplicativo*

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Demonstração. De fato, temos:

1. *Associatividade da soma*

$$\begin{aligned}[(a,b)+(c,d)]+(e,f) &= (a+c,b+d)+(e,f)\\ &= [(a+c)+e,(b+d)+f]\\ &= [a+(c+e),b+(d+f)]\\ &= (a,b)+(c+e,d+f)\\ &= (a,b)+[(c,d)+(e,f)]\end{aligned}$$

2. *Comutatividade da soma*

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ &= (c+a,d+b)\\ &= (c,d)+(a,d)\end{aligned}$$

3. *Elemento neutro da soma*

   $(0,0)$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}(a,b)+(0,0) &= (a+0,b+0)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

4. *Inverso aditivo*

   $-(a,b)=(-a,-b)$ é o inverso aditivo. De fato,

$$\begin{aligned}(a,b)+(-a,-b) &= (a+(-a),b-(-b))\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

5. *Associatividade da produto*

$$\begin{aligned}
[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f) \\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e] \\
&= [ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce] \\
&= [a(ce-df)-b(de+cf), a(de+cf)+b(ce-df)] \\
&= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) \\
&= (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]
\end{aligned}$$

6. *Comutatividade do produto*

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc) \\
&= (ca-db, cb+da) \\
&= (c,d)\cdot(a,b)
\end{aligned}$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (à esquerda e à direita)*

a) Distributividade à esquerda

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] &= (a,b)\cdot(c+e, d+f) \\
&= [a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)] \\
&= [ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be] \\
&= [(ac-bd)+(ae-bf), (ad+bc)+(af+be)] \\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be) \\
&= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

b) Distributividade à direita

$$\begin{aligned}
[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) &= (a+c, b+d)\cdot(e,f) \\
&= [(a+c)e-(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e] \\
&= [ae+ce-bd-df, af+cf+be+de] \\
&= [(ae-bf)+(ce-df), (af+be)+(cf+de)] \\
&= (ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de) \\
&= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

8. *Elemento neutro do produto*

$(1,0)$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot(1,0) &= (a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1) \\
&= (a,b)
\end{aligned}$$

9. *Inverso multiplicativo*

Dado $z = (a, b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, mostremos que existe $z^{-1} = (x, y)$ tal que $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$. De fato:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad e \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Portanto, $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ é o inverso multiplicativo. De fato,

$$\begin{aligned}
(a, b) \cdot [(a, b)^{-1}] &= (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \\
&= \left(a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}, a \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right) \\
&= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) \\
&= (1, 0)
\end{aligned}$$

□

2.3 FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Primeiramente, considerando o conjunto $A = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.3.1. *A função $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ definida por $\phi(x) = (x, 0)$ é:*

i. *Bijetiva;*

ii. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$*, para todo* $a,\ b \in \mathbb{R}$*;*

iii. $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$*, para todo* $a,\ b \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Para provar **i**, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva e injetiva.

1. todo par $(x, 0) \in A$ é o correspondente, segundo ϕ, de $x \in \mathbb{R}$ (ou seja, ϕ é sobrejetiva);

2. dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, os seus correspondentes $(x, 0) \in A$ e $(y, 0) \in A$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (ou seja, ϕ é injetiva).

Prova de **ii**

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= (a+b,0)\\ &= (a,0)+(b,0)\\ &= \phi(a)+\phi(b)\end{aligned}$$

Prova de **iii**

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (ab,0)\\ &= (a\cdot b-0\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 0)\\ &= (a,0)\cdot(b,0)\\ &= \phi(a)\cdot\phi(b)\end{aligned}$$

□

Devido ao fato de ϕ ser uma aplicação bijetiva $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ que conserva as operações de adição e multiplicação, concluímos que os números complexos da forma $(a,0)$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação à soma e ao produto. Assim, identificamos o número real a, com o par ordenado $a=(a,0)$. Dessa forma, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Agora, o número complexo $(0,1)$ é chamado de ***unidade imaginária*** e é representado por i. Notemos que:

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0) = (-1,0) = -1$$

Portanto,

$$i^2 = -1.$$

Observação 2.3.1 (Potências de i)**.** *Seja i a unidade imaginária, então temos as potências de i:*

$$\begin{array}{lllll} i^0=1 & i^4=1 & i^8=1 & i^{12}=1 & \\ i^1=i & i^5=i & i^9=i & i^{13}=i & \vdots \\ i^2=-1 & i^6=-1 & i^{10}=-1 & i^{14}=-1 & \vdots \\ i^3=-i & i^7=-i & i^{11}=-i & i^{15}=-i & \end{array} \tag{2.1}$$

Note que, as potências de i vão em ciclos, $1, i, -1$ e $-i$. Assim, dado $n\in\mathbb{N}$, existe uma maneira prática para determinar i^n. De fato, como $n\in\mathbb{N}$, existem $q,r\in\mathbb{N}$ tal que $n=4q+r$, ou seja, divisão de n por 4. Assim, temos:

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= i^{4q} \cdot i^r \\ &= (i^4)^q \cdot i^r \\ &= 1 \cdot i^r \\ &= i^r \end{aligned}$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Vamos obter agora a forma algébrica dos números complexos. Assim, dado um número complexo qualquer $z = (a, b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

ou seja,

$$z = a + bi.$$

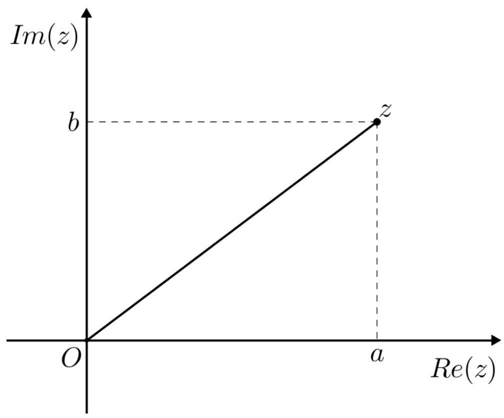
Logo, o par (a, b) e a expressão $a + bi$ representam o mesmo número complexo. O número real a é chamado parte real de z e o número real b é chamado parte imaginária de z. Em símbolos indica-se por: $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Observação 2.3.2. *Todo número complexo cuja parte imaginária é nula, denomina-se **real**. E todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não, é chamado de **imaginário puro**.*

2.4 PLANO DE ARGAND-GAUSS

Representando o número complexo $z = a + bi$ geometricamente, temos:

Figura 11: Representação geométrica de z



Fonte: Autor

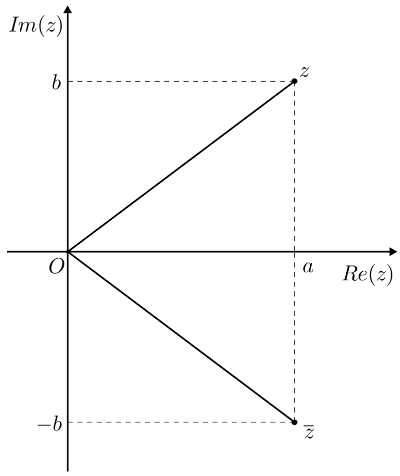
O plano formado pelos dois eixos é chamado de Plano de *Argand-Gauss*, onde o eixo horizontal é chamado de *real* e o vertical de *imaginário*. Esta representação geométrica de z pode ser visto em NETO (2005, p. 4).

2.5 CONJUGADO

Definição 2.5.1. *Dado o número complexo $z = a + bi$, o conjugado de z é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.*

Observe que, geometricamente, $\overline{z}$ significa a reflexão do eixo horizontal (Veja figura 7).

Figura 12: Representação geométrica de $\overline{z}$

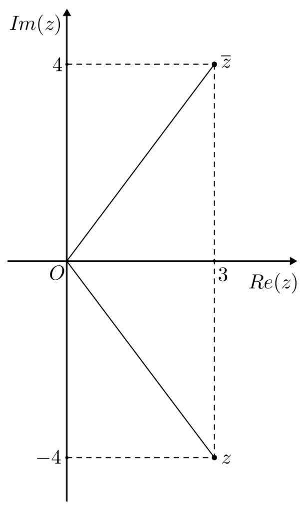


Fonte: Autor

Exemplo 2.5.1.

$$z = 3 - 4i \quad \Rightarrow \quad \overline{z} = 3 + 4i$$

Figura 13: Representação geométrica



Fonte: Autor

Teorema 2.5.1. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Então, temos:*

1. $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$
2. $z - \overline{z} = 2 \cdot Im(z) \cdot i$
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Demonstração. Fazendo $z = a + bi$, temos:

1. $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \cdot Re(z)$
2. $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \cdot Im(z) \cdot i$
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow (a + bi = a - bi) \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

□

Teorema 2.5.2. *Dados z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Demonstração. Fazendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

1. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
   $\overline{z_1 + z_2} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
   $$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - adi) + (-cbi + bdi^2) \\ &= a(c - di) - bi(c - di) \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

□

2.6 USO DO CONJUGADO NA DIVISÃO

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_2 \neq 0$, números complexos, então temos o seguinte:

i) $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2$

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ca+db}{a^2+b^2} + \frac{da-cb}{a^2+b^2}i$

Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 2.6.1. *Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_2 \neq 0$, para determinar $\frac{z_1}{z_2}$ basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.*

Exemplo 2.6.1.

$$\frac{2+3i}{5+4i} = \frac{(2+3i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} = \frac{10-8i+15i-12i^2}{25-16i^2} = \frac{10+7i+12}{25+16} = \frac{22+7i}{41} = \frac{22}{41} + \frac{7}{41}i$$

2.7 MÓDULO

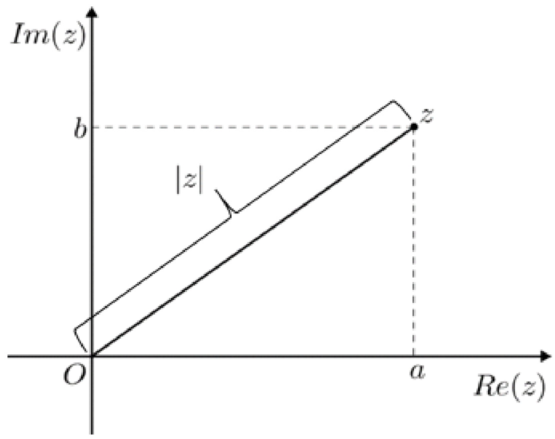
Definição 2.7.1. *Dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **módulo** de z ao número real não negativo*

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Podemos também denotar por ρ ou r o módulo de z, ao invés de $|z|$.

Observe que, geometricamente, $|z|$ significa a distância da origem até o ponto (a, b) do plano, que é representado pelo número complexo $z = a + bi$ (Veja figura 8).

Figura 14: Representação geométrica de $|z|$



Fonte: Autor

Exemplo 2.7.1.

$$z = 3 - 4i \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

Teorema 2.7.1. *Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos:*

1. $|z| \geqslant 0$

2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3. $|z| = |\overline{z}|$

4. $Re(z) \leqslant |Re(z)| \leqslant |z|$

5. $Im(z) \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$

Demonstração. Fazendo $z = a + bi$, temos:

1. $a^2 \geqslant 0$ e $b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 0 \Rightarrow |z| \geqslant 0$

2. $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$

3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$

4. $a \geqslant 0 \Rightarrow a = |a| \quad$ e $\quad a < 0 \Rightarrow a < |a|$, logo, $a \leqslant |a|$.
   $a^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leqslant |z|$.
   Portanto, como $a \leqslant |a| \quad$ e $\quad |a| \leqslant |z|$, segue que:
   $$a \leqslant |a| \leqslant |z|$$

5. $b \geqslant 0 \Rightarrow b = |b| \quad$ e $\quad b < 0 \Rightarrow b < |b|$, logo, $b \leqslant |b|$.
   $b^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |b| \leqslant |z|$.
   Portanto, como $b \leqslant |b| \quad$ e $\quad |b| \leqslant |z|$, segue que:
   $$b \leqslant |b| \leqslant |z|$$

$\square$

Teorema 2.7.2. *Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:*

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$

3. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

Demonstração. Fazendo $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

1. Como $z\overline{z} = |z|^2$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, segue-se que
   $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_z|^2$, logo:
   $$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

2. Notemos inicialmente que:

$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{c-di}{(c+di)(c-di)}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z_2|}$$

Temos, então:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

3. De fato,

$$\begin{aligned} |z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \end{aligned}$$

como

$$|z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1+z_2|^2)$$

logo,

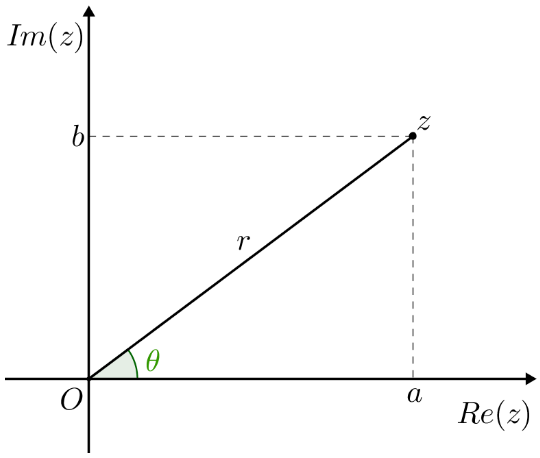
$$|z_1+z_2|^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|.$$

□

2.8 FORMA TRIGONOMÉTRICA

Consideremos o número complexo $z = a + bi \neq 0$. Assim, podemos representar z no plano através do ponto $P(a, b)$. Seja θ o ângulo formado com o eixo real positivo e o segmento $\overline{OP}$ no sentido anti-horário, onde O é a origem do sistema (Veja figura15).

Figura 15: Forma trigonométrica de z



Fonte: Autor

Daí, temos:

$$cos\,\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow a = rcos\,\theta \quad e \quad sen\,\theta = \frac{b}{r} \Rightarrow b = rsen\,\theta.$$

Logo, um número complexo não nulo $z = a + bi$ se escreve da seguinte forma:

$$z = a + bi = rcos\,\theta + irsen\,\theta = r(cos\,\theta + isen\,\theta),$$

onde, $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$. Esta é chamada de ***forma trigonométrica*** ou ***polar*** do número complexo.

O ângulo θ é denominado ***um argumento*** de z e denota-se por $\theta = arg(z)$. Note que, θ não é o único, pois, a igualdade é também verdadeira para $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, mas podemos determinar θ de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \leqslant \theta < 2\pi$ ou que $-\pi < \theta \leqslant \pi$.

Exemplo 2.8.1. *Vamos representar o número complexo $z = 1 - \sqrt{3}i$ na forma algébrica.*

Temos que:

$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$cos\,\theta = \dfrac{1}{2}$ *e* $sen\,\theta = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{5\pi}{3}$

Portanto, $z = 2 \cdot \left(cos\,\dfrac{5\pi}{3} + i \cdot sen\,\dfrac{5\pi}{3}\right)$

O número complexo com representação polar, tem como finalidade principal facilitar nas operações quando se trata de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$.

Sejam agora os números complexos z_1 e z_2 não nulos com representações geométricas dada por:

$$z_1 = r(cos\,\theta + isen\,\theta) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho(cos\,\phi + isen\,\phi)$$

A representação polar do produto z_1z_2 é:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= = r(cos\,\theta + isen\,\theta)\rho(cos\,\phi + isen\,\phi) \\ &= r\rho[(cos\,\theta \cos\,\phi - sen\,\theta\, sen\,\phi) + i(cos\,\theta\, sen\phi + sen\,\theta\, cos\,\phi)] \\ &= r\rho[cos\,(\theta+\phi) + isen\,(\theta+\phi)], \end{aligned}$$

portanto,

$$z_1z_2 = r\rho[cos\,(\theta+\phi) + isen\,(\theta+\phi)]. \tag{2.2}$$

Dessa igualdade, concluímos que $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ (já foi provado no teorema 2.7.2) e que

$$arg(z_1z_2) = \theta + \phi = arg(z_1) + arg(z_2), \tag{2.3}$$

ou seja, um argumento do produto de dois números complexos é igual a soma dos argumentos desses números.

Agora, fazendo $z_1 = z_2 = z$ na igualdade (2.2), temos que

$$z^2 = r^2[cos\,(2\theta) + isen\,(2\theta)].$$

Essa igualdade nos induz a dizer que

$$z^n = r^n[cos\,(n\theta) + isen\,(n\theta)]$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, uma afirmativa verdadeira, conhecida como *fórmula de De Moivre*[2].

Teorema 2.8.1. *Dado o número complexo $z = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$, com $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:*

$$z^n = r^n(cos\,n\theta + isen\,n\theta)$$

Demonstração. Vamos provar utilizando o princípio de indução finita[3]. De fato, temos:

i) Se $n = 0$, então $z^0 = 1 \quad e \quad r^0(cos\,0 + isen\,0) = 1(1 + i \cdot 0) = 1$

ii) Suponhamos agora que afirmação seja verdadeira para $n = k$ e, vamos mostrar que também é verdadeira para $n = k + 1$. De fato,

$$z^k = r^k(cos\,k\theta + isen\,k\theta)$$

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= z^k \cdot z \\
&= r^k(cos\,k\theta + isen\,k\theta) \cdot r(cos\,\theta + isen\,\theta) \\
&= r^k \cdot r(cos\,k\theta\,cos\theta + icos\,k\theta\,sen\,\theta + isen\,k\theta\,cos\,\theta - sen\,k\theta\,sen\,\theta) \\
&= r^{k+1}[(cos\,k\theta\,cos\theta - sen\,k\theta\,sen\,\theta) + i(sen\,k\theta\,cos\,\theta + cos\,k\theta\,sen\,\theta)] \\
&= r^{k+1}[cos\,(k\theta + \theta) + sen\,(k\theta + \theta)] \\
&= r^{k+1}[cos\,(k+1)\theta + sen\,(k+1)\theta]
\end{aligned}$$

Portanto, $z^n = r^n(cos\,n\theta + isen\,n\theta), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

□

A partir do resultado anterior, podemos determinar a raiz n-ésima de um número complexo z dado. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.8.2. *Dado um número complexo $z = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$ e o natural n $(n \geqslant 2)$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\,\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + isen\,\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right], \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Determinemos todos os complexos z_k tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$. Seja

$$z_k = \rho(cos\,\phi + isen\,\phi),$$

[2] Abraham de Moivre (1667-1754) foi um matemático francês famoso pela fórmula em questão.
[3] Princípio de indução finita é uma maneira elegante de se demonstrar proposições semelhantes a esta. Pode ser encontrada HEFEZ (2007) que trata sobre o assunto.

vamos encontrar ρ e ϕ em função de r e θ, respectivamente. De fato, temos que:

$$\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow z_k^n = z.$$

Logo:

$$\rho^n(cos\, n\phi + isen\, n\phi) = r(cos\,\theta + isen\,\theta)$$

Portanto, devemos ter:

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r},$$

e

$$cos\, n\phi = cos\,\theta \quad \text{e} \quad sen\, n\phi = sen\,\theta \quad \Rightarrow \quad n\phi = \theta + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

Supondo $0 \leqslant \theta < 2\pi$, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de ϕ compreendidos entre 0 e 2π:

$$\begin{array}{lll}
k = 0 & \Rightarrow & \phi = \dfrac{\theta}{n} \\
k = 1 & \Rightarrow & \phi = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{2\pi}{n} \\
k = 2 & \Rightarrow & \phi = \dfrac{\theta}{n} + 2 \cdot \dfrac{2\pi}{n} \\
\vdots & & \vdots \\
k = n-1 & \Rightarrow & \phi = \dfrac{\theta}{n} + (n-1) \cdot \dfrac{2\pi}{n}.
\end{array}$$

Assim, os n valores de ϕ não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0, 2\pi[$; portanto, dão origem a n valores diferentes para z_k.

Vamos considerar agora o valor de ϕ obtido para $k = n$:

$$k = n \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\theta}{n} + n \cdot \frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi.$$

Este valor de ϕ não convém, pois é o mesmo valor obtido para $k = 0$.

De forma análogo acontece para $k = n{+}1, n{+}2, n{+}3, \ldots \quad e \quad k = -1, -2, -3, \ldots$

Portanto, para obter os valores de z_k é suficiente fazer $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Logo,

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\,\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + isen\,\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right], \text{onde } k \in \mathbb{Z}.$$

$\square$

2.9 FÓRMULA DE EULER

Uma importante fórmula que será muito útil para podermos definir a exponencial e^z, é a fórmula de Euler. Este fato, pode ser visto em FERNANDES e BERNARDEZ (2008, p.13). Para deduzi-lá, vamos definir $sen\, y, cos\, y$ e e^y, onde $y \in \mathbb{R}$ e e número de Euler[4], através da expansão em série de Taylor[5], da seguinte maneira:

$$sen\, y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots \tag{2.4}$$

$$cos\, y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots \tag{2.5}$$

$$e^y = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \frac{y^6}{6!} + \frac{y^7}{7!} + \cdots \tag{2.6}$$

Substituindo y por iy na identidade 2.6, temos que:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \tag{2.7}$$

Logo, de 2.1 e 2.7, segue que:

$$e^{iy} = 1 + i \cdot \frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \cdot \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i \cdot \frac{y^7}{7!} + \cdots \tag{2.8}$$

Agora, separando as partes reais e imaginárias do lado direito da igualdade 2.8, temos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \cdot \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right). \tag{2.9}$$

De 2.4, 2.5 e 2.9, chegamos à:

$$e^{iy} = cos\, y + i \cdot sen\, y, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{2.10}$$

A igualdade 2.10 é denominada fórmula de Euler.

2.9.1 Exponencial

Agora vamos definir a exponencial e^z, que será muito importante no capítulo seguinte. Primeiramente, sabemos que $e^{m+n} = e^m \cdot e^n, \forall m, n \in \mathbb{R}$. E, dado $z = x + yi \in \mathbb{C}$, é natural esperarmos que $e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$. Levando em conta estas considerações, temos a seguinte definição:

4 O número "e" tem por valor $e = 2,71\cdots$. Este valor é encontrado quando se calcula o $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}$. Isto, pode ser visto em LEITHOLD (1994, p. 461).

5 A série de Taylor da função f em torno do ponto 0 é dada por $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$, onde $f^{(n)}(0)$ é a n-ésima derivada da função f no ponto 0. Isso pode ser visto em LIMA (2012, p. 288)

Definição 2.9.1. *Dado um número complexo $z = x + yi$, definimos a exponencial de z por*

$$e^z = e^x(cos\, y + isen\, y).$$

A notação $exp\, z$ é frenquentemente usada em lugar de e^z. Mas, vamos optar por não utilizar esta notação. Em relação a definição 2.9.1, temos as seguintes propriedades, que pode ser encontradas em SOARES (2001, p.52).

Propriedade 2.9.1. *Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então:*

i) $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

ii) $\dfrac{1}{e^{z_1}} = e^{-z_1}$;

iii) $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$. Então temos:

i) Da definição 2.9.1, segue que:

$$\begin{aligned} e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{x_1}.(cos\, y_1 + i.sen\, y_1).e^{x_2}.(cos\, y_2 + i.sen\, y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}.(cos\, y_1.cos\, y_2 + i^2.sen\, y_1.sen\, y_2 + i.sen\, y_1.cos\, y_2 + i.sen\, y_2.cos\, y_1) \\ &= e^{x_1+x_2}.[cos\, y_1.cos\, y_2 - sen\, y_1.sen\, y_2 + i.(sen\, y_1.cos\, y_2 + sen\, y_2.cos\, y_1)] \\ &= e^{x_1+x_2}.[cos\,(y_1+y_2) + i.sen\,(y_1+y_2)] \\ &= e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i} \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

Portanto, $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

ii) Da definição 2.9.1, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{z_1}} &= \frac{1}{e^{x_1}.(cos\, y_1 + i.sen\, y_1)} \\ &= \frac{1}{e^{x_1}.(cos\, y_1 + i.sen\, y_1)} \cdot \frac{cos\, y_1 - i.sen\, y_1}{cos\, y_1 - i.sen\, y_1} \\ &= e^{-x_1} \cdot \frac{cos\, y_1 - i.sen\, y_1}{cos^2\, y_1 - i^2.sen^2\, y_1} \\ &= e^{-x_1} \cdot \frac{cos\,(-y_1) + i.sen\,(-y_1)}{cos^2\, y_1 + sen^2\, y_1} \\ &= e^{-x_1-y_1 i} \\ &= e^{-z_1} \end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{1}{e^{z_1}} = e^{-z_1}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

iii) Note que:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot \frac{1}{e^{z_2}} \tag{2.11}$$

Segue de 2.11 e do item ii que:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} \tag{2.12}$$

Do item i e de 2.12, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1+(-z_2)} \\ &= e^{z_1-z_2} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

□

2.9.2 Logaritmo

Vamos definir agora nesta seção o logaritmo de um número complexo. Seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$, temos que a forma trigonométrica de z é dada por:

$$z = r(cos\,\theta + isen\,\theta),$$

onde r é o módulo de z e θ o argumento. Considerando agora a fórmula de Euler dada em 2.10, temos que:

$$z = re^{i\theta}. \tag{2.13}$$

Nesse caso, o número complexo z é denominado *forma exponencial*. Como θ é o argumento de z, podemos substituí-lo por $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, em 2.13 sem nenhuma restrição. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} z &= re^{i\theta} \\ &= r(cos\,\theta + isen\,\theta) \\ &= r[cos\,(\theta + 2k\pi) + isen\,(\theta + 2k\pi)] \\ &= re^{i(\theta+2k\pi)}, \end{aligned}$$

ou seja, z também pode ser escrita por:

$$z = re^{i(\theta+2k\pi)}, \text{onde } k \in \mathbb{Z}. \tag{2.14}$$

Relembramos agora as seguintes propriedades para o caso real do logaritmo natural $\ln x = \log_e x$, onde x é real positivo:

a) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, para todo $x, y \in \mathbb{R}_+^*$;

b) $\ln e^a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Portanto, é natural definirmos o logaritmo de z da seguinte maneira:

Definição 2.9.2. *Dado um número complexo $z = re^{i\theta}$ não nulo, definimos o logaritmo de z por*

$$\ln_k z = \ln r + i(\theta + 2k\pi),$$

onde $2k\pi \leqslant \theta < 2(k+1)\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Ao contrário do caso real onde todo número positivo possui um único logaritmo, um número complexo não nulo possui uma infinidade de logaritmos, como pode ser visto a partir da definição dada em 2.9.2. E nessa definição, $\ln_k z$ é o logaritmo de z no nível k. Dessa forma, tomando $k = 0$ e denotando-se $\ln_0 z$ simplesmente por $\ln z$, temos que

$$\ln z = \ln r + i\theta, \text{ com } 0 \leqslant \theta < 2\pi, \tag{2.15}$$

denominado *logaritmo principal* de z. Para efeito de simplificação, vamos trabalhar as propriedades dos logaritmos dos números complexos somente no nível $k = 0$, isto é, com o logaritmo principal de z.

Note que, o logaritmo de z foi definido com a base sendo e devido ao fato do lado direito da igualdade dada em 2.14 possuir o termo e. Mas poderia também ser definida em base reais diferentes de e. Motivados pela propriedade de mudança de base nos reais, pode ser definida da seguinte forma,

$$\log_a^z = \frac{\ln z}{\ln a},$$

onde $\ln z$ é dada na definição 2.9.2 e $a \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$. Em relação a definição 2.9.2, temos as seguintes propriedades, que pode ser encontradas em CHURCHILL (1975, p.54).

Propriedade 2.9.2. *Dados dois números complexos não nulos z_1 e z_2, temos que:*

i) $e^{\ln z_1} = z_1$;

ii) $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$;

iii) $\ln e^{z_1} = z_1$;

iv) $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$;

v) $\ln z_1^m = m \ln z_1$, *onde* $m \in \mathbb{Z}^*$.

Demonstração. Sejam $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Teremos:

i) Usando a definição 2.9.2, segue que:

$$\begin{aligned} e^{\ln z_1} &= e^{\ln r_1 + i\theta_1} \\ &= e^{\ln r_1} \cdot e^{i\theta_1} \\ &= r_1 e^{i\theta_1} \\ &= z_1 \end{aligned}$$

Portanto, $e^{\ln z_1} = z_1$ para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ e $z_1 \neq 0$.

ii) Usando a definição 2.9.2, temos:

$$\begin{aligned} \ln z_1 + \ln z_2 &= \ln r_1 + i\theta_1 + \ln r_2 + i\theta_2 \\ &= \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2). \tag{2.16}$$

Como $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, temos que $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. Assim, da definição 2.9.2, teremos

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2). \tag{2.17}$$

Portanto, de 2.16 e 2.17, segue que:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2,$$

para todo z_1 e z_2 complexos não nulos.

iii) Seja $z_1 = x_1 + y_1 i$. Usando o item anterior e a definição 2.9.2, temos:

$$\begin{aligned} \ln e^{z_1} &= \ln e^{x_1 + y_1 i} \\ &= \ln e^{x_1} e^{y_1 i} \\ &= \ln e^{x_1} + \ln e^{y_1 i} \\ &= x_1 + \ln e^{y_1 i} \\ &= x_1 + \ln 1 + i y_1 \\ &= x_1 + i y_1 \end{aligned}$$

Portanto, $\ln e^{z_1} = z_1$.

iv) Usando a definição 2.9.2, temos:

$$\begin{aligned} \ln z_1 - \ln z_2 &= \ln r_1 + i\theta_1 - (\ln r_2 + i\theta_2) \\ &= \ln r_1 + i\theta_1 - \ln r_2 - i\theta_2 \\ &= \ln(r_1/r_2) + i(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\ln z_1 - \ln z_2 = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2). \tag{2.18}$$

Da igualdade 2.13 temos que:

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{e} \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}.$$

Daí,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Logo:

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right)$$

Usando o item ii e iii, teremos:

$$\begin{aligned} \ln \frac{z_1}{z_2} &= \ln \left(\frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right) \\ &= \ln \frac{r_1}{r_2} + \ln e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \\ &= \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2). \tag{2.19}$$

Portanto, de 2.18 e 2.19, segue que:

$$\ln z_1 - \ln z_2 = \ln \frac{z_1}{z_2},$$

para todo z_1 e z_2 complexos não nulos.

v) Seja $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $m \in \mathbb{Z}^*$. Então, temos:

$$\begin{aligned} z_1^m &= (r_1 e^{i\theta_1})^m \\ &= r_1^m e^{i\theta_1} \cdot \ldots \cdot e^{i\theta_1} \ (m \, \text{vezes}) \\ &= r_1^m \cdot e^{i\theta_1 + \ldots + i\theta_1} \\ &= r_1^m \cdot e^{m(i\theta_1)} \\ &= r_1^m \cdot e^{i(m\theta_1)}. \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo natural, teremos:

$$\begin{aligned} \ln z_1^m &= \ln(r_1^m \cdot e^{i(m\theta_1)}) \\ &= \ln r_1^m + i(m\theta_1) \\ &= m \ln r_1 + m(i\theta_1) \\ &= m(\ln r_1 + i\theta_1) \\ &= m \ln z_1 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\ln z_1^m = m \ln z_1$, onde $m \in \mathbb{Z}^*$.

□

3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM $\mathbb{C}$

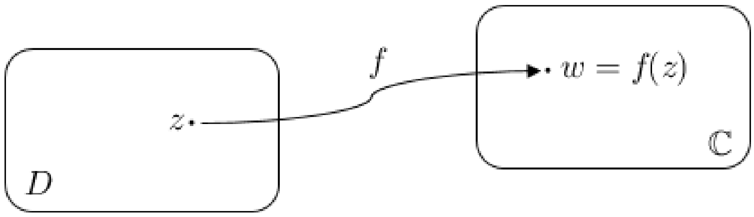
Como estudamos no capítulo 1 funções trigonométricas em $\mathbb{R}$ e, no capítulo 2 o conjunto dos números complexos, vamos agora ao estudo do nosso objetivo principal, as funções trigonométricas em $\mathbb{C}$. Assim, veremos primeiramente a definição de funções de variáveis complexas. A abordagem dos conteúdos neste capítulo tem como principal referência o livro de FERNANDES e BERNARDEZ (2008).

3.1 FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Definiremos a seguir função de variável complexa.

Definição 3.1.1. *Seja D um subconjunto de $\mathbb{C}$. Uma função complexa $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma lei que a cada elemento z de D associa um único número complexo $w = f(z) \in \mathbb{C}$.*

Figura 16: Representação geométrica da definição 3.1.1



Fonte: Autor

Esta definição pode ser encontrada também no livro AVILA (2013, p. 34).

Exemplo 3.1.1. *A função exponencial é a função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = e^z,$$

onde $e^z = e^x(cos\, y + isen\, y)$.

Proposição 3.1.1. *Seja a função exponencial $f(z) = e^z$, então $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja a definição dada em 2.9.1, isto é,

$$e^z = e^x \cdot (cos\, y + i \cdot sen\, y), \forall z = x + yi \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x \cdot (cos\, y + i \cdot sen\, y)| \\
&= |e^x| \cdot |(cos\, y + i \cdot sen\, y)| \\
&= e^x \cdot (cos^2\, y + sen^2\, y) \\
&= e^x \cdot 1 \\
&= e^x.
\end{aligned}
$$

Assim, $|e^z| = e^x$ para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Como $e^x > 0$, temos que $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. □

Temos também, no caso complexo, a periodicidade de uma função, no qual é importante e será dada na definição a seguir:

Definição 3.1.2. *Uma função* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é periódica de período* $p \in \mathbb{C}$ *se* $f(z + p) = f(z)$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Uma outra propriedade importante da função exponencial é que ela é periódica de período $2\pi i$, isto pode ser encontrado em FLANIGAN (1972, p. 121). Este fato segue na proposição seguinte.

Proposição 3.1.2. *A função exponencial* $f(z) = e^z$ *é periódica de período* $2\pi i$*, isto é,*

$$e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. De fato, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

$$
\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^{x+yi+2\pi i} \\
&= e^{x+i(y+2\pi)} \\
&= e^x \cdot e^{i(y+2\pi)}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Da fórmula de Euler dada em 2.10, segue:

$$
\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^x(cos\,(y + 2\pi) + i \cdot sen\,(y + 2\pi)) \\
&= e^x(cos\, y + i \cdot sen\, y) \\
&= e^z
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

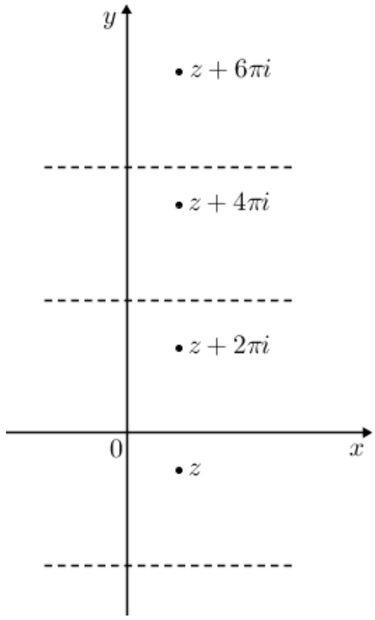
Portanto: $e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$. □

Observação 3.1.1. *Por uma repetição desse argumento, podemos mostrar de forma análoga que dado* $z \in \mathbb{C}$ *e para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$*, tem-se que* $e^{z+2k\pi i} = e^z$.

De fato, temos:

$$
\begin{aligned}
e^{z+2k\pi i} &= e^{x+yi+2k\pi i} \\
&= e^{x+i(y+2k\pi)} \\
&= e^x \cdot e^{i(y+2k\pi)} \\
&= e^x(cos\,(y + 2k\pi) + i \cdot sen\,(y + 2k\pi)) \\
&= e^x(cos\, y + i \cdot sen\, y) \\
&= e^z.
\end{aligned}
$$

Figura 17: Periodicidade da função exponencial



Fonte: Autor

Assim, temos: $e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+4\pi i} = e^{z+6\pi i} = \cdots$.

Para o caso particular $k = 1$ *temos o período da função exponencial dado por* $2\pi i$*, como visto anteriormente.*

Vejamos agora outro exemplo importante de função complexa, a *função logarítmica*, dada a seguir.

Exemplo 3.1.2. *A função logarítmica é a função* $f_k : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por*

$$f_k(z) = \ln z + 2k\pi i, \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

onde $\ln z = \ln r + i\theta$*, com* $2k\pi \leqslant \theta < 2(k+1)\pi$ *e* $k \in \mathbb{Z}$.

Note que, a função logarítmica definida no exemplo anterior foi dada de forma geral, utilizando como base a definição de logaritmo de um complexo z dada em 2.9.2. E nessa definição, f_k significa função logarítmica no nível k. Assim, vemos que existem infinitas "funções logaritmo", como pode ser visto a partir da definição dada no exemplo anterior. E, novamente para efeito de simplificação, tomando $k = 0$ e denotando-se f_0 simplesmente por f, temos:

$$f(z) = \ln z, \forall z \in \mathbb{C}^*,$$

onde $\ln z = \ln r + i\theta$, com $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Denominado *função logarítmica principal*. Assim, trabalhar com a função logarítmica com nível $k = 0$ torna-se menos trabalhoso, pois evita o uso da constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos mostrar agora uma resultado importante que também é válido nos complexos, a de que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Para isso, vamos ver primeiramente o conceito de função inversa. Assim, temos a seguinte definição, que pode ser encontrada de forma semelhante para o caso real em LIMA (2013, p. 188):

Definição 3.1.3. *Sejam A e B subconjuntos não vazios de $\mathbb{C}$. Diz-se que a função $g : B \longrightarrow A$ é a inversa da função $f : A \longrightarrow B$ quando se tem $g(f(z)) = z$ e $f(g(w)) = w$ para quaisquer $z \in A$ e $w \in B$.*

Da definição anterior decorre imediatamente que uma função $f : A \longrightarrow B$ possui inversa se, e somente se, for bijetiva.

Quando $g : B \longrightarrow A$ é a função inversa de $f : A \longrightarrow B$, escreve-se $g = f^{-1}$.

Considerando a definição 3.1.3, a função exponencial $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, dada no exemplo 3.1.1 não é injetiva, pois, por exemplo, temos $z_1 = 2\pi i$ e $z_2 = 4\pi i$ tal que $f(z_1) = f(z_2)$,

$$\begin{array}{rcl} f(z_1) & = & e^{2\pi i} \\ & = & cos\,2\pi + isen\,2\pi \\ & = & 1 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} f(z_2) & = & e^{4\pi i} \\ & = & cos\,4\pi + isen\,4\pi \\ & = & 1. \end{array}$$

E também não é sobrejetiva, pois, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = 0$. Portanto, f não é bijetiva, isto é, não possui função inversa.

Porém, considerando a função exponencial com domínio em $S_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leqslant y < 2\pi\}$ e contradomínio em $\mathbb{C}^*$, isto é, $f : S_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com $f(z) = e^z$, temos que f é bijetiva. Esse fato está presente no teorema a seguir:

Teorema 3.1.1. *Seja $S_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leqslant y < 2\pi\}$, então a função $f : S_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $f(z) = e^z$ é bijetiva.*

Demonstração. Provaremos primeiramente que f é sobrejetiva. Para isso, seja $w \in \mathbb{C}^*$. Então devemos mostrar que existe $z \in S_0$ tal que $f(z) = w$. Agora, w tem coordenadas polares (ρ, ϕ) com $\rho > 0$ e $0 \leqslant \phi < 2\pi$, ou seja, $w = \rho(cos\,\phi + isen\,\phi)$. Definimos $z = x + yi$, onde $x = \ln \rho$ e $y = \phi$. Dessa forma, temos $z \in S_0$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & e^z \\ & = & e^{x+iy} \\ & = & e^{\ln \rho + i\phi} \\ & = & e^{\ln \rho} \cdot e^{i\phi} \\ & = & \rho(cos\,\phi + isen\,\phi) \\ & = & w. \end{array}$$

Portanto, f é sobrejetiva.

Agora, vamos mostrar que f é injetiva. Assim, vamos mostrar que dados $z_1, z_2 \in S_0$ com $f(z_1) = f(z_2)$, devemos ter $z_1 = z_2$. De fato, seja $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, então temos:

$$\begin{aligned}
f(z_1) &= f(z_2) \\
e^{z_1} &= e^{z_2} \\
\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= 1 \\
e^{z_1 - z_2} &= 1 \\
e^{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} &= 1.
\end{aligned}$$

Usando agora a fórmula de Euler, temos:

$$e^{x_1 - x_2} \cdot (cos\,(y_1 - y_2) + isen(y_1 - y_2)) = 1. \tag{3.4}$$

Aplicando o módulo em ambos os membros na equação anterior, teremos:

$$\begin{aligned}
|e^{x_1 - x_2}| \cdot |(cos\,(y_1 - y_2) + isen(y_1 - y_2))| &= 1 \\
e^{x_1 - x_2} \cdot 1 &= 1.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$e^{x_1 - x_2} = 1. \tag{3.5}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 &= 0 \\
x_1 &= x_2.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Agora, substituindo 3.5 em 3.4, teremos:

$$cos\,(y_1 - y_2) + isen(y_1 - y_2) = 1$$

Da igualdade de números complexos, tem-se:

$$cos\,(y_1 - y_2) = 1 \quad \text{e} \quad sen\,(y_1 - y_2) = 0.$$

Daí,

$$y_1 - y_2 = 2k\pi, \tag{3.7}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Para concluir, basta mostrar agora que $k = 0$ e teremos $y_1 = y_2$. Assim, aplicando módulo em ambos os membros de 3.7, segue que:

$$|y_1 - y_2| = 2|k|\pi. \tag{3.8}$$

Agora, como $0 \leqslant y_1 < 2\pi$ e $0 \leqslant y_2 < 2\pi$, temos:

$$|y_1 - y_2| < 2\pi. \tag{3.9}$$

De 3.8 e 3.9, teremos:

$$2|k|\pi < 2\pi,$$

o que implica $k = 0$. Dessa forma, de 3.7, segue-se:

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= 0 \\ y_1 &= y_2. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto, de 3.6 e 3.10, segue que $z_1 = z_2$, ou seja, f é injetiva.

$\square$

Observação 3.1.2. *Temos da observação 3.1.1 que $e^z = e^{z\pm 2\pi i} = e^{z\pm 4\pi i} = \cdots$. Assim, podemos generalizar o teorema anterior considerando o conjunto da seguinte maneira:*

$$S_k = \{x + iy \in \mathbb{C} : 2k\pi \leqslant y < 2(k+1)\pi\}, \textit{com } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, a função $f_k : S_k \longrightarrow \mathbb{C}^*$ com $f(z) = e^z$ é bijetiva.

Note ainda, que tomando $k = 0$ e denotando f_0 simplesmente por f, temos o teorema dado anteriormente. Optamos aqui por não demonstrar o teorema no caso geral, pois, o nosso objetivo é uma abordagem para o ensino médio, nos limitamos a mostrar somente para $k = 0$.

Agora, levando em conta a definição 3.1.3 e o teorema anterior, temos a seguir a proposição desejada.

Proposição 3.1.3. *A função logaritmo é a inversa da função exponencial.*

Demonstração. Seja a função exponencial $f : S_0 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $f(z) = e^z$, $\forall z \in S_0$, e a função logarítmica $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow S_0$ dada por $g(w) = \ln w$, $\forall w \in \mathbb{C}^*$. Devemos mostrar que $g(f(z)) = z$ e $f(g(w)) = w$ para quaisquer $z \in S_0$ e $w \in \mathbb{C}^*$. De fato, temos:

$$\begin{aligned} g(f(z)) &= g(e^z) \\ &= \ln e^z \\ &= z \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} f(g(w)) &= f(\ln w) \\ &= e^{\ln w} \\ &= w \end{aligned}$$

Portanto, para quaisquer $z \in S_0$ e $w \in \mathbb{C}^*$ temos que $g(f(z)) = z$ e $f(g(w)) = w$, ou seja, g é a função inversa de f.

$\square$

3.1.1 Operações com funções complexas

Dadas as funções $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $A, B \subseteq \mathbb{C}$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Define-se as funções múltiplo, soma, diferença, produto e quociente, respectivamente, por:

i) $(cf)(z) = cf(z)$, onde $c \in \mathbb{C}$;

ii) $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$, com $z \in A \cap B$;

iii) $(f-g)(z) = f(z) - g(z)$, com $z \in A \cap B$;

iv) $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$, com $z \in A \cap B$;

v) $(f/g)(z) = f(z)/g(z)$, com $z \in A \cap B$ e $g(z) \neq 0$.

3.1.2 Transformação

Estudamos na seção 1.2 as funções trigonométricas em $\mathbb{R}$, vimos em cada uma delas a representação gráfica. Os gráficos são muito importantes para melhor compreensão de muitos conceitos, como por exemplo, os de derivadas e integrais. Já com relação as funções de variáveis complexas, não dispomos de tal representação gráfica. Analisaremos a seguir esta situação.

Considerando a definição 3.1.1, temos que $w = f(z)$ onde $w, z \in \mathbb{C}$. Assim, precisamos de um plano para a representação de cada uma das variáveis. Dessa forma, para exibir o conjunto de pontos correspondentes z e w, desenha-se dois planos separadamente: Para cada ponto (x, y) do plano-z, no domínio de definição de f, existe um ponto (u, v) no plano-w, onde $z = x + yi$ e $w = u + vi$.

A correspondência entre os dois planos é denominado ***transformação*** de pontos no plano-z em pontos do plano-w pela função f. Os pontos w são chamados de *imagens* de pontos z. Esta ideia também se aplica entre conjuntos específicos, como por exemplo, imagem de curvas, de uma determinada região etc (CHURCHILL, 1975, p. 20).

Exemplo 3.1.3. *Mostre que a função* $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ *transforma o disco* $R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *no semi-plano* $H = \{w \in \mathbb{C} : Re(w) > 0\}$.

Demonstração. Primeiramente note que o domínio da função f é dado por $D = \{z \in \mathbb{C} : z \neq -1\}$, ou seja, temos $R \subset D$. Como queremos mostrar que a função f transforma o disco R no semi-plano H, vamos considerar $z = x + yi \in R$. Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
w &= f(z) \\
&= \frac{1-z}{1+z} \\
&= \frac{1-(x+yi)}{1+(x+yi)} \\
&= \frac{(1-x)-yi}{(1+x)+yi} \cdot \frac{(1+x)-yi}{(1+x)-yi}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 - x^2 - yi + xyi - yi - xyi - y^2}{(1+x)^2 + y^2} \\
&= \frac{1 - (x^2 + y^2) - 2yi}{(1+x)^2 + y^2} \\
&= \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2} - \frac{2y}{(1+x)^2 + y^2} i
\end{aligned}
$$

Portanto, a parte real de w é:

$$Re(w) = \frac{1 - (x^2 + y^2)}{(1+x)^2 + y^2}. \tag{3.11}$$

Note que,

$$(1+x)^2 + y^2 > 0, \tag{3.12}$$

para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$. De hipótese, temos $|z| < 1$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + y^2} &< 1 \\
x^2 + y^2 &< 1.
\end{aligned}
$$

Isto, implica em:

$$1 - (x^2 + y^2) > 0. \tag{3.13}$$

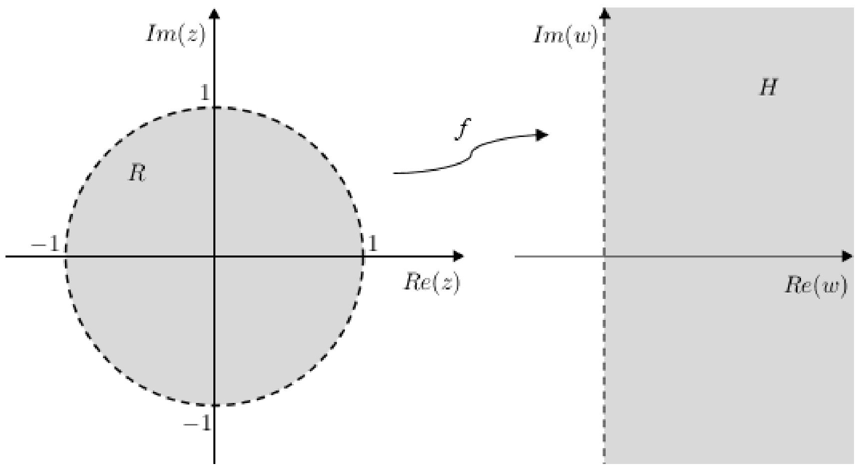
Portanto, de 3.11, 3.12 e 3.13, segue que:

$$Re(w) > 0.$$

Isso mostra que a função f transforma o disco R num semi-plano H, que é dado por $H = \{w \in \mathbb{C} : Re(w) > 0\}$.

Para melhor entendimento, analise a figura 18.

Figura 18: Transformação do disco R no semi-plano H pela função f



Fonte: Autor

$\square$

3.2 FUNÇÕES SENO, COSSENO E SUAS PROPRIEDADES

Agora vamos tratar sobre as funções seno e cosseno com variável complexa, definindo-as e mostrando suas propriedades importantes. Mostraremos também, no caso complexo[1], suas respectivas funções inversas.

3.2.1 Função Seno

Para defini-la, consideremos primeiramente a fórmula de Euler, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}$, temos que:

$$e^{iy} = cos\, y + i \cdot sen\, y. \tag{3.14}$$

Substituindo iy por $-iy$ em 3.14, teremos:

$$\begin{aligned} e^{-iy} &= cos\,(-y) + i \cdot sen\,(-y) \\ &= cos\, y - i \cdot sen\, y \end{aligned} \tag{3.15}$$

Multiplicando a igualdade 3.15 por -1 e somando com a equação 3.14, temos:

$$e^{iy} - e^{-iy} = 2i \cdot sen\, y.$$

Logo:

$$sen\, y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, é natural definirmos a função seno de uma variável complexa da seguinte forma:

Definição 3.2.1. *A função seno* $sen\,(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, sen\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Temos a seguir duas importantes proposições.

Proposição 3.2.1. *Dado* $z \in \mathbb{C}$. *Então* $sen\, z = 0$ *se e somente se* $z = k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} sen\, z &= sen\,(x + yi) \\ &= \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y+xi} - e^{y-xi}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}.(cos\, x + i.sen\, x) - e^{y}.(cos\, x - i.sen\, x)}{2i} \end{aligned}$$

[1] Não abordaremos neste trabalho as funções inversas do seno e cosseno no caso real, mais isto pode ser encontrada em LEITHOLD (1994, p. 496).

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-y}.(cos\,x) + e^{-y}.(i.sen\,x) - e^{y}.(cos\,x) + e^{y}.(i.sen\,x)}{2i} \\
&= (cos\,x)\cdot\left(\frac{-e^{y}+e^{-y}}{2i}\right) + (i.sen\,x)\cdot\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2i}\right) \\
&= (i.cos\,x)\cdot\left(\frac{-e^{y}+e^{-y}}{2i^2}\right) + (sen\,x)\cdot\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) \\
&= (sen\,x)\cdot\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right) + (i.cos\,x)\cdot\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Vamos denotar $A(y) = \dfrac{e^{y}+e^{-y}}{2}$ e $B(y) = \dfrac{e^{y}-e^{-y}}{2}$. Com isso, teremos:

$$sen\,z = sen\,x.A(y) + i.cos\,x.B(y). \tag{3.16}$$

Observe que, $A(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, e $B(y) = 0$ se e somente se $y = 0$. Continuando, de 3.16, $sen\,z = 0$ se e somente se

$$sen\,x.A(y) = 0 \tag{3.17}$$

e

$$cos\,x.B(y) = 0. \tag{3.18}$$

Da igualdade 3.17 e do fato que $A(y) > 0$, temos que $sen\,x = 0$, isto é, $x = k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x = k\pi$ em 3.18, devemos ter $B(y) = 0$, pois, $cos\,k\pi \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Assim, como $B(y) = 0$, temos que $y = 0$. Portanto, $sen\,z = 0$ se e somente se $z = k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

□

Proposição 3.2.2. *A função seno é periódica de período 2π.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função seno, temos que para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
sen\,(z+2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}\cdot e^{i(2\pi)} - e^{-iz}\cdot e^{i(-2\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}\cdot(cos\,2\pi + i.sen\,2\pi) - e^{-iz}\cdot(cos\,2\pi - i.sen\,2\pi)}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}\cdot(1+i\cdot 0) - e^{-iz}\cdot(1-i\cdot 0)}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= sen\,z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função seno é periódica de período 2π.

□

Observação 3.2.1. *Por uma repetição desse argumento, podemos mostrar de forma análoga que dado $z \in \mathbb{C}$ e para qualquer $k \in \mathbb{Z}$, tem-se que:* $sen\,(z + 2k\pi) = sen\,z.$

Para o caso particular $k = 1$ temos o período da função seno dado por 2π, como visto anteriormente.

Temos também, no caso complexo, a inversa da função seno. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função seno, consideremos:

$$w = sen^{-1} z.$$

Assim:

$$z = sen\,w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = -i \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Para definir formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. Conforme a função seno definida em 3.2.1, esta não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período 2π.

Seja $X_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leqslant x < 2\pi\}$, define-se a função $sen^{-1}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow X_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, sen^{-1}\, z = -i\ \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Proposição 3.2.3. *A função sen^{-1} é a inversa da função seno.*

Demonstração. Seja a função seno $f : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = sen\,z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\forall z \in X_0$, e a função seno inversa $g : \mathbb{C} \longrightarrow X_0$ dada por $g(w) = -i \ln(iw + \sqrt{1 - w^2})$, $\forall w \in \mathbb{C}$. Devemos mostrar que $g(f(z)) = z$ e $f(g(w)) = w$ para quaisquer $z \in X_0$ e $w \in \mathbb{C}$. De fato, temos:

$$\begin{aligned}
g(f(z)) &= g\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) \\
&= -i \ln\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2}\right) \\
&= -i \ln\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} + \sqrt{1 + \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4}}\right) \\
&= -i \ln\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} + \sqrt{\frac{4 + e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\ln\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}+\frac{\sqrt{(e^{iz}+e^{-iz})^2}}{2}\right)\\
&= -i\ln\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\\
&= -i\ln\left(\frac{2e^{iz}}{2}\right)\\
&= -i\ln e^{iz}\\
&= -i^2 z\\
&= z.
\end{aligned}
$$

E,

$$
\begin{aligned}
f(g(w)) &= f(-i\ln(iw+\sqrt{1-w^2}))\\
&= \frac{e^{i(-i\ln(iw+\sqrt{1-w^2}))}-e^{-i(-i\ln(iw+\sqrt{1-w^2}))}}{2i}\\
&= \frac{e^{\ln(iw+\sqrt{1-w^2})}-e^{-\ln(iw+\sqrt{1-w^2})}}{2i}\\
&= \frac{iw+\sqrt{1-w^2}-(iw+\sqrt{1-w^2})^{-1}}{2i}\\
&= \frac{iw+\sqrt{1-w^2}-\dfrac{1}{iw+\sqrt{1-w^2}}}{2i}\\
&= \frac{(iw+\sqrt{1-w^2})^2-1}{2i(iw+\sqrt{1-w^2})}\\
&= \frac{-w^2+2iw\sqrt{1-w^2}+1-w^2-1}{2i^2w+2i\sqrt{1-w^2}}\\
&= \frac{-2w^2+2iw\sqrt{1-w^2}}{-2w+2i\sqrt{1-w^2}}\\
&= \frac{w^2-iw\sqrt{1-w^2}}{w-i\sqrt{1-w^2}}\\
&= \frac{w(w-i\sqrt{1-w^2})}{w-i\sqrt{1-w^2}}\\
&= w
\end{aligned}
$$

Portanto, para quaisquer $z\in X_0$ e $w\in\mathbb{C}$ temos que $g(f(z))=z$ e $f(g(w))=w$, ou seja, g é a função inversa de f. $\square$

Observe que existem também, infinitas “funções seno inversa” devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

O conjunto X_0 pode ser dado de forma geral por $X_k = \{x + iy \in \mathbb{C} : 2k\pi \leqslant x < 2(k+1)\pi\}$. Mas, novamente nos restringimos a trabalhar somente com $k = 0$.

3.2.2 Função Cosseno

Agora, vamos definir a função cosseno. Para isso, somando-se primeiramente as igualdades de 3.14 e 3.15, temos o seguinte:

$$e^{iy} + e^{-iy} = 2 \cdot cos\, y.$$

Logo:

$$cos\, y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, é natural definirmos a função cosseno de uma variável complexa da seguinte forma:

Definição 3.2.2. *A função cosseno* $cos\,(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *é dada por:*

$$\forall z \in \mathbb{C}, cos\, z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Temos a seguir duas importantes proposições.

Proposição 3.2.4. *Dado* $z \in \mathbb{C}$*. Então* $cos\, z = 0$ *se e somente se* $z = \pi/2 + k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Demonstração. De fato, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
cos\, z &= cos\,(x + yi) \\
&= \frac{e^{i(x+yi)} + e^{-i(x+yi)}}{2} \\
&= \frac{e^{-y+xi} + e^{y-xi}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}.(cos\, x + i.sen\, x) + e^{y}.(cos\, x - i.sen\, x)}{2} \\
&= \frac{e^{-y}.(cos\, x) + e^{-y}.(i.sen\, x) + e^{y}.(cos\, x) - e^{y}.(i.sen\, x)}{2} \\
&= (cos\, x) \cdot \left(\frac{e^{y} + e^{-y}}{2}\right) - (i.sen\, x) \cdot \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)
\end{aligned}$$

Vamos denotar $A(y) = \dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2}$ e $B(y) = \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2}$. Com isso, teremos:

$$cos\, z = cos\, x.A(y) - i.sen\, x.B(y). \tag{3.19}$$

Observe que, $A(y) > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e $B(y) = 0$ se e somente se $y = 0$. Continuando, de 3.19, $cos\, z = 0$ se e somente se

$$cos\, x.A(y) = 0 \tag{3.20}$$

e

$$sen\, x.B(y) = 0. \tag{3.21}$$

Da igualdade 3.20 e do fato que $A(y) > 0$, temos que $cos\, x = 0$, isto é, $x = \pi/2 + k\pi$ com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo $x = \pi/2 + k\pi$ em 3.21, devemos ter $B(y) = 0$, pois, $sen\,(\pi/2 + k\pi) \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$. Assim, como $B(y) = 0$, temos que $y = 0$. Portanto, $cos\, z = 0$ se e somente se $z = \pi/2 + k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$.

□

Proposição 3.2.5. *A função cosseno é periódica de período* 2π*.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função cosseno, temos:

$$\begin{aligned}
cos\,(z + 2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}}{2} \\
&= \frac{e^{iz} \cdot e^{i(2\pi)} + e^{-iz} \cdot e^{i(-2\pi)}}{2} \\
&= \frac{e^{iz} \cdot (cos\, 2\pi + i.sen\, 2\pi) + e^{-iz} \cdot (cos\, 2\pi - i.sen\, 2\pi)}{2} \\
&= \frac{e^{iz} \cdot (1 + i \cdot 0) + e^{-iz} \cdot (1 - i \cdot 0)}{2} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= cos\, z.
\end{aligned}$$

Portanto, a função cosseno é periódica de período 2π.

□

Observação 3.2.2. *Por uma repetição desse argumento, podemos mostrar de forma análoga que dado* $z \in \mathbb{C}$ *e para qualquer* $k \in \mathbb{Z}$*, tem-se que:* $cos\,(z + 2k\pi) = cos\, z$.

Para o caso particular $k = 1$ *temos o período da função cosseno dado por* 2π*, como foi visto anteriormente.*

Temos também, no caso complexo, a inversa da função cosseno. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função cosseno, consideremos:

$$w = cos^{-1} z.$$

Assim:

$$z = cos\, w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Para definir formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. Conforme a função cosseno foi definida em 3.2.2, esta não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período 2π.

Seja $X_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leqslant x < 2\pi\}$, define-se a função $cos^{-1}(\cdot) : \mathbb{C} \longrightarrow X_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, cos^{-1} z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Proposição 3.2.6. *A função cos^{-1} é a inversa da função cosseno.*

Demonstração. Usa a mesma técnica da demonstração da função inversa do seno. □

Observe que existem também, infinitas "funções cosseno inversa" devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

O conjunto X_0 pode ser dado de forma geral, por $X_k = \{x + iy \in \mathbb{C} : 2k\pi \leqslant x < 2(k+1)\pi\}$. Mas, novamente nos restringimos a trabalhar somente com $k = 0$.

3.2.3 Propriedades das Funções Seno e Cosseno

Propriedade 3.2.1 (Relação Fundamental)**.** *Seja z um número complexo qualquer, então $cos^2 z + sen^2 z = 1$.*

Demonstração. De fato, dado $z \in \mathbb{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
cos^2 z + sen^2 z &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}}{4i^2} \\
&= \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Portanto, a relação fundamental é também válida nos complexos.

□

Propriedade 3.2.2. *Para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$*, temos que*

$$sen\,(z+w) = sen\,z\,cos\,w + cos\,z\,sen\,w.$$

Demonstração. De fato, considerando as definições 3.2.1 e 3.2.2. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
sen\,z\,cos\,w + cos\,z\,sen\,w &= \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right) + \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}-e^{-iz+iw}-e^{-iz-iw}}{4i} + \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}+e^{-iz+iw}-e^{-iz-iw}}{4i}\\
&= \frac{2e^{iz+iw}-2e^{-iz-iw}}{4i}\\
&= \frac{e^{iz+iw}-e^{-iz-iw}}{2i}\\
&= \frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2i}\\
&= sen\,(z+w).
\end{aligned}$$

Portanto, $sen\,(z+w) = sen\,z\,cos\,w + cos\,z\,sen\,w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.3. *Para quaisquer* $z, w \in \mathbb{C}$*, temos que*

$$cos\,(z+w) = cos\,z\,cos\,w - sen\,z\,sen\,w.$$

Demonstração. De fato, considerando as definições 3.2.1 e 3.2.2. Assim teremos:

$$\begin{aligned}
cos\,z\,cos\,w - sen\,z\,sen\,w &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)\left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right) - \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right)\\
&= \frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4} - \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4i^2}\\
&= \frac{e^{iz+iw}+e^{iz-iw}+e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4} + \frac{e^{iz+iw}-e^{iz-iw}-e^{-iz+iw}+e^{-iz-iw}}{4}\\
&= \frac{2e^{iz+iw}+2e^{-iz-iw}}{4}\\
&= \frac{e^{iz+iw}+e^{-iz-iw}}{2}\\
&= \frac{e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)}}{2}\\
&= cos\,(z+w).
\end{aligned}$$

Portanto, $cos\,(z+w) = cos\,z\,cos\,w - sen\,z\,sen\,w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.4. *A função seno é ímpar, isto é,* $sen\,(-z) = -sen\,z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, então:

$$\begin{aligned} sen\,(-z) &= \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} \\ &= -\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} \\ &= -sen\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função seno é ímpar.

□

Propriedade 3.2.5. *A função cosseno é par, isto é,* $cos\,(-z) = cos\,z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Dado $z \in \mathbb{C}$, então:

$$\begin{aligned} cos\,(-z) &= \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= cos\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função cosseno é par.

□

Propriedade 3.2.6. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$, *tem-se que* $sen\,(z + \pi) = -sen\,z$.

Demonstração. De fato, considerando a definição da função seno, temos:

$$\begin{aligned} sen\,(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} \cdot e^{i\pi} - e^{-iz} \cdot e^{-i\pi}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} \cdot (cos\,\pi + i.sen\,\pi) - e^{-iz} \cdot (cos\,\pi - i.sen\,\pi)}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} \cdot (-1 + i \cdot 0) - e^{-iz} \cdot (-1 - i \cdot 0)}{2i} \\ &= \frac{-e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \\ &= -\frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i} \\ &= -sen\,z \end{aligned}$$

Logo, $sen\,(z + \pi) = -sen\,z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.7. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$*, tem-se que* $cos\,(z+\pi) = -cos\,z$*.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função cosseno, temos:

$$\begin{aligned} cos\,(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{iz}\cdot e^{i\pi} + e^{-iz}\cdot e^{-i\pi}}{2} \\ &= \frac{e^{iz}\cdot(cos\,\pi + i.sen\,\pi) + e^{-iz}\cdot(cos\,\pi - i.sen\,\pi)}{2} \\ &= \frac{e^{iz}\cdot(-1+i\cdot 0) + e^{-iz}\cdot(-1-i\cdot 0)}{2} \\ &= \frac{-e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\ &= -\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2} \\ &= -cos\,z \end{aligned}$$

Portanto, $cos\,(z+\pi) = -cos\,z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.8. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$*, tem-se que* $sen\,(\frac{\pi}{2} - z) = cos\,z$*.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função seno, temos:

$$\begin{aligned} sen\,(\tfrac{\pi}{2} - z) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2i} \\ &= \frac{e^{-iz}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{iz}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} \\ &= \frac{e^{-iz}\cdot(cos\,\frac{\pi}{2} + i.sen\,\frac{\pi}{2}) - e^{iz}\cdot(cos\,\frac{\pi}{2} - i.sen\,\frac{\pi}{2})}{2i} \\ &= \frac{e^{-iz}\cdot(0+i\cdot 1) - e^{iz}\cdot(0-i\cdot 1)}{2i} \\ &= \frac{i.e^{-iz} + i.e^{iz}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2i} \\ &= cos\,z \end{aligned}$$

Portanto, $sen\,(\frac{\pi}{2} - z) = cos\,z$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.9. *Para todo* $z \in \mathbb{C}$*, tem-se que* $cos\,(\frac{\pi}{2} - z) = sen\,z$*.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função cosseno, temos:

$$\begin{aligned}
cos\left(\tfrac{\pi}{2}-z\right) &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}-z)}+e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)}}{2}\\
&= \frac{e^{-iz}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{iz}\cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2}\\
&= \frac{e^{-iz}\cdot(cos\,\frac{\pi}{2}+i.sen\,\frac{\pi}{2})+e^{iz}\cdot(cos\,\frac{\pi}{2}-i.sen\,\frac{\pi}{2})}{2}\\
&= \frac{e^{-iz}\cdot(0+i\cdot 1)+e^{iz}\cdot(0-i\cdot 1)}{2}\\
&= \frac{i.e^{-iz}-i.e^{iz}}{2}\\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}\\
&= sen\,z
\end{aligned}$$

Portanto, $cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)=sen\,z$, para todo $z\in\mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.10. *Para todo $z\in\mathbb{C}$, tem-se que $sen\,2z=2\,sen\,z\,cos\,z$.*

Demonstração. De fato, tomando $w=z$ na propriedade 3.2.2, temos:

$$\begin{aligned}
sen\,(z+w) &= sen\,z\,cos\,w+cos\,z\,sen\,w\\
sen\,(z+z) &= sen\,z\,cos\,z+cos\,z\,sen\,z\\
sen\,2z &= 2\,sen\,z\,cos\,z
\end{aligned}$$

Portanto, $sen\,2z=2\,sen\,z\,cos\,z,\forall z\in\mathbb{C}$.

□

Propriedade 3.2.11. *Para todo $z\in\mathbb{C}$, tem-se que $cos\,2z=cos^2z-sen^2z$.*

Demonstração. De fato, tomando $w=z$ na propriedade 3.2.3, temos:

$$\begin{aligned}
cos\,(z+w) &= cos\,z\,cos\,w-sen\,z\,sen\,w\\
cos\,(z+z) &= cos\,z\,cos\,z-sen\,z\,sen\,z\\
cos\,2z &= cos^2z-sen^2z
\end{aligned}$$

Portanto, $cos\,2z=cos^2z-sen^2z,\forall z\in\mathbb{C}$.

□

3.2.4 Comparação das Funções Seno e Cosseno nos Casos Real e Complexo

Como vimos acima na seção 3.2, a maioria das propriedades válidas para as funções trigonométricas reais continuam válidas no caso complexo. No entanto, há diferenças entre o caso real e o caso complexo. Por exemplo, as funções seno e cosseno são limitadas nos reais, ou seja, $|cos\,\alpha| \leqslant 1$ e $|sen\,\alpha| \leqslant 1$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, já nos complexos isto não ocorre. Ao considerarmos a definição de cosseno, temos:

$$cos\,z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \forall z = x + yi \in \mathbb{C}. \tag{3.22}$$

Considerando $x = 0$ em 3.22, segue que:

$$\begin{aligned} |cos\,(0 + yi)| &= \left|\frac{e^{i(0+yi)} + e^{-i(0+yi)}}{2}\right| \\ &= \left|\frac{e^{yi^2} + e^{-yi^2}}{2}\right| \\ &= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|cos\,(yi)| = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}.$$

Note que, quando y cresce indefinidamente, e^{-y} tende a zero, enquanto que e^{y} cresce rapidamente e, portanto, $|cos\,(yi)|$ também cresce indefinidamente, isto é, a função cosseno não é limitada em $\mathbb{C}$.

De forma análogo, temos também que a função seno não é limitada no caso complexo. Ao considerarmos a definição de seno, temos:

$$sen\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \forall z = x + yi \in \mathbb{C}. \tag{3.23}$$

Considerando $x = 0$ em 3.23, segue que:

$$\begin{aligned} |sen\,(0 + yi)| &= \left|\frac{e^{i(0+yi)} - e^{-i(0+yi)}}{2i}\right| \\ &= \left|\frac{e^{yi^2} - e^{-yi^2}}{2i}\right| \\ &= \left|\frac{(e^{-y} - e^{y}) \cdot i}{2i^2}\right| \\ &= \left|\frac{(e^{y} - e^{-y}) \cdot i}{2}\right| \\ &= \frac{|(e^{y} - e^{-y})| \cdot |i|}{2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{|e^y - e^{-y}|}{2} \\
&\geqslant \frac{e^y - e^{-y}}{2},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$|sen\,(yi)| \geqslant \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Note ainda, quando y cresce indefinidamente, e^{-y} tende a zero, enquanto que e^y cresce rapidamente e, portanto, $|sen\,(yi)|$ também cresce indefinidamente, isto é, a função seno não é limitada em $\mathbb{C}$.

3.3 FUNÇÃO TANGENTE, COTANGENTE E SUAS PROPRIEDADES

Agora vamos tratar sobre as funções tangente e cotangente com variável complexa, definindo-as e mostrando suas propriedades importantes. Mostraremos também, no caso complexo[2], suas respectivas funções inversas.

3.3.1 Função Tangente

A função tangente é definida em termo das funções seno e cosseno. Primeiramente, seja $z \in \mathbb{C}$ e $cos\,z \neq 0$, temos que $tg\,z$ é dado por:

$$tg\,z = \frac{sen\,z}{cos\,z}. \tag{3.24}$$

Temos ainda, considerando as definições dadas em 3.2.1 e 3.2.2:

$$
\begin{aligned}
tg\,z &= \frac{sen\,z}{cos\,z} \\
&= \frac{\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}{\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}} \\
&= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$tg\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}. \tag{3.25}$$

Note que, a igualdade 3.24 só faz sentido quando $cos\,z \neq 0$, isto é, quando $z \neq \pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, para definir função tangente, consideremos o conjunto $A = \{a \in \mathbb{C} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Assim, temos a seguinte definição.

[2] Não abordaremos neste trabalho as funções inversas da tangente e cotangente no caso real, mais isto pode ser encontrada em LEITHOLD (1994, p. 499).

Definição 3.3.1. *A função tangente* $tg\,(\cdot) : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *é definido por:*

$$\forall z \in A, tg\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

Temos também, no caso complexo, que a função tangente possui inversa. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função tangente, consideremos:

$$w = tg^{-1} z.$$

Assim:

$$z = tg\, w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}.$$

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}.$$

Para definir formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. A função tangente conforme definida em 3.3.1 não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período π, como será visto na propriedade 3.3.7.

Seja o seguinte conjunto $Y_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\pi/2 < x < \pi/2\}$, define-se a função $tg^{-1}\,(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \longrightarrow Y_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, tg^{-1}\, z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}.$$

Proposição 3.3.1. *A função* tg^{-1} *é a inversa da função tangente.*

Demonstração. Usa a mesma técnica da demonstração da função inversa do seno. □

Observe que existem também, infinitas "funções tangente inversa" devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

Não faremos aqui a generalização do conjunto Y_0.

3.3.2 Função Cotangente

A função cotangente é definida em termo das funções seno e cosseno. Primeiramente, seja $z \in \mathbb{C}$ e $sen\, z \neq 0$, temos que $cotg\, z$ é dado por:

$$cotg\, z = \frac{cos\, z}{sen\, z}. \tag{3.26}$$

Temos ainda, considerando as definições dadas em 3.2.1 e 3.2.2:

$$\begin{aligned} cotg\, z &= \frac{cos\, z}{sen\, z} \\ &= \frac{\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}{\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}} \\ &= \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}} \end{aligned}$$

Logo,

$$cotg\, z = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}. \tag{3.27}$$

Note que, a igualdade 3.26 só faz sentido quando $sen\, z \neq 0$, isto é, quando $z \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, para definir função cotangente, consideremos o conjunto $B = \{b \in \mathbb{C} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.3.2. *A função cotangente* $cotg\,(\cdot) : B \longrightarrow \mathbb{C}$ *é definida por:*

$$\forall z \in B, cotg\, z = \frac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}}.$$

Temos também, no caso complexo, que a função cotangente possui inversa. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função cotangente, consideremos:

$$w = cotg^{-1} z.$$

Assim:

$$z = cotg\, w = \frac{i(e^{iw}+e^{-iw})}{e^{iw}-e^{-iw}}.$$

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = \frac{i}{2} \ln \frac{z-i}{z+i}.$$

Para definir a formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. Conforme foi definida a função cotangente em 3.3.2, esta não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período π, como será visto na propriedade 3.3.8.

Seja o seguinte conjunto $Z_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < \pi\}$, define-se a função $cotg^{-1}\,(\cdot) : \mathbb{C} \setminus \{i, -i\} \longrightarrow Z_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}, cotg^{-1}\, z = \frac{i}{2} \ln \frac{z-i}{z+i}.$$

Proposição 3.3.2. *A função* $cotg^{-1}$ *é a inversa da função cotangente.*

Demonstração. Usa a mesma técnica da demonstração da função inversa do seno. □

Observe que existem também, infinitas "funções cotangente inversa" devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

Não faremos aqui a generalização do conjunto Z_0.

3.3.3 Propriedades das Funções Tangente e Cotangente

Propriedade 3.3.1. *A função tangente é ímpar, isto é,* $tg\,(-z) = -tg\,z, \forall z \in A$.

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.24, temos:

$$\begin{aligned} tg\,(-z) &= \frac{sen\,(-z)}{cos\,(-z)} \\ &= \frac{-sen\,z}{cos\,z} \\ &= -tg\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função tangente é ímpar. □

Propriedade 3.3.2. *A função cotangente é ímpar, isto é,* $cotg\,(-z) = -cotg\,z, \forall z \in B$.

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.26, temos:

$$\begin{aligned} cotg\,(-z) &= \frac{cos\,(-z)}{sen\,(-z)} \\ &= \frac{cos\,z}{-sen\,z} \\ &= -cotg\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função cotangente é ímpar. □

Propriedade 3.3.3. *Dado* $z \in \mathbb{C}$. *Então* $tg\,z = 0$ *se e somente se* $z = k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, seja $z \in \mathbb{C}$. Assim, da equação 3.24 temos:

$$tg\,z = \frac{sen\,z}{cos\,z}.$$

Das proposições 3.2.1 e 3.2.4, segue o resultado. □

Propriedade 3.3.4. *Dado* $z \in \mathbb{C}$. *Então* $cotg\,z = 0$ *se e somente se* $z = \pi/2 + k\pi$ *com* $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. De fato, seja $z \in \mathbb{C}$. Assim, da equação 3.26 temos:

$$cotg\, z = \frac{cos\, z}{sen\, z}.$$

Das proposições 3.2.1 e 3.2.4, segue o resultado. □

Propriedade 3.3.5. *Sejam* $z, w \in A = \{a \in \mathbb{C} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$*. Então, temos que*

$$tg\,(z+w) = \frac{tg\, z + tg\, w}{1 - tg\, z\, tg\, w}.$$

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.25. Assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{tg\, z + tg\, w}{1 - tg\, z\, tg\, w} &= \frac{\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} + \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}}{1 - \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \cdot \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})}} \\
&= \frac{\dfrac{i(e^{iw} + e^{-iw})(e^{iz} - e^{-iz}) + (e^{iw} - e^{-iw}) \cdot i(e^{iz} + e^{-iz})}{i(e^{iz} + e^{-iz}) \cdot i(e^{iw} + e^{-iw})}}{\dfrac{i(e^{iz} + e^{-iz}) \cdot i(e^{iw} + e^{-iw}) - (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})}{i(e^{iz} + e^{-iz}) \cdot i(e^{iw} + e^{-iw})}} \\
&= \frac{i(e^{iw+iz} - e^{iw-iz} + e^{-iw+iz} - e^{-iw-iz} + e^{iw+iz} + e^{iw-iz} - e^{-iw+iz} - e^{-iw-iz})}{-e^{iz+iw} - e^{iz-iw} - e^{-iz+iw} - e^{-iz-iw} - e^{iz+iw} + e^{iz-iw} + e^{-iz+iw} - e^{-iz-iw}} \\
&= \frac{2i(e^{\hat{\imath}(z+w)} - e^{-i(z+w)})}{-2(e^{\hat{\imath}z+iw} + e^{-iz-iw})} \\
&= -\frac{i^2(e^{\hat{\imath}(z+w)} - e^{-i(z+w)})}{i(e^{\hat{\imath}(z+w)} + e^{-i(z+w)})} \\
&= \frac{e^{\hat{\imath}(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{i(e^{\hat{\imath}(z+w)} + e^{-i(z+w)})} \\
&= tg\,(z+w)
\end{aligned}$$

Portanto, $tg\,(z+w) = \dfrac{tg\, z + tg\, w}{1 - tg\, z\, tg\, w}, \forall z, w \in A.$ □

Observação 3.3.1. *Temos também a forma tradicional de demonstrar a propriedade anterior, semelhante ao caso real, que é dado por:*

Demonstração. De fato, sejam $z, w \in A$ e considerando a equação 3.24, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{tg\, z + tg\, w}{1 - tg\, z\, tg\, w} &= \frac{\dfrac{sen\, z}{cos\, z} + \dfrac{sen\, w}{cos\, w}}{1 - \dfrac{sen\, z}{cos\, z} \cdot \dfrac{sen\, w}{cos\, w}} \\
&= \frac{\dfrac{sen\, z\, cos\, w + sen\, w\, cos\, z}{cos\, z\, cos\, w}}{\dfrac{cos\, z\, cos\, w - sen\, z\, sen\, w}{cos\, z\, cos\, w}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{sen\, z\, cos\, w + sen\, w\, cos\, z}{cos\, z\, cos\, w - sen\, z\, sen\, w}\\
&= \frac{sen\,(z+w)}{cos\,(z+w)}\\
&= tg\,(z+w)
\end{aligned}$$

Portanto, $tg\,(z+w) = \dfrac{tg\, z + tg\, w}{1 - tg\, z\, tg\, w}, \forall z, w \in A.$ □

Propriedade 3.3.6. *Sejam* $z, w \in B = \{b \in \mathbb{C} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$*. Então, temos que*

$$cotg\,(z+w) = \frac{cotg\, z\, cotg\, w - 1}{cotg\, z + cotg\, w}.$$

Demonstração. Faremos uma demonstração desta propriedade semelhante a demonstração feita na observação acima. Sendo $z, w \in B$ e considerando a equação 3.26, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{cotg\, z\, cotg\, w - 1}{cotg\, z + cotg\, w} &= \frac{\dfrac{cos\, z}{sen\, z} \cdot \dfrac{cos\, w}{sen\, w} - 1}{\dfrac{cos\, z}{sen\, z} + \dfrac{cos\, w}{sen\, w}}\\
&= \frac{\dfrac{cos\, z\, cos\, w - sen\, z\, sen\, w}{sen\, z\, sen\, w}}{\dfrac{cos\, z\, sen\, w + sen\, z\, cos\, w}{sen\, z\, sen\, w}}\\
&= \frac{cos\, z\, cos\, w - sen\, z\, sen\, w}{sen\, z\, cos\, w + cos\, z\, sen\, w}\\
&= \frac{cos\,(z+w)}{sen\,(z+w)}\\
&= cotg\,(z+w)
\end{aligned}$$

Portanto, $cotg\,(z+w) = \dfrac{cotg\, z\, cotg\, w - 1}{cotg\, z + cotg\, w}, \forall z, w \in B.$ □

Propriedade 3.3.7. *A função tangente é periódica de período* π*.*

Demonstração. De fato, considerando a definição da função tangente, temos que $\forall z \in A$:

$$\begin{aligned}
tg\,(z+\pi) &= \frac{e^{i(z+\pi)} - e^{-i(z+\pi)}}{i(e^{i(z+\pi)} + e^{-i(z+\pi)})}\\
&= \frac{e^{iz} \cdot e^{i\pi} - e^{-iz} \cdot e^{-i\pi}}{i(e^{iz} \cdot e^{i\pi} + e^{-iz} \cdot e^{-i\pi})}\\
&= \frac{e^{iz} \cdot (cos\, \pi + i sen\, \pi) - e^{-iz} \cdot (cos\, \pi - i sen\, \pi)}{i[e^{iz} \cdot (cos\, \pi + i sen\, \pi) + e^{-iz} \cdot (cos\, \pi - i sen\, \pi)]}\\
&= \frac{e^{iz} \cdot (-1 + i \cdot 0) - e^{-iz} \cdot (-1 - i \cdot 0)}{i[e^{iz} \cdot (-1 + i \cdot 0) + e^{-iz} \cdot (-1 - i \cdot 0)]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{i(-e^{iz}-e^{-iz})} \\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i(e^{iz}+e^{-iz})} \\
&= tg\, z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função tangente é periódica de período π para todo $z \in A$. □

Observação 3.3.2. *Temos uma outra maneira de demonstrar a propriedade anterior, dada da seguinte forma:*

Demonstração. Devemos mostrar que a função tangente é periódica de período π. Assim, considerando a propriedade 3.3.5, e dado $z \in A$, temos:

$$
\begin{aligned}
tg\,(z+\pi) &= \frac{tg\, z + tg\, \pi}{1 - tg\, z\, tg\, \pi} \\
&= \frac{tg\, z + 0}{1 - tg\, z \cdot 0} \\
&= \frac{tg\, z}{1-0} \\
&= tg\, z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função tangente é periódica de período π para todo $z \in A$. □

Propriedade 3.3.8. *A função cotangente é periódica de período* π*.*

Demonstração. Dado $z \in B$, temos:

$$
\begin{aligned}
cotg\, z &= \frac{cos\, z}{sen\, z} \\
&= \frac{1}{\frac{sen\, z}{cos\, z}} \\
&= \frac{1}{tg\, z}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$cotg\, z = \frac{1}{tg\, z}.$$

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
cotg\,(z+\pi) &= \frac{1}{tg\,(z+\pi)} \\
&= \frac{1}{tg\, z} \\
&= cotg\, z.
\end{aligned}
$$

Portanto, a função cotangente é periódica de período π para todo $z \in B$.

□

3.4 FUNÇÃO SECANTE, COSSECANTE E SUAS PROPRIEDADES

Agora vamos tratar sobre as funções secante e cossecante com variável complexa, definindo-as e mostrando suas propriedades importantes. Mostraremos também, no caso complexo[3], suas respectivas funções inversas.

3.4.1 Função Secante

A função secante é definida em termo da função cosseno. Primeiramente, seja $z \in \mathbb{C}$ e $cos\, z \neq 0$, temos que $sec\, z$ é dado por:

$$sec\, z = \frac{1}{cos\, z}. \tag{3.28}$$

Temos ainda, considerando a definição dada em 3.2.2:

$$\begin{aligned} sec\, z &= \frac{1}{cos\, z} \\ &= \frac{1}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} \\ &= \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}} \end{aligned}$$

Logo,

$$sec\, z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}. \tag{3.29}$$

Note que, a igualdade 3.28 só faz sentido quando $cos\, z \neq 0$, isto é, quando $z \neq \pi/2 + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, para definir função secante, consideremos o conjunto $A = \{a \in \mathbb{C} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.4.1. *A função secante* $sec\,(\cdot) : A \longrightarrow \mathbb{C}$ *é definida por:*

$$\forall z \in A, sec\, z = \frac{2}{e^{iz}+e^{-iz}}.$$

Temos também, no caso complexo, que a função secante possui inversa. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função secante, consideremos:

$$w = sec^{-1} z.$$

Assim:

$$z = sec\, w = \frac{2}{e^{iw}+e^{-iw}}.$$

[3] Não abordaremos neste trabalho as funções inversas da secante e cossecante no caso real, mais isto pode ser encontrada em LEITHOLD (1994, p. 502).

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = -i \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} \right).$$

Para definir formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. Conforme a função secante definida em 3.4.1, esta não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período 2π, como será visto na propriedade 3.4.1.

Seja o seguinte conjunto $Y_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : -\pi/2 < x < \pi/2\}$, define-se a função $sec^{-1}(\cdot) : \mathbb{C}^* \longrightarrow Y_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, sec^{-1} z = -i \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - z^2}}{z} \right).$$

Proposição 3.4.1. *A função sec^{-1} é a inversa da função secante.*

Demonstração. Usa a mesma técnica da demonstração da função inversa do seno. □

Observe que existem também, infinitas "funções secante inversa" devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

Não faremos aqui a generalização do conjunto Y_0.

3.4.2 Função Cossecante

A função cossecante é definida em termo da função seno. Primeiramente, seja $z \in \mathbb{C}$ e $sen\, z \neq 0$, temos que $cossec\, z$ é dado por:

$$cossec\, z = \frac{1}{sen\, z}. \tag{3.30}$$

Temos ainda que, considerando a definição dada em 3.2.1,

$$\begin{aligned} cossec\, z &= \frac{1}{sen\, z} \\ &= \frac{1}{\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}} \\ &= \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}} \end{aligned}$$

Logo,

$$cossec\, z = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}. \tag{3.31}$$

Note que, a igualdade 3.30 só faz sentido quando $sen\, z \neq 0$, isto é, quando $z \neq k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, para definir função cossecante, consideremos o conjunto $B = \{b \in \mathbb{C} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$. Assim, temos a seguinte definição.

Definição 3.4.2. *A função cossecante* $cossec\,(\cdot) : B \longrightarrow \mathbb{C}$ *é dada por:*

$$\forall z \in B, cossec\, z = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Temos também, no caso complexo, que a função cossecante possui inversa. A mesma é definida em termos dos logaritmos, que foi tratado na subseção 2.9.2.

Para definirmos a inversa da função cossecante, consideremos:

$$w = cossec^{-1} z.$$

Assim:

$$z = cossec\, w = \frac{2i}{e^{iw} - e^{-iw}}.$$

Por um cálculo rápido, obtemos:

$$w = -i \ln \left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right).$$

Para definir formalmente a função inversa, temos que levar em conta também o domínio e contradomínio da função. Conforme a função cossecante definida em 3.4.2, esta não possui inversa, pelo fato da mesma ser periódica de período 2π, como será visto na propriedade 3.4.3.

Seja o seguinte conjunto $Z_0 = \{x + iy \in \mathbb{C} : 0 < x < \pi\}$, define-se a função $cossec^{-1}\,(\cdot) : \mathbb{C}^* \longrightarrow Z_0$ por:

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, sec^{-1}\, z = -i \ln \left(\frac{i + \sqrt{z^2 - 1}}{z} \right).$$

Proposição 3.4.2. *A função* $cossec^{-1}$ *é a inversa da função cossecante.*

Demonstração. Usa a mesma técnica da demonstração da função inversa do seno. □

Observe que existem também, infinitas "funções cossecante inversa" devido ao fato de a mesma ser definida em termos dos logaritmos. Note ainda, que na definição anterior omitimos a constante $2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$, por motivo de simplicidade.

Não faremos aqui a generalização do conjunto Z_0.

3.4.3 Propriedades da Funções Secante e Cossecante

Proposição 3.4.3. *A função secante é par, isto é,* $sec\,(-z) = sec\, z, \forall z \in A.$

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.28, temos:

$$\begin{aligned} sec\,(-z) &= \frac{1}{cos\,(-z)} \\ &= \frac{1}{cos\,z} \\ &= sec\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função secante é par.

$\square$

Proposição 3.4.4. *A função cossecante é ímpar, isto é,* $cossec\,(-z) = -cossec\,z, \forall z \in B$.

Demonstração. De fato, considerando a equação 3.30, temos:

$$\begin{aligned} cossec\,(-z) &= \frac{1}{sen\,(-z)} \\ &= \frac{1}{-sen\,z} \\ &= -cossec\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função cossecante é ímpar.

$\square$

Propriedade 3.4.1. *A função secante é periódica de período* 2π*.*

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.28 e dado $z \in A$, temos que:

$$\begin{aligned} sec\,(z+2\pi) &= \frac{1}{cos\,(z+2\pi)} \\ &= \frac{1}{cos\,z} \\ &= sec\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função secante é periódica de período 2π para todo $z \in A$.

$\square$

Propriedade 3.4.2. *A função cossecante é periódica de período* 2π*.*

Demonstração. De fato, considerando a equação dada em 3.30 e dado $z \in B$, temos que:

$$\begin{aligned} cossec\,(z+2\pi) &= \frac{1}{sen\,(z+2\pi)} \\ &= \frac{1}{sen\,z} \\ &= cossec\,z. \end{aligned}$$

Portanto, a função cossecante é periódica de período 2π para todo $z \in B$.

□

Propriedade 3.4.3. *Seja* $z \in A = \{a \in \mathbb{C} : a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$*, então* $1 + tg^2 z = sec^2 z$.

Demonstração. De fato, considerando as propriedades 3.24, 3.2.1 e 3.28, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 1 + tg^2 z &= 1 + \frac{sen^2 z}{cos^2 z} \\ &= \frac{cos^2 z + sen^2 z}{cos^2 z} \\ &= \frac{1}{cos^2 z} \\ &= \sec^2 z \end{aligned}$$

Portanto, $1 + tg^2 z = sec^2 z, \forall z \in A$.

□

Propriedade 3.4.4. *Seja* $z \in B = \{b \in \mathbb{C} : b \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$*, então* $1 + cotg^2 z = cossec^2 z$.

Demonstração. De fato, considerando as propriedades 3.26, 3.2.1 e 3.30, temos o seguinte:

$$\begin{aligned} 1 + cotg^2 z &= 1 + \frac{cos^2 z}{sen^2 z} \\ &= \frac{sen^2 z + cos^2 z}{sen^2 z} \\ &= \frac{1}{sen^2 z} \\ &= cossec^2 z \end{aligned}$$

Portanto, $1 + cotg^2 z = cossec^2 z, \forall z \in B$.

□

3.5 APLICAÇÃO

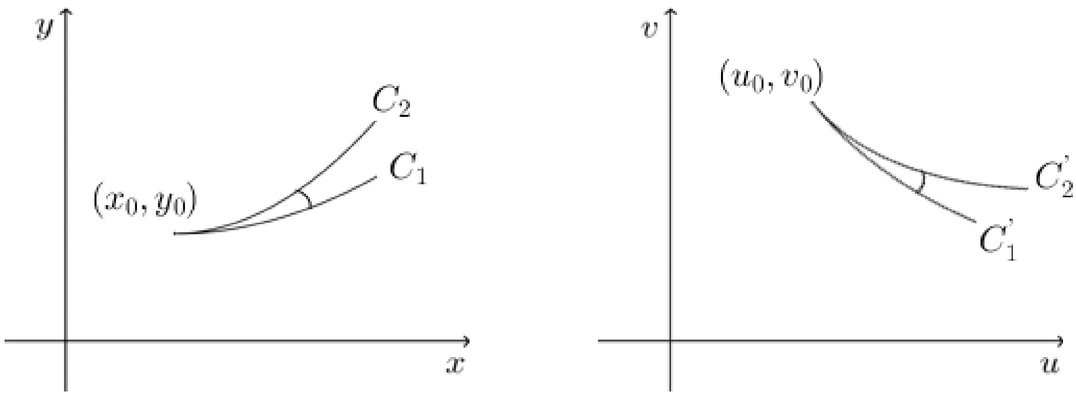
Nesta seção, dedicaremos a mostrar uma aplicação dos nossos estudos à Física. Embora não seja o objetivo principal, mas se faz necessário realizarmos ao menos uma aplicação para mostrar a finalidade do assunto abordado. A teoria das funções de variáveis complexas é aplicável, mas nos restringimos a trabalhar somente as funções trigonométricas.

Na subseção 3.1.2, tratamos sobre *transformação* de pontos do plano-z a pontos do plano-w através de uma função, isso porque não existe gráficos de funções no mundo complexo. A aplicação que mostraremos a seguir envolve a função seno, sua inversa e transformação. Mais especificamente, um problema sobre transformações conformes e suas aplicações na Física, que poder visto em SPIEGEL (1972, p. 379).

Primeiramente, vamos definir a seguir o conceito de *transformação conforme*[4]. Assim, temos:

Definição 3.5.1. *Suponhamos que uma transformação leva o ponto (x_0, y_0) do plano xy, no ponto (u_0, v_0) no plano uv [ver figuras] e as curvas C_1 e C_2 [interceptam-se em (x_0, y_0)] nas curvas C_1' e C_2', respectivamente [interceptam-se em (u_0, v_0)]. Então, se a transformação é tal que o ângulo entre C_1 e C_2 em (x_0, y_0) é igual ao ângulo entre C_1' e C_2' em (u_0, v_0) em valor absoluto e sentido, a transformação é conforme em (x_0, y_0).*

Figura 19: Transformação conforme



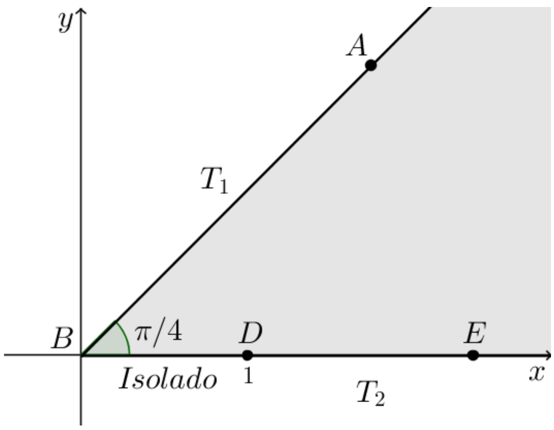
Fonte: Autor

As transformações conformes são muito importantes, pois transformam regiões complexas em regiões canônicas, com isso, facilitando o trabalho. O ângulo entre as curvas citadas na definição anterior, é definida como sendo o ângulo entre as suas tangentes no ponto de interseção das curvas. Agora, temos a seguir o enunciado do problema.

[4] Conforme significa que possui a mesma forma ou forma semelhante.

Problema 3.5.1. *Uma região cuneiforme*[5] *infinita* $ABDE$ *de ângulo* $\pi/4$ *tem seu lado* AB *mantido a uma temperatura constante* T_1*. O outro lado* BDE *tem a parte* BD *(de comprimento unitário) isolado, enquanto a parte de* DE *é mantida a uma temperatura constante* T_2*. Determine a temperatura em qualquer ponto da região.*

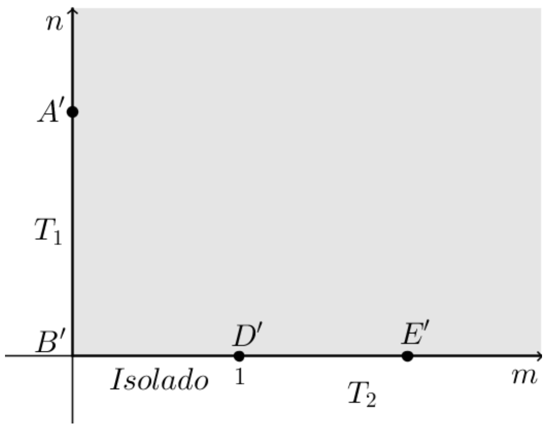
Figura 20: Plano z



Fonte: Autor

Solução: A ideia para resolver este problema é utilizar a transformação conforme, pois transforma a região do enunciado em região mais simples. De fato, a função $\varphi = z^2$ transforma a região sombreada do plano z (fig. 20) na região sombreada do plano φ (fig. 21). Esse fato está mostrado no apêndice B.

Figura 21: Plano φ

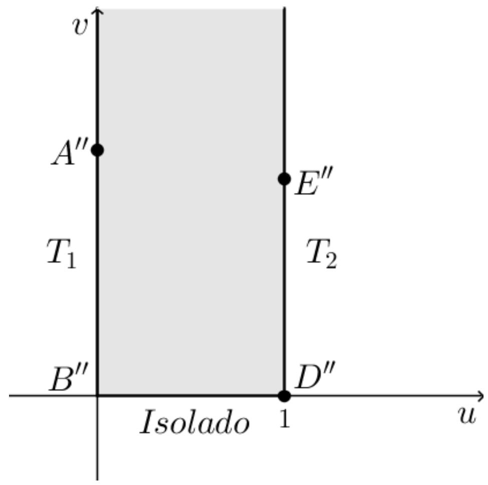


Fonte: Autor

[5] Cuneiforme é designado um certo tipo de escrita feitas com objetos em formato de cunha gravados em tabuletas de argilas, sendo desenvolvida pelos sumérios.

A função $\varphi = sen\,(\pi w/2)$ transforma a região sombreada do plano φ (fig. 21) na região sombreada do plano w (fig. 22). Esse fato está mostrado também no apêndice B.

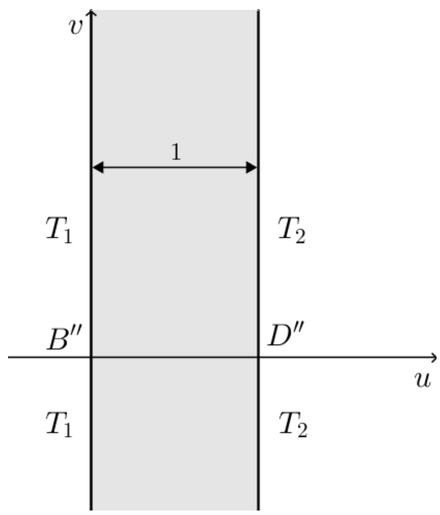
Figura 22: Plano w



Fonte: Autor

Agora, o problema representado pela figura 22 com $B''D''$ isolado é equivalente ao problema representado pela figura 23, desde que, por simetria, não se dá nenhuma transferência de calor, através de $B''D''$.

Figura 23: Plano w



Fonte: Autor

Mas este é exatamente o problema de determinar a temperatura entre dois planos paralelos, sujeitos às temperaturas constantes T_1 e T_2, respectivamente. Neste caso, a variação de temperatura é linear, portanto, deve ser dada por $T_1 + (T_2 - T1)u$. Veja esse resultado no apêndice B.

Vamos denotar por T_z a temperatura procurada, assim, temos que

$$T_z = T_1 + (T_2 - T1)u. \tag{3.32}$$

Agora, basta determinar u em 3.32.

De $\varphi = z^2$ e $\varphi = sen\,(\pi w/2)$, segue que,

$$z^2 = sen\,(\pi w/2),$$

ou seja,

$$w = \frac{2}{\pi} sen^{-1}\, z^2.$$

Assim, temos que a parte real da igualdade anterior é dado por:

$$u = \frac{2}{\pi} Re(sen^{-1}\, z^2). \tag{3.33}$$

Logo, substituindo 3.33 em 3.32, temos que a temperatura procurada é

$$T_z = T_1 + \frac{2(T_2 - T1)}{\pi} Re(sen^{-1}\, z^2).$$

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Realizamos neste trabalho uma abordagem básica sobre as funções trigonométricas com variáveis reais, pois, o nosso objetivo é que esta abordagem seja voltada para o ensino médio. Neste sentido, foi feito um breve estudo sobre as funções trigonométricas em $\mathbb{R}$, tratando suas definições, proposições e gráficos.

Em se tratando de números complexos, foi feito um estudo sobre este assunto, com o objetivo de termos ferramentas necessárias para podermos abordar sobre o nosso objetivo principal. Além da forma tradicional de definir o conjunto de números complexos, que é por meio de pares ordenados de números reais, apresentamos uma outra forma interessante que encontramos na literatura, por meio de matrizes quadradas de ordem dois. Uma forma diferenciada de se definir o conjunto dos números complexos. Sendo assim, o professor do ensino médio pode usar esta maneira para iniciar o estudo de números complexos com seus alunos sem nenhum problema, uma vez que, utiliza-se somente de conceitos básicos sobre matrizes quadradas de ordem dois.

Na última seção do capítulo dois, que trata sobre números complexos, foi vista uma importante fórmula, denominada *fórmula de Euler*, que é dada por:

$$e^{iy} = cos\, y + i \cdot sen\, y, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Aqui entendida como crucial para que fosse possível definir as funções trigonométricas no campo dos números complexos. A partir dela fizemos uma abordagem deste conteúdo, de forma clara e objetiva, para que alunos do ensino médio tenham facilidade no processo de aprendizagem, pois nossa proposta neste trabalho foi apresentar um estudo das funções trigonométricas complexas de forma compreensível para o ensino médio. Assim, abordamos cada função apresentando suas definições, exemplos, proposições e propriedades. Percebemos ainda, que quase todas as propriedades no caso real são também válidas para caso complexo, como por exemplo, a importante *relação fundamental*, que afirma que dado z um número complexo qualquer então temos que $sen^2\, z + cos^2\, z = 1$.

Na dedução da fórmula de Euler utilizamos recursos mais avançados de cálculo, no entanto, não tivemos grande impasse para construir nosso capítulo principal, pois usamos apenas ferramentas básicas da matemática, procurando sempre adequar de forma objetiva, para que alunos e professores do ensino médio tenham facilidade na compreensão.

Para finalizar o estudo do tema, fechamos mostrando uma aplicação básica na última seção do capítulo três envolvendo as funções trigonométricas complexas.

Embora não seja esse o objetivo geral do trabalho, destacamos a importância de mostrar sua utilidade por meio de aplicações, uma vez que, o conhecimento matemático só tem vida quando é relevante para alguma finalidade ou aplicabilidade.

Ressaltamos que à partir do presente trabalho, pode-se desenvolver outras pesquisas, como por exemplo, estudar as funções trigonométricas hiperbólicas complexas. Finalmente, esperamos que esta dissertação contribua para enriquecer o conhecimento do aluno e professor de matemática do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 271 p.

BRASIL. **PCN+ Ensino médio:** orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2014.

CARMO, M. P. d.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/Números complexos:** coleção do professor de matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 165 p.

CHURCHILL, R. V. **Variáveis complexas e suas aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da universidade de São Paulo, 1975. 276 p.

FERNANDES, C. S.; BERNARDEZ, N. C. J. **Introdução às funções de uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 224 p.

FLANIGAN, F. J. **Complex variables:** Harmonic and analytic functions. New York: Dover Publications, Inc, 1972. 353 p.

HEFEZ, A. **Indução matemática:** Programa de iniciação científica OBMEP. Rio de Janeiro: SBM, 2007. 83 p.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. v. 1. 3. ed. São Paulo: HARBRA ltda, 1994. 685 p.

LIMA, E. L. **Um curso de análise**. v. 1. 14. ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2012. 431 p.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio:** coleção professor de matemática. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280 p.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio:** coleção professor de matemática. v. 3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 252 p.

NETO, A. L. **Funções de uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 468 p.

SANTOS, A. A. d. **Trigonometria hiperbólica:** uma abordagem elementar. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014.

SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 220 p.

SPIEGEL, M. R. **Variáveis complexas:** coleção schãum. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1972. 468 p.

A NÚMEROS COMPLEXOS

ABORDAGEM MATRICIAL

Segundo SOARES (2001), podemos iniciar a abordagem dos números complexos com a mais básica ilustração que se pode dar: a solução da equação

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{ou,} \quad x^2 = -1.$$

Sabemos que sobre $\mathbb{R}$ não há solução, assim vamos definir um "número" i, satisfazendo $i^2 = -1$, que resolva esta equação. Agora, postulamos a existência desse "número" ou invocamos da álgebra elementar e saímos em busca de um ente de natureza geométrica que seja a solução procurada. Assim, vamos considerar a equação sob a forma

$$X \cdot X = -I,$$

onde X é uma matriz 2 x 2 com coeficientes reais, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e " $\cdot$ " é o produto de matrizes, dessa forma podemos achar a solução $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Assim, temos a seguinte proposição.

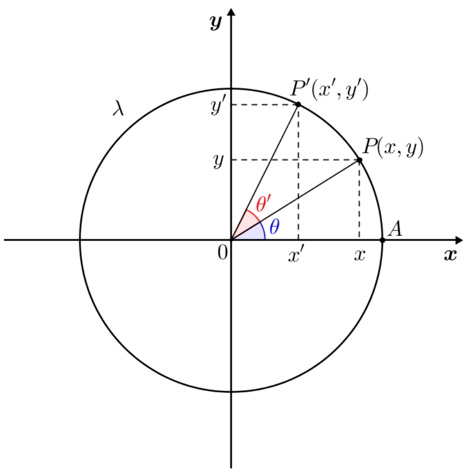
Proposição A.0.1. *Seja X e I matrizes reais de ordem 2, sendo I a matriz identidade. A solução da equação*

$$X \cdot X = -I,$$

representa geometricamente a rotação do ângulo reto $(\frac{\pi}{2}\ radianos)$ no plano cartesiano no sentido anti-horário.

Demonstração. Seja a figura abaixo, assim temos:

Figura 24: Circunferência centrada na origem de raio r



Fonte: Autor

$$cos\ \theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\, cos\ \theta \quad e \quad x' = r\, cos\,(\theta + \theta')$$

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\, sen\ \theta \quad e \quad y' = r\, sen\,(\theta + \theta')$$

$$x' = r\, cos\,(\theta+\theta') = r\,(cos\ \theta \cdot cos\ \theta' - sen\ \theta \cdot sen\ \theta') = r\,(\frac{x}{r} \cdot cos\ \theta' - \frac{y}{r} \cdot sen\ \theta') = x\, cos\ \theta' - y\, sen\ \theta'$$

$$y' = r\, sen\,(\theta+\theta') = r\,(cos\ \theta \cdot sen\ \theta' + cos\ \theta' \cdot sen\ \theta) = r\,(\frac{x}{r} \cdot sen\ \theta' + \frac{y}{r} \cdot cos\ \theta') = x\, sen\ \theta' + y\, cos\ \theta'$$

assim,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\, cos\ \theta' - y\, sen\ \theta' \\ x\, sen\ \theta' + y\, cos\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\ \theta' & -sen\ \theta' \\ sen\ \theta' & cos\ \theta' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Tomando $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{pmatrix} cos\ \frac{\pi}{2} & -sen\ \frac{\pi}{2} \\ sen\ \frac{\pi}{2} & cos\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = i.$$

□

Considerando o conjunto $A = \{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}\}$, temos a seguinte proposição.

Proposição A.0.2. *A função* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ *definida por* $\phi(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ *é:*

i. *Bijetiva;*

ii. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$*, para todo* $a,\, b \in \mathbb{R}$*;*

iii. $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$*, para todo* $a,\, b \in \mathbb{R}$*;*

Demonstração. Para provar **i**, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva e injetiva.

1. todo matriz $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in A$ é o correspondente, segundo ϕ, de $x \in \mathbb{R}$ (ou seja, ϕ é sobrejetiva);

2. dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, os seus correspondentes $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in A$ e $\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in A$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de matrizes (ou seja, ϕ é injetiva).

Prova de **ii**

1. a soma $a+b$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado a matriz $\begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$, que é a soma das matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, correspondentes de a e b, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi(a+b) &= \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \phi(a) + \phi(b) \end{aligned}$$

Prova de **iii**

2. ao produto ab, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, está associado a matriz $\begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix}$, que é o produto das matrizes $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, correspondentes de a e b, respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi(ab) &= \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot b + 0 \cdot 0 & a \cdot 0 + 0 \cdot b \\ 0 \cdot b + a \cdot 0 & 0 \cdot 0 + a \cdot b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \phi(a) \cdot \phi(b) \end{aligned}$$

$\square$

Devido ao fato de ϕ ser uma aplicação bijetiva $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ que conserva as operações de adição e multiplicação, concluímos que as matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação à soma e ao produto. Assim, todo número real a associamos a matriz

$$\begin{aligned} aI &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ampliaremos agora o conjunto $\mathbb{R}$ via matrizes de ordem 2.

Definição A.0.2. *Denomina-se de número complexo o número da forma* $aI + bi$*, com* $a, b \in \mathbb{R}$*, onde*

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que:

$$\begin{aligned} aI + bi &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação A.0.1. $aI + 0i = aI$ *é denominada de parte real do número complexo.*

Observação A.0.2. $0I + bi = bi$ *é a parte imaginária do número complexo, denominado de imaginário puro.*

Denota-se por $\mathbb{C}$ o conjunto $\{aI + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$.

Definimos as operações entre números complexos a partir da soma e produto de matrizes.

Definição A.0.3. *Operações no conjunto* $\mathbb{C} = \{aI + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ *é dado por:*

i. *Soma*

$$\begin{aligned} (aI + bi) + (cI + di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{pmatrix} \\ &= (a + c)I + (b + d)i. \end{aligned}$$

ii. *Produto*

$$\begin{aligned}(aI+bi)\cdot(cI+di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \\ &= (ac-bd)I+(ad+bc)i.\end{aligned}$$

Proposição A.0.3. *O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Associatividade da soma*

$$[(aI+bi)+(cI+di)]+(eI+fi)=(aI+bi)+[(cI+di)+(eI+fi)]$$

2. *Comutatividade da soma*

$$(aI+bi)+(cI+di)=(cI+di)+(aI+bi)$$

3. *Elemento neutro da soma*

$$(aI+bi)+(0I+0i)=aI+bi$$

4. *Inverso aditivo*

$$(aI+bi)+[-(aI+bi)]=0I+0i$$

5. *Associatividade do produto*

$$[(aI+bi)\cdot(cI+di)]\cdot(eI+fi)=(aI+bi)\cdot[(cI+di)\cdot(eI+fi)]$$

6. *Comutatividade do produto*

$$(aI+bi)\cdot(cI+di)=(cI+di)\cdot(aI+bi)$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (esquerda e direita)*

$$(aI+bi)\cdot[(cI+di)+(eI+fi)]=(aI+bi)\cdot(cI+di)+(aI+bi)\cdot(eI+fi)$$

$$[(aI+bi)+(cI+di)]\cdot(eI+fi)=(aI+bi)\cdot(eI+fi)+(cI+di)\cdot(eI+fi)$$

8. *Elemento neutro do produto*

$$(aI+bi)\cdot(1I+0i)=aI+bi$$

9. *Inverso multiplicativo*

$$(aI+bi)\cdot[(aI+bi)^{-1}] = 1I+0i$$

Demonstração. De fato, temos:

1. *Associatividade da soma*

$$\begin{aligned}
[(aI+bi)+(cI+di)]+(eI+fi) &= \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a+c)+e & -[(b+d)+f] \\ (b+d)+f & (a+c)+e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+(c+e) & -[b+(d+f)] \\ b+(d+f) & a+(c+e) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c+e & -(d+f) \\ d+f & c+e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}\right] \\
&= (aI+bi)+[(cI+di)+(eI+fi)].
\end{aligned}$$

2. *Comutatividade da soma*

$$\begin{aligned}
(aI+bi)+(cI+di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c+a & -(d+b) \\ d+b & c+a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= (cI+di)+(aI+bi).
\end{aligned}$$

3. *Elemento neutro da soma*

$0I + 0i = 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}
(aI + bi) + (0I + 0i) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+0 & -b+0 \\ b+0 & a+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ d & a \end{pmatrix} \\
&= aI + bi.
\end{aligned}$$

4. *Inverso aditivo*

$-(aI + bi) = -aI - bi = -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ é o inverso aditivo.

De fato,

$$\begin{aligned}
(aI + bi) + [-(aI + bi)] &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a-a & -b+b \\ b-b & a-a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0I + 0i.
\end{aligned}$$

5. *Associatividade da produto*

$$[(aI + bi) \cdot (cI + di)] \cdot (eI + fi) = \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (ac-bd)e-(ad+bc)f & -[(ac-bd)f+(ad+bc)e] \\ (ac-bd)f+(ad+bc)e & (ac-bd)e-(ad+bc)f \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ace-bde-adf-bcf & -acf+bdf-ade-bce \\ acf-bdf+ade+bce & ace-bde-adf-bcf \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ace - adf - bcf - bde & -acf - ade - bce + bdf \\ acf + ade + bce - bdf & ace - adf - bcf - bde \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a(ce - df) - b(cf + de) & -[a(cf + de) + b(ce - df)] \\ a(cf + de) + b(ce - df) & a(ce - df) - b(cf + de) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ce - df & -(cf + de) \\ cf + de & ce - df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \right] \\
&= (aI + bi) \cdot [(cI + di) \cdot (eI + fi)].
\end{aligned}
$$

6. *Comutatividade do produto*

$$
\begin{aligned}
(aI + bi) \cdot (cI + di) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ca - db & -(cb + da) \\ cb + da & ca - db \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \\
&= (cI + di) \cdot (aI + bi).
\end{aligned}
$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (esquerda e a direita)*

a) Distributividade à esquerda

$$
(aI + bi) \cdot [(cI + di) + (eI + fi)] = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c + e & -(d + f) \\ d + f & c + e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac + ae - bd - bf & -ad - af - bc - be \\ bc + be + ad + af & -bd - bf + ac + ae \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ac - bd + ae - bf & -ad - bc - af - be \\ ad + bc + af + be & ac - bd + ae - bf \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= (aI+bi)\cdot(cI+di)+(aI+bi)\cdot(eI+fi).
\end{aligned}$$

b) Distributividade à direita

$$\begin{aligned}
[(aI+bi)+(cI+di)]\cdot(eI+fi) &= \left[\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae+ce-bf-df & -af-cf-be-de \\ be+de+af+cf & -bf-df+ae+ce \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae-bf+ce-df & -af-be-cf-de \\ af+be+cf+de & ae-bf+ce-df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} \\
&= (aI+bi)\cdot(eI+fi)+(cI+di)\cdot(eI+fi).
\end{aligned}$$

8. *Elemento neutro do produto*

$1I+0i = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}
(aI+bi)\cdot(1I+0i) &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cdot 1 - b\cdot 0 & a\cdot 0 - b\cdot 1 \\ b\cdot 1 + a\cdot 0 & b\cdot 0 + a\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & -b \\ d & a \end{pmatrix} \\
&= aI+bi.
\end{aligned}$$

9. *Inverso multiplicativo*

$(aI+bi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ é o inverso multiplicativo. De fato,

$$\begin{aligned}
(aI+bi)\cdot[(aI+bi)^{-1}] &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2} \\ \frac{ba}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= 1I+0i.
\end{aligned}$$

□

Vamos agora simplificar a *notação*. Vimos que fazer corresponder ao número $a \in \mathbb{R}$ a matriz $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ não introduziu nenhuma modificação no que diz respeito à soma e ao produto. Por outro lado, a identificação $i^2 = i \cdot i = -I$ corresponde ao número real -1. Logo, podemos simplesmente omitir o "I" em $aI+bi$ e associar i^2 a -1, lembrando sempre das fórmulas para a soma e para o produto de números complexos (SOARES, 2001). Com isso, podemos escrever

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a,\, b \in \mathbb{R}\},$$

observe que somos naturalmente levados a colocar $i = \sqrt{-1}$.

B DEMONSTRAÇÕES

Transformação da região sombreada do plano z na região sombreada do plano φ pela função $\varphi = z^2$.

Demonstração. Sejam os números complexos $z = x + yi$ e $\varphi = m + ni$, basta mostrar que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$. De fato, a região sombreada do plano z (fig. 20) é dado por $0 \leqslant y \leqslant x$. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \varphi &= z^2 \\ &= (x + yi)^2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 \\ &= x^2 - y^2 + 2xyi, \end{aligned}$$

ou seja, a parte real e a parte imaginária de φ é dada, respectivamente, por:

$$Re(\varphi) = m = x^2 - y^2 \quad \text{e} \quad Im(\varphi) = n = 2xy.$$

Do fato de $0 \leqslant y \leqslant x$, segue que:

$$x^2 - y^2 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad 2xy \geqslant 0.$$

Portanto, $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$.

Temos outra forma de mostrar esse resultado. Seja $z = re^{i\theta}$ e $\varphi = se^{i\alpha}$. Então, se $\varphi = z^2$, temos $se^{i\alpha} = r^2 e^{2i\theta}$, isto é, $s = r^2$ e $\alpha = 2\theta$. Assim, os pontos do plano z (fig. 20) com coordenadas (r, θ) são girados de um ângulo 2θ. Desde que todos pontos da região sombreada do plano z ocupam a região $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$, eles vão em $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, ou seja, a região sombreada do plano φ (fig. 21).

□

Transformação da região sombreada do plano φ na região sombreada do plano w pela função $\varphi = sen\,(\pi w/2)$.

Demonstração. Vamos mostrar que a função $\varphi = sen\,(\pi w/2)$ transforma a região sombreada do plano w (fig. 22) na região sombreada do plano φ (fig. 21). Fazendo isso, automaticamente a referida função transforma a região sombreada do plano φ (fig. 21) na região sombreada do plano w (fig. 22) através de sua inversa.

Sejam os números complexos $w = u + vi$ e $\varphi = m + ni$, basta mostrar que $m \geqslant 0$ e $n \geqslant 0$. De fato, a região sombreada do plano w (fig. 22) é dado por $0 \leqslant u \leqslant 1$ e $v \geqslant 0$.

Assim, temos:

$$
\begin{aligned}
\varphi &= sen\,\frac{\pi w}{2}\\
&= sen\,\frac{\pi(u+vi)}{2}\\
&= sen\left(\frac{\pi u}{2}+\frac{\pi v}{2}i\right)\\
&= \frac{e^{i\left(\frac{\pi u}{2}+\frac{\pi v}{2}i\right)}-e^{-i\left(\frac{\pi u}{2}+\frac{\pi v}{2}i\right)}}{2i}\\
&= \frac{e^{-\frac{\pi v}{2}}\cdot e^{\frac{\pi u}{2}i}-e^{\frac{\pi v}{2}}\cdot e^{-\frac{\pi u}{2}i}}{2i}\\
&= \frac{e^{-\frac{\pi v}{2}}\cdot(cos\,\frac{\pi u}{2}+isen\,\frac{\pi u}{2})-e^{\frac{\pi v}{2}}\cdot(cos\,\frac{\pi u}{2}-isen\,\frac{\pi u}{2})}{2i}\\
&= \frac{cos\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}-e^{\frac{\pi v}{2}}\right)+isen\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}+e^{\frac{\pi v}{2}}\right)}{2i}\\
&= \tfrac{1}{2}sen\,\tfrac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}+e^{\frac{\pi v}{2}}\right)-\tfrac{i}{2}cos\,\tfrac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}-e^{\frac{\pi v}{2}}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}sen\,\tfrac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}+e^{\frac{\pi v}{2}}\right)+\tfrac{i}{2}cos\,\tfrac{\pi u}{2}\left(e^{\frac{\pi v}{2}}-e^{-\frac{\pi v}{2}}\right),
\end{aligned}
$$

ou seja, a parte real e a parte imaginária de φ é dada, respectivamente, por:

$$Re(\varphi)=m=\frac{1}{2}sen\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}+e^{\frac{\pi v}{2}}\right)\quad \text{e} \quad Im(\varphi)=n=\frac{1}{2}cos\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{\frac{\pi v}{2}}-e^{-\frac{\pi v}{2}}\right).$$

Do fato de $0\leqslant u\leqslant 1$ e $v\geqslant 0$, segue que:

$$\frac{1}{2}sen\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{-\frac{\pi v}{2}}+e^{\frac{\pi v}{2}}\right)\geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}cos\,\frac{\pi u}{2}\left(e^{\frac{\pi v}{2}}-e^{-\frac{\pi v}{2}}\right)\geqslant 0.$$

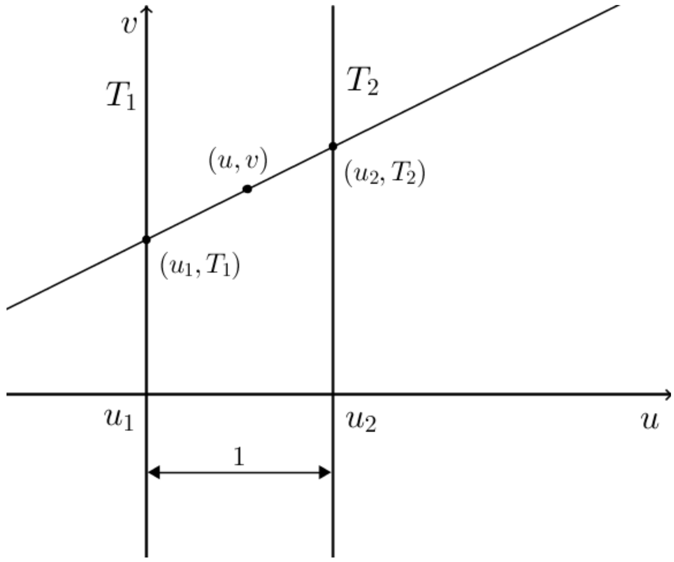
Portanto, $m\geqslant 0$ e $n\geqslant 0$.

$\square$

Temperaturas entre as retas paralelas.

Demonstração. Vamos mostrar este fato. Seja a figura 25, teremos:

Figura 25: Variação de temperatura linear



Fonte: Autor

$$v = au + b.$$

Dos pontos (u_1, T_1) e (u_2, T_2), segue que:

$$T_1 = au_1 + b \quad \text{e} \quad T_2 = au_2 + b. \tag{B.1}$$

Logo,

$$T_2 - T_1 = a(u_2 - u_1) \Longrightarrow a = \frac{T_2 - T_1}{u_2 - u_1}.$$

Como $u_2 - u_1 = 1$, segue que:

$$a = T_2 - T_1. \tag{B.2}$$

De B.1 e B.2, temos:

$$\begin{aligned} b &= T_1 - au_1 \\ &= T_1 - (T_2 - T_1)u_1. \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = 0$, teremos:

$$b = T_1. \tag{B.3}$$

Portanto, de B.2 e B.3, segue que:

$$\begin{aligned} v &= au + b \\ &= (T_2 - T_1)u + T_1 \\ &= T_1 + (T_2 - T_1)u. \end{aligned}$$

□