

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT
(Mestrado)

Franciele Pondian Bento Soares

**Conceitos e ideias do Cálculo Diferencial e
Integral**

Maringá-PR
2015

Franciele Pondian Bento Soares

Conceitos e ideias do Cálculo Diferencial e Integral.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cícero Lopes Frota

Maringá
2015

Conceitos e ideias do Cálculo Diferencial e Integral

Franciele

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota - Orientador
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
Universidade Estadual de Maringá (UEM)

Prof. Dra. Carina Alves
Universidade Estadual Paulista (UNESP - Rio Claro)

Aprovada em: 26 de fevereiro de 2015.

Local de defesa: Anfiteatro do DMA, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

A Waldir e Waldir Neto, pela paciência, incentivo e amor em todos os momentos.

Aos meus pais, Carlos e Vergínia, pelo exemplo, carinho e dedicação.

Agradecimentos

“A gratidão é o único tesouro dos humildes.”

William Shakespeare

Primeiramente, agradeço a Deus, meu Mestre, meu guia.

Agradeço ao meu amor e marido, Waldir. Seu companheirismo, conselhos, força e, sobretudo, o seu amor auxiliaram-me intensamente, em especial, neste momento final do trabalho. Ao meu amado filho, Waldir Neto, que, mesmo não entendendo a ausência constante da mamãe, sempre me recebia com muito carinho.

Quero também expressar toda a minha gratidão aos meus pais, Vergínia e Carlos - meus tesouros. Juntos, eles formam o meu porto seguro.

Agradeço também a todos os outros queridos familiares: meus irmãos, meus cunhados, meus tios e, principalmente, à minha sogra Sueli. Obrigada pelo incentivo e por me compreenderem todas as vezes em que estive ausente em função do desenvolvimento desta pesquisa. A todos os meus queridos amigos, especialmente, à Fernanda Rejani Campanha, à Lidiana Alegrancio Amorim, à Mariana Belincanta, à Paola Alejandra Garcia, à Poliana Dariva e à Valéria Maceis, por me ouvirem, por sempre me estimularem a seguir e pela amizade sincera, que tão bem me faz. Agradeço ainda aos amigos Marieli Musial Tumelero e Gilson Tumelero, pela imensurável ajuda, que foi fundamental, principalmente, na conclusão do trabalho. Sem eles, certamente, eu não teria conseguido construir um trabalho com tantos detalhes”.

A todos os professores do Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat, em especial, ao professor Laerte Bemm, por toda dedicação e auxílio dispensados à nossa turma, sempre quando precisamos. Às professoras: Carina Alves e Luciene Parron Gime-nes Arantes, pelo aceite imediato do convite e por tecerem apontamentos e contribuições que, sem dúvidas, em muito, enriquecerão meu trabalho. Aos meus companheiros de pós-graduação, sobretudo, à minha amiga Glaucia Viviane de Almeida, pela companhia, por toda ajuda, parceira e carinho de sempre.

Desejo, por fim, fazer um agradecimento muito especial a meu professor e orientador Cícero Lopes Frota, pela paciência, por toda ajuda, pelos ensinamentos, pela dedicação, pela alegria de sempre, enfim... Muito obrigada!

“Tudo o que fizerem, façam
de todo o coração, como para o Senhor,
e não para os homens” (Cl 3,23)

Resumo

Os conceitos de derivada e integral são fundamentais para a compreensão de diversos conceitos das ciências modernas. Esse é um dos muitos motivos pelo qual a disciplina Cálculo Diferencial e Integral está presente na matriz curricular de diversos cursos. Apesar de ser reconhecidamente essencial, essa também é a disciplina de maior índice de reprovação e muitos estudantes atribuem a ela suas piores dificuldades de aprendizado. Por outro lado, os professores desta disciplina enfrentam dificuldades para cumprir ementas e programas, geralmente com turmas sem qualquer motivação. Além desse cenário desfavorável, nota-se que existe um grande salto entre a Matemática estudada no ensino médio e a Matemática do ensino superior. Diante dessas reflexões surgem questionamentos do tipo: como motivar o estudo do Cálculo Diferencial e Integral? Como atenuar o degrau entre a Matemática do ensino Médio e a Matemática do ensino superior? Neste trabalho apresentamos um texto com as ideias centrais do Cálculo Diferencial e Integral onde abordamos os conceitos de derivada e integral de modo intuitivo em detrimento dos aspectos técnicos e do rigor. A dissertação está dividida em dois capítulos, sendo que no primeiro discutimos o conceito de derivada como uma necessidade crucial para a solução de problemas envolvendo taxas de variações aplicadas e o problema de se definir a reta tangente a uma curva num ponto. No segundo capítulo apresentamos o conceito de integral como ferramenta fundamental para a solução dos problemas de como definir área de uma região plana não regular, volumes de sólidos e comprimentos de curvas, dentre outros. Por fim apresentamos o Teorema Fundamental do Cálculo.

Abstract

The concepts of integral and derivatives are fundamental to the understanding of several concepts of modern sciences. This is one of many reasons by which the subject Differential Calculus is presented on the curriculum of many courses. Despite of being acknowledged as essential, it is also the subject of higher degree of fail and several students attribute to it their worse learning's difficulties. On the other hand, this subject's teachers face difficulties to fulfill menus and programs, mostly with students lacking any motivation. Besides this unfavorable scenario, it is observed that there's a big leap between Mathematics learnt on high-school and Mathematics taught on college. Based on these assumptions, many questions are raised, such as: How to stimulate the learning of Integral and Differential Mathematics? How to diminish the leap between high-school Mathematics and college one? In the present paper, central ideas of Differential and Integral Calculus are introduced, approaching concepts of Integral and Derivative in a intuitive mode, regardless technical aspects and rigor. The dissertation is divided into two chapters, in which in the first is discussed the concept of derivative as a crucial need to problem solving involving applied variations's rate and the problem of defining a tangent to a curve in a point. In the second chapter, is introduced the concept of integral as a fundamental tool to the solutions of problems regarding how to define the area of a non regular plane region, solids's volumes and curve's lengths, among others. Finally, is presented Calculus's Fundamental Theorem.

SUMÁRIO

Introdução	10
1 O conceito de Derivada	14
1.1 Vazão	14
1.2 Velocidade	21
1.3 Custo, Receita e Lucro	28
1.4 Reta Tangente a uma Curva	33
1.5 Taxas de Variação e a Derivada	39
1.6 Otimização	46
1.7 Crescimento, Decrescimento e o Teste da Derivada Primeira	58
1.8 Linearização	69
2 O conceito de Integral	72
2.1 Área	72
2.2 Distância Percorrida	86
2.3 Média de uma distribuição contínua	92
2.4 A integral	97
2.5 Comprimento de arco	101
2.6 Volume	107
2.7 Teorema Fundamental do Cálculo	113
Bibliografia	117

INTRODUÇÃO

A matriz curricular de diversas carreiras universitárias, no Brasil e no resto do mundo, contém logo no início dos seus ciclos básicos a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral”, a qual se dedica ao estudo sobre diferenciabilidade e integrabilidade das funções reais de uma variável real. Como o próprio nome estabelece, nesta disciplina estão presentes dois conceitos fundamentais para a compreensão de muitas ideias das ciências modernas, a saber, o conceito de derivada e o conceito de integral.

Dentre os cursos que necessariamente tem a disciplina “Cálculo Diferencial e Integral” nos seus currículos podemos citar, dentre outros, por exemplo: Matemática, Física, Química, todas as Engenharias, Ciência da Computação, Informática, Ciências Biológicas, Farmácia, Zootecnia, Administração, Ciências Econômicas. Apesar de reconhecidamente ser uma disciplina essencial, por outro lado, os estudantes apresentam muita dificuldade para aprender os conteúdos nela trabalhados. Esta afirmação é corroborada pelos altos índices de reprovação nesta disciplina, o que contribui de forma significativa para os também altos índices de evasão nestes cursos. Nossa experiência como docente desta disciplina e relatos de muitos colegas docentes tem demonstrado ser muito comum, entre os estudantes, os seguintes questionamentos: “por que eu preciso saber isso?, onde usarei isso no dia a dia da minha profissão?”. É nítida a falta de motivação para o estudo do Cálculo. Muitas vezes o professor não consegue, por diversas razões, dar uma resposta significativa para esses alunos e o desconforto segue durante todo o desenrolar das atividades da disciplina. Acrescente a este quadro de desconforto e falta de motivação outros problemas, não menos complexos, como: defasagem dos estudantes em relação aos conteúdos de matemática dos ensinamentos fundamental e médio, falta de tempo dos alunos para estudos, o imediatismo de uma geração não acostumada a leitura e aprofundamentos de raciocínio e planos de ensino com conteúdos programáticos extensos os quais

devem ser cumpridos com carga horária reduzida.

Os fatos acima e o contexto posto demonstram haver considerável salto entre a Matemática estudada até o ensino médio e a Matemática do ensino superior. De fato, acreditamos que este salto, dentre outros possíveis fatores, acontece porque a Matemática do ensino médio é de certa forma uma Matemática “estática” enquanto que o Cálculo é uma Matemática dinâmica, ou seja, a “Matemática do movimento”. Conceitualmente queremos dizer que as grandezas, tais como volume, área, comprimento, pressão, espaço, tempo, lucro, custo, temperatura, velocidade, vazão, concentração, altura e etc, se relacionam entre si, ao passo que estabelecida uma relação de dependência entre duas grandezas, à medida que uma delas varia (muda) a outra também sofre alguma alteração. O Cálculo Diferencial essencialmente pretende estudar o quão rápido estas variações acontecem, ou seja, a “velocidade destas variações”. O conceito de integral está diretamente relacionado com a noção de área bem como a importantes grandezas físicas como distância percorrida, média de dados contínuos, trabalho, centro de massa entre outros.

Já houve um tempo em que estes conceitos do Cálculo Diferencial e Integral eram abordados no ensino médio. Vestibulares para ingressos nos mais conceituados cursos de engenharia no Brasil, como a Escola Politécnica da USP, o Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) ou ainda o Instituto Militar de Engenharia (IME), dentre outros, apresentavam questões sobre esta disciplina. Até a Reforma Capanema (1969) o aprendizado de conteúdos como Limite, Derivada e Integral estavam previstos para os últimos anos do ensino médio (na época, científico). Na reforma da LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), esses conteúdos foram retirados e hoje são previstos apenas nos programas de ensino superior. Quando observamos livros dessa época e alguns atuais, por exemplo, veja [4] e [5], avaliando a abordagem neles empregadas somos levados a conjecturar que na maioria das vezes tratava-se de uma abordagem meramente técnica (formal), privilegiando-se a memorização de fórmulas e técnicas em detrimento de discussão de conceitos. Talvez esta seja uma das razões pelas quais se tenham abandonado o estudo destes conteúdos no ensino médio, atitude que certamente contribuiu para acentuar o “degrau” entre os dois níveis de ensino.

Deste cenário nada favorável, tanto para os estudantes quanto para os professores de Cálculo, surgem dois importantes questionamentos:

- 1) Como motivar os estudantes para o estudo do Cálculo Diferencial e Integral?

2) Como atenuar o degrau entre a Matemática do ensino médio e a Matemática do ensino superior?

Acreditamos que a resposta para estes questionamentos não é única e certamente muitas ações podem contribuir para a melhoria deste quadro desfavorável. Imaginamos que a abordagem das ideias centrais do Cálculo, por meio da discussão de problemas, seja algo bastante oportuno e exatamente nesta afirmação baseamos este nosso trabalho. Assim, nossa dissertação pretende propor uma reflexão sobre os dois conceitos centrais do Cálculo Diferencial e Integral: o conceito de derivada e o conceito de integral. A abordagem que apresentamos sobre estes conceitos é sempre contextualizada. É importante destacarmos ainda que nossa proposta busca propor ou apresentar uma intervenção que deve ocorrer no início de tudo, ou seja, algo que seja trabalhado no final do ensino médio ou nas primeiras semanas das aulas de Cálculo, por isso damos preferência para uma abordagem que considera os aspectos conceituais, na forma mais intuitiva possível, em detrimento dos aspectos técnicos e do rigor.

Para tanto usaremos com frequência ilustrações de situações e gráficos. Apesar de sabermos que a “imagem não prova nada”, elas são importantes para fixar ideias e fazer com que o leitor se lembre mais facilmente do que determinado resultado diz e o que significa do ponto de vista geométrico.

Vejam que, desta forma, nosso trabalho está dirigido para: alunos que estão começando um curso que tenha Cálculo em sua matriz curricular, alunos no final do ensino médio que pretendem ingressar num curso da área de exatas ou de ciências, professores da disciplina Cálculo Diferencial e Integral e professores de matemática do ensino médio. É importante enfatizarmos que nosso trabalho não é uma proposta de pré-cálculo e nem pretende dar conta do aprendizado relativo à esta disciplina, aprendizado que deve ser concretizado ao final do estudo completo da disciplina durante todo um período letivo mas, uma ação pontual, relativamente rápida, que efetivamente venha contribuir para minimizar os problemas, já mencionados, enfrentados pelos estudantes da disciplina Cálculo Diferencial e Integral. Acreditamos que uma abordagem “inicial” pode contribuir para um aprendizado mais eficiente onde a motivação esteja presente e as ideias centrais já estejam postas.

Essa dissertação está dividida em dois capítulos, sendo que, no primeiro capítulo discutimos o conceito de derivada de uma função e no segundo o conceito de integral. Enfatizamos que nossa abordagem é bastante intuitiva, sem qualquer preocupação com o tradicional rigor da Matemática. Usamos muitas figuras e gráficos para justificar nossa argumentação e procuramos evi-

tar a forma tradicional dos textos de Matemática, usualmente escritos num formato: “definição, proposição, lema, teorema e demonstração”. Pretendemos com isso “conversar” com o leitor sobre as principais ideias do Cálculo. Contudo, vale destacar que não estamos preocupadas com a “tecnicidade” do estudo sobre derivadas e integrais, mas queremos discutir ideias sem nos perder em detalhes técnicos que num primeiro momento podem atrapalhar a “conversa”. Acreditamos que uma abordagem intuitiva possa permitir que o raciocínio flua mais facilmente. Entretanto enfatizamos também que não temos a pretensão de simplificar o estudo do cálculo! O estudo regular e completo desta disciplina é necessário e indispensável para todas carreiras anteriormente citadas.

Questionamentos importantes certamente surgirão no decorrer do estudo aqui apresentado. Abusamos durante todo o texto da noção de “proximidade”. Em muitos momentos falamos que determinada grandeza se aproxima de outra. É fundamental descrever precisamente o que significa estar próximo, bem como ter parâmetros precisos para medir esta proximidade. Por trás destas frases está o conceito de limite e até mesmo de número real, que somente podem ser estabelecidos com a devida precisão e rigor do Cálculo e da Análise Matemática. Também fizemos a opção de considerar somente funções “boas”, que no texto denominamos funções suaves. Por função suave entendemos uma função que tem a regularidade suficiente para nosso propósito, ou seja, uma função contínua, com taxa de variação também contínua, cujo gráfico não contém bicos ou descontinuidade e tem reta tangente bem definida em todos os pontos. Clareza deste tipo de função somente com os conceitos precisamente desenvolvidos, de acordo com o que se estuda nos textos usuais sobre cálculo. A bibliografia do nosso trabalho inclui os livros mais adotados para a disciplina de cálculo dos cursos de engenharia, física, informática entre outros. Muitos dos exemplos e figuras que usamos, para nossa facilidade, e principalmente, para já aproximar o leitor desse trabalho de seus próximos passos no estudo da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, estão baseados nessa bibliografia.

O conceito de Derivada

Muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam, como a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias em uma cultura, a intensidade do tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico, e assim por diante. O conceito de derivada é uma ferramenta matemática essencial para o estudo da taxa segundo a qual varia uma quantidade em relação a outra. Ele começou a se desenvolver no século XVII de forma gradual e apareceu nas obras de importantes cientistas, como Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried W. Leibniz (1646-1716). Mas foram Newton e Leibniz que vieram mais tarde e realizaram, independente um do outro, o trabalho de sistematização das ideias e a criação do cálculo Diferencial e Integral.

Nesse capítulo discutimos o conceito de derivada começando pelo estudo de taxas segundo a qual uma quantidade varia em relação a outra: volume em relação ao tempo, distância percorrida em relação ao tempo, entre outras. Depois consideramos o problema de se definir a reta tangente a uma curva, generalizando o conceito de tangencia dado por Euclides. Na sequência generalizamos as taxas de variações para vários tipos de funções e introduzimos o conceito de derivada. Discutimos ainda importantes resultados como o Teorema do Valor Médio e problemas de Otimização. Por fim discutimos como as derivadas podem ser usadas para aproximar funções não-lineares por funções lineares.

1.1 Vazão

Para todo engenheiro é crucial o estudo sobre hidráulica, bem como, mecânica dos fluidos. A palavra hidráulica é derivada do termo grego hidra, que significa “água”, e aulo, que significa “cano”. Define-se hidráulica como sendo

a ciência que estuda os comportamentos relacionados tanto aos líquidos em escoamento e sob pressão, como à transmissão, ao controle da força e aos movimentos por meio de fluidos líquidos. Hidráulica aplicada a tubulações é o estudo da passagem forçada de fluidos por tubulações e neste caso a rapidez que o fluido escoado está sujeita às rugosidades das paredes da tubulação. Neste contexto busca-se entender como se dá a cinemática dos fluidos, ou seja, estuda-se o comportamento (as propriedades) de um fluido em movimento. Nesta área um conceito básico é o de Vazão Volumétrica ou simplesmente Vazão.

Suponha que por um determinado conduto (canal, rio, tubulação, artéria e etc) escoe um determinado volume de fluido (água, óleo, gasolina, álcool, sangue e etc). A vazão média do conduto, denotada por \mathbb{V}_m , é o número obtido pelo quociente entre o volume do material transportado e o tempo gasto para o transporte, ou seja,

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ unidades de volume / unidades de tempo.} \quad (1.1)$$

A vazão média determina, **em média**, a rapidez com a qual um volume escoado durante um determinado intervalo de tempo, ou ainda, corresponde a uma taxa média de escoamento. Normalmente as unidades de medida da vazão média são o m^3/s , m^3/h , l/s , l/h galões/ s ou galões/ h .

Supondo que o conduto por onde o fluido escoado seja um tubo (cano) na forma cilíndrica, cuja área da seção transversal é A unidades de área, então o volume escoado pelo conduto é dado por $\Delta V = Ad$, onde d é a “altura” do cilindro (Figura 1.1).

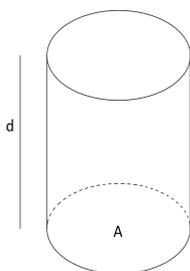


Figura 1.1:

Assim, neste caso, podemos então expressar a vazão média em termos da

velocidade média (de escoamento) do fluido

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A d}{\Delta t} = A \mu, \quad (1.2)$$

onde $\mu = \frac{d}{\Delta t}$ é a velocidade média do fluido.

Uma situação bem simples é determinar a vazão média de uma torneira relativa a um intervalo de tempo fixado. Tomamos um recipiente, um balde por exemplo, com volume ΔV conhecido. Abrimos a torneira e ao mesmo tempo disparamos um cronômetro que é desligado exatamente quando o recipiente é completado. O número \mathbb{V}_m obtido pelo quociente do volume do balde e o tempo gasto para enchê-lo (Δt) é a vazão média da torneira no intervalo de tempo dado. Por outro lado, se uma mangueira é conectada em um tanque com capacidade de 10000 litros e o tempo gasto para encher totalmente o tanque é de 500 minutos, então a vazão média da mangueira no intervalo de tempo de zero até 500 minutos é dada por:

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{10000}{500} = 20 \text{ l/m}.$$

Se a vazão média for constante (não muda com o tempo) o que significa dizer que a água escoar pela mangueira de forma uniforme no tempo, então podemos afirmar que o volume do tanque em função do tempo é dado por:

$$V(t) = \mathbb{V}_m t = 20 t \quad t \geq 0.$$

Veja, entretanto, que a vazão média nos dá somente uma informação global, ou seja, no caso acima, uma informação relativa a todo os 500 minutos! Note que o conceito de vazão média é relativo a um intervalo de tempo, ou seja, é a razão entre uma variação do volume pelo intervalo de tempo necessário para tal variação, por isso seu nome contém a palavra “média”. Imagine que o volume V do tanque em cada instante de tempo t seja representado por uma função $V = V(t)$. Assim, sem a suposição de que a vazão média seja constante as únicas coisas que sabemos são que no instante de tempo $t = 0$ o tanque está vazio, e portanto, o volume $V(0) = 0 \text{ l}$ e, depois de exatos 500 minutos o tanque fica completo, ou seja, $V(500) = 10.000 \text{ l}$.

Observe que na situação descrita não podemos afirmar que durante cada minuto, dentro dos 500 minutos, foram despejados exatamente 20 litros no reservatório! Poderíamos ter tido momentos de muita “pressão na torneira”

de modo que mais do que 20 litros foram despejados durante estas unidades de tempo. Também poderíamos ter tido momentos de pouca pressão na torneira e com isto muito pouca água entrou no tanque durante estes minutos. Poderíamos ainda ter tido momentos em que a torneira ficou fechada. Exceto para o caso em que a vazão média é constante (não muda com o tempo), temos muito pouca informação sobre o processo de variação do volume do tanque (rapidez), quando conhecemos a vazão média relativa a um intervalo de tempo.

Por exemplo, não sabemos dizer quão rápido o volume estava variando nos exatos 30 minutos! Para solucionarmos este problema é necessário introduzir um novo conceito que forneça uma informação pontual, local, num único instante. Aí reside a dificuldade: como transportar a ideia de vazão média, que depende de um intervalo de tempo, para um conceito instantâneo, num único ponto? Como descrever o quão rápido um determinado volume esta variando num determinado instante de tempo, e não num intervalo? Ou ainda, como definir **Vazão Instantânea**?

Usando (1.2) podemos calcular o tempo que levará para encher um tambor de 214 litros, sabendo-se que a velocidade de escoamento do líquido é constante igual a $0,3\text{ m/s}$ e o diâmetro do tubo conectado ao tambor é igual a 30 mm . De fato, sendo o diâmetro igual a $30\text{ mm} = 0,03\text{ m}$ vemos que a área da seção circular é $A = \frac{\pi(0,03)^2}{4} = 0,000706\text{ m}^2$. Logo $\mathbb{V}_m = A\mu = (0,000706)(0,3) = 0,0002118\text{ m}^3/\text{s} = 0,211\text{ l/s}$. Assim, obtemos

$$\Delta t = \frac{\Delta V}{\mathbb{V}_m} = \frac{214}{0,211} = 1014,21\text{ s} = 16,9\text{ min},$$

ou seja, o tambor demora 16,9 minutos para encher.

Vejamoss ainda uma outra situação onde ilustramos que a taxa de variação do volume em relação ao tempo pode não ser constante. Com efeito, suponha que um automóvel tem seu tanque completamente cheio de gasolina (50 litros) e a partir disso inicia uma viagem. Com o passar do tempo o combustível vai sendo consumido pelo funcionamento do motor, e conseqüentemente, o volume de gasolina no tanque vai diminuindo com o tempo. Imagine que depois de três horas de viagem o volume de gasolina no tanque seja 20 litros. Assim, a vazão média de gasolina no tanque durante as primeiras três horas da viagem foi de

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(3) - V(0)}{3 - 0} = \frac{20 - 50}{3} = \frac{-30}{3} = -10\text{ l/h}.$$

Aqui o sinal negativo representa que o volume diminui (decrece) 10 litros por hora. É claro que esta variação do volume em relação ao tempo é grande nos momentos de alta velocidade do automóvel, ou ainda, de relevo muito ingrime (uma subida de uma serra por exemplo), enquanto que nas decidas ou relevo plano sob velocidade controladas o consumo de combustível é baixo. Logo o decréscimo (a variação) do volume de gasolina no tanque não é uniforme em relação ao tempo, ou seja, a vazão média da gasolina do tanque do carro não é constante, na verdade varia com o tempo! Novamente podemos nos questionar: quão rápido o volume de gasolina estava variando nos exatos 45 minutos após o início da viagem?

O problema posto pela argumentação acima consiste em: conhecendo-se o volume em cada instante de tempo t , representado por um função $V = V(t)$, como determinar o quão rápido este volume está variando num instante de tempo t_0 fixado? em outras palavras: conhecendo-se o volume $V = V(t)$ como definir a vazão num instante fixado t_0 ?

Experimentalmente, podemos ver que se água (ou outro líquido) está vazando de um tanque, por meio de um orifício na sua base (veja Figura 1.2), somente pela ação da força gravitacional, então o fluxo de água é maior no começo, quando o tanque está mais cheio, e vai gradualmente diminuindo à medida que o nível da água do tanque diminui.

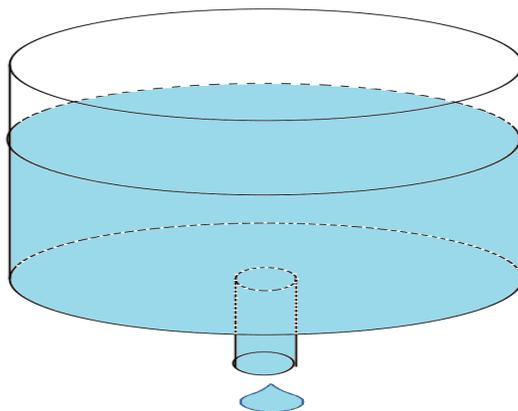


Figura 1.2:

Esta é mais uma situação onde a vazão média não é constante. A vazão média em intervalos de tempo, no início, quando o tanque está cheio é maior do que nos intervalos de tempo (de mesma amplitude), do final, quando o

tanque esta quase vazio. O físico e matemático italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), em 1643 (*De Motu Gravium Projectorum*), deduziu que a velocidade do líquido que sai pelo orifício é proporcional à raiz quadrada da altura do orifício em relação à superfície livre do líquido. Também formulou que a taxa de variação do volume é proporcional à velocidade com que o fluido sai pelo buraco e que a constante de proporcionalidade é igual à área da seção do orifício. Assim, se em um tanque tem 18.000 litros de água que escoam por meio de um orifício no fundo do tanque em 40 minutos, então a Lei de Torricelli dá que o volume $V = V(t)$ de água que restou no tanque depois de t minutos em litros é:

$$V(t) = 18000\left(1 - \frac{1}{40}t\right)^2 \quad 0 \leq t \leq 40. \quad (1.3)$$

Usando (1.1) e (1.3), vamos determinar a vazão média em alguns intervalos de tempo. A vazão média no intervalo de tempo de zero a 5 minutos é $\mathbb{V}_m = -843,75 \text{ l/min}$, pois

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(5) - V(0)}{5 - 0} = \frac{13781,25 - 18000}{5} = -843,75,$$

onde $V(5) = 18000\left(1 - \frac{1}{40} \cdot 5\right)^2 = 13781,25$ e $V(0) = 18000$. O sinal negativo representa que, durante os cinco primeiros minutos, o volume diminui em média $843,75 \text{ l/min}$.

Considerando o intervalo de tempo de 5 a 10 minutos temos $V(10) = 18000\left(1 - \frac{1}{40} \cdot 10\right)^2 = 10125$ e a vazão média nesse intervalo é

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(10) - V(5)}{10 - 5} = \frac{10125 - 13781,25}{5} = -731,25.$$

A vazão média no intervalo de 5 a 10 minutos, é de $-731,25 \text{ l/min}$, ou seja, o volume diminui em média $731,25$ litros por minuto.

Já para o intervalo de 10 a 15 minutos, temos $V(15) = 7031,25$ e a vazão média nesse intervalo é

$$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(15) - V(10)}{15 - 10} = \frac{7031,25 - 10125}{5} = -618,75,$$

ou seja, o volume diminui $618,75 \text{ l/min}$.

Note que nos três casos apresentados temos vazões médias diferentes para intervalos de tempo iguais ($\Delta t = 5$). Isso exemplifica numericamente o fato de que com o passar do tempo a vazão dependente apenas da força da gravidade vai gradualmente diminuindo e não é constante. Neste contexto podemos questionar: como determinar o quão rápido o volume está variando aos exatos 20 minutos? Qual a vazão neste instante?

Usando (1.1) e (1.3), é possível determinar a vazão média em intervalos “próximos de 20 minutos”. Vamos aos cálculos:

Considerando intervalos antes de $t = 20$ e $V(20) = 4500 \text{ l}$ temos

$t_i \leq t \leq 20$	$V(t_i)$	$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ (l/min)}$
$19 \leq t \leq 20$	4961,25	-461,25
$19,5 \leq t \leq 20$	4727,81	-455,62
$19,9 \leq t \leq 20$	4545,11	-451,1
$19,99 \leq t \leq 20$	4504,50	-450,11
$19,999 \leq t \leq 20$	4500,450011	-450,01
$19,9999 \leq t \leq 20$	4500,450001	-450,0011

Considerando agora intervalos depois de $t = 20$, temos

$20 \leq t \leq t_i$	$V(t_i)$	$\mathbb{V}_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ (l/min)}$
$20 \leq t \leq 21$	4061,25	-438,75
$20 \leq t \leq 20,5$	4277,81	-444,38
$20 \leq t \leq 20,1$	4455,11	-448,9
$20 \leq t \leq 20,01$	4495,5011	-449,88
$20 \leq t \leq 20,001$	4499,55	-449,988
$20 \leq t \leq 20,0001$	4499,955	-449,998

Observe que a medida que diminuimos o intervalo de tempo “em torno” de $t = 20$ a vazão média está mais próxima de -450 l/min . Logo, é razoável acreditar que no instante fixado 20 minutos a vazão instantânea é igual a -450 l/min , ou seja, o valor para o qual as vazões médias se aproximam, considerando intervalos cada vez menores em torno de 20 minutos.

1.2 Velocidade

Desde muito cedo toda criança percebe que os movimentos ocorrem de diferentes maneiras, uns são mais rápidos enquanto que outros mais lentos, e já nesta fase começa ter noção do conceito de “velocidade”. Da mesma forma, na tentativa de se conhecer o universo e as leis da natureza o ser humano, desde remota data, buscou compreender como são os movimentos dos objetos, partículas, planetas entre outros. Especificamente sobre o estudo do movimento, a noção de velocidade precisou ser bem elaborada para que fosse possível mensurar de forma precisa quão rápido determinado objeto varia sua posição. Portanto, o conceito de velocidade deve ser uma taxa de variação do espaço em relação ao tempo.

Frequentemente, estamos interessados na rapidez com que algo se move e são comuns questionamentos do tipo: como descrever o movimento de um objeto em queda livre? Como descrever o movimento de um caça a jato quando ele é lançado pela catapulta de um porta aviões? Quando você lança uma bola diretamente de baixo para cima, que altura ela atinge? Quando um objeto escorrega de sua mão, de quanto tempo você dispõe para segurá-lo antes que ele atinja o solo? Como determinar movimento de um satélite ou um planeta? Questões deste tipo envolvem relações entre movimento, massa e força e o estudo destas relações compõem uma área da ciência denominada Mecânica.

Isaac Newton (1643 - 1727), denominado Pai da Mecânica Clássica, considerado o cientista que causou maior impacto na história da ciência, foi um cientista inglês (Físico, Matemático, Astrônomo, Alquimista, Filósofo Natural e Teólogo), que dentre várias contribuições importantes, desenvolveu o Cálculo Diferencial. Sua obra, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, publicada em 1687, é considerada uma das publicações mais influentes de toda história da ciência. Curioso observar que o Cálculo Diferencial nasce a partir da necessidade de se explicar conceitos relacionados com movimentos dos corpos. Para Newton a função da ciência era descobrir leis universais e enunciá-las de forma precisa e racional. Aí reside a necessidade de se criar uma matemática capaz de cumprir esta função.

Para descrever o movimento de uma partícula (carro, pessoa, avião e etc) precisamos ser capazes de descrever a posição da partícula e como esta posição varia ao longo do tempo. Para introduzirmos as ideias centrais vamos nos restringir à situação mais simples possível, ou seja, consideramos apenas movimento ao longo de uma reta (movimento retilíneo), como por exemplo,

um carro em uma pista reta, um objeto largado em queda livre do alto de um prédio, uma bola que jogada verticalmente para cima, volta verticalmente para baixo, um pistão movendo-se dentro de um cilindro e etc.

Por exemplo, considere um estudante em um carro movendo-se ao longo de uma pista reta, que para fins computacionais é modelada por um eixo orientado que denominaremos eixo de coordenadas s . Assim a posição s do carro é uma função do tempo $s = s(t)$. Suponha que 5 segundos depois do início do movimento do carro ele esteja no ponto s_1 a 19 m da origem e que 8 segundos depois (do início do movimento) o carro se desloque para posição s_2 a 49 m da origem. Logo, o deslocamento foi de 30 m ($49 - 19 = 30$) em um intervalo de tempo de 3 s ($8 - 5 = 3$). É razoável afirmar que, **em média**, esse carro deslocou-se 10 metros por segundo, uma vez que $\frac{30m}{3s} = 10 m/s$. **Dizemos assim que no intervalo de tempo de 5 a 8 segundos o carro teve uma velocidade média de 10 m/s.** A velocidade média depende de um intervalo específico de tempo escolhido. Genericamente, se no tempo t_1 o carro encontra-se na posição $s_1 = s(t_1)$ e em um tempo posterior t_2 o estudante está na posição $s_2 = s(t_2)$. A variação da posição do estudante, no intervalo de tempo de t_1 a t_2 , chamada de deslocamento no intervalo $[t_1, t_2]$, será dada por $\Delta s = s_2 - s_1 = s(t_2) - s(t_1)$.

Observação 1.1. *É importante reconhecer a diferença entre deslocamento e distância percorrida. A distância percorrida por uma partícula é o comprimento do caminho descrito pela partícula de sua posição inicial até sua posição final. Essa distância é uma quantidade escalar e é sempre indicada por um número positivo. Por outro lado, o deslocamento é a variação de posição de uma partícula. É positivo se ocorre no sentido crescente de s e negativo se ocorre no sentido decrescente.*

Um modo útil para a descrição do movimento de um carro consiste em dizer como a posição varia em função do tempo. Suponha que 1 segundo depois do início do movimento de um carro ele esteja no ponto P_1 a 19m da origem e que 4 segundos depois esse carro se desloque para P_2 , a 277m da origem. Logo, a distância percorrida foi de 258m, ou seja, $277m - 19m$ em um intervalo de tempo de 3s, pois $4s - 1s = 3s$. (Veja a Figura 1.3)

Podemos afirmar que, em média, esse carro deslocou-se 86 metros por segundo, uma vez que $(258m) : (3s) = 86m/s$. Essa variação é calculada pelo quociente da distância percorrida pelo intervalo de tempo e é definida na física por velocidade média. Em geral, a velocidade média depende de um intervalo específico de tempo escolhido. Para um intervalo de tempo 3s

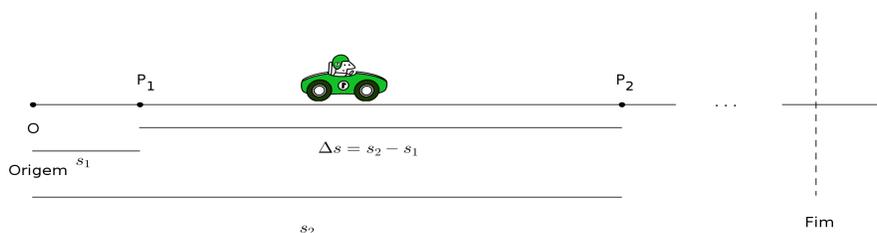


Figura 1.3:

antes do início do movimento, a velocidade média seria zero, porque o carro estaria em repouso na linha de partida e seu deslocamento seria nulo.

Um dado importante para a descrição do movimento do carro consiste em dizer como a posição varia em função do tempo. Assim, o quociente entre o deslocamento e o tempo decorrido dá uma informação interessante sobre o movimento. Este quociente é por definição chamado de velocidade média do carro no intervalo de tempo de t_1 até t_2 . Definimos a velocidade média do carro no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ como sendo o número \mathcal{V}_m dado por:

$$\mathcal{V}_m = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo decorrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (1.4)$$

Note que a velocidade média do carro citada no exemplo acima é positiva. Isto significa que durante o intervalo de tempo o carro se move no sentido positivo. Quando o carro se move no sentido negativo durante o intervalo de tempo, sua velocidade média para esse intervalo de tempo é negativa.

Na Figura 1.4, plotamos a posição do carro em função do tempo. Tem-se que a curva dessa figura não representa a trajetória do carro no espaço (estamos sempre considerando que a trajetória é uma linha reta - movimento retilíneo), mas mostra as posições do carro em relação ao tempo. Os pontos designados por $P = (t_1, s_1)$ e $Q = (t_2, s_2)$ correspondem aos pontos s_1 e s_2 da trajetória do carro ocupados nos respectivos instantes de tempo t_1 e t_2 . O segmento de reta ligando os pontos P e Q é a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são $\Delta s = s_2 - s_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Logo a velocidade média do carro, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, é a inclinação da reta secante ao gráfico da função posição $s = s(t)$, passando pelos pontos P e Q . Isso nos dá a interpretação geométrica da velocidade média, conforme já dito no início do parágrafo.

A velocidade média depende apenas do deslocamento Δs que ocorre durante o intervalo de tempo Δt , e não dá detalhes ocorridos durante esse

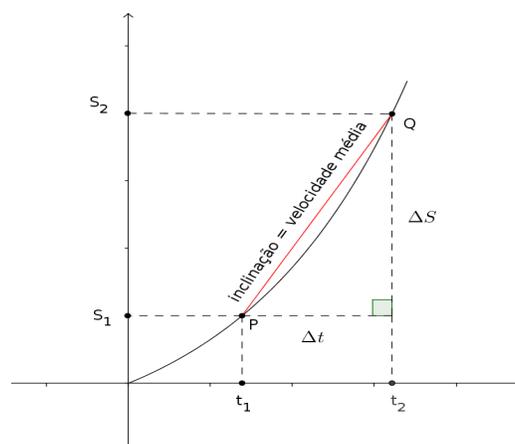


Figura 1.4:

intervalo. Suponha que um segundo carro passe pelo ponto s_1 no mesmo instante t_1 do primeiro carro, ultrapasse o primeiro carro e, em seguida, freie e diminua sua velocidade passando pelo ponto s_2 no mesmo instante t_2 do primeiro carro. Nestas circunstâncias os dois carros possuiriam o mesmo deslocamento durante o mesmo intervalo de tempo e, portanto, teriam a mesma velocidade média. Apesar disso, a descrição do movimento desses carros é completamente diferente! Se observarmos o velocímetro de um carro no tráfego urbano, veremos que o ponteiro não fica parado por muito tempo; isto é, a velocidade do carro não é constante. Podemos conjecturar, pela observação do velocímetro que o carro tem uma velocidade definida em cada momento, chamada velocidade instantânea. Mas, então, a questão central é: **como definir a velocidade “instantânea”?**

Situação semelhante encontramos quando queremos determinar o movimento de um objeto em queda livre. Por movimento em queda livre entendemos o movimento de um objeto que cai de uma altura, somente pela ação da força gravitacional, desprezando-se os efeitos da resistência do ar. Assim, imagine que desejamos descrever o movimento de uma bola em queda livre, largada do alto da torre Burj Khalifa Bin Zayid, arranha-céu mais alto do mundo com 828 metros de altura, localizado em Dubai, nos Emirados Árabes Unidos. Se dividirmos o tempo de queda da bola em intervalos de 5 segundos, veremos que as velocidades médias relativas aos intervalos vai aumentando à medida que o tempo aumenta, ou seja, a velocidade média relativa ao intervalo de 0 a 5 segundos será menor do que a velocidade média relativa ao

intervalo de 5 a 10 segundos, que por sua vez será menor do que a velocidade média relativa ao intervalo de 10 a 15 segundos, e assim sucessivamente. Em outras palavras, veremos que o movimento da bola terá velocidades médias não constantes, a velocidade média aumenta à medida em que a bola cai. Logo, a taxa de variação da posição em relação ao tempo não é constante, o movimento não é uniforme (entendemos por movimento uniforme aquele que para todos os tempos iguais o objeto percorre espaços iguais). Neste contexto temos a questão central: como mensurar o quão rápido a bola esta se movendo aos exatos 10 segundos após ter sido largada, ou ainda, aos exatos 24 segundos após ter sido largada? Nesta questão reside a essência de tudo ! e a resposta passa pela necessidade de se criar um conceito que transporte a noção de velocidade média para velocidade num único instante fixado. Esta foi a motivação de Issac Newton para criação do Cálculo Diferencial.

Vamos então aos cálculos. Por meio de experimentos feitos séculos atrás, aproximadamente 100 anos antes do nascimento de Newton, Galileu Galilei, cientista italiano, descobriu que a distância percorrida por qualquer objeto em queda livre é proporcional ao quadrado do tempo de queda. Enfatizamos que este modelo em queda livre despreza a resistência do ar. Se a distância percorrida após t segundos for chamada de $s(t)$ e medida em metros, então a lei de Galileu pode ser expressa pela equação

$$s(t) = (4,9)t^2. \quad (1.5)$$

A dificuldade de encontrarmos a velocidade após 10 segundos está em tratarmos de um único instante de tempo ($t = 10$), ou seja, não temos um intervalo de tempo. A superação desta dificuldade consiste em aproximar a quantidade desejada calculando a velocidade média sobre os intervalos de tempo cada vez menores e “mais próximos” do instante de 10 segundos.

Usando (1.4) e (1.5), obtemos os seguintes valores para as velocidades médias, considerando intervalos de tempo antes de 10 segundos, e sabendo que $S(10) = 490$.

$t_i \leq t \leq 10$	$S(t_i)$	$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ (m/s)}$
$9 \leq t \leq 10$	396,9	93,1
$9,5 \leq t \leq 10$	442,225	95,55
$9,9 \leq t \leq 10$	480,249	97,51
$9,95 \leq t \leq 10$	485,11225	97,755
$9,99 \leq t \leq 10$	489,02049	97,951
$9,999 \leq t \leq 10$	489,9020	97,995

A tabela, a seguir, considera intervalos de tempo após 10 segundos.

$10 \leq t \leq t_i$	$S(t_i)$	$\mathcal{V}_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ (m/s)}$
$10 \leq t \leq 11$	592,9	102,9
$10 \leq t \leq 10,5$	540,225	100,45
$10 \leq t \leq 10,1$	499,849	98,49
$10 \leq t \leq 10,01$	490,98049	98,049
$10 \leq t \leq 10,001$	490,980049	98,0049
$10 \leq t \leq 10,0001$	490,0098	98,00049

Note que a medida que encurtamos o período de tempo a velocidade média respectiva fica cada vez mais próxima de 98 m/s . Conforme já mencionamos a velocidade média não dá informações detalhadas sobre o movimento durante o intervalo de tempo considerado para seu cálculo, entretanto, para intervalos de tempo muito pequenos, como, por exemplo, o intervalo de 9,99 a 10 segundos, é muito difícil que se tenha ocorrido algo tão significativo na “queda” que determine mudanças significativas na velocidade. **Logo é razoável acreditar que no instante fixado de 10 segundos o objeto tenha a velocidade instantânea igual a 98 m/s** , ou seja, aquele valor para o qual as velocidades médias em intervalos cada vez menores, em torno de 10 segundos, se aproximam. Resolvida a questão, abreviamos a escrita introduzindo uma terminologia e uma notação convenientes, ou seja, desde que as velocidades médias em intervalos cada vez menores, em torno de 10 segundos, se aproximam do valor 98 m/s , dizemos que 98 m/s (a velocidade instantânea no instante de tempo 10 segundos) é o limite das velocidades médias em intervalos cada vez menores, em torno de 10 segundos, denotando esta afirmação da seguinte forma:

$$98 = \lim_{t \rightarrow 10} \mathcal{V}_m(t) = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{s(t) - s(10)}{t - 10}. \quad (1.6)$$

É interessante observarmos os aspectos geométricos relativos a discussão acima. (Veja Figuras 1.5 e 1.6).

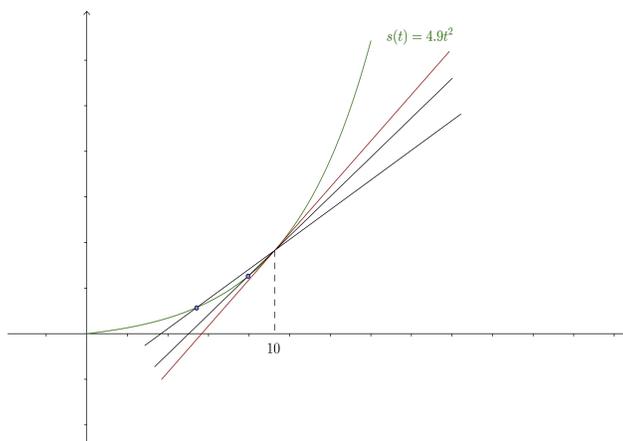


Figura 1.5: Aproximação antes de 10 segundos

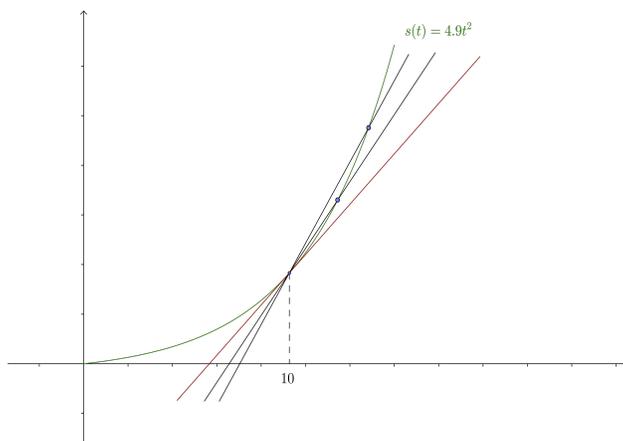


Figura 1.6: Aproximação depois de 10 segundos

Note que a velocidade instantânea no instante $t = 10$ é o valor limite das velocidades médias, ou ainda, é o limite dos coeficientes angulares (inclinação) das retas secantes.

De modo geral, se $s = s(t)$ para todo $t \geq 0$, é a função posição de uma partícula e $t_0 > 0$ é um instante fixado, definimos a velocidade instantânea

(ou simplesmente velocidade) no instante de tempo t_0 por

$$\mathcal{V}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{V}_m(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}, \quad (1.7)$$

onde reafirmamos que a expressão acima significa que a velocidade no instante t_0 é o valor para o qual se aproximam as velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores, em torno do instante t_0 .

1.3 Custo, Receita e Lucro

No comércio e em Economia todo empresário deve estar atento à demanda de seu produto, quais são os custos de produção, qual o lucro com a venda de determinada quantidade, entre outros fatores. Desse modo, na área da economia, conceitos como demanda, oferta, custo, receita e lucro são vastamente usados. As principais funções envolvidas nesta área são custo, receita e lucro. Em todo mercado capitalista onde as empresas produzem e vendem seus produtos temos que custo é a soma total de todos os gastos que a empresa tem para produzir seu produto; receita é a soma total arrecadada pela venda de sua produção e lucro é a diferença entre a receita e o custo, ou seja, é o valor que “sobra” (valor líquido) para empresa depois de pagos os gastos de produção. Note que se o lucro for negativo significa que a empresa está tendo prejuízo. Obviamente a receita, o custo e o lucro de uma empresa dependem diretamente da quantidade produzida e ou vendida. Assim, se x indica a quantidade (em unidades de medida) produzida e vendida e $R(x)$ indica a receita relativa a venda de x unidades temos que:

$$\begin{aligned} R(x) &= (\text{preço por unidade}) \cdot (\text{número de unidades vendidas}) \\ &= p \cdot x; \end{aligned} \quad (1.8)$$

enquanto que se $L(x)$ denota o lucro relativo a venda de x unidades temos:

$$L(x) = R(x) - C(x), \quad (1.9)$$

onde $C(x)$ é o custo pela produção e venda de x unidades dado por

$$C(x) = \text{custos fixos} + \text{custos variáveis}, \quad (1.10)$$

sendo os custos fixos aqueles que permanecem constantes, não dependem da quantidade x produzida, tais como aluguéis e serviços públicos e custos

variáveis aqueles diretamente relacionados com o número de unidades produzidas e vendidas.

Para fixar as ideias considere como exemplo a seguinte situação: suponha que uma fábrica de jeans vende cada quilo do tecido por R\$ 50,00. Admita também que os custos incorridos na produção e venda são de R\$ 20.000,00 mais R\$ 10,00 para cada quilo produzido e vendido. Desta forma, a receita e o custo são dados respectivamente por:

$$R(x) = 50x \quad \text{e} \quad C(x) = 20.000 + 10x ,$$

e o lucro fica representado pela função:

$$L(x) = 50x - (20.000 + 10x) = 40x - 20.000.$$

Na Figura 1.7, temos respectivamente, os gráficos da receita, do custo e de lucro.

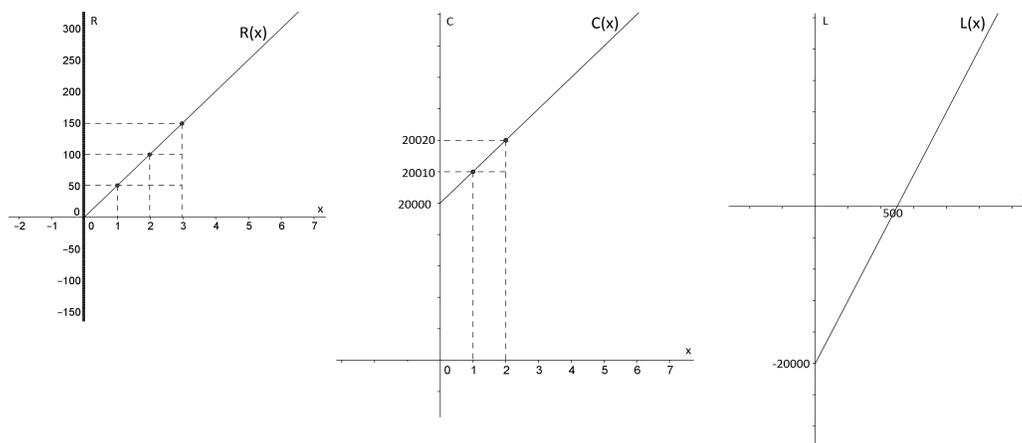


Figura 1.7:

Observando as interseções com os eixos dos gráficos acima notamos que:

- zero quilo vendido produz receita nula e a cada quilo vendido a receita aumenta em R\$ 50,00.
- o custo de zero quilo é igual a R\$ 20.000,00 ou seja, igual ao custo fixo.
- zero quilo produz um lucro de $L(x)=-20.000$, ou seja, um prejuízo de R\$ 20.000,00. Por sua vez, 500 quilos produzidos e vendidos resultam num lucro de R\$ 0,00 (não existe lucro nem prejuízo).

Note ainda que, nesse exemplo, a função receita é linear e a função custo é uma função afim (função linear transladada). Conseqüentemente, a função lucro também é uma função afim. Veja que

$$C(x + 1) = C(x) + 10,$$

para todo x , pois $C(x+1) = 20.000+10(x+1) = 20.000+10x+10 = C(x)+10$.

Desta forma, a cada quilo produzido, a partir de qualquer valor fixado para x , o custo aumenta em R\$ 10,00. Isto indica o quão rápido o custo aumenta quando aumentamos a produção. A taxa de variação do custo em relação a quantidade produzida é chamada **custo marginal**, denotado por CM e, neste exemplo, é constante e coincide com a inclinação da reta que representa a função custo. Vejamos ainda que, neste caso em estudo, para qualquer intervalo do tipo $[x, x + \Delta x]$ temos que taxa de variação média do custo coincide com o custo marginal:

$$\begin{aligned} CM &= \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{[200.000 + 10(x + \Delta x)] - [200.000 + 10x]}{\Delta x} = \frac{10\Delta x}{\Delta x} = 10. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos ver que $L(x + 1) = L(x) + 40$ para todo x , ou seja, vemos que a cada quilo produzido e vendido o lucro cresce em R\$ 40,00. Este valor indica o quão rápido varia o lucro em relação a quantidade produzida e vendida que, na linguagem econômica, chamamos de **lucro marginal** (a taxa de variação do lucro em relação ao número de quilos produzidos e vendidos), denotado por LM . Observe também que neste caso o $LM = 40$ coincide com a inclinação da reta que representa o gráfico da função lucro. Desenvolvendo raciocínio análogo para a receita, obtemos que a receita marginal é $RM = 50$.

Observação 1.2. *Os resultados obtidos são facilmente estendidos para qualquer função afim, ou seja, sempre que o custo, lucro e a receita forem dados por funções afim, o custo marginal, lucro marginal e receita marginal serão dados pela inclinação da reta que representa o gráfico das funções custo, lucro e receita, respectivamente.*

Quando as funções custo, receita e lucro não são funções afins, não tem um comportamento linear, surge uma dificuldade. Nos mercados monopolistas quanto maior a quantidade comprada, menor é o preço unitário cobrado, ou

seja o preço unitário do produto não é constante. É bem razoável supor que a curva de demanda individual de uma firma monopolista é negativamente inclinada, ou seja, o preço tenha um “comportamento linear”, decrescendo. Logo suponha que, o preço unitário do milheiro de barris de petróleo de uma determinada empresa petrolífera seja $p(x) = 100 - x$, aqui x é o número de milhares de barris vendidos por dia e deve variar de $0 < x < 100$. Então, a receita será dada por uma função quadrática, precisamente:

$$R(x) = (100 - x)x = 100x - x^2, \quad x \geq 0.$$

Vejamos as taxas de variações médias da receita nos intervalos $[20, 30]$ e $[30, 40]$, dadas em milhares de dólares por cada mil barris vendidos:

Intervalo	Δx	Variação da receita (ΔR)	Receita média no intervalo
$[20,30]$	10	$R(30) - R(20) = 500$	$500/10 = 50$
$[30,40]$	10	$R(40) - R(30) = 300$	$300/10 = 30$

Note que no intervalo de 20.000 a 30.000 unidades de barris vendidos tem-se que taxa de variação média da receita é 50.000 dólares por cada mil barris vendidos, enquanto que no intervalo de mesma amplitude ($\Delta x = 10$), partindo de 30.000 até 40.000 unidades de barris vendidos, temos uma receita média de 30.000 dólares por cada mil barris vendidos. Aqui observamos que as taxas de variações médias da receita não são constantes (uniformes) e dependem de x e do tamanho do intervalo Δx . De fato,

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(x + \Delta x) - R(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x[100 - 2x + \Delta x]}{\Delta x} = 100 - 2x + \Delta x.$$

Desta forma, **como determinar o quão rápido a receita está variando quando tivermos uma produção e venda de exatos 20.000 unidades de barris?** Sabendo que $R(20) = 1600$., nas tabelas abaixo calculamos as taxas de variação média da receita em intervalos em torno de $x = 20$. Considerando valores menores que $x = 20$ temos:

Intervalo	Δx	Variação da receita (ΔR)	Receita média no intervalo
[15; 20]	5	$R(20) - R(15) = 325$	65
[18; 20]	2	$R(20) - R(18) = 124$	62
[19; 20]	1	$R(20) - R(19) = 61$	61
[19,5; 20]	0,5	$R(20) - R(19,5) = 30,25$	60,5
[19,9;20]	0,1	$R(20) - R(19,9) = 6,01$	60,1

A tabela a seguir considera valores maiores que $x = 20$:

Intervalo	Δx	Variação da receita (ΔR)	Receita média no intervalo
[20; 25]	5	$R(25) - R(20) = 275$	55
[20; 22]	2	$R(22) - R(20) = 116$	58
[20; 21]	1	$R(21) - R(20) = 59$	59
[20; 20,5]	0,5	$R(20,5) - R(20) = 29,75$	59,5
[20; 20,1]	0,1	$R(20,1) - R(20) = 5,99$	59,9

Notamos que as taxas de variações médias da receita para intervalos cada vez menores, em torno do valor $x = 20$, aproximam-se do valor 60. Logo é razoável concluir que a taxa de variação (instantânea) da receita para $x=20$, ou seja, para 20.000 barris é 60 (ou seja, 60.000 dólares por cada mil unidades vendidas). Esta taxa de variação instantânea mede o quão rápido a receita esta variando em relação a quantidade vendida, quando se vende 20.000 barris de petróleo, e é chamada a **receita marginal** em $x = 20$.

Analogamente, definimos o custo marginal e lucro marginal, em uma quantidade produzida e vendida x , como sendo a taxa de variação instantânea do custo e do lucro, respectivamente, no ponto x . O custo marginal em x é o limite das taxas médias de variação do custo em intervalos cada vez menores em torno do ponto x . Da mesma forma, o lucro marginal. Portanto, receita marginal, custo marginal e lucro marginal indicam o quão rápido a receita, o custo e lucro, variam em relação à quantidade produzida e vendida, respectivamente.

1.4 Reta Tangente a uma Curva

A Geometria é área da Ciência (da Matemática) que estuda os problemas e relações ligados com a forma, tamanho e posição relativa de figuras (ou objetos). A geometria surgiu independentemente em várias culturas antigas como um conjunto de conhecimentos práticos sobre comprimento, área e volume, entretanto, por volta do século III a.C., Euclides de Alexandria, matemático grego, escreveu a magistral obra intitulada “Os Elementos” onde a geometria foi então estabelecida de forma precisa e axiomática. O campo da astronomia, especialmente o mapeamento das estrelas e planetas na esfera celestial e a descrição das relações entre os movimentos dos corpos celestiais, foi uma das mais importantes fontes de problemas geométricos durante os mil e quinhentos anos seguintes.

Para Euclides e a Geometria Euclidiana, no estudo das circunferências e arcos, quando uma reta e uma circunferência têm em comum apenas um ponto P, dizemos que a reta tangencia a circunferência em P, sendo assim esta reta é denominada “reta tangente” e P é o “ponto de tangência” ou “ponto de contacto”. Podemos a partir desta definição demonstrarmos que se uma reta é tangente a uma circunferência, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência, e além disso, se uma reta é perpendicular a um raio, em um ponto P de uma circunferência, então essa reta tangencia a circunferência no ponto P. (Veia a Figura 1.8).

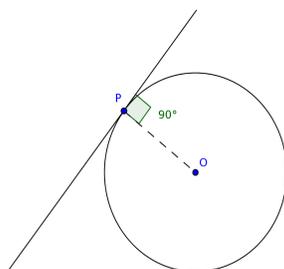


Figura 1.8:

No estudo dos movimentos, para que fosse possível dizer em qual direção um objeto esta se movendo em um ponto de um caminho curvilíneo se fez necessário estender o conceito de tangência para uma curva qualquer. Se mantida a noção estabelecida pela geometria de Euclides, ou seja, tangente a uma curva é a reta que possui um único ponto em comum com a curva e não “corta” (atravessa) a curva, não é possível realizar a extensão desejada.

Exatamente neste ponto reside a dificuldade! É necessário enxergar o conceito estabelecido por Euclides de outra forma segundo a qual a extensão seja natural. Considere, por exemplo, os gráficos na Figura 1.9:

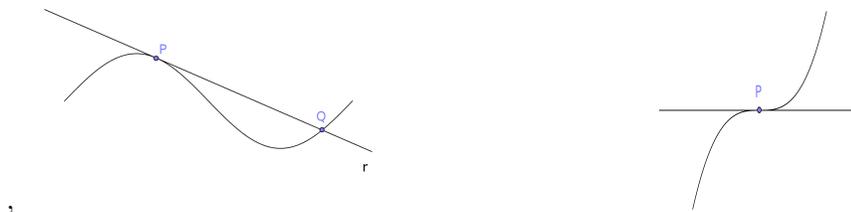


Figura 1.9:

Levando-se em conta que a noção de tangência deve ser estendida para dar sentido a “direção de movimentos” parece razoável que ambas as retas r e s sejam as retas tangentes a curva no ponto P indicado mas, obviamente falham em ser retas tangentes no sentido euclidiano. No primeiro caso, Figura 1.9, a reta passa por mais de um ponto da curva, enquanto que no segundo caso, Figura 1.9, a reta corta (atravessa) a curva no ponto P . Logo surge a questão: **Dados uma curva e um ponto P pertencente a ela, como definir a reta tangente à curva no ponto P ?**

Iniciamos o estudo desta questão observando que fixado um sistema de coordenadas cartesianas, xOy , toda reta é identificada (determinada) por meio de uma equação, que pode ser obtida de duas formas: conhecendo-se dois pontos desta reta ou ainda conhecendo-se um ponto e a inclinação da reta. No caso em análise conhecemos somente o ponto $P = (x_0, y_0)$ por onde a reta deve passar. Portanto a solução da questão passa por definir qual a inclinação m da reta tangente desejada. Feito isto, a equação da reta é dada pela expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (1.11)$$

Pelo exposto somos conduzidos a seguinte questão: **como definir a inclinação da reta tangente a curva no ponto P ?** Um caminho bastante razoável é escolher um outro ponto Q sobre a curva e movê-lo ao longo da curva, indo para (aproximando-se) P . Conforme mostra a Figura 1.10, imagine o ponto Q que se moveu para o ponto Q' , o qual se moveu para o ponto Q'' e assim sucessivamente, aproximando-se do ponto P . As retas

PQ , PQ' , PQ'' parecem aproximar-se de uma reta fixa PP' , a qual, intuitivamente sentimos ser a solução do problema, ou seja, a reta tangente a curva no ponto P .

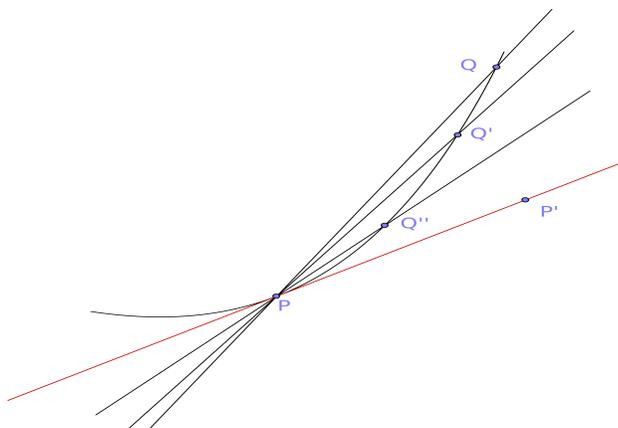


Figura 1.10:

Logo, ainda de forma intuitiva, resolvemos o problema definindo a reta tangente a curva no ponto P como sendo a reta limite das retas secantes PQ , quando Q aproxima-se de P . A inclinação da reta tangente é, então, definida como sendo aquele valor para o qual as inclinações das retas secantes PQ estão se aproximando, a medida que o ponto Q se aproxima do ponto P . Abreviamos esta definição por meio da seguinte notação:

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}, \quad (1.12)$$

que deve ser lida da seguinte forma: “ m é igual ao limite das inclinações das retas secantes m_{PQ} , quando Q tende a P ”, e repetimos, a expressão (1.12) significa que a inclinação m da reta tangente a curva no ponto P é o valor para o qual as inclinações das retas secantes PQ estão se aproximando, a medida que o ponto Q se aproxima do ponto P .

Suponhamos concretamente que uma curva esteja modelada como gráfico de uma função suave $y = f(x)$ e $P = (x, f(x))$ um ponto fixado sobre a curva. Lembramos, conforme dito na introdução, que sempre estaremos trabalhando com funções suaves, que significam funções cujos gráfico são curvas contínuas, sem bicos. Se escolhermos outro ponto Q da curva tal que $Q = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, onde $\Delta x \neq 0$ representa um incremento na variável

x , e traçarmos a reta secante PQ , temos que a inclinação desta reta secante é dada por:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.13)$$

Esboçando tal situação para $\Delta x > 0$ temos a Figura 1.11.

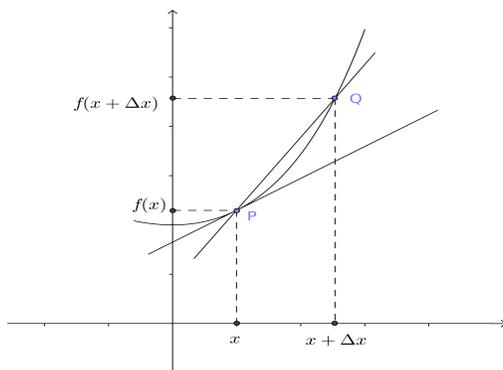


Figura 1.11:

Fixando P e movendo Q ao longo da curva, de maneira que Q se aproxima de P , o que equivale a tomarmos valores cada vez menores para os acréscimos Δx , obtemos as aproximações para a inclinação da reta tangente em P . Assim, usando (1.12) e (1.13) escrevemos:

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (1.14)$$

onde reafirmamos que a expressão acima significa que m é o valor para o qual estão se aproximando os valores obtidos pelas expressões $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ calculados com valores de Δx cada vez menores. Isto resolve o problema da generalização do conceito de tangência dado inicialmente por Euclides para as circunferências.

Para fixar as ideias consideremos a função $y = f(x) = x^2$, cujo gráfico é uma parábola, e vamos determinar a reta tangente ao gráfico desta função, no ponto $P = (2, 4)$. Conforme vimos acima, a inclinação da reta tangente é valor para o qual estão se aproximando as inclinações das retas secantes m_{PQ} .

Considerando $\Delta x > 0$, os pontos Q estão à direita de P . Logo “ Q se aproxima de P ” pela direita. Veja na tabela abaixo os resultados:

Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	Q	$M_{PQ} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
1	3	9	(3, 9)	5
0,5	2,5	6,25	(2,5; 6,25)	4,5
0,1	2,1	4,41	(2,1; 4,41)	4,1
0,01	2,01	4,0401	(2,01; 4,0401)	4,01
0,001	2,001	4,004001	(2,001; 4,004001)	4,001

Podemos esboçar a seguinte interpretação geométrica, vide Figura 1.12.

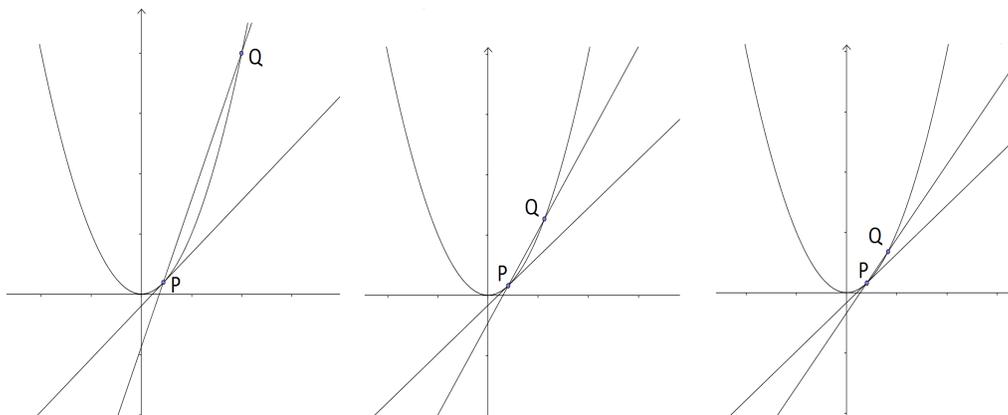


Figura 1.12: Q tende a P pela direita

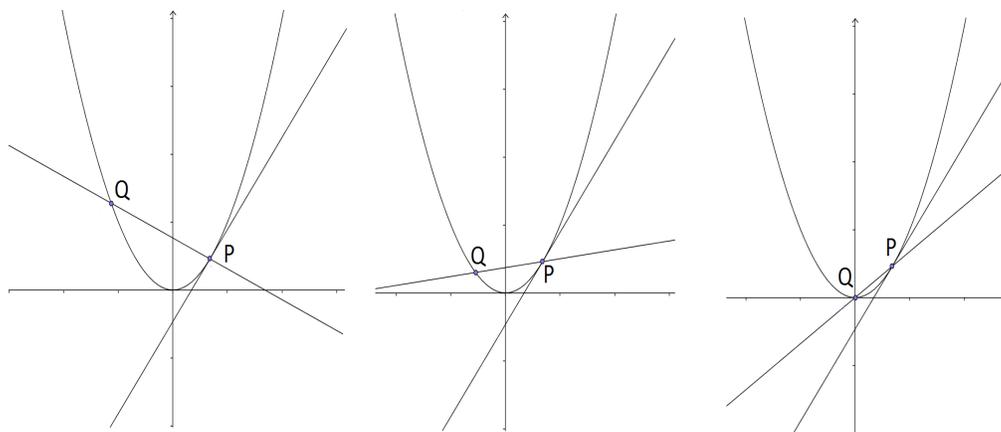
Considerando $\Delta x < 0$, os pontos Q estão a esquerda de P . Logo “ Q se aproxima de P ” pela esquerda. Assim, obtemos os seguintes valores listados na tabela abaixo.

Δx	$2 + \Delta x$	$f(2 + \Delta x)$	Q	$M_{PQ} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
-1	1	1	(1, 1)	3
-0,5	1,5	2,25	(1,5; 2,25)	3,5
-0,1	1,9	3,61	(1,9; 3,61)	3,9
-0,01	1,99	3,9601	(1,99; 3,9601)	3,99
-0,001	1,999	3,996001	(1,999; 3,996001)	3,999

Interpretando geometricamente temos, conforme a Figura 1.13.

As tabelas acima mostram que os valores das inclinações das retas secantes, quando o ponto Q tende ao ponto P (equivalentemente Δx tende a zero) aproximam-se do valor $m = 4$. Concluímos, assim, que

$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - 4}{\Delta x} = 4.$$

Figura 1.13: Q tende a P pela esquerda

Consequentemente, a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = x^2$ no ponto $P = (2, 4)$ é:

$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{ou ainda} \quad y = 4x - 4$$

e seu gráfico está esboçado na Figura 1.14.

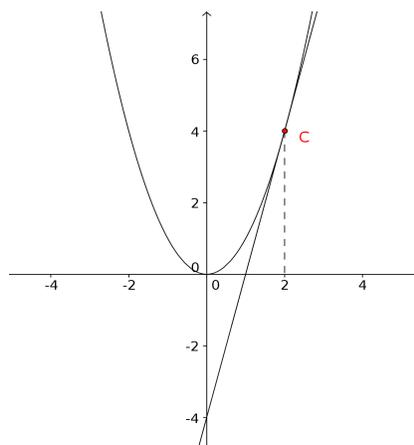


Figura 1.14:

1.5 Taxas de Variação e a Derivada

Sabemos que grandezas, como volume, posição, temperatura, pressão, concentração, lucro, tempo, velocidade, carga elétrica e etc, se relacionam uma as outras e diversos modelos funcionais, baseados em leis da natureza, mostram-se bastante eficientes para descrever estas relações. Por muitas vezes, conforme vimos nas seções (1.1), (1.2) e (1.3), o que desejamos é determinar o quão rápido determinada grandeza varia em relação outra, ou seja, a taxa segundo a qual uma grandeza varia em relação a outra.

Quando queremos detalhar o quão rápido um objeto descola-se em relação ao tempo estamos interessados na taxa de variação de seu deslocamento em relação ao tempo, que chamamos de velocidade. Por outro lado, quando queremos determinar quão rápido varia o volume em relação ao tempo, queremos encontrar a vazão. Se um biólogo estiver interessado no quanto uma população de bactérias cresce ou decresce em relação ao tempo ele também deseja calcular a taxa de variação do número de bactérias em função do tempo. Um engenheiro, por sua vez, pode estar interessado na taxa com que o comprimento de um cano de metal muda com a temperatura. As decisões de um economista podem mudar quando este conhece a taxa com a qual os custos de produção estão mudando em relação a quantidade de produto que esta sendo produzida.

Nesta seção abstraímos as situações concretas! Consideramos uma função qualquer $y = f(x)$, sem qualquer preocupação do que tal função possa estar representando e veremos que é possível unificar todas as taxas exemplificadas em um único conceito, chamado a derivada da função. Com efeito, seja $y = f(x)$ uma função suave definida num intervalo $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Dados dois pontos $x_1 < x_2$ no intervalo I , definimos a **taxa de variação média da função** f em relação a x , no intervalo $[x_1, x_2]$, como sendo

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Se $x \in I$, é um ponto fixado no domínio de f , definimos a taxa de variação instantânea da função f , no ponto x , que denotamos por $f'(x)$, como sendo o valor para o qual se aproximam as taxas de variação média em intervalos cada vez menores, em torno do ponto x . Simbolicamente escrevemos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad (1.15)$$

ou seja, a taxa de variação instantânea da função f , no ponto x , é o limite (caso ele exista) das taxas de variação média em intervalos de extremos x e $x + \Delta x$, com Δx cada vez mais próximo de zero (tanto por valores positivos como por valores negativos). Fazendo $s = x + \Delta x$ podemos reescrever (1.15) da seguinte forma:

$$f'(x) = \lim_{s \rightarrow x} \frac{f(s) - f(x)}{s - x}. \quad (1.16)$$

Bem observado, perceba que os cálculos utilizados para definirmos a taxa de variação instantânea de uma função f num ponto x do seu domínio, foram o mesmos para determinarmos a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função num dado ponto, bem como, foram ainda os mesmos utilizados nas seções anteriores sobre os problemas de vazão e velocidade. Na verdade o cálculo do limite (1.15) ou (1.16) aparece com muita frequência, nas mais variadas áreas, e portanto mereceu atenção especial. A primeira ação quando algo merece atenção especial é o “batismo”, ou seja, recebe um nome, que neste caso foi a derivada da função no ponto x . Podemos então definir: *seja $y = f(x)$, $x \in I = (a, b)$ uma função suave definida num intervalo I , a derivada de f no ponto x é por definição a taxa de variação instantânea de f no ponto x , dada pelos limites (1.15) ou (1.16). Equivalentemente, a derivada de f num ponto x é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x, f(x))$.*

Para uma função constante $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$, a taxa de variação média em qualquer intervalo é sempre nula, pois:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Portanto, em qualquer ponto x a taxa de variação instantânea de f no ponto x , que foi definida como limite das taxas de variação médias, também é nula, ou seja, $f'(x) = 0$ qualquer que seja o ponto x (a derivada de constante

é zero). Na Figura 1.15, observamos geometricamente esse fato: para uma função constante independentemente do quanto x varie, as imagens serão sempre a mesma, logo a variação da função será nula.

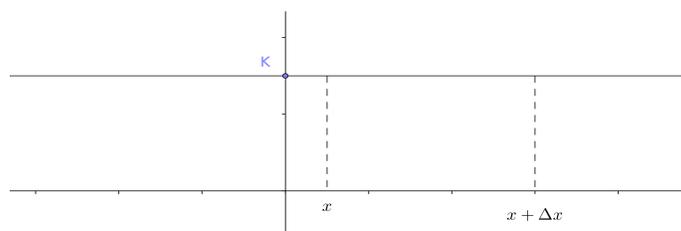


Figura 1.15:

Considere agora o exemplo de um outro tipo de função. Considere a função $f(x) = 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, então as taxas de variações média dessa função nos intervalos $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 4]$, $[3, 5]$ e $[0, 5]$ estão dadas na tabela:

Intervalo	Δx	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	Taxa de variação média
$[0, 1]$	1	$5 - 2 = 3$	$3/1 = 3$
$[1, 2]$	1	$8 - 5 = 3$	$3/1 = 3$
$[2, 4]$	2	$14 - 8 = 6$	$6/2 = 3$
$[3, 5]$	2	$17 - 11 = 6$	$6/2 = 3$
$[0, 5]$	5	$17 - 2 = 15$	$15/5 = 3$

Note que nos dois intervalos em que a variação de x foi $\Delta x = 1$ a variação de y foi $\Delta y = 3$. Por outro lado quando a variação de x foi $\Delta x = 2$, a variação de y foi $\Delta y = 6$ e, no último caso, quando tivemos uma variação de x , $\Delta x = 5$, a variação de y foi $\Delta y = 15$. Em todos os intervalos considerados a taxa de variação média foi igual a 3. Na verdade podemos ver que a taxa de variação média igual a 3 se verifica para qualquer intervalo pois,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x} = \frac{3(x + \Delta x) + 2 - (3x + 2)}{\Delta x} = \frac{3\Delta x}{\Delta x} = 3.$$

Consequentemente, a derivada da função é $f'(x) = 3$ qualquer que seja o ponto x . O gráfico, Figura 1.16, representa a função $f(x) = 3x + 2$. Nele podemos observar que o aumento de uma unidade de x implica no aumento de três unidades de y .

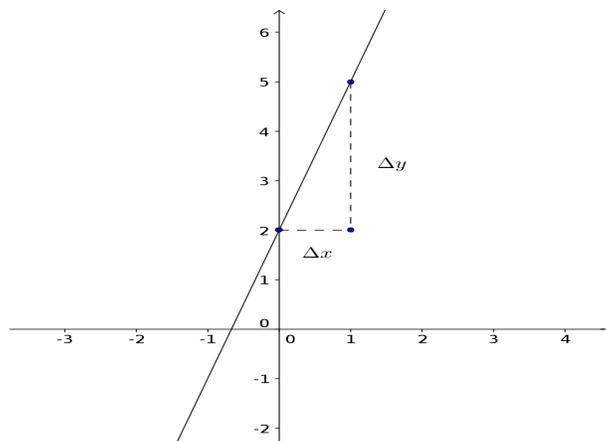


Figura 1.16:

É conveniente mostrarmos que, para uma função afim qualquer (polinomial de 1º grau) $f(x) = ax + b$ com a e b números reais e $a \neq 0$, vemos que a taxa de variação média em qualquer intervalo é sempre igual ao número a . De fato, veja que:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a(x + \Delta x) + b - (ax + b)}{\Delta x} \\ &= \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a.\end{aligned}$$

Logo, a taxa de variação média de uma função polinomial de 1º grau é constante. Logo, a derivada $f'(x) = a$ qualquer que seja o ponto x .

Note que o aumento de uma unidade de x implica no aumento de a unidades de y e a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto x , que é igual a a , coincide com a inclinação da reta que representa o gráfico dessa função.

Vejam agora a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}^*$ e $b, c \in \mathbb{R}$. A taxa de variação média num intervalo $[x, x + \Delta x]$ é dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - (ax^2 + bx + c)}{\Delta x} \\
&= \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + bx + b\Delta x + c - ax^2 - bx - c}{\Delta x} \\
&= \frac{2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = \Delta x \left[\frac{2ax + a\Delta x + b}{\Delta x} \right] \\
&= 2ax + a\Delta x + b.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Neste caso, diferentemente da função afim, as taxas de variação média para a função quadrática não são uniforme, isto é, depende do intervalo considerado, explicitamente falando, depende do ponto x e também do comprimento Δx do intervalo. Se em (1.17) tomarmos intervalos em torno de x cada vez menores, ou seja, tomarmos valores de Δx cada vez menores, tendendo para zero, podemos ver que as respectivas taxas de variações médias estarão cada vez mais próximas do valor $(2ax + b)$. Logo a taxa de variação instantânea de f no ponto x (ou ainda, a derivada de f no ponto x) é dada por:

$$f'(x) = 2ax + b. \tag{1.18}$$

Lembramos também que (1.18) é o valor da inclinação da reta tangente ao gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ no ponto $(x, f(x))$.

Vamos observar esses resultados num caso concreto, ou seja, considere a função $f(x) = x^2$ e a taxa de variação média de f nos intervalos $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$, $[4; 4,5]$ e $[4,5]$. Calculando temos:

Intervalo	Δx	$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$	Taxa de variação média
$[1,2]$	1	$2^2 - 1^2 = 3$	$3/1 = 3$
$[2,3]$	1	$3^2 - 2^2 = 5$	$5/1 = 5$
$[3,4]$	1	$4^2 - 3^2 = 7$	$7/1 = 7$
$[4;4,5]$	0,5	$4,5^2 - 4^2 = 4,25$	$4,25/0,5 = 8,5$
$[4,5]$	1	$5^2 - 4^2 = 9$	$9/1 = 9$

Note que as taxas de variação média não são constantes e poderiam ser obtidas diretamente usando (1.17), conforme tabela abaixo:

x	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$
1	1	3
2	1	5
3	1	7
4	0,5	8,5
4	1	9

Para determinar, por exemplo, a taxa de variação instantânea de f no ponto $(4, 16)$ não é necessário, então, determinar a variação média em intervalos em torno de 4. Para obter $f'(4)$ usamos (1.18). Assim,

$$f'(4) = 2 \cdot 1 \cdot 4 + 0 = 8.$$

Logo a taxa de variação de f no ponto $x = 4$ é 8. Segue ainda que a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $(4, 16)$ é

$$y - 16 = 8(x - 4) \Rightarrow y = 8x - 16.$$

A representação geométrica desse exemplo é dada pela Figura 1.17.

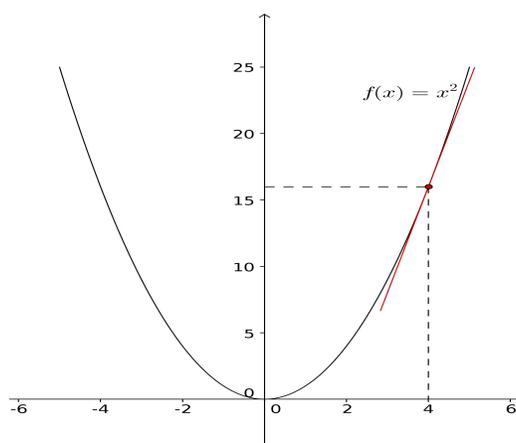


Figura 1.17:

Para uma função polinomial do 3º grau do tipo $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sendo os coeficientes a , b , c e d números reais e $a \neq 0$, temos que a taxa de variação é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{a(x + \Delta x)^3 + b(x + \Delta x)^2 + c(x + \Delta x) + d - (ax^3 + bx^2 + cx + d)}{\Delta x} \\
&= \frac{3ax^2\Delta x + 3ax(\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3 + 2bx\Delta x + b(\Delta x)^2 + c\Delta x}{\Delta x} \\
&= 3ax^2 + 3ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + 2bx + b\Delta x + c.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Assim a taxa de variação média de uma função do 3º grau é dada por (1.19). Como estamos tomando Δx cada vez menor, ou seja, $\Delta x \rightarrow 0$ segue que a taxa de variação instantânea é dada por

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \tag{1.20}$$

No caso da função $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ temos que sua taxa de variação média é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{x - (x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} \\
&= \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x} \\
&= \frac{-1}{(x+\Delta x)x} \cdot \frac{1}{\Delta x} \\
&= \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Do mesmo modo, tomando $\Delta x \rightarrow 0$, temos que sua taxa instantânea de variação dessa função é dada por

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \tag{1.22}$$

Já para a função $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in \mathbb{R}_+$ temos que sua taxa de variação

média é dada por

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\
 &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\
 &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \tag{1.23}
 \end{aligned}$$

Considerando $\Delta x \rightarrow 0$, temos que sua taxa instantânea de variação é dada por

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \tag{1.24}$$

1.6 Otimização

Em nosso cotidiano é comum ouvirmos as expressões como otimizar o tempo, otimizar o espaço, otimizar custos ou ainda otimizar as condições de trabalho. Mas o que se entende por otimizar? Muitos acreditam que otimizar significa tornar ótimo ou ideal. É extrair o melhor rendimento possível, no que concerne a qualquer área de atividade. Na matemática o termo otimização refere-se ao estudo de problemas que buscam minimizar ou maximizar uma função objetivo. Por exemplo, se a principal consideração num problema for tempo, otimizar será buscar encontrar a maneira mais rápida para executar uma tarefa. Se a principal consideração for custo, otimizar será buscar a maneira mais barata de executar a tarefa. Logo otimizar torna-se buscar o maior ou menor valor de uma função em algum intervalo e à determinação de onde esses valores ocorrem.

Em problemas de engenharia, administração, logística, economia, biologia, entre outras, o que se busca é modelar os problemas colocando-os numa

linguagem matemática, construindo-se uma função objetivo e aplicar conceitos matemáticos para maximizar ou minimizar os valores dessa função. Neste contexto o conceito de derivada desempenha papel essencial! Vamos a seguir expor um problema concreto de otimização:

Problema 1. Um agricultor deseja fazer uma horta no formato retangular que será protegida por uma cerca. Sabendo que ele dispõe de 100 metros de cerca e usará toda ela, quais as dimensões do retângulo para que se tenha a horta de maior área possível ?

Note que com 100m de cerca podemos fazer, por exemplo, uma horta de dimensões 25m por 25m, ou 40m por 10m ou ainda 20m por 30m. Nesses exemplos temos hortas de áreas $625m^2$, $400m^2$ e $600m^2$, respectivamente. Porém como determinar as dimensões da horta de maior área possível? Para respondermos esse questionamento, encontramos então o maior desafio dos problemas de otimização, qual seja, converter o problema prático proposto em um problema de otimização matemática, determinando a função que deve ser maximizada ou minimizada, comumente chamada de função objetivo. Neste caso vamos aos cálculos: Inicialmente, denotamos por x e y a largura e o comprimento da horta, medidos em metros, respectivamente. Na Figura 1.18 temos um esboço representando a horta.

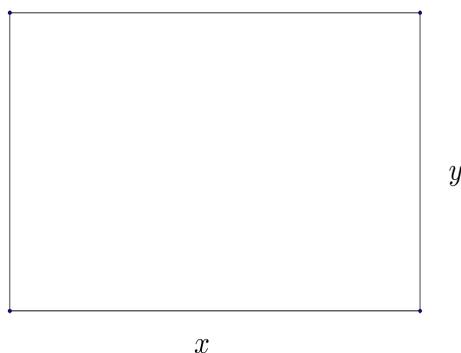


Figura 1.18:

Denotando por A o valor da área da horta, devemos ter

$$A = x \cdot y. \quad (1.25)$$

Observe que a área esta em função das medidas dos lados do retângulo. Devemos eliminar uma variável e expressá-la em termos de uma única variável. Para isto, note que o agricultor deve usar 100 metros de cerca, então: $2x + 2y = 100$, de onde resulta que $y = 50 - x$. Substituindo este valor em (1.25) temos:

$$\begin{aligned} A(x) &= xy = x(50 - x) \\ A(x) &= 50x - x^2, \quad 0 < x < 50. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Esta é a função objetivo, ou seja, a função que modela o problema proposto. O passo seguinte, para se resolver o problema consiste em maximizá-la, ou seja, encontrar para qual valor de x tem-se o maior valor da função objetivo. Veja que, neste caso, a função objetivo é uma função quadrática o que torna as coisas muito simples. De fato, sabemos que o gráfico da função quadrática $A(x) = 50x - x^2$ é uma parábola com concavidade para baixo, uma vez que o sinal do coeficiente do termo quadrático é negativo. Portanto seu valor máximo é atingido no vértice da parábola, ou seja, para $x = 25$. Assim, devemos ter que o comprimento $y = 50 - 25 = 25$. Logo a horta de maior área é obtida, tomando-a em formato de quadrado de lado 25 m, cuja área é 625 m^2 .

Vejamos mais um problema:

Problema 2. Suponha que, para estocagem de entulhos, uma construtora de-seja fabricar um container com volume de 10 m^3 e uma tampa aberta. Admita ainda que o comprimento da base deve ter o dobro da largura. Sabendo que o material usado para a base custa R\$ 100,00 por metro quadrado e o material para os lados custa R\$ 60,00 por metro quadrado, encontre as medidas do container com menor custo de fabricação.

A resolução do problema inicia-se pela modelagem. Denotamos por x , y , e z o comprimento, a largura e a altura do container, respectivamente, medidos em metros.

Logo a área da base do container é (xy) , enquanto a área lateral é $2yz + 2xz = 2z(y + x)$. A Figura 1.19 representa o container. Assim, o custo C para fabricação do container é

$$C(x) = 100(xy) + 60[2z(x + y)] = 100xy + 120z(x + y). \tag{1.27}$$

Note que o custo esta expresso em função das medidas do container. É necessário eliminar duas destas variáveis e reescrevê-lo em função de uma

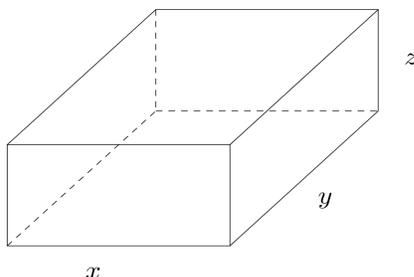


Figura 1.19:

única variável. Para isto usamos as informações adicionais dadas no enunciado do problema. Sabemos que o comprimento da base deve ter o dobro da largura, ou seja, $y = 2x$. Substituindo isto em (1.27) encontramos

$$C = 200x^2 + 360xz. \quad (1.28)$$

Também, o volume do container deve ser 10 m^3 . Então $V = xyz = 10$, de onde resulta que $2x^2z = 10$, ou ainda, $z = \frac{5}{x^2}$. Substituindo isto em (1.28), obtemos uma expressão para o custo em termos de uma única variável:

$$C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x}, \quad (1.29)$$

que é a função objetivo. Agora a solução do problema consiste em minimizar a função objetivo, ou seja, encontrar para qual valor de x teremos o menor custo C . Aqui não temos mais a facilidade dada por uma função quadrática, como aconteceu no problema anterior. Muitos outros importantes problemas resultam numa função objetivo ainda mais complicada do que (1.29). Logo, para resolver problemas de otimização, é essencial desenvolver uma técnica para determinar os valores máximo e mínimo de uma função.

Vejamos outra situação problema:

Problema 3. Uma indústria de óleo de cozinha deseja embalar seu produto em latas cilíndricas de 1 litro. Quais devem ser as dimensões da lata que minimizarão o custo do metal para produzi-la? Para a modelagem da função objetivo consideremos r e h o raio e a altura do cilindro, respectivamente. A lata mais barata será aquela que possui a menor área da superfície. Na Figura 1.20, temos uma representação do formato da lata.

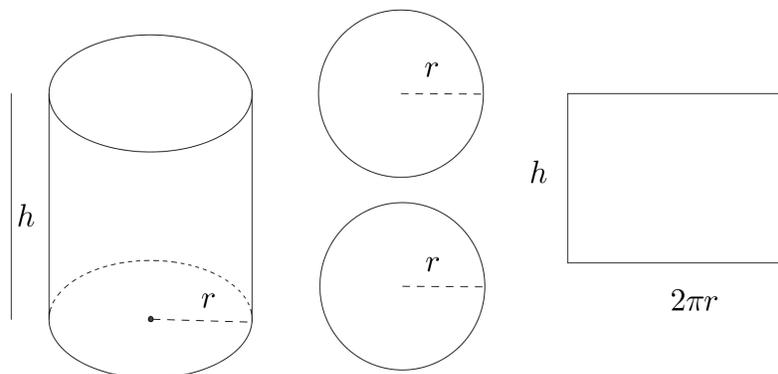


Figura 1.20:

Pela figura, vemos que a área da superfície da lata cilíndrica é dada por

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Para eliminarmos uma variável nesta expressão observamos que o volume da lata deve ser de 1 litro, que equivale a 1000 cm^3 . Então $V = \pi r^2 h = 1000$ de onde resulta que

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}. \quad (1.30)$$

Substituindo isto na expressão de A obtemos a função objetivo

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, \quad r > 0. \quad (1.31)$$

Agora a solução do problema é obtida minimizando esta função objetivo.

Um outro problema:

Problema 4. Uma rede de água potável deve ligar uma central de abastecimento situada à margem de um rio de 500 m de largura, a um conjunto habitacional situado na outra margem do rio, 2.000 m a oeste da central. Um levantamento de preço indica que o custo da obra através do rio é de R\$ 640,00 por metro, enquanto que em terra custa R\$ 312,00 por metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável ?

Considere a Figura (1.21) que representa geometricamente esse problema.

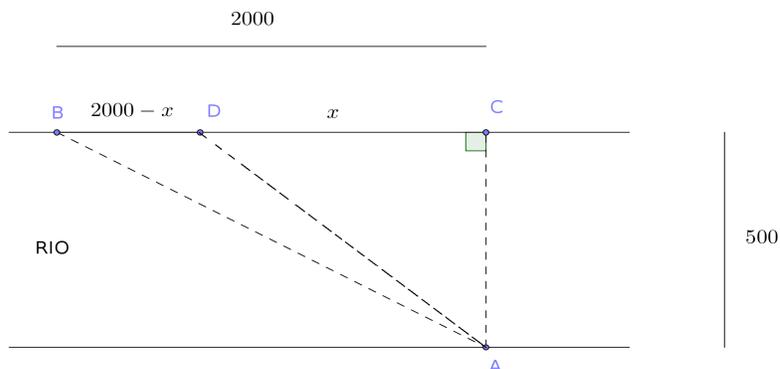


Figura 1.21:

Nos pontos A e B situamos a central de abastecimento e o conjunto habitacional, respectivamente. O ponto C é a projeção ortogonal do ponto A na margem oposta do rio, enquanto que o ponto D é um ponto arbitrário entre os pontos B e C . Se x é a distância entre os pontos C e D , conseqüentemente a distância de D a B será $(2000 - x)$. Pelo Teorema de Pitágoras vemos:

$$\overline{AD}^2 = 500^2 + x^2 \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{500^2 + x^2}. \quad (1.32)$$

Assim, o custo da rede de água é dado por:

$$C(x) = 640 \left(\sqrt{500^2 + x^2} \right) + 312 (2000 - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2000, \quad (1.33)$$

que é a função objetivo para o problema em estudo. A solução do problema é obtida minimizando-a.

Todos esses problemas buscam soluções ótimas e conforme constatamos as soluções ótimas serão dadas pelos extremos de uma função. Faz-se necessário então uma teoria sobre os máximos e mínimos de funções.

Fisicamente, desde de muito cedo, os cientistas já imaginavam que os problemas de otimização tinham alguma conexão com taxas de variação instantâneas. Imagine uma bola arremessada verticalmente para cima. À medida que sobe a velocidade da bola decresce e onde ela atinge o ponto mais alto, a altura máxima, sua velocidade é nula e, então começa a mover no sentido contrário (cair). Em outras palavras, a velocidade é igual a zero no ponto de altura máxima. Mas, velocidade é a taxa de variação instantânea

da altura em relação ao tempo. Este fato nos faz crer que o conceito de derivada esteja envolvido com as questões de otimização. Mais ainda, já parece razoável que para determinarmos o valor máximo de uma função devemos derivá-la e encontrar os pontos onde ela é igual a zero.

Intuitivamente é tudo muito simples, vamos considerar uma abordagem geométrica. Imagine o gráfico de uma função como uma cordilheira bidimensional com morros e vales (Figura 1.22), então o topo dos morros e o fundo dos vales serão chamados de máximos e mínimos relativos (ou locais) da função.

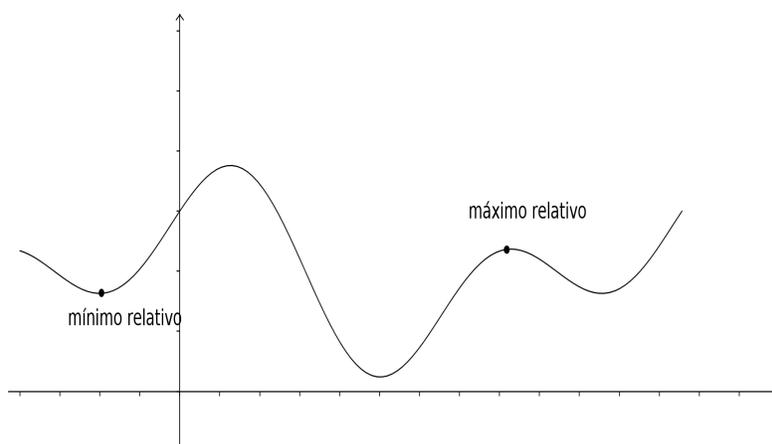


Figura 1.22:

A denominação relativa se dá, pois são os pontos mais altos e mais baixos em sua vizinhança e não necessariamente o ponto mais alto ou mais baixo de toda a função. Quando o ponto é o mais alto para toda a função esse é chamado de máximo absoluto ou global e, caso seja o mais baixo de toda função, mínimo absoluto (ou global). Precisamente, considerando $y = f(x)$ uma função real definida num domínio $D(f) \subset \mathbb{R}$, temos:

- i) Um número real M na imagem de f ($M = f(c)$ para algum $c \in D(f)$) é dito valor máximo absoluto (ou global) de f quando satisfaz $M = f(c) \geq f(x)$, $\forall x \in D(f)$. Neste caso, o ponto c é denominado ponto de máximo absoluto de f .
- ii) Analogamente um número real m na imagem de f ($m = f(c)$ para algum $c \in D(f)$) é dito valor mínimo absoluto (ou global) de f quando satisfaz $m = f(c) \leq f(x)$, $\forall x \in D(f)$. Neste caso, o ponto c é denominado ponto de mínimo absoluto de f .

Por uma vizinhança de um número c entendemos um intervalo aberto centrado em c , ou ainda, $I(c) = (c - \Delta x, c + \Delta x)$ com $\Delta x > 0$. Representamos geometricamente essa vizinhança na Figura 1.23.

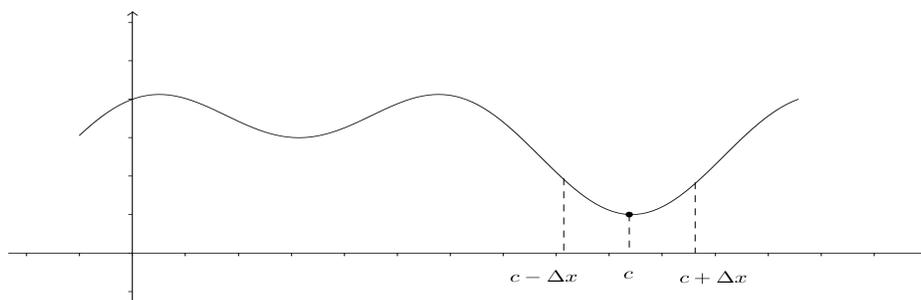


Figura 1.23:

Para o caso dos extremos relativos considere $y = f(x)$ uma função real definida num domínio $D(f) \subset \mathbb{R}$, então:

- i) Um número real M na imagem de f é dito valor máximo local de f quando satisfaz $f(c) \geq f(x)$, para todo x no domínio de f e numa vizinhança de c ($x \in (D(f) \cap I(c))$). Neste caso, o ponto c é denominado ponto de máximo local de f .
- ii) Analogamente um número real m na imagem de f é dito valor mínimo local de f quando satisfaz $f(c) \leq f(x)$, para todo x no domínio de f e numa vizinhança de c ($x \in (D(f) \cap I(c))$). Neste caso, o ponto c é denominado ponto de mínimo local de f .

Por exemplo, considerando o gráfico na Figura 1.24, é possível observar que o valor máximo absoluto da função acima é 5 e isso ocorre no ponto $x = 3$. Esse é o ponto “mais alto” do gráfico. Da mesma forma, o ponto “mais baixo” é o valor mínimo absoluto de f que neste caso é igual ao valor 1, assumido no ponto $x = 5$.

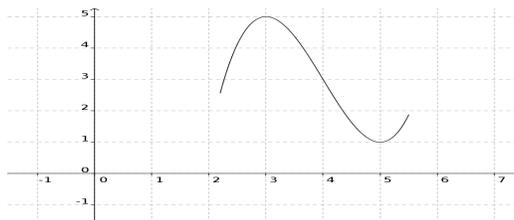


Figura 1.24:

Nem toda função admite máximo e mínimo absoluto ou local. Existem exemplos que apenas um ocorre ou ainda nenhum deles. Observe alguns exemplos desses casos nas Figuras 1.25 e 1.26.

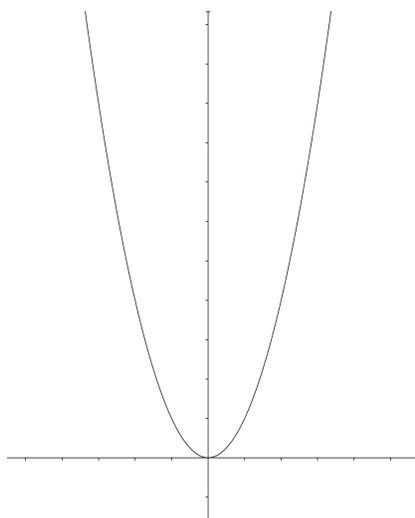


Figura 1.25: $f(x) = x^2$; $x \in \mathbb{R}$

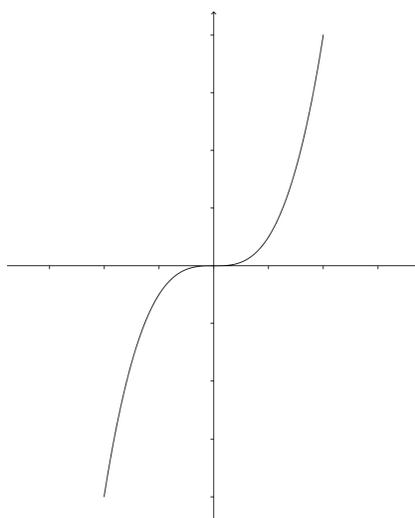


Figura 1.26: $f(x) = x^3$; $x \in \mathbb{R}$

Conforme vimos na discussão dos problemas de otimização anteriores,

precisamos de uma teoria matemática para determinar os valores extremos (máximo e mínimo) de funções, bem como, determinar onde estes valores extremos são assumidos. Quanto a existência de valores máximo e mínimo globais de uma função podemos ver que toda função contínua num intervalo fechado e limitado $[a, b]$, possui valor máximo e valor mínimo globais. Veja os gráficos na Figura 1.27.

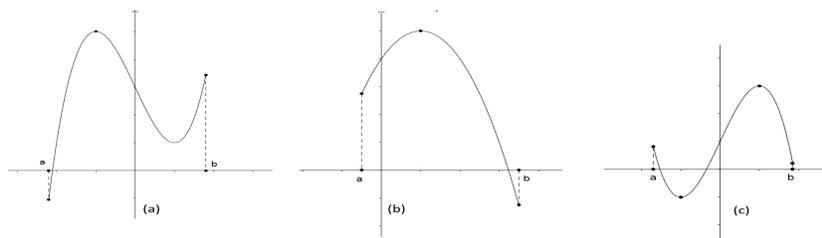


Figura 1.27:

Note que o valor máximo ou mínimo pode ocorrer no extremo do intervalo, ou seja, para $x = a$ como na Figura 1.27(a), ou ainda para algum x no interior do intervalo, por exemplo, na Figura 1.27(b). O fato é que eles sempre ocorrem para condições desse tipo.

Esse resultado é conhecido na literatura como **Teorema do Valor Extremo**. Apesar do teorema garantir a existência dos valores máximo e mínimo absolutos, ele não nos diz como determiná-los, nem em quais pontos do domínio são assumidos. Para determiná-los, começamos pelos extremos locais. Graficamente observamos uma característica dos pontos de extremos (locais) de uma função, que ocorrem no interior do intervalo $[a, b]$: **nestes pontos a reta tangente ao gráfico da função é uma reta horizontal, paralela ao eixo x , conseqüentemente todas tem inclinação igual a zero**. Na Figura 1.28, observe um exemplo geométrico.

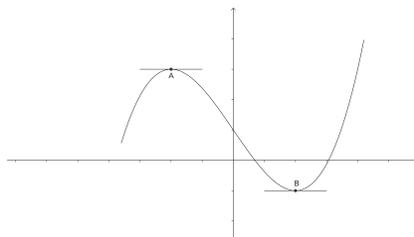


Figura 1.28:

Resumindo, concluímos que **se $y = f(x)$ é uma função suave numa vizinhança de um ponto c e possui valor máximo ou mínimo local neste ponto c então a derivada $f'(c) = 0$** . Devemos observar que a recíproca deste resultado é falsa! Ou seja, se $f'(c) = 0$ não significa que f assume valor máximo ou mínimo local em c . O contra exemplo clássico é a função $f(x) = x^3$ que possui derivada nula no ponto $x = 0$, entretanto, esta função não assume valor máximo local nem valor mínimo local neste ponto. Veja a figura 1.29.

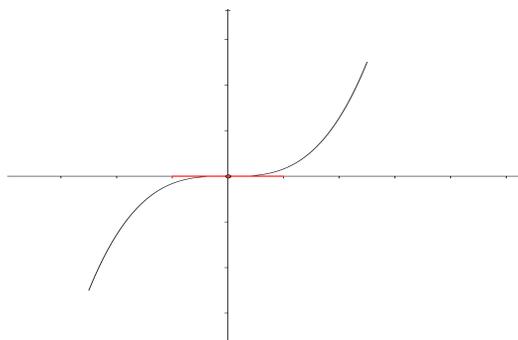


Figura 1.29:

Pelo raciocínio acima, os valores extremos locais de uma função suave não são caracterizados pelos pontos que anulam a derivada mas, estes são os “candidatos” para pontos de extremos, ou seja, se existirem extremos locais estes acontecerão dentre aqueles pontos que anulam a derivada da função. Isto reduz consideravelmente a busca pelos pontos de extremos, que a priori poderiam estar em qualquer ponto do domínio da função mas, que na verdade estão dentre aqueles onde a derivada é zero. Acrescentando-se a isto o fato de que toda função suave num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ assume valores máximo e mínimo globais, então podemos estabelecer uma estratégia para determiná-los, conhecida como o Método do Intervalo Fechado. Para encontrarmos os valores máximos e mínimos absolutos de uma função suave, num intervalo fechado e limitado $[a, b]$ procedemos da seguinte forma:

1. Determinamos todos os pontos do intervalo aberto (a, b) onde a derivada é igual a zero (ou seja, todos os pontos onde a inclinação da reta tangente ao gráfico é nula). Estes pontos são chamados pontos críticos de f em (a, b) .

2. Calculamos a função em cada um dos pontos críticos obtidos na etapa anterior e também nos dois extremos a e b do intervalo de definição.
3. O maior valor será o valor máximo global de f e o menor valor será o valor mínimo global de f , no intervalo $[a, b]$.

Ilustramos o método analisando a seguinte questão: *Entre $0^\circ C$ e $30^\circ C$, o volume V (em centímetros cúbicos) de 1 kg de água a uma temperatura T é aproximadamente dado pela fórmula*

$$V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3.$$

Encontre a temperatura na qual a água tem sua densidade máxima.

Sabe-se que a densidade de uma substância é calculada pela razão entre massa e o volume desta. Permanecendo a massa constante, a densidade assume seu valor máximo quando o volume é mínimo. Assim, vamos determinar o volume mínimo. Começamos calculando a derivada da função V dada, em um ponto T qualquer. De (1.20) segue que $V'(T) = -0,000207T^2 + 0,170086T - 0,06426$.

Vamos determinar agora os pontos para os quais $V'(T) = 0$, ou seja, os pontos críticos, pontos para os quais a inclinação da reta tangente é nula. Logo, para

$$-0,0002037T^2 + 0,170086T - 0,06426 = 0,$$

temos $T_1 = 79,53176$ e $T_2 = 3,96651$.

Como buscamos uma temperatura entre $0^\circ C$ e $30^\circ C$ vamos desprezar T_1 .

Agora calculamos a função no ponto crítico e nos extremos. Segue que

$$V(0) = 999,87,$$

$$V(3,96651) = 999,7446746$$

e por fim

$$V(30) = 1003,76277.$$

Segue que o volume mínimo ocorre na temperatura $3,96651^\circ C$, logo essa é a temperatura para a qual a densidade da água será máxima.

1.7 Crescimento, Decrescimento e o Teste da Derivada Primeira

Na seção anterior fizemos uma pequena introdução ao estudo de problemas de otimização e vimos que a análise destes problemas equivalem, de certa forma, ao estudo dos extremos de funções, valores máximos e mínimos locais e globais. Vimos um algoritmo interessante para encontrarmos os valores máximo e mínimo absolutos de uma função suave definida num intervalo fechado e limitado $[a, b]$. Também constatamos que a derivada da função é uma ferramenta essencial para encontrarmos os candidatos aos pontos de extremos locais, os quais chamamos de pontos críticos da função. Uma vez obtido um ponto crítico (ponto onde a derivada se anula) é crucial conhecermos algum resultado que nos permita decidir se em tal ponto temos um valor máximo local, ou um valor mínimo local ou nenhum dos dois casos (nem máximo local e nem mínimo local), que na literatura é chamado de ponto de sela.

O resultado clássico nesta direção é o teste da derivada primeira. Este nos permite testar um ponto crítico para decidir se ele é ponto de máximo local, mínimo local ou ponto de sela. A ideia é bastante simples e esta diretamente ligada com crescimento e decrescimento das funções. Os termos função crescente, decrescente e constante são usados para descrever o comportamento de uma função em um intervalo, a medida que percorremos o gráfico da esquerda para a direita. Por exemplo, a função representada na Figura 1.30 é crescente nos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[4, 10]$ é decrescente no intervalo $[0, 4]$ e constante em $[10, +\infty)$.

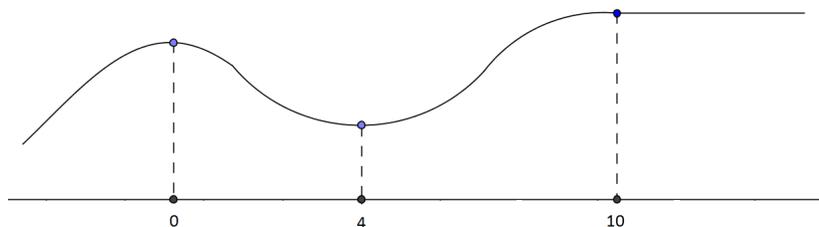


Figura 1.30:

Por definição, uma função real $y = f(x)$ é crescente num intervalo $[a, b]$ quando verifica $f(r) < f(s)$ sempre que $r < s$ em $[a, b]$. Analogamente, é

decrecente em $[a, b]$ quando verifica $f(r) > f(s)$ sempre que $r < s$ em $[a, b]$. É constante em $[a, b]$ se para quaisquer pontos r e s em $[a, b]$ tem-se que $f(r) = f(s)$. Observar o gráfico de uma função e determinar os intervalos de crescimento e decréscimo não é tarefa complicada. Porém uma questão importante é **como determinar esses intervalos sem a observação do gráfico da função?** Responder esse questionamento é importante uma vez que nem sempre sabemos construir o gráfico da função. Para darmos uma resposta a esta questão alguns resultados técnicos são essenciais. Lembramos que sempre estamos considerando funções suaves, funções “boas” que possuem derivada em todo ponto do seu domínio. Consequentemente, funções contínuas cujos gráficos são curvas suaves sem bicos.

Começamos com o conhecido Teorema de Rolle, o qual afirma que para toda função suave num intervalo $[a, b]$ que assume o mesmo valor nos extremos do intervalo ($f(a) = f(b)$) deve ter pelo menos um ponto c no interior do intervalo ($c \in (a, b)$) onde a derivada é nula ($f'(c) = 0$). Fisicamente, o resultado significa que se um objeto em movimento retilíneo assume uma posição $s(a)$ num instante de tempo $t = a$ e num instante futuro $t = b$ está na mesma posição, isto é $s(a) = s(b)$, então deve ter existido pelo menos um instante intermediário $t = c$ onde a velocidade do objeto foi igual a zero (é necessário parar para poder retornar a posição inicial).

Representamos geometricamente esses três casos: se f é constante (Figura 1.31(a)), se $f(x) > f(a)$ para algum x em (a, b) (Figura 1.31(b)) e se $f(x) < f(a)$ para algum x em (a, b) (Figura 1.31(d)).

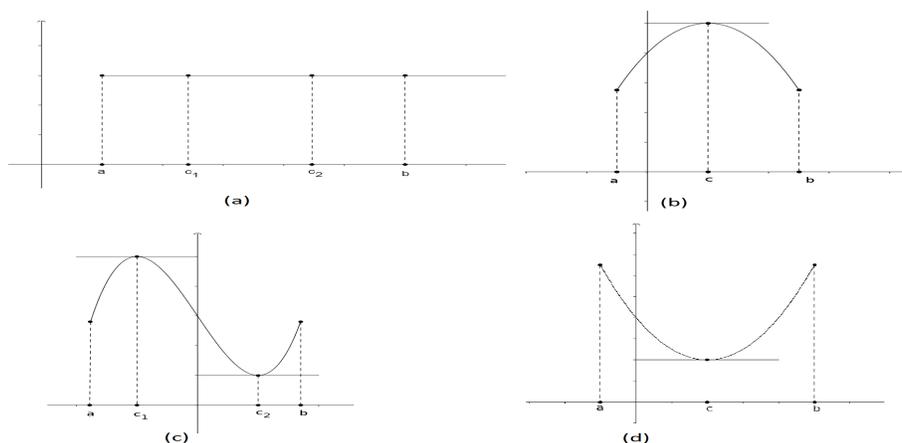


Figura 1.31:

Se f é constante, a derivada $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b) e o resultado é trivialmente satisfeito.

Suponhamos que $f(x) > f(a)$, para algum x em (a, b) . Pelo Teorema dos Valores Extremos, sabemos que f assume valor máximo global em algum ponto de $[a, b]$. Como $f(a) = f(b)$, este valor máximo deve ser assumido em um número c no intervalo aberto (a, b) . Pelo Teorema de Fermat, concluímos que $f'(c) = 0$.

Analogamente, supondo que $f(x) < f(a)$, para algum x em (a, b) , o valor mínimo de f em $[a, b]$ deverá ser assumido num ponto c no interior do intervalo, o que conclui a demonstração do Teorema de Rolle.

Uma consequência do Teorema de Rolle é o Teorema do Valor Médio. Este resultado técnico é um dos mais importantes da Matemática, onde reside a raiz de muitos outros. O Teorema do Valor Médio afirma que entre dois pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$ quaisquer do gráfico de uma função suave f , existe pelo menos um ponto onde a reta tangente ao gráfico de f é paralela à reta secante que passa por P e Q . Geometricamente, podemos exemplificar esse teorema pela Figura 1.32.

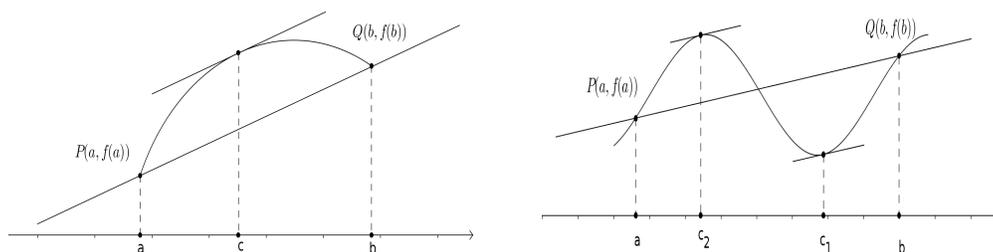


Figura 1.32:

Observe que inclinação m da reta secante que passa por P e Q é dada por:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

e, por outro lado, a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em c é a derivada de f neste ponto, ou seja, $f'(c)$. Desde que retas não verticais paralelas tem a mesma inclinação, o Teorema do Valor Médio pode ser reescrito da

seguinte forma: *Se $y = f(x)$ é uma função suave num intervalo $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto c no intervalo (a, b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1.34)$$

A interpretação física do Teorema do Valor Médio é bem interessante. Imagine que a função f descreve a posição de um objeto em movimento retilíneo. De (1.34) vemos que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

O primeiro membro da equação acima é a velocidade média do objeto no intervalo $[a, b]$ enquanto que o segundo membro é a velocidade instantânea em $t = c$. Assim, o Teorema do Valor Médio estabelece que pelo menos uma vez, durante esse intervalo de tempo, a velocidade instantânea deve ser igual à velocidade média. Exemplificando, se numa determinada viagem de carro, observou-se que num certo trecho a velocidade média foi 90 km/h, então em pelo menos um instante desse trecho o velocímetro deve ter assumido a velocidade de 90 km/h.

Assim se um motorista esta dirigindo em uma estrada reta com limite de velocidade de 80 km/h e as 8:05 da manhã, um controlador cronometra a velocidade do carro como sendo 75 km/h e, em 5 minutos depois, um segundo controlador, 10 km adiante na estrada, cronometra a velocidade do carro como sendo 80 km/h. Neste caso o motorista poderia receber uma multa por excesso de velocidade! De fato, sabemos que o motorista percorreu 10 km em 5 minutos (1/12 h), então sua velocidade média nesse período foi de 120 km/h. Pelo Teorema do Valor Médio em algum momento o motorista dirigiu a 120 km/h, logo poderia ser multado.

Além de interpretações geométricas e físicas, usando o Teorema do Valor Médio podemos também estabelecer condições suficientes para o crescimento e decrescimento de funções num intervalo.

Suponhamos que $y = f(x)$ seja uma função suave num intervalo $[a, b]$ com derivada positiva em (a, b) , isto é, $f'(x) > 0$, para todo $x \in (a, b)$, então dados dois pontos quaisquer $r < s$ em $[a, b]$ podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para a f no subintervalo $[r, s]$ e disto resulta que existe um ponto $c \in [r, s]$ tal que:

$$f(s) - f(r) = f'(c)(s - r) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(r) < f(s),$$

o que significa que f é crescente em $[a, b]$. De modo análogo, se a derivada de f for negativa no intervalo (a, b) , então teremos:

$$f(s) - f(r) = f'(c)(r - s) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(s) < f(r),$$

ou seja, f é decrescente em $[a, b]$. Por fim, se a derivada de f é nula em (a, b) , então

$$f(s) - f(r) = f'(c)(r - s) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(s) = f(r),$$

o que mostra que a função f é constante em $[a, b]$. Resumindo temos:

1. Se a derivada é positiva em um intervalo, então a função é crescente neste intervalo.
2. Se a derivada é negativa em um intervalo, então a função é decrescente neste intervalo.
3. Se a derivada é nula em um intervalo, então a função é constante neste intervalo.

O resultado acima sobre crescimento e decrescimento de funções é bastante útil para respondermos à questão posta no início desta seção sobre testar um ponto crítico de uma função. Já comentamos que no ponto crítico a derivada é zero. Imagine que numa vizinhança à esquerda do ponto crítico o sinal da derivada seja positivo e numa vizinhança à direita do ponto crítico a derivada seja negativa. Então vemos que na vizinhança à esquerda do ponto crítico a função é crescente e, depois de passar pelo ponto crítico, na vizinhança à direita do ponto crítico a função passa a ser decrescente. Logo o ponto crítico é ponto de máximo local. Veja a representação na Figura 1.33:

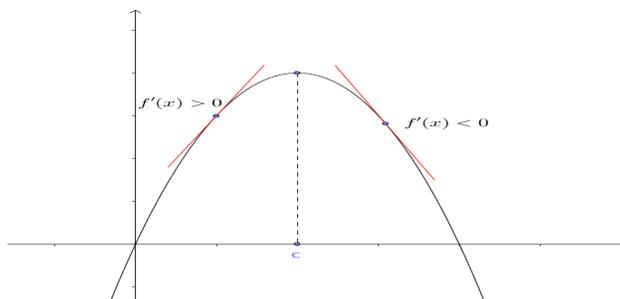


Figura 1.33:

Por outro lado, suponha que numa vizinhança à esquerda do ponto crítico o sinal da derivada seja negativo e numa vizinhança à direita do ponto crítico a derivada seja positiva. Então vemos que na vizinhança à esquerda do ponto crítico a função é decrescente e, depois de passar pelo ponto crítico, na vizinhança à direita do ponto crítico a função passa a ser crescente. Logo o ponto crítico é ponto de mínimo local. Veja um exemplo representado na Figura 1.34:

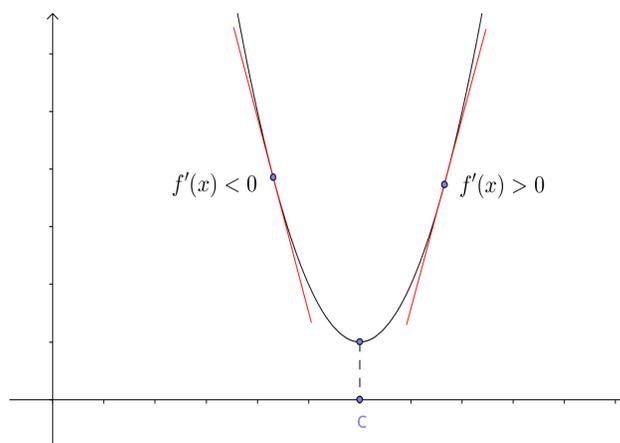


Figura 1.34:

Agora, se numa vizinhança à esquerda do ponto crítico o sinal da derivada é o mesmo que numa vizinhança à direita do ponto crítico, ou seja, se a derivada não troca de sinal ao passarmos pelo ponto crítico, então este ponto não é ponto de extremo local da função (não é ponto de máximo local e nem de mínimo local). Veja um exemplo representado na Figura 1.35:

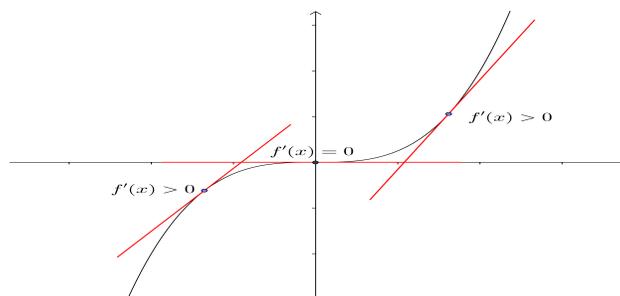


Figura 1.35:

De posse do Teste da Derivada Primeira, retornamos aos problemas de otimização da seção 1.6. e vamos resolvê-los.

Começaremos pelo problema 1. Mesmo tendo encontrado sua solução naquela seção, só o fizemos pois se tratava de uma função do segundo grau. Vamos resolvê-la agora usando o Teste da Derivada Primeira.

Como já sabemos, de (1.26), a área é dada por

$$A(x) = 50x - x^2$$

Desejamos determinar as dimensões do retângulo para que se tenha a maior área possível. Logo procuramos um valor para o qual a função $A(x)$ é máxima. Primeiramente, vamos determinar os valores de x para os quais a inclinação da reta tangente ao gráfico de $A(x)$ é nula. Para isso, vamos determinar a derivada da função $A(x)$, ou seja, $A'(x)$.

Como $A(x)$ é uma função do segundo grau, por (1.18), temos

$$A'(x) = -2x + 50$$

Igualando a zero segue que

$$-2x + 50 = 0 \Rightarrow x = 25.$$

Assim, $x = 25$ é o único ponto crítico de A . Para determinar se esse ponto crítico é um ponto de máximo ou mínimo, vamos aplicar o Teste da Derivada Primeira, fazendo o estudo do sinal de A' .

Intervalo	Sinal de $A'(x) = -2x + 50$	A
$x < 25$	+	crescente
$x > 25$	-	decrecente

Como em $x = 25$ o sinal de $A'(x)$ muda de + para -, concluímos que A assume um máximo local nesse ponto. Desde que temos um único ponto crítico, este será ponto de máximo global de A . Assim, as dimensões da horta de maior área é o quadrado de $25 m$ por $25 m$.

Considere agora o problema 2. Pela equação (1.29) temos que o custo de fabricação do container é

$$C(x) = 200x^2 + \frac{1800}{x}.$$

A solução do problema é encontrar o valor de x para o qual teremos o menor custo. Para tanto começamos determinando os pontos críticos da função C . Note que C pode ser considerada como a soma de duas funções, a considerar $C(x) = h(x) + g(x)$ sendo $h(x) = 200x^2$ e $g(x) = \frac{1800}{x}$. Não é difícil perceber que podemos calcular a derivada de cada função separadamente e somá-las, tendo então a derivada da função $C(x)$.

Assim, pela equação (1.18), temos que a derivada da função h é $h'(x) = 400x$. Agora levando em conta que $g(x) = \frac{1800}{x}$ e de posse da equação (1.22), temos que $g'(x) = -\frac{1800}{x^2}$. Logo,

$$C'(x) = 400x - \frac{1800}{x^2}.$$

Igualando $C'(x)$ a zero, temos

$$\begin{aligned} 400x - \frac{1800}{x^2} &= 0 \\ 400x &= \frac{1800}{x^2} \\ 400x^3 &= 1800 \\ x^3 &= \frac{1800}{400} \\ x &= \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \\ x &\cong 1,65, \end{aligned}$$

ou seja, existe um único ponto crítico de C que é $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cong 1,65$. Para verificarmos se $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ é um ponto de máximo ou mínimo de C , aplicamos o teste da derivada primeira. Na tabela apresentamos o estudo do sinal de C' .

Intervalo	Sinal de $C'(x) = 400x - \frac{1800}{x^2}$	C
$x < \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$	-	decrecente
$x > \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$	+	crescente

Concluimos então que ocorre um ponto de mínimo local de C em $x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$ e, observamos que existe um único ponto crítico. Assim, esse ponto também é

de mínimo global. Calculando y e z temos $y = 2\sqrt[3]{\frac{9}{2}} \cong 3,3$ e $z = \frac{40}{9}\sqrt[3]{\frac{9}{16}}m \cong 3,67m$.

Logo as dimensões do container com o menor custo de fabricação são $1,65m$, $3,30m$ e $3,67m$.

Retornemos agora ao problema 3. Novamente precisamos calcular os pontos críticos e encontrar o menor custo de fabricação das latas. Vimos que a equação que modela a área da superfície da lata é $A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$. Calculando a sua derivada, utilizando o mesmo argumento da derivada de uma soma conforme o problema 2 anterior, temos

$$A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2},$$

e igualando A' a zero, temos que

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,42,$$

é o ponto crítico de A .

Vamos verificar se este ponto crítico é ponto de mínimo local de A . Considere o estudo do sinal de A' dado pela tabela abaixo:

Intervalo	Sinal de $A'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$	A
$x < \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	-	decrecente
$x > \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	+	crescente

Portanto, o ponto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ é ponto de mínimo local. Da mesma forma, sendo único ponto crítico de A , temos que é ponto de mínimo global. Logo, como visto em (1.30), substituindo o valor de r , acima encontrado, temos $h = \frac{1000}{\pi(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}})^2} \cong 10,838$. Concluimos, então, que a base lata deve ser um círculo de raio $\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \cong 5,42cm$ e a altura deve ser $\frac{1000}{\pi(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}})^2} \cong 10,838cm$.

Observação 1.3. Antes de resolvermos o problema 4, vamos determinar a derivada de uma função do tipo $f(x) = \sqrt{a+x^2}$ para $a \in \mathbb{R}_+^*$. A taxa de variação média de f num intervalo $[x, x + \Delta x]$ é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} - \sqrt{a + x^2}}{\Delta x} \\
&= \frac{\Delta x}{\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} - \sqrt{a + x^2}} \cdot \frac{\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a + x^2}}{\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a + x^2}} \\
&= \frac{a + (x + \Delta x)^2 - (a + x^2)}{\Delta x(\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a + x^2})} \\
&= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x(\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a + x^2})} \\
&= \frac{2x + \Delta x}{\sqrt{a + (x + \Delta x)^2} + \sqrt{a + x^2}}.
\end{aligned}$$

Como desejamos $f'(x)$, ou seja, a taxa de variação instantânea, fazemos $\Delta x \rightarrow 0$, logo

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a + x^2}}. \quad (1.35)$$

Retornamos ao problema 4. Pelos cálculos feitos na seção (1.6), obtivemos

$$C(x) = 640 \left(\sqrt{500^2 + x^2} \right) + 312(2000 - x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2000.$$

De modo análogo a resolução do problema 2, vamos considerar $C(x) = h(x) + g(x)$, sendo $h(x) = 640 \left(\sqrt{500^2 + x^2} \right)$ e $g(x) = 312(2000 - x) = 624000 - 312x$.

Para obter $C'(x)$ vamos primeiramente determinar $h'(x)$ e $g'(x)$. Segue da equação (1.35) que

$$h'(x) = 640 \frac{x}{\sqrt{500^2 + x^2}} = \frac{640x}{\sqrt{500^2 + x^2}}.$$

De acordo com a equação (1.18),

$$g'(x) = -312.$$

De modo análogo aos problemas anteriores, segue que

$$C'(x) = \frac{640x}{\sqrt{500^2 + x^2}} - 312.$$

Para obter os pontos críticos de C , fazemos

$$\frac{640x}{\sqrt{500^2 + x^2}} - 312 = 0$$

$$640x = 312\sqrt{500^2 + x^2}$$

$$\frac{640}{312}x = \sqrt{500^2 + x^2} \Rightarrow \frac{80}{39}x = \sqrt{500^2 + x^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado

$$\frac{6400}{1521}x^2 = 500^2 + x^2,$$

donde

$$4879x^2 - 500^2 \cdot 1521 = 0$$

$$x^2 = 77936,052,$$

isto é,

$$x = \pm 279,17.$$

Devido ao domínio da função, o ponto crítico de C é $x = 279,17$. Vamos verificar se este ponto crítico é ponto de mínimo local de C . Considere o estudo do sinal de C' dado pela tabela abaixo:

Intervalo	sinal de $C'(x)$	C
$x < 279,19$	-	decrecente
$x > 279,19$	+	crecente

Assim, $x = 279,19$ é ponto de mínimo local de C . Da mesma forma, sendo único ponto crítico de C , temos que é ponto de mínimo global de C . Concluimos, então, que a forma mais econômica de se instalar a rede de água potável é construir, a partir de B, 279,19m da rede em terra e 500,28m da rede através do rio. Esse último valor podemos encontrar substituindo $x = 279,19$ usando a equação (1.32).

1.8 Linearização

Sem dúvida, dentre todas as funções, as funções lineares ou suas translações (funções afins) são as mais simples de serem estudadas. Qualquer cálculo relacionado à estas funções é trivial e imediato. As raízes, intervalos de crescimento e decrescimento, inclinação, o gráfico, taxas de variações, enfim, qualquer análise que se deseja fazer é tarefa muito fácil. Por outro lado, em contraste, o estudo de funções não lineares pode ser suficientemente complicado. Por esse motivo sempre que desejamos analisar um problema envolvendo uma função não linear, procuramos verificar, se de algum modo, esta função tem um comportamento próximo ao de alguma outra função linear. Este procedimento pode simplificar consideravelmente os cálculos envolvidos, bem como, tornar os “custos computacionais” bem mais baratos. A ideia central é substituir funções complicadas por funções mais simples.

Consideremos novamente uma função suave $y = f(x)$ e um ponto x_0 no seu domínio. Denotamos $P = (x_0, f(x_0))$ o ponto correspondente no gráfico da função f . Então se imaginarmos uma lupa focada neste ponto P , ou ainda ampliarmos suficientemente com zoom uma vizinhança de P , veremos que a porção de seu gráfico que foi ampliada terá a aparência de um segmento de reta, veja Figura 1.36.

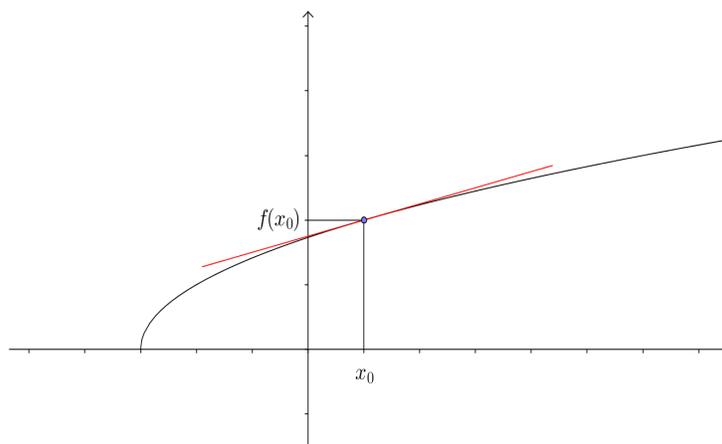


Figura 1.36:

Por essa razão, dizemos que toda função suave é **localmente linear** e podemos verificar que dentre a infinidade de retas que passam pelo ponto P a que melhor aproxima o gráfico de f numa vizinhança de $P(x_0, f(x_0))$ é a

reta tangente ao gráfico de f neste ponto. Observe a Figura 1.37.

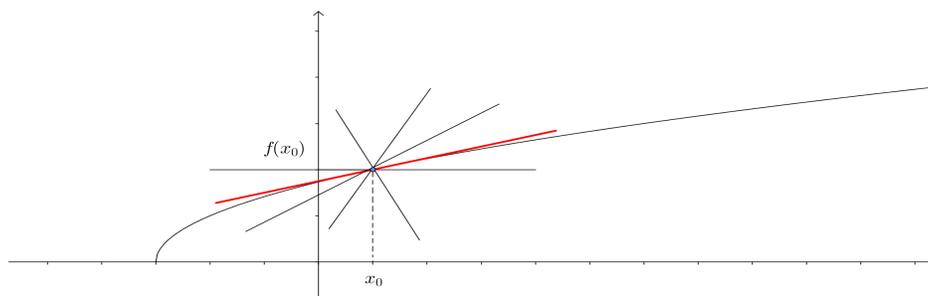


Figura 1.37:

Definindo a função afim

$$L_{x_0}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.36)$$

conforme vimos na seção 1.5, sobre retas tangentes, o gráfico da função L_{x_0} é a reta tangente ao gráfico de f no ponto P . Veja um exemplo representado na Figura 1.37. Logo é razoável a aproximação de f por L_{x_0} nas vizinhanças do ponto x_0 , ou seja, para todo ponto x próximo ao ponto x_0 podemos escrever

$$f(x) \cong L_{x_0}(x)$$

e a função afim em (1.36) é chamada de linearização da função f no ponto x_0 .

Ilustramos a equação (1.36) calculando a linearização da função $f(x) = \sqrt{x}$ em $a = 4$. Vamos usar a linearização para aproximar os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{98}$ e $\sqrt{4,01}$. Conforme vimos na equação (1.24), a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ é $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Assim, temos que $f(4) = 2$ e $f'(4) = \frac{1}{4}$. Colocando esses valores na equação (1.36), vemos que a linearização é

$$L_{x_0}(x) = f'(4)(x - 4) + f(4) = \frac{x}{4} + 1 \quad (1.37)$$

A aproximação linear correspondente é

$$\sqrt{x} \approx \frac{x}{4} + 1 \quad (\text{quando } x \text{ estiver próximo de } 4).$$

Em particular temos

$$\sqrt{3,98} \approx \frac{3,98}{4} + 1 = 1,995$$

$$\sqrt{4,01} \approx \frac{4,01}{4} + 1 = 2,0025.$$

O conceito de Integral

Diferentemente do conceito de derivada que se desenvolveu no século XVII, o conceito de integral tem raízes nos trabalhos de Arquimedes (287-212 a.C.) e está diretamente relacionado com a noção de área. Neste capítulo discutimos o conceito de integral começando pelo estudo do problema de como definir a área de uma região plana não regular. Na sequência tratamos do problema de como determinar a distância percorrida por um móvel, a partir de sua velocidade, em movimento retilíneo e também consideramos o problema de como definir a média de uma distribuição contínua de dados, ou seja, a média de uma infinidade de valores. Unificamos os raciocínios introduzindo os conceitos de somas de Riemann e da integral de uma função sobre um intervalo $[a, b]$. Volumes de sólidos e comprimentos de curvas também são estudados. Por fim mencionamos o Teorema Fundamental do Cálculo e a conexão entre os conceitos de derivada e integral.

2.1 Área

Desde a antiguidade o homem sentia necessidade de mensurar distâncias, superfícies, terrenos e etc. Ele já havia medido distâncias de várias formas: “até a cidade são três dias de caminhada (viagem)”, “ele cavalgou 20 léguas até aqui”, “a altura da montanha é 100 metros”. Esses são exemplos de distância, mas como medir, por exemplo, o “espaço” disponível para o pastoreio? o tamanho da superfície destinada a uma plantação? de modo genérico, **como medir uma quantidade de espaço bidimensional?**

O problema de como definir a área de uma figura plana ou o volume de um sólido foi uma das questões centrais da matemática na Grécia antiga. Arquimedes, o mais eminente matemático da antiguidade, ocupou-se

intensamente desse problema, calculando áreas e volumes de diversas figuras geométricas. Para isto usava a priori muitos argumentos puramente intuitivos, sem qualquer rigor para depois das descobertas construir demonstrações precisas. Em geral, o início dos estudos sobre o cálculo de áreas se deu com a determinação da área do quadrado, tomada como fundamental. Em seguida, veio a definição da área de retângulos, calculada em termos da área de quadrados. Do mesmo modo, considerou-se paralelogramos, triângulos e assim por diante. Dessa forma, as noções primitivas de área já possuíam fórmulas para o cálculo da área de um polígono regular qualquer. O princípio era sempre reduzi-lo a soma de áreas de triângulos.

Depois das figuras poligonais, o desafio foi definir a área de arcos e círculos. Para tanto Arquimedes usou inicialmente da intuição. Ele percebeu que a área de um círculo pode ser dada pelo método de dissecção: dado um círculo de raio r é possível dividi-lo em setores.(Figura 2.1)

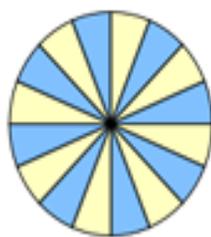


Figura 2.1: Círculo de raio r

Cada setor tem forma aproximadamente triangular, e os setores podem ser rearranjados para formar uma figura próxima do paralelogramo (veja Figura 2.2), cuja altura é r e o comprimento da base é metade do comprimento da circunferência (πr).

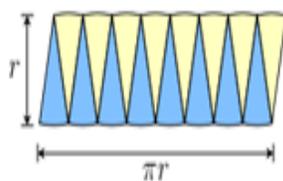


Figura 2.2:

Observamos que quanto maior for o número de setores mais próximo a

figura arranjada fica do paralelogramo. Assim é razoável definir a área do círculo A_c com sendo a área do referido paralelogramo, isto é,

$$A_c = \pi r \cdot r = \pi r^2. \quad (2.1)$$

Posteriormente, Arquimedes demonstrou a equação (2.1) usando o método da exaustão. Tal método consiste na inscrição de uma sucessão de polígonos regulares no círculo, permitindo que o número de lados do polígono cresça indefinidamente.

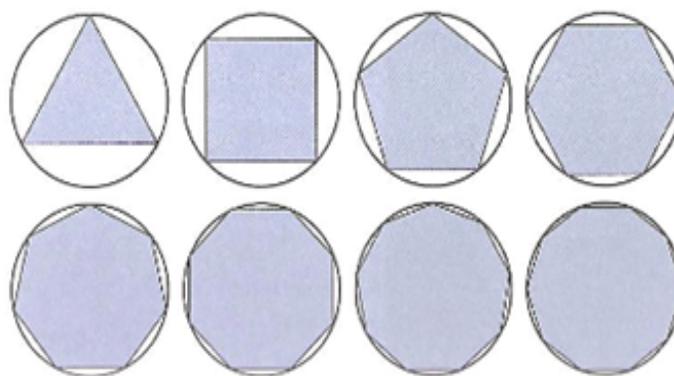


Figura 2.3:

À medida que cresce o número de lados, os polígonos tendem a “exaurir” a região do círculo e suas áreas se aproximam cada vez mais do valor πr^2 . Esse método foi atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.) e melhorado por Arquimedes.

Como os matemáticos gregos suspeitavam muito do conceito de infinito, eles evitavam seu uso em argumentos matemáticos. Desse modo o cálculo de áreas pelo método da exaustão era um procedimento muito complicado. Acabou ficando para Newton e Leibniz, já no século XVII, a descoberta de um método geral de obtenção de áreas que utilizasse explicitamente a noção de limite.

Sabendo como calcular a área de polígonos regulares ou não regulares e a fórmula para calcular a área de círculos, é possível estendermos a noção de área para regiões mais gerais. Basta subdividi-la em áreas menores nos formatos de triângulos, retângulos, círculos e semicírculos. Porém nem sempre a região da qual se deseja definir a área tem essa propriedade de subdivisão exata. Por exemplo, como determinar a área da região do mapa que

representa a cidade de Maringá ? Se observarmos o mapa na Figura 2.4 percebemos que não é possível a subdivisão exata.



Figura 2.4: Mapa de Maringá

O mesmo problema ocorre na Figura 2.5. Ela representa a planta de um espaço de lazer. Como determinar a área de grama que será plantada e a área de piso que será colocada?

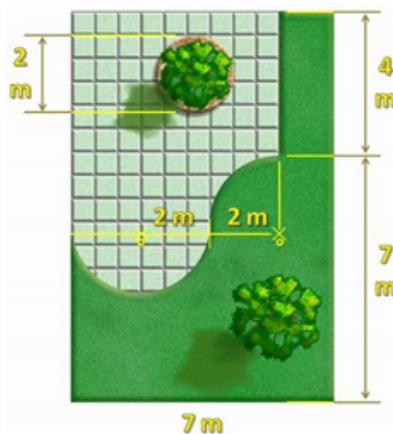


Figura 2.5:

Para responder questões como essas consideramos valores aproximados de área. Dissecamos a figura original em retângulos, triângulos, arcos e calculamos a área dessa nova figura. Procuramos o melhor ajuste possível. A área dessa nova figura poderá ser maior ou menor que a original. Seu valor é considerado aproximadamente a área da figura desejada. Hoje já existem aparelhos tecnológicos muito avançados que conseguem valores extremamente precisos para as áreas. Eles conseguem calcular a área que representa a

cidade de Maringá no mapa e ainda a área da própria cidade (estimada em $487,9Km^2$).

Com o objetivo de introduzirmos uma definição para áreas de regiões planas, consideraremos regiões no plano cartesiano delimitadas por gráficos de funções. Seja $y = f(x)$ uma função contínua e positiva definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. O problema é: **como definir a área da região S delimitada pelo gráfico de f , pelas retas $x = a$, $x = b$ e o eixo x ?**

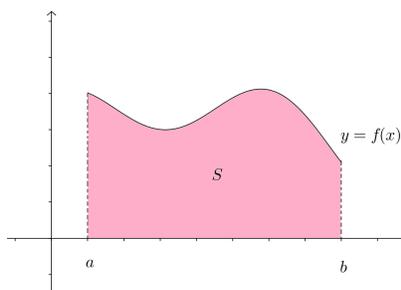


Figura 2.6:

Se f é uma função constante ou afim seu gráfico é um segmento de reta e conseqüentemente a região S terá o formato de um triângulo, de um retângulo ou até mesmo de um trapézio. Considere, por exemplo, a função $f(x) = 2x + 4$. Vamos determinar a área da região S_1 sob o gráfico de f no intervalo $[-1, 3]$. Geometricamente podemos representar S_1 como na Figura 2.7.

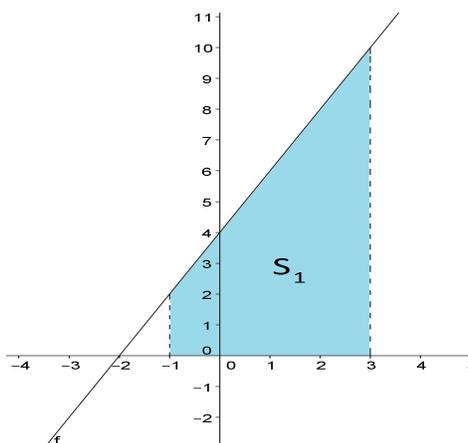


Figura 2.7:

O formato de S_1 é de um trapézio cuja medida da base maior $f(3) = 10$, da base menor é $f(-1) = 2$ e a altura é $\Delta x = 3 - (-1) = 4$.

Assim a área de S_1 é dada por

$$A_{S_1} = \frac{(10 + 2) \cdot 4}{2} = 24 \text{ u.a.}$$

Nesses casos, a área esta bem definida e seu cálculo é completamente conhecido, desde a antiguidade. Entretanto, para imensa maioria das funções a região S terá a parte superior de sua fronteira com um formato curvo.

Uma abordagem para resolver o problema da definição da área de regiões dessa forma é a utilização do método da exaustão de Arquimedes. A ideia é construir uma sequência de regiões S_n , para as quais sabemos calcular a área, de modo que à medida que n aumenta a região S_n fica cada vez mais próxima da região S . Nestes termos será razoável definir a área da região S como sendo o número real A para o qual as áreas de S_n , denotadas por A_n , se aproximam à medida em que n cresce indefinidamente.

Por simplicidade escolhemos as regiões S_n como sendo a reunião de n retângulos, construídos da seguinte forma:

1. Para cada número natural n , dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de mesma amplitude $\Delta x = \frac{(b - a)}{n}$. Denotamos esses n subintervalos por $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, \dots , $[x_{n-1}, x_n]$, onde:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= x_0 + \Delta x, \\ x_2 &= x_1 + \Delta x = x_0 + 2\Delta x, \\ x_3 &= x_2 + \Delta x = x_0 + 3\Delta x, \\ \dots &\quad \dots \quad \dots \\ x_n &= x_{n-1} + \Delta x = x_0 + n \Delta x = b. \end{aligned}$$

A Figura 2.8 representa tal divisão.

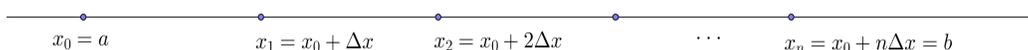


Figura 2.8:

2. Em cada um dos n subintervalos construa um retângulo \mathfrak{R}_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, com largura Δx , que se estende desde o eixo x até algum ponto da curva (gráfico de f), acima do subintervalo. Logo a altura de \mathfrak{R}_i é $f(x_i^*)$ para algum ponto $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ arbitrariamente fixado. Veja Figura 2.9.

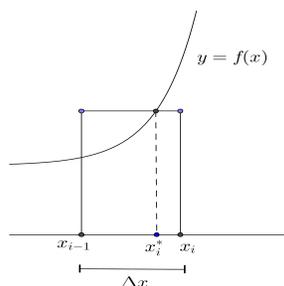


Figura 2.9:

Consequentemente, a área do i -ésimo retângulo \mathfrak{R}_i é dada por $[f(x_i^*) \cdot \Delta x]$.

Uma vez construído os n retângulos, considere S_n a união destes e A_n a área de S_n , isto é:

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}_i,$$

e

$$\begin{aligned} A_n &= f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \end{aligned}$$

Intuitivamente, observamos que quanto maior o número n , mais a região S_n se aproxima do formato da região S , pois a “sobra” entre essas regiões é cada vez menor. É razoável pensarmos que os valores obtidos para as áreas de S_n estejam cada vez mais próximos de um número, a medida em que n cresce indefinidamente.

Logo **definimos a área da região S como sendo o número real A para o qual as áreas A_n se aproximam, à medida em que n , o**

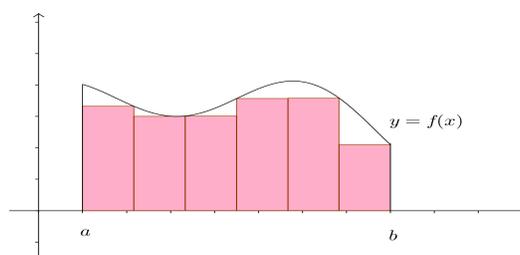


Figura 2.10:

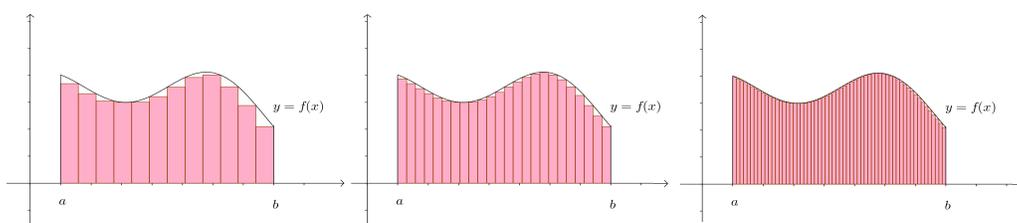


Figura 2.11:

número de divisões do intervalo $[a, b]$, cresce arbitrariamente. Uma notação apropriada é:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \quad (2.2)$$

que se lê “a área A é igual ao limite das áreas A_n quando n tende ao infinito”.

Ilustramos a definição (2.2) para a região S sob a parábola $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 3$. Veja figura 2.12.

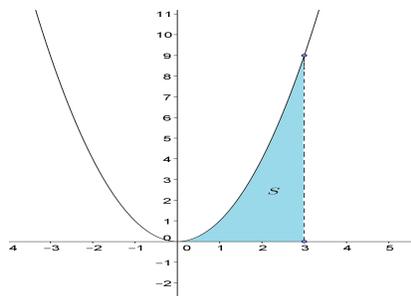


Figura 2.12:

Começamos por estimar a área da região S sob o gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 3]$.

Estimativa 1. Dividimos o intervalo $[0, 3]$ em três subintervalos, ou seja, $\Delta x = 1$. Em cada subintervalo vamos considerar o retângulo R_i de altura $f(x_i^*)$, sendo x_i^* o extremo direito do intervalo e $1 \leq i \leq n$. Chamaremos de S_3 a região formada pela união dos três retângulos. Assim,

$[x_{i-1}, x_i]$	$x_i^* = x_i$	$f(x_i^*)$	área de $R_i = f(x_i^*) \cdot \Delta x$
$[0, 1]$	1	1	1
$[1, 2]$	2	4	4
$[2, 3]$	3	9	9

A soma das áreas dos três retângulos é $A_3 = 9 + 4 + 1 = 14 u.a.$. Veja Figura 2.13.

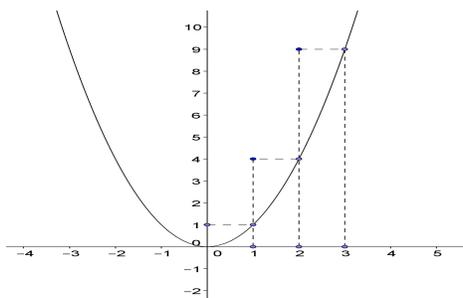


Figura 2.13:

Estimativa 2. Dividindo agora o intervalo em seis subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,5$. (Veja Figura 2.14). Assim, segue a tabela abaixo.

$[x_{i-1}, x_i]$	$x_i^* = x_i$	$f(x_i^*)$	área de $R_i = f(x_i^*) \cdot \Delta x$
$[0; 0,5]$	0,5	0,25	0,125
$[0,5; 1]$	1	1	0,5
$[1; 1,5]$	1,5	2,25	1,125
$[1,5; 2]$	2	4	2
$[2; 2,5]$	2,5	6,25	3,125
$[2,5; 3]$	3	9	4,5

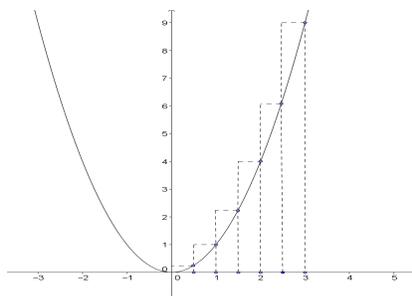


Figura 2.14:

A soma das áreas dos seis retângulos, região S_6 , é $A_6 = 11,375 \text{ u.a.}$

Como já observado, quanto mais subintervalos tomarmos, mais a área A_n , soma das áreas, dos retângulos, se aproxima da área da região S . Vamos acelerar o processo e calcular a área para $n = 15$, $n = 30$ e $n = 100$, respectivamente, representadas na Figura 2.15 (a), (b) e (c). Temos que $A_{15} = 9,92 \text{ u.a.}$, $A_{30} = 9,45 \text{ u.a.}$ e $A_{100} = 9,14 \text{ u.a.}$

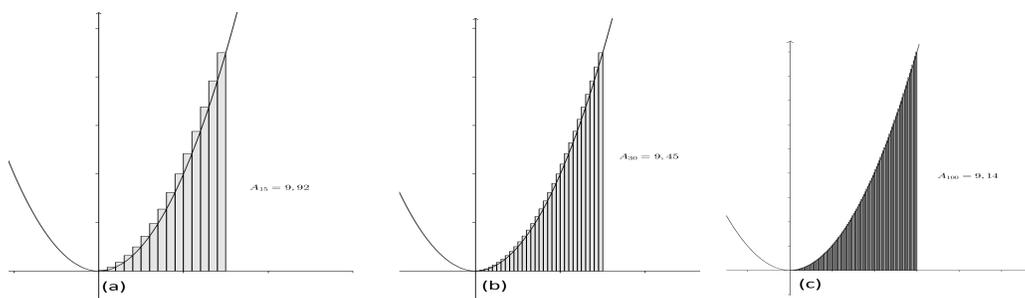


Figura 2.15:

Fizemos isso com o auxílio de um software livre, muito usual e didático, chamado Geogebra. Para baixá-lo acesse www.geogebra.org. Explorando essa ferramenta, observamos que quanto maior for o número n de subintervalos mais os valores de A_n se aproximam de 9 e mais a região S_n se aproxima de S . Logo é razoável considerarmos que a área da região S sob a parábola $y = x^2$ de $x = 0$ até $x = 3$ é 9 u.a.

De modo análogo, podemos ampliar a definição de área para regiões com fronteira totalmente curva, especificamente, regiões S compreendida entre os gráficos de duas funções. Suponha que f e g sejam duas funções definidas e contínuas em um intervalo $[a, b]$ tais que $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$.

Isso significa que o gráfico da função f está acima do gráfico da função g , em todos os pontos do intervalo. Os dois gráficos podem até se tocar, mas não invertem a posição (de cima e de baixo). Seja S é a região do plano delimitada acima pelo gráfico de f , abaixo pelo gráfico de g , e nas laterais pelas retas $x = a$ e $x = b$. O problema é: **como definir a área A da região S ?** (veja Figura 2.16)

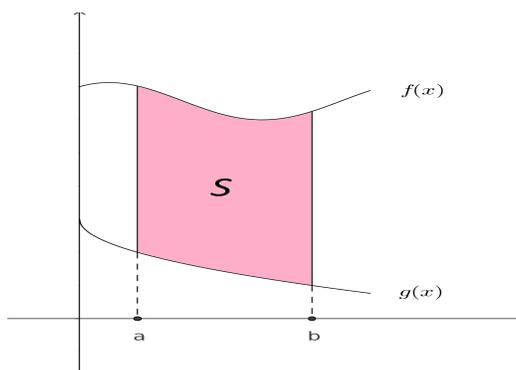


Figura 2.16:

Para responder esse questionamento usamos o mesmo raciocínio anterior. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais de amplitude $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada um dos n subintervalos construa um retângulo \mathfrak{R}_i , para $i = 1, 2, \dots, n$, com largura Δx , que se estende desde algum ponto do gráfico da função g , da forma $(x_i, g(x_i^*))$ para algum $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ fixado arbitrariamente, até o ponto $(x_i, f(x_i^*))$ no gráfico da função f . Consequentemente a área do i -ésimo retângulo \mathfrak{R}_i é dada por $\{ [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \cdot \Delta x \}$. (veja Figura 2.17)

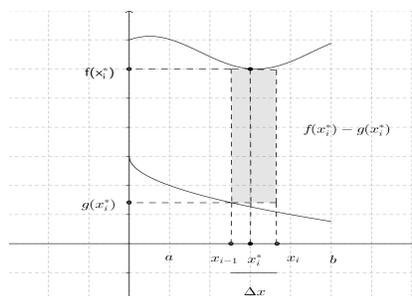


Figura 2.17:

Agora colocamos

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{R}_i.$$

e

$$\begin{aligned} A_n &= [f(x_1^*) - g(x_1^*)]\Delta x + [f(x_2^*) - g(x_2^*)]\Delta x + \cdots + [f(x_n^*) - g(x_n^*)]\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x. \end{aligned}$$

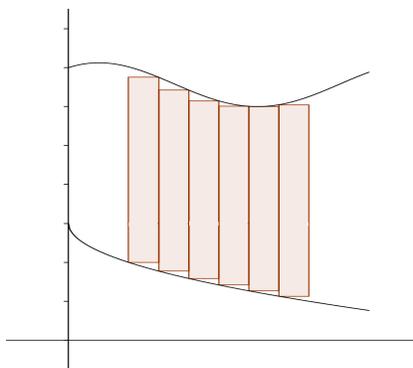


Figura 2.18:

Notamos, intuitivamente, que quanto maior o número n de subintervalos, mais a região S_n se aproxima da região S . Também é razoável admitir que à medida em que o número n aumenta, as áreas A_n tendem para um valor. Logo definimos a área da região S , entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, como sendo o número A para o qual se aproxima os números A_n , quando n cresce indefinidamente, ou seja,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)] \right) \Delta x. \quad (2.3)$$

Ilustramos a equação (2.3), obtendo a área da região S entre os gráficos das funções $f(x) = 3x + 4$, $g(x) = x^2$ e pelas retas $x = 1$ e $x = 4$. A Figura 2.19 ilustra a região S .

Representando a região S temos a figura 2.19.

Vamos estimar a área da região S considerando várias subdivisões do intervalo $[1, 4]$.

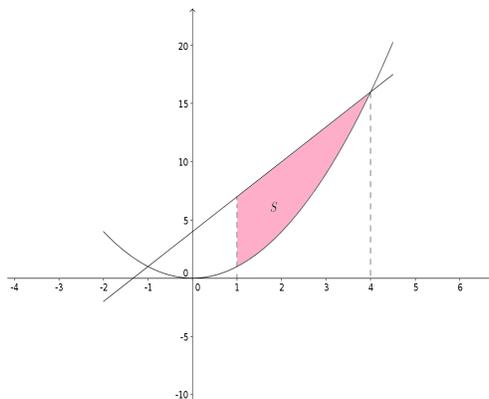


Figura 2.19:

Estimativa 1. Dividimos o intervalo $[1, 4]$ em três subintervalos, ou seja, $\Delta x = 1$. Em cada subintervalo vamos considerar o retângulo de altura $[f(x_i^*) - g(x_i^*)]$ sendo x_i^* o ponto médio do intervalo. A região formada pela união de três retângulos será chamada de S_3 . A Figura 2.20 mostra um esboço de S_3 .

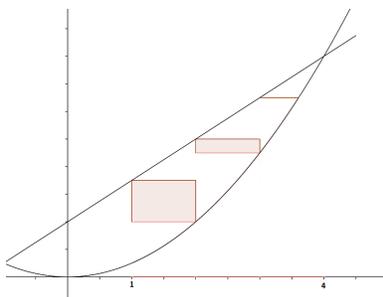


Figura 2.20:

A tabela abaixo corresponde ao cálculo da área de cada retângulo.

$[x_{i-1}, x_i]$	x_i^*	$f(x_i^*)$	$g(x_i^*)$	área de $R_i = [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \cdot \Delta x$
$[1; 2]$	1,5	8,5	2,25	6,25
$[2; 3]$	2,5	11,5	6,25	5,25
$[3; 4]$	3,5	14,5	12,25	2,25

Assim, a soma das áreas dos três retângulos é $A_3 = 13,75 \text{ u.a.}$

Estimativa 2. Dividimos agora o intervalo $[1, 4]$ em seis subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,5$, veja Figura 2.21, de modo análogo ao anterior, consideramos seis retângulos.

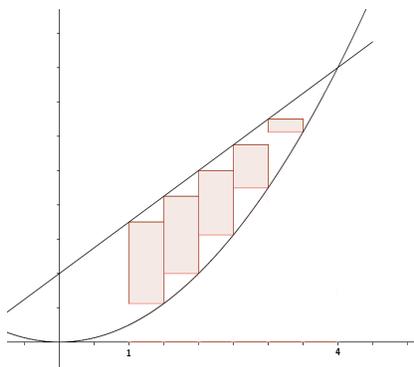


Figura 2.21:

A tabela abaixo corresponde ao cálculo da área de cada retângulo.

$[x_{i-1}, x_i]$	x_i^*	$f(x_i^*)$	$g(x_i^*)$	área de $R_i = [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \cdot \Delta x$
$[1; 1,5]$	1,25	7,75	1,5625	3,09375
$[1,5; 2]$	1,75	9,25	3,0625	3,09375
$[2; 2,5]$	2,25	10,75	5,0625	2,84375
$[2,5; 3]$	2,75	12,25	7,5625	2,34375
$[3; 3,5]$	3,25	13,75	10,5625	1,59375
$[3,5; 4]$	3,75	15,25	14,0625	0,59375

A soma das áreas dos seis retângulos é $A_6 = 13,5625 u.a.$.

Com o uso do Geogebra, veja a Figura 2.22, podemos obter outras estimativas para a área dividindo o subintervalo em mais retângulos. Assim: $A_{12} = 10,47 u.a.$, $A_{60} = 12,9 u.a.$, $A_{100} = 13,4 u.a.$ e $A_{500} = 13,42 u.a.$

Novamente, é razoável considerarmos que a área da região S é o valor para o qual se aproximam as áreas A_n quanto maior for o número de subintervalos admitidos. Assim, estimamos que a área da região S do exemplo equivale a $13,5 u.a.$.

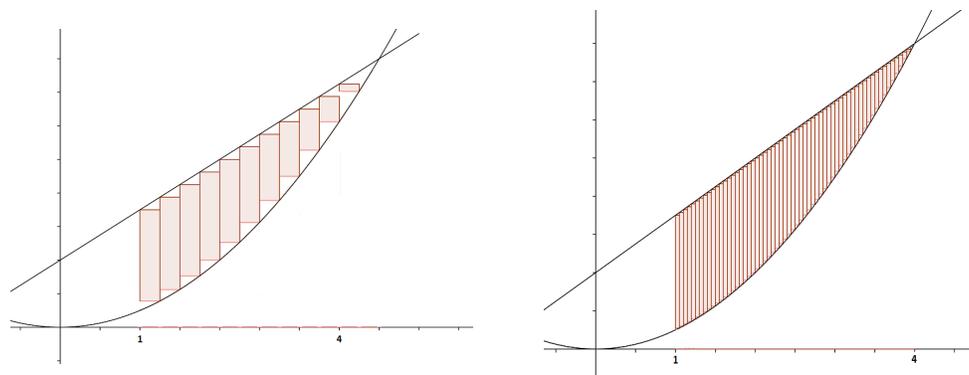


Figura 2.22:

2.2 Distância Percorrida

No capítulo anterior vimos que conhecendo-se a posição de um objeto, conseqüentemente a distância percorrida, é possível determinar sua velocidade, que é a taxa de variação instantânea da posição em relação ao tempo, que denominamos a derivada. Desta forma, a derivada da função posição é a velocidade. Por outro lado é possível fazer o caminho contrário? **Se conhecemos a velocidade de um objeto é possível encontrar a distância percorrida?** Suponhamos que conhecemos a velocidade de um objeto que se move em linha reta (movimento retilíneo), então dado um intervalo de tempo $a \leq t \leq b$, é possível determinar qual foi a distância percorrida pelo objeto durante este intervalo de tempo?

Uma situação concreta sobre este tipo de problema aparece, por exemplo, na aviação quando é necessário determinar a posição e a velocidade de uma aeronave a partir do conhecimento da sua aceleração. Durante a viagem de uma aeronave, dos Estados Unidos para a Europa, a tripulação deve conhecer sua posição com precisão em todos os instantes, uma vez que essa rota aérea é bem congestionada. Porém sobre o oceano, em geral, a aeronave fica fora do alcance dos radiofaróis de terra ou do radar das torres de controle do tráfego aéreo. Neste caso para determinar a posição da aeronave, os pilotos usam um instrumento conhecido pela sigla INS (*inertial navigation system que em português significa sistema de navegação inercial*) que mede a aceleração da aeronave. Conhecendo essa informação, juntamente com a da posição inicial, o INS calcula e indica no mostrador para a tripulação a velocidade e a posição da aeronave em cada instante durante o vôo.

Voltamos então à questão central desta seção. Conhecendo-se a velocidade de um carro, em movimento retilíneo, durante um intervalo de tempo de 30 segundos, é possível determinar qual foi sua distância percorrida? Para responder essa questão, iniciamos fazendo estimativas desta distância percorrida. Para tal, a cada 5 segundos registramos na tabela abaixo a leitura do velocímetro:

t	$\mathcal{V}(t), (Km/h)$	$\mathcal{V}(t), (m/s)$
0	72	20
5	100,8	28
10	104,4	29
15	75,6	21
20	43,2	12
25	39,6	11
30	93,6	26

Apresentamos, por exemplo, três possíveis estimativas:

Estimativa 1. É claro que no intervalo de tempo de 0 até 5 segundos a velocidade pode ter mudado muitas vezes, saindo do valor $20 m/s$, no instante $t = 0$ e chegando ao final do intervalo com o valor de $28 m/s$. Entretanto, podemos fazer uma aproximação da realidade, por meio de uma simplificação, **supondo que durante todo o intervalo de tempo de 0 até 5 segundos o carro esteve com a velocidade constante de $20 m/s$** , fato este que resultaria numa distância percorrida de $20 \cdot (5) = 100 m$. Da mesma forma, suponhamos que durante todo o intervalo de tempo de 5 até 10 segundos, o carro esteve a uma velocidade constante igual a $28 m/s$, o que implicaria numa distância percorrida de $28 \cdot (5) = 140 m$. Procedemos de forma análoga com os demais intervalos, sempre considerando que em cada um dos intervalos de 5 segundos a velocidade tenha sido constante e igual velocidade a do início do intervalo. Isto resultaria numa distância total percorrida de

$$20 \cdot 5 + 28 \cdot 5 + 29 \cdot 5 + 21 \cdot 5 \\ + 12 \cdot 5 + 11 \cdot 5 = 605 m.$$

Portanto estimamos que a distância total percorrida pelo carro, durante o intervalo de tempo de 0 a 30 segundos, seja $605 m$.

Estimativa 2. Podemos também obter uma outra estimativa para a distância percorrida pelo carro se considerarmos que em cada um dos intervalos de 5 segundos a velocidade tenha sido constante e igual a velocidade do final de cada intervalo. Assim, a distância total percorrida pelo carro ficaria estimada em

$$\begin{aligned} & 28 \cdot 5 + 29 \cdot 5 + 21 \cdot 5 \\ & + 12 \cdot 5 + 11 \cdot 5 + 26 \cdot 5 = 635 \text{ m.} \end{aligned}$$

Estimativa 3. Por fim, observamos que podemos obter uma estimativa ainda melhor, considerando que em cada um dos intervalos de 5 segundos a velocidade tenha sido constante e igual a média aritmética entre as velocidades dos extremos de cada intervalo. Assim, a estimativa da distância total percorrida pelo carro seria dada por

$$\begin{aligned} & \left(\frac{20 + 28}{2}\right) \cdot 5 + \left(\frac{28 + 29}{2}\right) \cdot 5 + \left(\frac{29 + 21}{2}\right) \cdot 5 \\ & \left(\frac{21 + 12}{2}\right) \cdot 5 + \left(\frac{12 + 11}{2}\right) \cdot 5 \\ & + \left(\frac{11 + 26}{2}\right) \cdot 5 = 617,5 \text{ m.} \end{aligned}$$

Um fato muito importante é notar que **a estimativa da distância percorrida seria ainda mais precisa se tivéssemos informações sobre a velocidade em intervalos de tempo menores do que 5 segundos.** Por exemplo, se as velocidades tivessem sido tomadas em intervalos de 2 segundos, supor velocidade constante nestes intervalos de 2 segundos, com toda certeza, estaríamos mais próximos da realidade do que tê-la admitida constante em intervalos de 5 segundos. Isto porque em intervalos de tempos menores as possíveis variações devem ser também menores.

Note que os cálculos aqui realizados são idênticos aos que fizemos na seção (2.1) para estimar a área abaixo de uma curva. De fato, consideremos hipoteticamente o gráfico da velocidade (em m/s) em função do tempo (em s), $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$. Dividimos o intervalo $[0, 30]$ em seis subintervalos ($n = 6$) de comprimento $\Delta t = 5$. De acordo com a primeira estimativa, em cada um dos seis subintervalos construímos um retângulo de base medindo $\Delta t = 5$ e altura igual a velocidade no início do intervalo de tempo. Geometricamente, temos a Figura 2.23.

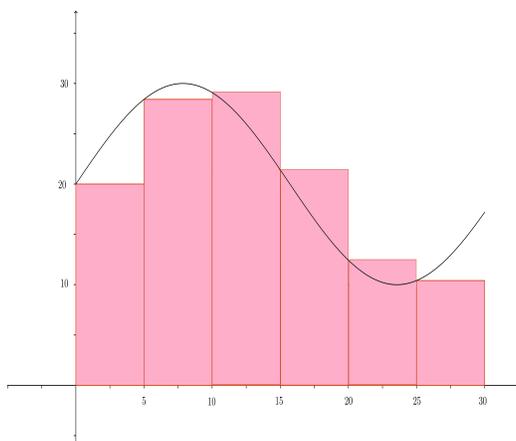


Figura 2.23:

O primeiro retângulo, correspondente ao de base no intervalo $[0, 5]$, tem área igual a $\mathcal{V}(t_0) \cdot 5 = (20) \cdot 5 = 100$, que coincide a aproximação da distância percorrida no primeiro intervalo de tempo, calculada na estimativa 1. O segundo retângulo, que tem como base o intervalo $[5, 10]$, tem área $\mathcal{V}(t_1) \cdot 5 = (28) \cdot 5 = 140$. O mesmo se verifica para todos os demais retângulos. Assim, a área de cada retângulo pode ser interpretada como uma aproximação para a distância percorrida em cada subintervalo de tempo, quando supomos que a velocidade se comporta como na estimativa 1. Desse modo concluímos que a estimativa da distância total percorrida, dada pela estimativa 1, coincide com a soma das áreas dos retângulos assim construídos. Da mesma forma as outras duas estimativas obtidas (estimativa 2 e 3) coincidem com a soma das áreas dos retângulos construídos tomando-se respectivamente como a altura do retângulo a velocidade do final do intervalo e a média das velocidades nos extremos dos intervalos. Geometricamente, podemos ilustrar a estimativa 2 com a Figura 2.24.

Como anteriormente observado, temos também que as estimativas para a distância percorrida ficam cada vez mais próximas do valor exato, quanto menores forem os intervalos de tempo considerados. Logo é razoável concluirmos que **a distância exata percorrida pelo carro é o valor para o qual estão se aproximando as distâncias estimadas em intervalos de tempo cada vez menores**, equivalentemente, o número n de divisões do intervalo aumenta indefinidamente. Denotando por D_n a distância estimada para uma divisão do intervalo em n partes iguais de tamanho $\Delta t = 30/n$,

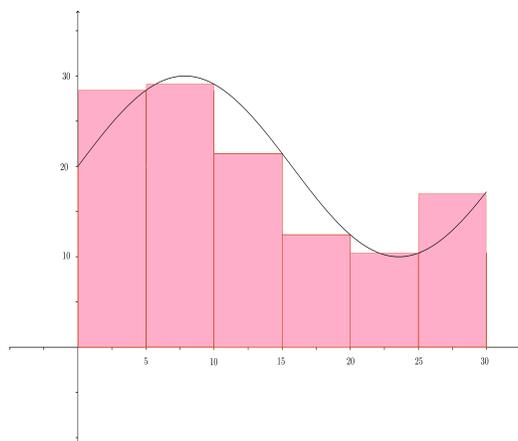


Figura 2.24:

escrevemos

$$\text{Distância exata} = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n. \quad (2.4)$$

Desde que as distâncias estimadas coincidem com a soma das áreas dos retângulos construídos, ou seja, $D_n = A_n$, concluímos que, no movimento retilíneo, **a área abaixo do gráfico da função velocidade é igual a distância exata percorrida pelo carro.**

Em geral, suponha que um objeto em movimento retilíneo, possua velocidade positiva $y = v(t)$, para $a \leq t \leq b$. Para cada número natural n , dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de igual amplitude $\Delta t = (b - a)/n$ denotados por $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$. Em um certo instante, arbitrariamente fixado, $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$ de cada subintervalo, registramos a velocidade $v(t_i^*)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na sequência fazemos a hipótese de simplificação: **durante todo o intervalo de tempo $[t_{i-1}, t_i]$ a velocidade foi constante igual ao valor registrado $v(t_i^*)$.** Desse modo a distância percorrida durante o intervalo $[a, b]$ pode ser estimada pela soma das distâncias percorridas em cada subintervalo, ou seja,

$$D_n = v(t_1^*)\Delta t + v(t_2^*)\Delta t + \dots + v(t_n^*)\Delta t = \sum_{i=1}^n v(t_i^*)\Delta t.$$

Quanto mais frequentemente medirmos a velocidade, ou seja, quanto mais subdividirmos o intervalo de tempo $[a, b]$, mais precisa será a estimativa D_n . Logo podemos definir a distância percorrida pelo móvel no intervalo de tempo

$[a, b]$ como o limite das distâncias estimadas D_n quando $n \rightarrow \infty$, valor este que coincide com a área A da região sob gráfico da função velocidade, no intervalo $[a, b]$. Portanto escrevemos:

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} [v(t_1^*)\Delta t + v(t_2^*)\Delta t + \cdots + v(t_n^*)\Delta t] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n v(t_i^*)\Delta t \right] = A. \end{aligned}$$

Vamos aplicar tal resultado no exemplo a seguir. Considere o gráfico da Figura 2.25, que representa a a velocidade da motocicleta de um policial em função do tempo.

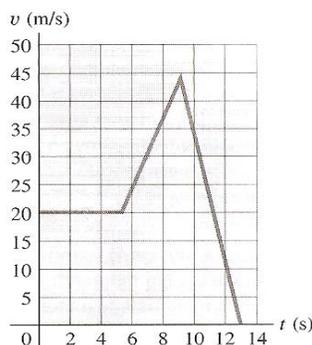


Figura 2.25:

De acordo com esses dados, qual foi o deslocamento do policial nos 5 segundos iniciais? E nos 9 segundos iniciais? E nos 13 iniciais?

Note que nos 5 segundos iniciais a velocidade do policial é constante e igual a 20m/s . Se temos 20m deslocados a cada segundo, ao final de 5 segundos o deslocamento do policial foi de 100m .

Nos primeiros 9 segundos a velocidade não é constante. Como calcular então o deslocamento do policial nesse intervalo? O deslocamento nos primeiros 9 segundos pode ser dado pela soma entre os deslocamentos no período de $[0, 5]$ e o de $[5, 9]$. Abaixo da função $y = \mathcal{V}(t)$ no intervalo $[0, 5]$ temos um retângulo de área 100, enquanto que no intervalo $[5, 9]$ temos uma região na forma de um trapézio de base maior 45, base menor 20 e altura 4 cuja área é $\frac{(45 + 20)4}{2} = 130$. Portanto o deslocamento nos 9 primeiros segundos é de $100 + 130 = 230\text{m}$.

Para determinar o deslocamento dos 13 primeiros segundos falta-nos apenas calcular o deslocamento no intervalo $[9, 13]$. Nesse intervalo, abaixo da função $y = \mathcal{V}(t)$, tem-se uma região na forma de um triângulo de base 3 e altura 45 cuja área é $\frac{(3 \cdot 45)}{2} = 67,5$. Logo, o deslocamento no intervalo $[9, 13]$ é de $67,5m$. Portanto o deslocamento nos 13 primeiros segundos é de $100 + 130 + 67,5 = 297,5m$.

Note que neste exemplo a distância percorrida está relacionada a um móvel cujo gráfico de velocidade tem formato poligonal, logo não tivemos dificuldade em calcular a área da região abaixo da função. Caso o gráfico da função velocidade fosse uma curva, para calcular a distância percorrida, deveríamos utilizar os procedimentos da seção (2.1).

2.3 Média de uma distribuição contínua

Desde cedo uma criança já está em contato com o termo média. Em geral, nas escolas, elas ouvem frequentemente que “para passar para a próxima série suas notas devem estar acima da média”. Um comerciante de produtos perecíveis, por exemplo, organiza seu estoque com base na média de vendas de seu produto, considerando a média da semana, do mês ou até mesmo da estação do ano. Ao planejar uma viagem, em geral, estima-se o tempo de viagem considerando a distância percorrida e a velocidade que em média pretende-se empregar. Enfim, média é uma noção cotidiana. Apesar de existirem diversos tipos de médias, como por exemplo, média simples, aritmética, geométrica, harmônica entre outras, é a média simples a mais usual.

Em geral a média simples é chamada apenas de média. Para calcular essa média (\bar{x}) a partir de uma quantidade finita de dados numéricos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. deve-se somar esses valores e dividir pela quantidade de dados somados:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Nas escolas é comum as avaliações serem divididas em quatro bimestres e as notas atribuídas a cada um deles variando de 0 a 10. Na maior parte das escolas, um aluno para ser aprovado deve ter nota média dos bimestres maior ou igual do que 6. Assim, uma aluna que teve nota 4 no primeiro bimestre, 7,5 no segundo, 6,5 no terceiro e 8 no quarto, estaria aprovada, pois sua média seria $\bar{x} = \frac{4 + 7,5 + 6,5 + 8}{4} = 6,5 > 6$.

A média calculada no exemplo acima foi para uma quantidade pequena de dados. As vezes a situação problema possui um número maior de dados, podendo até mesmo ser uma infinidade. Por exemplo, como calcular a temperatura média durante um dia? E a média de temperatura de um mês? Ou de um ano?

Observe que a distribuição de temperatura é uma função contínua e em todo instante do dia, do mês ou do ano, há um valor determinado para a temperatura. Logo **como definir a temperatura média do dia se podemos ter uma lista de dados tão grande quanto desejarmos?** Veja, por exemplo, que se forem feitas leituras a cada uma hora, a média destes valores será da forma

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{24}}{24}.$$

Caso a leitura seja a cada meia hora, temos a média dada por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{48}}{48}.$$

Podemos estender as leituras a cada minuto, a cada segundo, e se considerarmos as subdivisões do segundo podemos ter, em tese, infinitas leituras. Nesse caso, como determinar a temperatura média diária?

Para darmos uma resposta à questão vamos considerar o gráfico apresentado na Figura 2.26 que mostra a função temperatura $T = T(t)$, onde t é o tempo medido em horas e T é a temperatura dada em $^{\circ}C$.

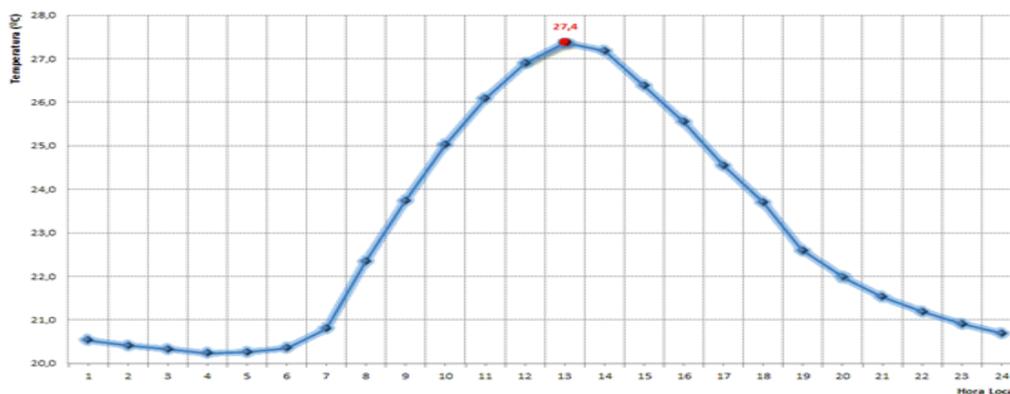


Figura 2.26:

Podemos estimar a temperatura média desse dia, de acordo com o número de leituras realizadas durante o intervalo $[0, 24]$:

Estimativa 1. Dividimos o intervalo $[0, 24]$ em quatro ($n = 4$) subintervalos de 6 horas e, em cada um dos subintervalos, fazemos uma leitura da temperatura $T(t_i^*)$, num instante arbitrário t_i^* . Denotamos por T_{med}^4 , a média das quatro temperaturas observadas, conforme mostra a tabela:

$[t_{i-1}, t_i]$	t_i^*	$T(t_i^*)$	T_{med}^4
$[0, 6]$	4	20, 2	$T_{med}^4 = \frac{20, 2 + 25 + 26, 9 + 21}{4} = 23, 27$
$[6, 12]$	10	25	
$[12, 18]$	12	26, 9	
$[18, 24]$	23	21	

Estimativa 2. Dividimos o intervalo $[0, 24]$ em seis ($n = 6$) subintervalos de 4 horas e, em cada um dos subintervalos, fazemos uma leitura da temperatura $T(t_i^*)$, num instante arbitrário t_i^* . Denotamos por T_{med}^6 , a média das seis temperaturas observadas, conforme tabela a seguir.

$[t_{i-1}, t_i]$	t_i^*	$T(t_i^*)$	T_{med}^6
$[0, 4]$	1	20, 6	$T_{med}^6 = \frac{203 + 20, 8 + 25 + 26, 4 + 22 + 21}{6} = 22, 63$
$[4, 8]$	7	20, 8	
$[8, 12]$	10	25	
$[12, 16]$	15	26, 4	
$[16, 20]$	20	22	
$[20, 24]$	23	21	

Estimativa 3. Dividimos o intervalo $[0, 24]$ em vinte e quatro ($n = 24$) subintervalos de 1 horas e, em cada um dos subintervalos, fazemos uma leitura da temperatura $T(t_i^*)$, num instante arbitrário t_i^* . Denotamos por T_{med}^{24} , a média das 24 temperaturas observadas, conforme tabela

$[t_{i-1}, t_i]$	t_i^*	$T(t_i^*)$	T_{med}^{24}
[0, 1]	1	20,6	$T_{med}^{24} = 22,94375$
[1, 2]	2	20,4	
[2, 3]	3	20,3	
[3, 4]	4	20,2	
[4, 5]	5	20,25	
[5, 6]	6	20,3	
[6, 7]	7	20,8	
[7, 8]	8	22,4	
[8, 9]	9	23,8	
[9, 10]	10	25	
[10, 11]	11	26	
[11, 12]	12	26,9	
[12, 13]	13	27,4	
[13, 14]	14	27,2	
[14, 15]	15	26,4	
[15, 16]	16	25,6	
[16, 17]	17	24,5	
[17, 18]	18	23,7	
[18, 19]	19	22,6	
[19, 20]	20	22	
[20, 21]	21	21,5	
[21, 22]	22	21,1	
[22, 23]	23	21	
[23, 24]	24	20,7	

De modo geral poderíamos ainda calcular a temperatura média a cada meia hora, a cada minuto, ou em quantas subdivisões desejassemos. Logo, para cada número natural n teremos uma estimativa para a média, dada por:

$$T_{med}^n = \sum_{i=1}^n \frac{T(t_i^*)}{n}. \quad (2.5)$$

Em todos os casos analisados a média encontrada T_{med}^n ainda não representa a média de temperatura do dia. Porém é aceitável pensar que a temperatura média do dia é o valor limite das médias de temperaturas estimadas, obtidas para intervalos de tempo cada vez menores. Assim **definimos a média de temperatura do dia, denotada por T_{med} , como**

sendo o valor para o qual as estimativas T_{med}^n estão se aproximando à medida em que o número de temperaturas observadas n torna-se arbitrariamente grande, isto é:

$$T_{med} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{med}^n. \quad (2.6)$$

Fisicamente, é razoável concluir que a média de temperatura do dia tenha sido assumida em pelo menos um instante do dia. Não é razoável pensar que se tenha tido uma média de temperatura do dia igual a $27^\circ C$ e em durante todo o dia não tenha ocorrido esta temperatura em tempo algum. Logo, concluímos que existe pelo menos um instante de tempo $t_0 \in [0, 24]$ tal que $T(t_0) = T_{med}$.

Para uma função contínua qualquer $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, procedemos da mesma forma. Começamos por dividir o intervalo $[a, b]$ em subintervalos iguais de comprimento $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em seguida escolhemos arbitrariamente pontos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ em intervalos sucessivos e calculamos a média dos números $f(x_1^*), f(x_2^*), \dots, f(x_n^*)$:

$$f_{med}^n = \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}. \quad (2.7)$$

Como $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ então $n = \frac{b-a}{\Delta x}$. Substituindo isto em (2.7) obtemos:

$$\begin{aligned} f_{med}^n &= \frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{\frac{b-a}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{b-a} [f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \dots + f(x_n^*)\Delta x] \\ &= \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x. \end{aligned}$$

Assim, definimos o valor médio da função f no intervalo $[a, b]$, denotado por (f_{med}) , como sendo

$$f_{med} = \frac{1}{(b-a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x. \quad (2.8)$$

De modo análogo às considerações feitas para a temperatura, desde que f é uma função contínua é razoável aceitarmos que

$$f(c) = f_{med} \quad \text{para algum } c \in [a, b], \quad (2.9)$$

ou seja, o valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ deve ser assumido pela função em pelo menos um ponto do intervalo $[a, b]$.

2.4 A integral

Nas seções anteriores vimos que o limite da forma

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

apareceu quando calculamos a área de uma região, a área entre curvas, a distância percorrida por um carro em movimento retilíneo a partir de sua velocidade e a média de uma distribuição contínua de dados. Esse limite também surge no processo de encontrar o comprimento de curvas, volume de sólidos, centros de massa, trabalho, probabilidade, dentre outras quantidades. Dá-se então a esse tipo de limite um nome e notação especial.

Considere $y = f(x)$ é uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$, para cada número natural n dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, as extremidades desses subintervalos e $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ pontos amostrais arbitrários nesses subintervalos, de forma que $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. **A soma de Riemann de f** , que depende do número n e da escolha dos pontos amostrais x_i^* , é definida por:

$$S_n(f, *) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \quad (2.10)$$

A **integral de f de a até b** é o número real, denotado por $\int_a^b f(x) dx$, para o qual se aproximam as somas de Riemann quando o número n fica arbitrariamente grande; isto é:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, *) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x. \quad (2.11)$$

Foi em um manuscrito de Leibniz datado de 29 de outubro de 1675 que o primeiro símbolo de integral (\int) apareceu. Ele é um S alongado e foi assim escolhido porque a integral é um limite de somas. O conceito de integral tem origem geométrica e está relacionado ao problema de determinar a área de uma figura plana. Porém esse limite dos somatórios que estamos definindo como integral também está relacionado com conceitos onde a ideia de área nem aparece, tais como, trabalho, probabilidade, comprimento de curvas e distância percorrida. A soma em (2.10) foi chamada de soma de Riemann em homenagem ao importante matemático alemão **Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)**, responsável por grandes contribuições para a Análise Matemática, Geometria Diferencial, Teoria das Funções Complexas e à Física Matemática. Os resultados de Riemann foram essenciais para que Einstein desenvolvesse a teoria da Relatividade.

Exemplificamos a definição (2.11) calculando o valor da integral

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx.$$

Nessa integral temos $f(x) = x^2 + 4x + 5$ definida no intervalo $[1, 4]$. Vamos estimar seu valor por meio das somas de Riemann.

Estimativa 1. Dividimos o intervalo em três subintervalos, ou seja, $\Delta x = 1$. Tomando por x_i^* o extremo direito do subintervalo, obtemos os seguintes valores na tabela a seguir.

$[x_{i-1}, x_i]$	x_i^*	$f(x_i^*)$	$f(x_i^*) \cdot \Delta x$
$[1; 2]$	2	17	17
$[2; 3]$	3	26	26
$[3; 4]$	4	37	37

Segue que $S_3(f, *) = 17 + 26 + 37 = 80$.

Estimativa 2. Dividimos o intervalo em seis subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,5$. Tomando por x_i^* do mesmo modo que o anterior temos os valores abaixo.

$[x_{i-1}, x_i]$	x_i^*	$f(x_i^*)$	$f(x_i^*) \cdot \Delta x$
[1; 1, 5]	1,5	13,25	6,625
[1, 5; 2]	2	17	8,5
[2; 2, 5]	2,5	21,25	10,625
[2, 5; 3]	3	26	13
[3; 3, 5]	3,5	31,25	15,625
[3, 5; 4]	4	37	18,5

de onde resulta que $S_6(f, *) = 72,875$. Usando o Geogebra podemos obter ainda:

- $S_{15}(f, *) = 68,725$
- $S_{30}(f, *) = 67,35$
- $S_{100}(f, *) = 66,41$
- $S_{1000}(f, *) = 66,04$

Observando tais valores podemos perceber que para n grande, $S_n(f, *)$ se aproxima do número 66. Assim, inferimos que o valor da integral $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx$ é 66, e escrevemos $\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx = 66$.

Quando f é uma função positiva, então a soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de áreas de retângulos.

Na definição da integral dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos de igual comprimento. Entretanto isto não é essencial. Podemos considerar uma divisão arbitrária qualquer com os comprimentos dos subintervalos medindo $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ e garantir que no processo de limite todos esses comprimentos tendam para zero. Isso acontece se o maior comprimento, que denotaremos por $(\max \Delta x_i)$ tender a zero. Portanto, nesse caso, a definição de integral fica

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i.$$

Também observamos que para a classe de funções integráveis, que contém as funções contínuas em $[a, b]$, o valor da integral obtido pelo limite em (2.11)

independe das escolhas dos pontos amostrais $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. Logo, em geral, para simplificar os cálculos da integral, é comum considerar os pontos amostrais como sendo as extremidades à direita dos subintervalos. Então $x_i^* = x_i$ e (2.11) pode ser reescrita na forma

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x, \quad (2.12)$$

onde $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e $x_i = a + i\Delta x$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Usando (2.12) podemos reformular (2.8) escrevendo

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx,$$

de onde resulta que

$$\int_a^b f(x)dx = f_{med}(b-a). \quad (2.13)$$

A equação (2.13) admite uma interessante interpretação geométrica. Suponha que a função seja positiva, então o primeiro membro de (2.13) representa a área da região delimitada pelo gráfico da função f , o eixo x e as retas $x = a$ e $x = b$. Por outro lado, o segundo membro pode ser interpretado como a área de um retângulo de largura $(b-a)$ e altura f_{med} .

Aplicando (2.9) vemos que existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

A interpretação geométrica desse resultado é que, para funções positivas f , existe um número c tal que o retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$ tem a mesma área que a região sob o gráfico de f de a até b . Veja uma representação desse resultado nas Figuras 2.27 e 2.28. Este resultado é conhecido na literatura como o Teorema do Valor Médio para Integrais.

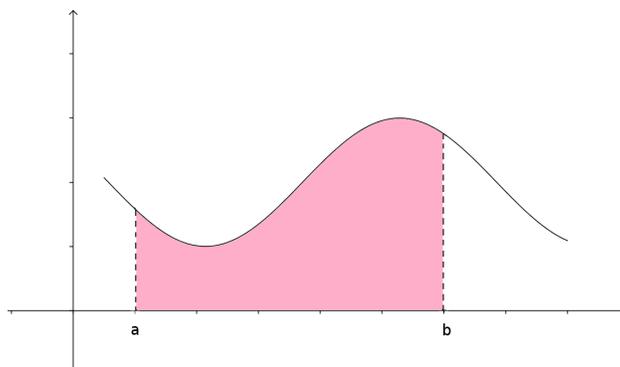


Figura 2.27:

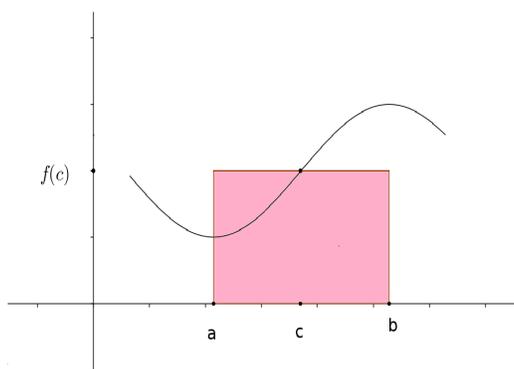


Figura 2.28:

2.5 Comprimento de arco

Dada uma curva plana γ , como definir seu comprimento? Sabemos a partir de unidades de medida estabelecidas, como o metro, medir o comprimento de um segmento de reta, entretanto como fazê-lo para uma curva? De modo grosseiro, poderíamos medir o comprimento de uma curva plana sobrepondo exatamente sobre ela um pedaço de barbante e depois esticando o barbante e medindo-o. A medida do pedaço de barbante seria o comprimento da curva.

Uma formulação matemática para o problema pode ser obtida considerando a curva plana γ como sendo o gráfico de um função suave $y = f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$.

Primeiramente, se a curva, no intervalo dado, tiver formato poligonal, para determinar seu comprimento basta somarmos o comprimento de cada

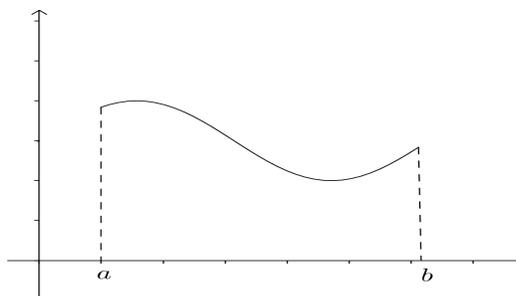


Figura 2.29:

segmento de reta que forma a poligonal. Para determinar o comprimento de cada segmento podemos usar, por exemplo, a fórmula da distância entre as extremidades de cada segmento. No exemplo abaixo temos a curva de uma função f com formato poligonal. Seu comprimento pode ser calculado somando-se a distâncias entre os pontos $(a, f(a))$ e $(x_1, f(x_1))$ com a distância entre $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, somando ainda à distância entre $(x_2, f(x_2))$ e $(b, f(b))$.

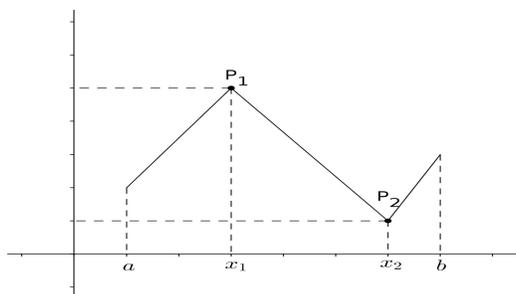


Figura 2.30:

Caso a curva γ tenha um formato diferente de uma poligonal, a ideia é estimar seu comprimento por meio de poligonais convenientemente escolhidas, que de certa forma aproximam-se da curva γ . Começamos dividindo a curva em pequenos segmentos. Para cada número natural n dividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com extremidades $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ e amplitudes iguais dadas por $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$. Se $y_i = f(x_i)$ então o ponto $P_i = (x_i, y_i)$ está sobre a curva γ e a poligonal $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$, representada na figura abaixo, aproxima a curva γ .

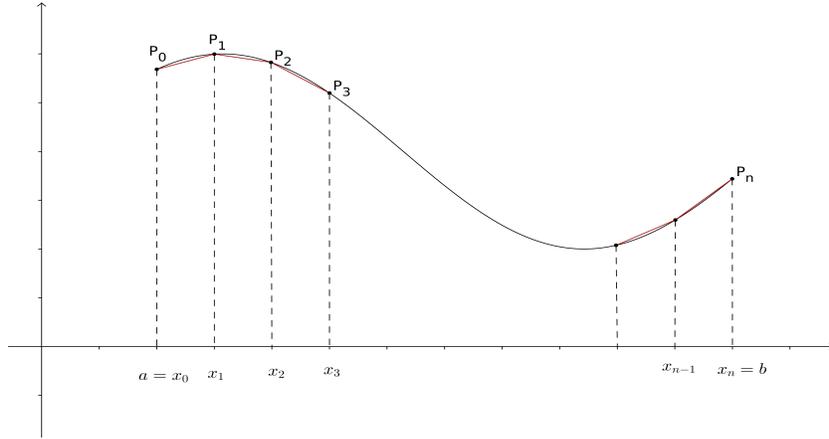


Figura 2.31:

Denotando por L_1^n o comprimento do segmento de reta P_0P_1 , onde $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$, temos

$$L_1^n = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Do mesmo modo, o comprimento de P_1P_2 é dado por

$$L_2^n = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Repetindo este raciocínio até o último segmento $P_{n-1}P_n$, vemos que o comprimento da poligonal, que denotamos por L^n , é a soma de todos os comprimentos L_i^n $i = 1, \dots, n$, ou seja

$$L^n = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Note que a poligonal “aproxima” a curva γ mas não tem o mesmo comprimento que ela. Porém, intuitivamente percebemos que a aproximação fica cada vez melhor quando n aumenta. Veja, por exemplo, da Figura 2.32.

Assim, é natural **definirmos o comprimento L da curva γ como sendo o número real para qual estão se aproximando os comprimentos das poligonais, L^n , quando n torna-se arbitrariamente grande**, isto é,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (2.14)$$

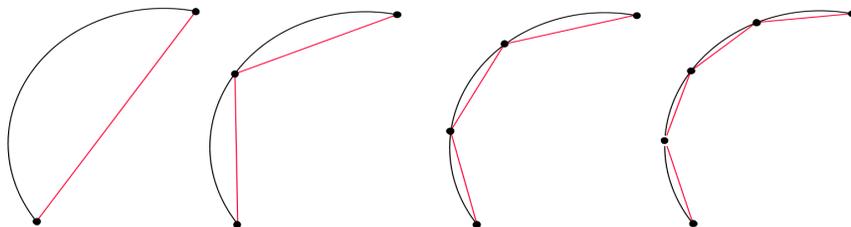


Figura 2.32:

É possível escrever o somatório acima como uma soma de Riemann. De fato, aplicando o Teorema do Valor Médio em cada um dos subintervalos, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ vemos que existe x_i^* , entre x_{i-1} e x_i , tal que

$$y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(x_i^*) (x_i - x_{i-1}). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) no somatório (2.14), temos

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(x_i^*) (x_i - x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f'(x_i^*))^2 (x_i - x_{i-1})^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 [(f'(x_i^*))^2 + 1]} \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{(f'(x_i^*))^2 + 1} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{[(f'(x_i^*))^2 + 1]} \Delta x_i. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Veja que a expressão acima é a soma de Riemann da função $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$. Logo, podemos reescrever (2.14) na seguinte forma

ou ainda,

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.17)$$

Exemplificamos a definição (2.14) calculando o comprimento da curva C referente ao gráfico de $f(x) = x^3$ no intervalo de $[-1; 1]$ (veja Figura 2.33). Vamos estimar seu valor por meio das somas de Riemann.

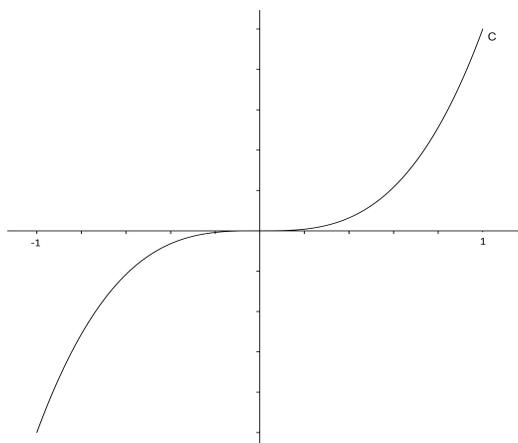


Figura 2.33:

Estimativa 1. Dividimos o intervalo $[-1; 1]$ em dois subintervalos, ou seja, $\Delta x = 1$. Em cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ vamos considerar o segmento de reta que liga os pontos $A_i = (x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ e $B_i = (x_i, f(x_i))$ e o comprimento desse segmento, que é dado pela distância entre esses pontos ($d(A_i, B_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$). Denotaremos a poligonal gerada pela união dos dois segmentos por P_2 que terá um comprimento total L_2 .

$[x_{i-1}, x_i]$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$d(A_i, B_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$
$[-1; 0]$	-1	0	1,414
$[0; 1]$	0	1	1,414

Note que somando o comprimento de cada um dos trechos temos que o comprimento de P_2 é $L_2 = 2,828 u.c.$

Estimativa 2. Dividimos agora o intervalo $[-1; 1]$ em quatro subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,5$. Procedendo como na estimativa 1, temos os valores abaixo.

$[x_{i-1}, x_i]$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$d(A_i, B_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$
$[-1; -0,5]$	-1	-0,125	1,008
$[-0,5; 0]$	-0,125	0	0,5154
$[0; 0,5]$	0	0,125	0,5154
$[0,5; 1]$	0,125	1	1,008

Somando o comprimento de cada um dos trechos, temos que o comprimento de P_4 é $L_4 = 3,046 u.c.$.

Estimativa 3. Dividimos o intervalo $[-1; 1]$ em oito subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,25$. Assim, observe os resultados listados na tabela abaixo.

$[x_{i-1}, x_i]$	$f(x_{i-1})$	$f(x_i)$	$d(A_i, B_i) = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}$
$[-1; -0,75]$	-1	-0,422	0,629
$[-0,75; -0,5]$	-0,422	-0,125	0,388
$[-0,5; -0,25]$	-0,125	-0,016	0,272
$[-0,25; 0]$	-0,016	0	0,251
$[0; 0,25]$	0	0,016	0,251
$[0,25; 0,5]$	0,016	0,125	0,272
$[0,5; 0,75]$	0,125	0,422	0,388
$[0,75; 1]$	0,422	1	0,629

Somando o comprimento de cada um dos trechos, temos que o comprimento de P_8 é $L_8 = 3,079 u.c.$.

Usando o Geogebra, podemos obter ainda $L_{10} = 3,0873 u.c.$, $L_{20} = 3,0936 u.c.$ e $L_{40} = 3,0952 u.c.$. Observando tais valores podemos perceber que para n grande L_n se aproxima de 3,09, com erro de milésimos. Assim, estimamos que o comprimento da curva C do exemplo é $3,09 u.c.$

2.6 Volume

O termo volume e a noção de seu significado faz parte do cotidiano das pessoas. Ouve-se sobre “o baixo volume de chuva”, “o volume da garrafa de refrigerante”, “o grande volume de entulho da construção para descartar”. Em geral, todos nós temos uma ideia intuitiva do significado volume e imaginamos que este conceito serve para medirmos regiões do espaço. Entretanto é necessário chegarmos a uma definição exata e precisa.

Quando abordamos o conceito de área de uma região plana, nosso raciocínio foi dividir o intervalo em subintervalos cada vez menores, esses subintervalos determinam faixas finas e suas áreas são aproximadas pela área de retângulos. Somamos as aproximações e formamos uma soma de Riemann e, por fim, passamos ao limite para produzir a integral. Agora com um sólido agimos de forma análoga. Vamos dividir o sólido em fatias finas e, aproximar o volume de cada fatia, somar as aproximações para formar uma soma de Riemann e passar ao limite para produzir uma integral para o volume.

Primeiramente, consideraremos um tipo simples de sólido denominado cilindro. Cilindro é uma região do espaço delimitada por uma região plana B_1 , denominada base, e uma região congruente B_2 em um plano paralelo. O cilindro consiste na região do espaço formada por todos os pontos nos segmentos de reta perpendiculares à base que unem B_1 e B_2 . A Figura 2.34 mostra exemplos de cilindros. Considerando a área da base A e a altura do cilindro (distância da base B_1 para a parte congruente B_2) é h , então o volume V do cilindro é definido por

$$V = A \cdot h. \quad (2.18)$$

Se a base do cilindro tiver o formato de um círculo de raio r e altura h (veja a Figura 2.34-b), então temos um cilindro circular e seu volume é dado pela fórmula

$$V = \pi r^2 h.$$

Agora, se a altura do cilindro for h e sua base for no formato de um retângulo de comprimento x e largura y , então o cilindro é uma caixa retangular também chamada de paralelepípedo (veja Figura 2.34-c) e seu volume é dado por

$$V = x y h.$$

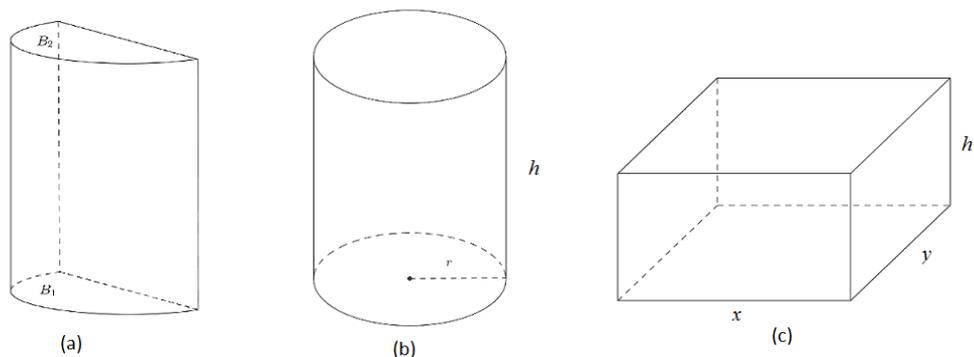


Figura 2.34:

A facilidade para definir o volume para esse tipo de sólido se deve principalmente ao fato de que em um cilindro circular reto, por exemplo, podemos intuitivamente observar que se dividíssemos ele em “fatias finas” tomadas todas perpendiculares ao eixo central, estas seriam todas regiões circulares de raio r (veja Figura 2.35).

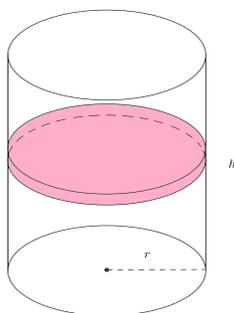


Figura 2.35:

É necessário agora definir qual o volume de um sólido que não é um cilindro. Consideramos uma classe especial de sólidos chamados sólidos de revolução. Estes sólidos são obtidos pela rotação de uma curva ao longo de determinado eixo. Para um sólido S de revolução nós dividimos o sólido em “fatias finas” que podem ser aproximadas por cilindros. Vamos estimar o volume de S pela soma dos volumes desses cilindros. É possível então definir o volume de S através de um processo de limite em que o número de fatias torna-se grande.

Para exemplificar, vamos estimar o volume V de uma esfera de raio 1 (veja Figura 2.36). A esfera é um sólido que pode ser obtido pela rotação da região delimitada por $y = \sqrt{1 - x^2}$ em torno do eixo x , no intervalo $[-1, 1]$. Se posicionarmos a esfera de modo que o seu centro se encontre na origem, se seccionarmos com um plano P_x passando por um certo número x e ortogonal ao eixo das abscissas, essa seção será um círculo cujo raio é $y = \sqrt{1 - x^2}$.

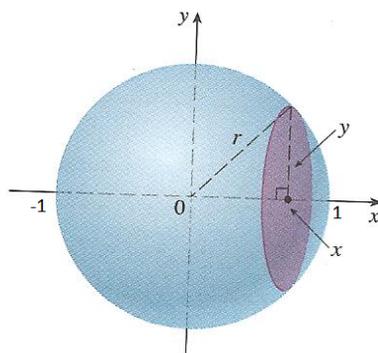


Figura 2.36:

Faremos uma estimativa dividindo a esfera em n fatias finas, particionando o intervalo $[-1, 1]$ em n subintervalos, e supondo que cada fatia tem formato aproximado de cilindro cuja base tem formato de um círculo de raio r_i^* e altura Δx . Em cada subintervalo $[x_{i-1}; x_i]$ vamos considerar um cilindro C_i de altura Δx e o de base com raio $r_i = \sqrt{1 - (x_i^*)^2}$ (pelo Teorema de Pitágoras) onde $x_i^* = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$ (ponto médio do intervalo), cujo volume denotamos por V_{C_i} .

Estimativa 1. Dividimos o intervalo $[-1; 1]$ em cinco subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,4$. Chamaremos S_5 o sólido gerado pela união desses cinco cilindros, cujo volume chamaremos de V_{C_5} . Assim, temos os resultados na seguinte tabela.

$[x_{i-1}, x_i]$	$x_i^* = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$	$r_i = \sqrt{1 - (x_i^*)^2}$	$V_{C_i} = \pi(r_i)^2 \Delta x$
$[-1; -0,6]$	-0,8	0,6	0,452
$[-0,6; -0,2]$	-0,4	0,916	1,054
$[-0,2; 0,2]$	0	1	1,256
$[0,2; 0,6]$	0,4	0,916	1,054
$[0,6; 1]$	0,8	0,6	0,452

Note que somando o volume de cada cilindro temos aproximadamente 4,268, ou seja, o volume de S_5 é $V_{C_5} = 4,268 u.v.$.

Estimativa 2. Dividimos o intervalo $[-1; 1]$ em dez subintervalos, ou seja, $\Delta x = 0,2$. Dessa forma obteremos o sólido S_{10} formado por dez cilindros, cujo volume denotaremos por $V_{C_{10}}$. Logo, temos os cálculos na tabela a seguir.

$[x_{i-1}, x_i]$	$x_i^* = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}$	$r_i = \sqrt{1 - (x_i^*)^2}$	$V_i = \pi(r_i)^2 \Delta x$
$[-1; -0,8]$	-0,9	0,435	0,118
$[-0,8; -0,6]$	-0,7	0,714	0,320
$[-0,6; -0,4]$	-0,5	0,866	0,471
$[-0,4; -0,2]$	-0,3	0,953	0,570
$[-0,2; 0]$	0	0,994	0,620
$[0; 0,2]$	0	0,994	0,620
$[0,2; 0,4]$	0,3	0,953	0,570
$[0,4; 0,6]$	0,5	0,866	0,471
$[0,6; 0,8]$	0,7	0,714	0,320
$[0,8; 1]$	0,9	0,435	0,118

Segue que o volume $V_{C_{10}} = 4,198 u.v.$.

Se fizemos estes cálculos para vinte cilindros, ou seja, particionando o intervalo em vinte subintervalos, teremos que o volume do sólido S_{20} será aproximadamente $V_{C_{20}} = 4,194 u.v.$. Observe que a medida que aumentamos o número de subintervalos, mais os sólidos S_n se aproximam do formato da esfera, Logo para n grande $V_{C_n} \approx V$ (veja a Figura 2.37). Neste exemplo estimamos que o volume da esfera seja $4,19 u.v.$.

Considere agora um sólido S que não seja necessariamente de revolução,



Figura 2.37:

mas que pode ser "fatiado" conforme descrito na Figura 2.37. Para definir o volume de S faremos um processo análogo ao usado para o volume do sólido de revolução. Começamos interceptando S com um plano contendo uma região plana que será denominada de seção transversal de S . Seja A a área da seção transversal de S no plano P_x perpendicular ao eixo x e passando por x , onde $a \leq x \leq b$. Nos sólidos de revolução, a a região determinada pela seção transversal é sempre um círculo. Neste caso, a região determinada pela seção terá um formato qualquer. Já discutimos como calcular o valor de áreas na seção (2.1). Observe a Figura 2.38.

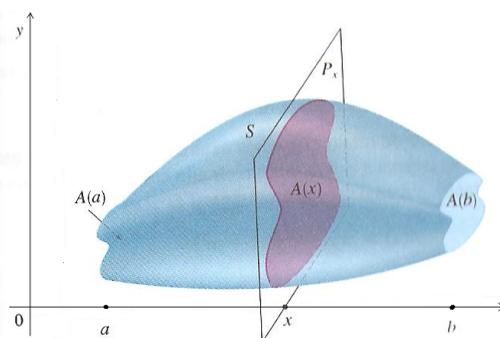


Figura 2.38:

Vamos dividir S em n "fatias" de larguras iguais a Δx usando planos $P_{x_1}, P_{x_2}, \dots, P_{x_n}$. Intuitivamente, pense em fatiar um pão. Se escolhermos pontos amostrais $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, poderemos aproximar a i -ésima fatia S_i , que esta entre $P_{x_{i-1}}$ e P_{x_i} a um cilindro de base $A(x_i^*)$ e "altura" Δx . Segue a ilustração 2.39.

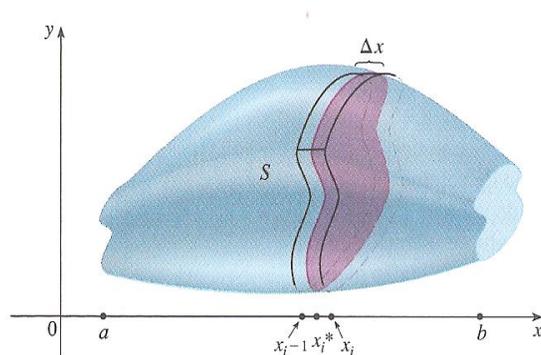


Figura 2.39:

Quanto mais “fatiarmos” o sólido, ou seja, quanto maior for o valor de n , mais cada fatia terá o formato de um cilindro, ou seja, podemos supor cilindros de altura Δx . Assim cada volume desse cilindro será calculado por $A(x_i^*)\Delta x$. Adicionando o volume dessas fatias obtemos uma aproximação para o volume total V . Essa aproximação melhora a medida que o número n aumenta. Veja Figura 2.40.

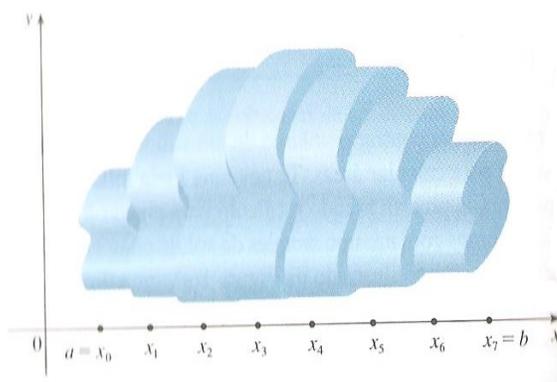


Figura 2.40:

Então

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} [A(x_1^*)\Delta x + A(x_2^*)\Delta x + \cdots + A(x_n^*)\Delta x] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Como já definimos o limite da soma de Riemann como a integral definida, segue que

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*)\Delta x = \int_a^b A(x)dx,$$

sendo $A(x)$ a área de uma seção transversal móvel, obtida fatiando em x perpendicular ao eixo x .

2.7 Teorema Fundamental do Cálculo

No capítulo anterior discutimos o conceito de derivada e, neste o de integral. Em ambos foi necessário trabalharmos com a ideia de limites, no primeiro caso, limite das taxas de variação média e, no caso da integral, limite das somas de Riemann. Portanto, a menos deste fato, parece-nos que nada mais existe em comum entre os conceitos de derivada e de integral. A priori são conceitos de natureza completamente distintas. Outro ponto importante é que para calcular integrais, usando somas de Riemann, tal qual vimos nas seções anteriores, é um trabalho bastante complicado, e tecnicamente muito trabalhoso, isso ainda que consideramos apenas funções bem simples. Podemos então imaginar o quão mais complicado e trabalhoso são esses cálculos se aplicados a funções mais elaboradas, como por exemplo, funções trigonométricas, exponenciais, logarítmicas, ou compostas por duas ou mais funções.

Felizmente existe um resultado muito poderoso, com certeza o mais importante de todo o Cálculo Diferencial e Integral, e talvez de toda Matemática, denominado **Teorema Fundamental do Cálculo**, o qual relaciona os conceitos de derivada e integral permitindo o cálculo de integrais de modo muito mais simples. Este resultado mostra que se uma determinada quantidade pode ser calculada pelo processo de exaustão de Arquimedes (sucessivas somas de Riemann), então pode também ser calculada de modo

muito mais fácil com o uso de um processo inverso ao de derivação, chamado antiderivação, entendida como o processo de achar uma função conhecendo-se a sua derivada. Isaac Barrow (1630-1677), mentor de Newton em Cambridge, descobriu que os problemas da reta tangente e do cálculo de áreas estão relacionados. Ele percebeu, então, que a derivação e a integração, em um certo sentido, são processos inversos. O Teorema Fundamental do Cálculo foi desenvolvido separadamente por Newton e Leibniz e somente a partir dele o cálculo passou a ser considerado como um método matemático sistemático.

Vejam o teorema. Considere uma função contínua $y = f(x)$ definida num intervalo $[a, b]$. Então podemos calcular sua integral de a até b

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Mais do que isto, podemos calcular a integral de f em qualquer subintervalo do intervalo $[a, b]$. Logo é possível calcular a integral de f em todo intervalo da forma $[a, s]$ para todo $a \leq s \leq b$. Em outras palavras temos uma função $I = I(s)$ definida em $[a, b]$ por

$$I(s) = \int_a^s f(x) dx. \quad (2.20)$$

Se f é uma função positiva, então para cada s o valor $I(s)$ é a área da região delimitada pelo gráfico de f , o eixo x e as retas $x = a$ e $x = s$, conforme mostra a Figura 2.41:

O fato importante, chamado de **primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo**, é que a função I definida por (2.20) é uma função suave e sua derivada é dada por

$$I'(s) = f(s) \quad \text{para todo } s \in (a, b). \quad (2.21)$$

Observe que (2.21) nos diz que ao derivarmos uma integral retornamos à função, ou seja, nestes termos a integral é um processo inverso ao da derivada.

Dada uma função f chamamos de primitiva de f qualquer outra função cuja derivada é f . Sabendo que a derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em cada ponto, é razoável concluirmos que encontrada uma

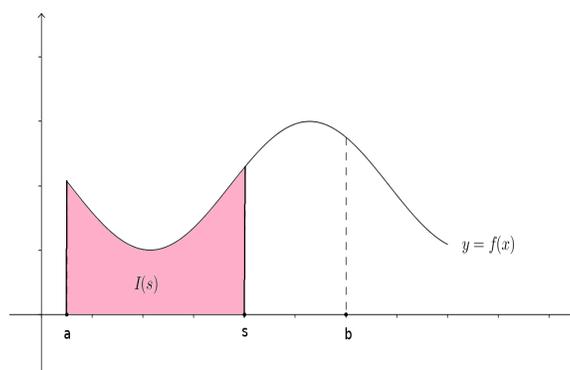


Figura 2.41:

primitiva de f todas outras serão translações desta, ou seja, se I e F são primitivas de uma mesma função f então podemos garantir que

$$F(s) = I(s) + C \quad \text{para todo } s \in [a, b]. \quad (2.22)$$

para alguma constante C . (Veja Figura 2.42).

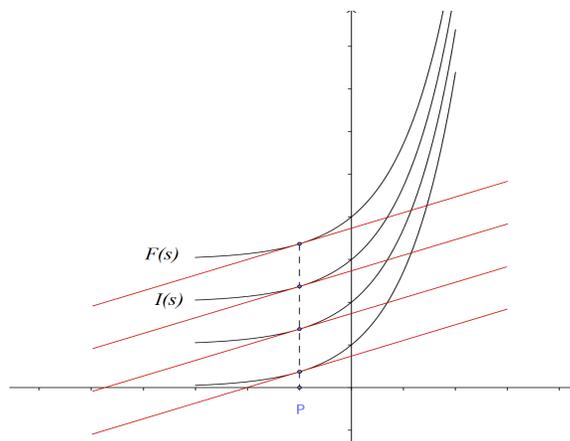


Figura 2.42:

A consequência essencial da primeira parte de Teorema Fundamental e de (2.22) é a que chamamos de segunda parte do resultado. Supondo $y = f(x)$ contínua em $[a, b]$ pela primeira parte do teorema, concluímos que I dada por (2.20) é uma primitiva de f . Logo se F for uma outra primitiva qualquer

devemos ter (2.22). Então calculando:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (I(b) + C) - (I(a) + C) = I(b) - I(a) \\ &= I(b) = \int_a^b f(x) dx, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos que $I(a) = 0$. Isto mostra a segunda parte do **Teorema Fundamental do Cálculo**:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2.23)$$

ou seja, para calcular a integral de f de a até b , basta encontrar uma primitiva. A fórmula (2.23) torna o difícil problema de calcular integrais como limite de somas de Riemann num problema muito mais fácil de encontrar primitivas. Logo para achar o valor da integral de f de a até b não é necessário calcular limites de somas de Riemann, basta simplesmente acharmos, da maneira que for possível uma primitiva F e calcularmos o número $F(b) - F(a)$. É claro que a tarefa de encontrar primitivas não algo assim tão simples e este é um dos objetivos dos cursos de cálculo.

Vamos aplicar a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo calculando a área A sob a curva da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 3]$.

Vimos anteriormente que A pode ser escrita da forma

$$A = \int_0^3 f(x) dx.$$

Na seção 1.5 calculamos a derivada de uma função do terceiro grau obtendo a equação (1.20). Aplicando (1.20) na função $h(x) = x^3$ temos $h'(x) = 3x^2$. Podemos facilmente tomar que uma primitiva F de f é $F(x) = \frac{f(x)}{3} = \frac{x^3}{3}$. Segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$A = \int_0^3 f(x) dx = F(3) - F(0) = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9.$$

Assim a área sobre a curva $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 3]$ é 9.

Observe que essa área foi calculada no final da seção 2.1 considerando sucessivas somas de Riemann. Além de todo o trabalho do método empregado, o resultado foi uma aproximação. Verificamos que a resolução com a aplicação do Teorema Fundamental do Cálculo realmente mais fácil.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Anton, H. et al. **Cálculo I**, 8ª edição, Bookman: Porto Alegre, 2014.
- [2] Ávila, G., Araújo, L. C. L. de; **Cálculo Ilustrado, Prático e Descomplicado**, 1ª Edição. LTC: Rio de Janeiro, 2014.
- [3] Ávila, G. **Cálculo das funções de uma variável**, 7ª edição. LTC: Rio de Janeiro, 2012.
- [4] Dante, L. R.. **Matemática: contexto e aplicações**. Ática: São Paulo, 2010.
- [5] Gentil, N. et al. **Matemática para o 2º grau**. Volume 3. Ática: São Paulo, 1996.
- [6] Guidorizzi, H. L. **Um Curso de Cálculo**. Volume 1. 5ª edição. LTC: Rio de Janeiro, 2011.
- [7] Hashbarger, R.J.; Reynolds, J.J.; **Matemática aplicada: administração, economia, ciências sociais e biológicas**, 7ª edição. McGraw Hill: São Paulo, 2006.
- [8] Leite, A. **Aplicações da matemática: administração, economia e ciências contábeis**, 1ª edição. Cengage Learning: São Paulo, 2008.
- [9] Leithold, L. **O cálculo com geometria analítica**, volume 1, 3ª edição. Harbra: São Paulo, 1994.
- [10] Tipler, P. A., Mosca, G. **Física para cientistas e engenheiros**. Volume 1. LTC: Rio de Janeiro, 2012.
- [11] Stewart, J. **Cálculo**, Volume 1, 7ª edição. CENGAGE Learning: São Paulo, 2013.

- [12] Young, H.D. **Física**, 10^a Edição. Pearson Addison Wesley: São Paulo, 2003.