Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós - Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio

Francisco Adriano Gomes Bezerra

Teresina - 2015

Francisco Adriano Gomes Bezerra

Dissertação de Mestrado

Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite

Teresina - 2015

111 Gomes Bezerra, Francisco Adriano
X111x Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio/ Francisco Adriano Gomes Bezerra- Teresina: [s.n.], 2015.
67 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Piauí, Pós Graduação em Matemática.
Orientador: Jefferson Cruz dos Santos Leite

1. Teoria dos Grafos. 2. Modelagem Matemática. 3. Resolução de Problemas. 4. Ensino. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da UFPI
Câmpus Teresina

TERMO DE APROVAÇÃO

Francisco Adriano Gomes Bezerra
Um Convite aos Grafos: Uma Possibilidade de Estudo no Ensino Médio

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Piauí pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Jefferson Cruz dos Santos Leite
Orientador

Prof. Dr. Newton Luís Santos
Departamento de Matemática - UFPI

Prof. Me. Alberto Cunha Alves
Departamento de Matemática - IFPI (Campus - Piripiri)

Teresina, 12 de março de 2015

A minha esposa Eva Maria

Agradecimentos

Agradecimentos a minha família em nome de minha mãe Maria Simone Gomes, meu Pai Carlos Alberto Bezerra e meu Irmão Carlos Eduardo Gomes Bezerra, estes sabem dos meus sonhos e o quanto eu batalhei para chegar até este dia.

Agradecimento à minha esposa Eva Maria Silva Costa, por estar comigo diretamente nesta caminha passando pelas mesmas sensações de angústia e alegria e por ter me incentivado a fazer este mestrado.

Agradecimentos a meu professor de Graduação Marcio Nascimento por ter despertado em mim o desejo pelas demonstrações matemáticas. A meu professor de Iniciação Cientifica Paulo Cesar Oliveira Cavalcante, por ter um dia acreditado no meu primeiro trabalho em matemática.

Agradecimentos a essa grande família de amigos Profimatianos que nos apoiaram tornando o cansaço das viagens em alegrias, brincadeiras, passeios e festas. Em Especial aos amigos Daniel, Álvaro, Willims e Canuto pelo convívio mais próximo.

Agradecimentos a Escola Wilebaldo Aguiar em nome de Ana Georgele e Antônio Marcio por terem facilitado meus horários para que eu pudesse cursar o PROFMAT. Agradecimento ao amigo Luiz Carlos por sempre estar na torcida por mim e pela Eva. A meus amigos Neto, Egilberto e Diego por compreenderem a minha ausência neste período.

Agradecimentos à universidade Federal do Piauí em especial a meus professores de PROFMAT pelo empenho nas aulas e conversas de incentivo. A meu orientador Jefferson pelos conselhos e a leitura do material. A os professores Alberto e Newton por terem participado da minha banca. Gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente fizeram parte desta caminhada até chegar no que hoje é uma concretização de um sonho.

A mente que se abre a uma nova idéia
jamais voltará ao seu tamanho original.
Albert Einstein

Resumo

Um Convite aos Grafos tem como objetivo apresentar um estudo da Teoria dos Grafos a professores do Ensino Médio. Por meio de cinco problemas modelados por grafos, o professor encontrará a metodologia necessária para motivar seus alunos ao estudo sobre teoria das árvores, emparelhamentos em grafos, passeios eulerianos, reconhecimento de planaridade e coloração de vértices. Com o uso de processos algorítmicos de Kruskal e Húngaro e de teoremas como os de Euler, Hall, Brooks e Kuratowski, o professor incentivará o aluno a modelar e elaborar soluções para os problemas.

Palavras chave: Teoria dos Grafos, Modelagem Matemática, Resolução de Problemas, Ensino.

Abstract

An Invitation to Graph aims to present a study of Graph Theory to high school teachers. Through five problems modeled by graphs, the teacher will find the methodology necessary to motivate their students to study theory of trees, matchings in graphs, Euler tours, recognition of planarity and coloring of vertices. With the use of algorithmic processes Kruskal and Hungarian and theorems such as Euler, Hall, Brooks and Kuratowski, the teacher will encourage the student to model and develop solutions to problems.

Keywords: Graph Theory, Mathematical Modeling, Problem solving, Teaching.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A teoria dos grafos tem sido utilizada em diversas áreas do conhecimento, com destaque para as pesquisas operacionais, teoria da computação, circuitos elétricos, química orgânica, genética, psicologia dentre outras. Essa diversificação na aplicação dos grafos fora da matemática vem chamando atenção para que seu estudo ocorra logo cedo, visto que suas contribuições têm sido significativas no desenvolvimento humano. Um convite aos grafos pretende ser uma possibilidade a mais de abordar grafos no Ensino Médio.

Três capítulos estruturam esse trabalho. O primeiro capítulo pretende esclarecer e justificar não só a escolha do tema como também a metodologia utilizada por meio de modelagem e processos algorítmicos. O segundo capítulo fará a introdução dos conceitos sobre grafos, sendo o pré-requisito básico para o entendimento da teoria desenvolvida no terceiro capítulo. O último capítulo representa um aprofundamento teórico e prático. Nele encontra-se três estratégias para o professor estudar e aplicar na sala de aula. Na primeira, problemas são utilizados inicialmente para motivar o desenvolvimento da teoria, a segunda encontra-se orientações metodológicas, alertas e cuidados na forma de conduzir o tema, a terceira estratégia é uma sugestão de problemas para aos alunos fixarem as ideias.

Sobre os temas abordados nas seções do terceiro capítulo encontra-se: O estudo sobre grafos eulerianos motivado pelo problema das pontes de Königsberg. Utiliza-se o resultado do teorema de Euler de 1736 que apresenta condições para reconhecer se um grafo admite um passeio euleriano ou não. Já o teorema 3.3 estabelece condições para eulerizar grafos não eulerianos. A teoria de árvores estuda um grafo muito apreciado por suas aplicações, a motivação vem do problema das conexões mínimas, por meio do qual usa-se o processo do Algoritmo de Kruskal para obter arvores geradoras mínimas, um importante mecanismo para economizar. Os grafos planares são estudados através do reconhecimento da planaridade, o problema sobre as ligações motiva este estudo. A abordagem clássica de saber se é possível ligar três serviços a três residência sem que exista interseção entre as ligações é o objetivo que motiva a busca por grafos isomorfos ou a utilizar o resultado do teorema de Kuratowski proposto em 1930.

Nas duas últimas seções do capítulo, temos: O problema da franquia de Hot Dog que motiva o estudo sobre coloração de vértices em grafos. O simples fato de pintar pode solucionar problemas complicados. A busca pela quantidade ideal de cor motiva o estudo por número de independência em um subconjunto independente máximo de vértices culminando na resolução do problema e na prova do teorema de Brooks em 1941. O emparelhamento de grafos é motivado pelo problema sobre designação de tarefas. A solução do problema motiva a busca por emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos e encontra condições no teorema de Hall e procedimentos no algoritmo húngaro para grafos valorados. Esses cinco problemas que compõem o terceiro capítulo, motivam o desenvolvimento de temas clássicos na Teoria dos Grafos, além de serem o diferencial na abordagem deste trabalho.

1 O Estudo sobre Grafos

1.1 Justificativas para o Ensino de Grafos

1.1.1 O Desenvolvimento da Teoria dos Grafos

Hoje com o crescente avanço tecnológico, a **Teoria dos Grafos** vem garantido seu lugar de destaque entre as teorias que contribuem com o desenvolvimento humano, atingindo os mais variados campos do conhecimento, destaque para as pesquisas operacionais, teoria da computação, circuitos elétricos, química orgânica, física, genética, psicologia dentre outras. Entretanto nem sempre foi assim, o estudo de grafo passou por um período "morto". Depois dos resultados de Euler em 1736, passou-se mais de um século para que outros resultados fossem publicados. No Brasil, resultados sobre grafos só apareceram bem mais tarde no ano 1968.

Estudar a cronologia das pesquisas sobre grafos ajudará a entender um pouco seu desenvolvimento, permitindo assim, prever os novos rumos para teoria. Algumas datas com as contribuições de matemáticos mostrará um pouco deste percurso. Segundo as referências de [1] e [2], tem-se que:

1736 - Euler resolve o *problema das pontes de Königsberg* o primeiro resultado em Teoria dos Grafos;

1847 - Kirchhoff criou a *Teoria das Árvores* ao utilizar modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos;

1852 - Guthrie cria o *problema das quatro cores*: todo mapa pode ser colorido usando apenas 4 cores;

1857 - Cayley aplica o conceito de árvores à química orgânica enumerando os isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados;

1859 - Hamilton inventou um jogo sem aplicação prática, mas que encontraria aplicação no campo da pesquisa operacional;

1869 - Jordan estuda o conceito árvores de um ponto de vista estritamente matemático;

1878 - Sylvester utiliza pela primeira vez o termo grafo;

1879 - Kempe dá a primeira demonstração errada, mas famosa do problema das 4 cores;

1880 - Tait divulgou uma segunda demonstração para o problema das 4 cores mas também falha;

1890 - Heawood prova o *teorema das 5 cores*;

1912 - Birkhoff define *polinômios cromáticos*;

1926 - Menger demonstrou o *teorema da desconexão de itinerários em grafos*;

1928 - Ramsey buscou responder se era possível extrair de um conjunto desordenado alguma ordem, dando assim início a *teoria de Ramsey*;

1930 - Kuratowski encontrou uma condição necessária e suficiente para a *planaridade* de um grafo;

1931 - Whitney desenvolve e cria a noção de *grafo dual*;

1936 - König escreve o primeiro livro dedicado à teoria dos grafos: a *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*;

1941 - Brooks enunciou um teorema fornecendo um limite para o *número cromático* de um grafo;

1941 - Turán cria um ramo conhecido como *teoria extremal de grafos*;

1947 - Tutte resolveu o problema da existência de uma *cobertura minimal* em um grafo;

1962 - Hakimi descobre a caracterização recursiva e construtiva de *sequencias estritamente gráficas*;

1968 - Primeiros trabalhos sobre grafos publicados no Brasil;

1973 - Edmonds e Johnson resolvem o *problema do correio chinês*;

1977 - Appel e Haken resolvem o problema das 4 cores por meios computacionais.

Segundo [1], os primeiros trabalhos publicados sobre grafos no Brasil surgiram a partir de 1968 no **I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional** realizado no **ITA** (Instituto Tecnológico da Aeronáutica), em São José dos Campos, SP. Realizando uma consulta em **SciELO Brasil** (Scientific Electronic Library Online) no período de 2003 a 2013 foram publicados 42 trabalhos contendo o termo grafo, com pelo menos um trabalho publicado por ano.

Atualmente o número de livros sobre grafos é razoavelmente grande, entretanto, são poucos os livros escritos por brasileiros dedicados ao tema grafos, são sete no momento, sendo três sobre teoria e aplicações, dois sobre algoritmos de grafos, um de aplicações à eletricidade e uma obra de divulgação. Por outro lado existem muitos trabalhos publicados em periódicos e trabalhos de conclusão de curso de pós-graduação. Além de existirem professores importantes dedicados a Teoria dos Grafos, com destaque para: Antônio Luz Furtado (Professor Emérito da PUC-Rio), Ruy Madsen Barbosa (Pesquisador-doutor dedicado tanto à Matemática quanto à Educação Matemática), Claudio Lucchesi (Professor Emérito da UNICAMP), Paulo Oswaldo Boaventura Netto (Professor da UFRJ), Jayme Luiz Szwarcfter (Professor Emérito da UFRJ) e Samuel Jurkiewicz (Professor da UFRJ).

Uma nova perspectiva no estudo dos Grafos vem ganhando força no meio acadêmico. A idéia de estudar grafos no Ensino Médio vem sendo constantemente tema de dissertações e teses em todo país. Um exemplo pode ser dado pelas dissertações no Mestrado Profissional em Rede Nacional (**PROFMAT**), até o momento são 14 registros com o tema grafos, dos quais 12 tem como objetivo desenvolver o assunto no Ensino Básico. Essa perspectiva em abordar o tema já no Ensino Médio se deve ao seu rápido desenvolvimento e suas contribuições para a ciência, além da proposta ser um tratamento ingênuo da teoria, o que torna o assunto de fácil assimilação pelos professores e alunos. Este trabalho pretende ser mais uma possibilidade de abordar o tema mediante as condições em que se encontra o Ensino da Matemática no Brasil.

1.1.2 O Ensino de Matemática no Brasil

O mundo vem evoluindo rapidamente, seja na medicina ou na tecnologia, para se destacar é preciso resultados. A Matemática está ganhando visibilidade e espaço entre as ciências aplicadas, em grande parte por apresentar ferramentas que se adaptam facilmente a outras áreas.

Muitos estudiosos afirmam que o desenvolvimento de um país se dá pela Matemática desenvolvida nele. Neste sentido o Brasil se destaca, uma vez que possui muitos centros de Matemática espalhados por seu território. Um exemplo é o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (**IMPA**), considerado o maior instituto de pesquisa e desenvolvimento matemático da América do Sul e um dos maiores do mundo. O IMPA desenvolve uma matemática de ponta, com muitos matemáticos de reconhecimento mundial, dentre eles, tem-se Artur Ávila ganhador da medalha Fields em 2014 (considerado o maior prêmio da matemática).

No IMPA não existe somente a preocupação com a Matemática avançada, existem professores preocupados com o Ensino da Matemática no país, mais precisamente com a formação docente. Alguns nomes merecem destaque: os professores Eduardo Wagner, Paulo Cezar Carvalho e Elon Lages Lima, que idealizaram o Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (**PAPMEM**), desde seu surgimento em 1990 este programa oferece treinamento gratuito para professores de Matemática do Ensino Médio em todo o país, abordando assuntos relativos às três séries do Ensino Médio.

Este grupo do IMPA compromissado com a formação de professores, vêm trabalhando junto há vários anos em atividades ligadas ao Ensino da Matemática, tais como a publicação da **Revista do Professor de Matemática**, em **Olimpíadas de Matemática** (regionais, nacionais e internacionais), e na autoria de diversos livros de Matemática para professores do Ensino Médio.

Em 2010 surgiu o **PROFMAT** um mestrado semipresencial, com oferta nacional, realizado por instituições de Ensino Superior e coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática (**SBM**). O PROFMAT visa atender professores de Matemática em exercício no Ensino Básico, especialmente na escola pública, com ênfase no domínio e aprofundamento de conteúdos matemáticos. As bases para criação deste mestrado são as do PAPMEM.

O Brasil também é destaque nas Olimpíadas de Matemática. Na Olímpiada Internacional de Matemática (**IMO**) participam cerca de 100 países, com equipes de até 6 estudantes do Ensino Médio, essa competição é considerada a mais importante internacionalmente. Dentre os resultados já obtidos pelo Brasil, tem-se Nicolau Corção Saldanha (1981), Ralph Costa Teixeira (1986, 1987), Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira (1990), Artur Avila Cordeiro de Melo (1995), Rui Lopes Viana Filho (1998), Gabriel Tavares Bujokas (2005), Henrique Pondé de Oliveira Pinto (2009) e Rodrigo Sanches Ângelo (2012), todos ganharam medalhas de ouro.

Essas conquistas citadas anteriormente foram em geral motivadas por um ensino de qualidade ocorrido cedo no Ensino Médio. Pensando assim, em 2005 foi criada a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (**OBMEP**) uma realização do IMPA com o objetivo de estimular o estudo de Matemática e revelar talentos na área. Hoje, a OBMEP possui muitos incentivos premiando as escolas, professores e alunos.

Em 2009 o Ministério da Educação reformulou a proposta do Exame Nacional do Ensino Médio (**ENEM**), com a adesão a proposta por muitas universidades, este tornou-se a maior oportunidade de acesso às vagas federais de Ensino Superior. Esse novo modelo de ENEM induz a uma reestruturação dos currículos do ensino médio. Segundo ([3], p.160), "no caso do Ensino Médio, a elaboração do currículo de cada matéria é fortemente influenciada pelo chamado Exame Vestibular". Surge então a oportunidade para que novos conteúdos componham os currículos escolares.

A matemática do ENEM procura verificar as competências e habilidades que o aluno domina, tais como enfrentar situações-problemas apresentadas sobre diversas formas: numérica, algébrica e geométrica. Ter esse panorama do Ensino de Matemática no Brasil permite, neste ponto, abordar o objetivo deste trabalho, o **Estudo de Grafos no Ensino Médio**. Alguns problemas sobre grafos presente no ENEM e na OBMEP devem motivar e justificar a necessidade do tema no Ensino Básico.

Problema 01. (ENEM 2010) A Figura I mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na Figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada, Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.

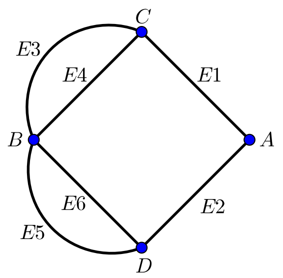


FIGURA I

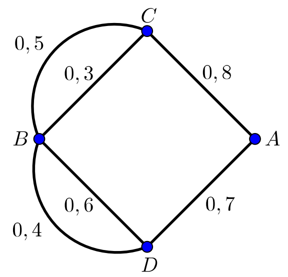
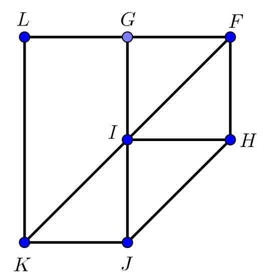


FIGURA II

Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível. O melhor trajeto para Paula é

(a) E1E3. (b) E1E4. (c) E2E4. (d) E2E5. (e) E2E6.

Problema 02. (ENEM 2011) Um técnico em refrigeração precisa revisar todos os pontos de saída de ar de um escritório com várias salas. Na imagem apresentada, cada ponto indicado por uma letra é a saída do ar, e os segmentos são as tubulações.



Iniciando a revisão pelo ponto K e terminando em F, sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será passando pelos pontos

(a) K, I e F. (b) K, J, I, G, L e F. (c) K, L, G, I, J, H e F.
(d) K, J, H, I, G, L e F. (e) K, L, G, I, H, J e F.

Problema 03. (Banco de Questões da OBMEP 2011 - Nível 2 - Questão 77)
Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

(a) 4 pessoas do grupo?

(b) 3 pessoas do grupo?

Admita que se A conhece B então B conhece A.

Problema 04. (Banco de Questões da OBMEP 2013 - Nível 3 - Questão 13)
A Figura I a seguir um cubo de aresta 1.

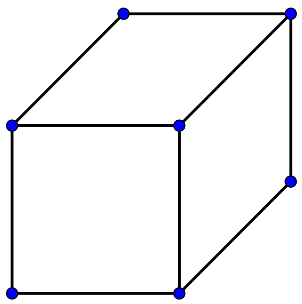


FIGURA I

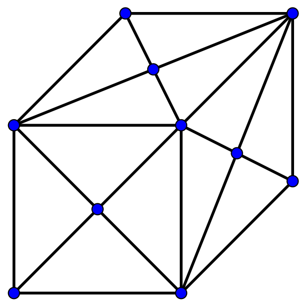


FIGURA II

(a) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas do cubo que passa por todos os 8 vértices?

A Figura II mostra um cubo de aresta 1 no qual todas as 12 diagonais da face foram desenhadas. Assim criou-se uma rede com 14 vértices (os 8 vértices do cubo e os 6 do centro das faces) e 36 arestas (as 12 do cubo e mais 4 sobre cada uma das 6 faces).

(b) Qual o menor comprimento possível para um caminho formado por arestas dessa rede que passa por todos os 14 vértices?

Esses quatro problemas foram apresentados com o objetivo de mostrar a presença dos grafos em algumas provas da Educação Básica.

O que esses problemas têm em comum? Todos possuem grafos em suas estruturas.

O que isso significa já que grafos ainda não constitui um tema nos currículos de Matemática do Ensino Médio? Pode ter vários motivos ou nenhum que justifique esse fato. O certo é que os grafos por algum motivo já fazem parte do contexto do Ensino Médio.

Quais as consequências do tema aparecer sem ser ensinado? O surgimento de uns poucos problemas sobre grafos podem passar facilmente despercebidos, não representando uma perda significativa do ponto de vista dos resultados de provas como o ENEM e até mesmo da OBMEP, tampouco justificaria a inclusão desta teoria nos currículos. Entretanto, a maior consequência em não inclui-la, é deixar de explorar novos problemas através de aplicações práticas que motivem o estudo de Matemática.

O que fazer agora? Como já foi dito em outro momento, existem muitas dissertações propondo o estudo de grafos no Ensino Médio. Contudo existe um momento para semear e outro para colher, dessa forma pode-se pensar que essas atitudes possam gerar resultados no futuro. Hoje, para nortear a escolha dos conteúdos que irão compor os currículos escolares existem os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (**PCNEM**) e as **Orientações Curriculares Para o Ensino Médio**. No que se refere a Matemática, tem-se segundo ([4], p.119):

> A proposta de Matemática dos PCNEM é que cada escola e grupo de professores proponham um trabalho pedagógico que permita o desenvolvimento das competências almejadas. Fazem parte desta elaboração diversos fatores mais diretamente ligados ao planejamento, entre eles a escolha de temas relativos ao conteúdo especifico da disciplina, a análise dos recursos de ensino e dos métodos de abordagem desse conhecimento, o cuidado com os tempos de ensino e de aprendizagem e dos espaços para que isso ocorra.

Como foi citado, as escolhas de conteúdo devem ser bem planejadas, analisando recursos de ensino e métodos de abordagem desse conhecimento, isso ocorre neste trabalho com as ideias ingênuas de modelagem e algoritmos.

1.2 Modelagem Matemática

1.2.1 Modelagem

A ideia de modelagem pode ser exemplificada ao se pensar em um escultor, que de frente a um punhado de argila sem forma, depois de algum tempo, com o uso da imaginação e criatividade, faz com que a argila passe a ser um lindo objeto com forma e sentido.

Idealizar algo e trabalhar para que se torne possível é uma característica humana. A criação da roda, vista por muitos como a maior descoberta de todos os tempos, não era o objetivo principal ao ser criada. O homem não imaginou a roda e depois pensou no que fazer com ela. Na verdade a roda serviu como modelo para resolver um problema maior, facilitar o transporte de cargas.

A esse aspecto em ([5], p.11) encontra-se uma definição: "o modelo é uma imagem que se forma na mente, no momento em que o espirito racional busca compreender e expressar de forma intuitiva uma sensação, procurando relacioná-la com algo já conhecido".

A Modelagem Matemática é o meio pelo qual ocorre a passagem de uma situação real para a matemática, ou seja, ao se procurar um modelo representativo para um problema, estamos modelando a realidade traves de Matemática. Segundo ([6], p.18):

> [...] A Modelagem Matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e tomar decisões [...]

Em ([5], p.13) encontra-se um procedimento que descreve a passagem da realidade para Matemática através de três etapas: Interação, Matematização e Modelo Matemático.

Etapa 1. Na **Interação** contempla-se o reconhecimento da situação problema por meio da familiarização do assunto modelado.

Etapa 2. A **Matematização** é a transformação do problema em matemática, nesta etapa, deve ocorrer a transferência clara das informações, como as variáveis, símbolos e as relações existentes, para que então se busque uma solução. Essa é a parte mais complicada.

Etapa 3. O **Modelo Matemático** é a validação de confiabilidade da Modelagem. Isso ocorre quando o problema é de difícil modelagem e o modelo escolhido pode não ser o melhor e não reflita um resultado aproximado para o problema.

Esquema do processo de modelagem matemática via grafos:

$$\overbrace{\text{problema} \longrightarrow \text{modelo} \longrightarrow \text{matemática}}^{\text{Modelagem por grafo}}$$

Neste trabalho o estudo com grafos busca incentiva a resolução de problemas com auxílio da modelagem, para isto, buscou-se apresentar uma teoria que possibilitassem este processo, mostrando assim a importância do grafo como modelo matemático. Essa metodologia evitará a busca por outros modelos o que em muitos casos é algo complexo (isso significa que não serão utilizado a terceira etapa de modelagem).

As outras etapas de uma modelagem: Interação e Matematização, foram utilizadas nos problemas deste trabalho, somente como facilitador formal da apresentação do tema principal que é o grafo. Não se pretende oferecer métodos elaborados de Modelagem Matemática, portanto o objetivo é de simplesmente mencionar a passagem dos problemas para os grafos, sem transgredir a modelagem e os objetivos do texto que é o estudo dos grafos no Ensino Médio. Esta forma de pensar é reforçada em ([6], p.23)

> [...] No âmbito da Educação Básica, o trabalho com os modelos matemáticos, na perspectiva de Modelagem assumida não constitui prioridade. A maioria dos conteúdos trabalhados, nesse nível de escolaridade, vale-se de modelos já prontos: funções, equações lineares ou quadráticas, fórmulas das áreas de figuras planas e espaciais. Na perspectiva de Modelagem trabalhada modelo pode ser entendido como uma representação [...]

1.2.2 Grafos como Modelo Matemático

Um modelo matemático é o objeto que substitui em resumo o problema, ou seja, o grafo que modela a situação será estudado matematicamente para fornecer uma resposta para o problema. O famoso problema das pontes de Königsberg visto com mais detalhe na seção 3.2 é um exemplo de problema que possui um grafo como modelo. O matemático Leonard Euler diante da situação:

> *A cidade era dividida em quatro distritos e por braços do rio Pregel, que eram conectados por sete pontes. Ao caminhar por ali, atravessando essas pontes, surgiu a questão: é possível fazer um passeio de modo que se atravesse todas as pontes exatamente uma única vez? (retirado de [7])*

Mesmo sem a terminologia simbólica que existe hoje sobre grafo, e utilizando somente os elementos básicos de sua composição (vértices e arestas), Euler obteve o diagrama da Figura 1.1.

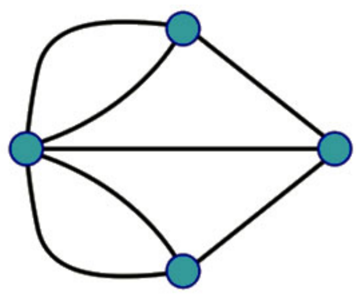


Figura 1.1: Grafo

Para obter o modelo (grafo), Euler fez uma interação entre o problema real e matemática (teoria dos grafos). Ele observou que cada distrito poderia ser representado por um vértice e cada ponte por uma aresta. Assim ele conseguiu construir o grafo da Figura 1.1.

Observa-se que as informações do problema são transferidas para o grafo, este passa a ser o objeto de estudo. A ideia de procurar um modelo que represente o problema em muitos casos facilita a resolução do problema, visto que o modelo possui uma teoria matemática bem definida e estruturada. Durante a apresentação deste trabalho a teoria de grafos é apresentada com problema que motivem e possibilitem a transferência para um grafo.

1.2.3 Algoritmos

Com os computadores a Teoria dos Grafos encontrou espaço para se desenvolver e crescer rapidamente. O trabalho com algoritmos possibilitou à teoria um alcance maior para testes de verificação. Segundo ([8], p.13), "um algoritmo é um procedimento, aplicado em etapas repetitivas e com eventuais desvios lógicos".

No pós-guerra os algoritmos tiveram um papel importante, motivados principalmente pela corrida armamentista do período da Guerra Fria. Países como os Estados Unidos e União Soviética buscavam armas tecnologicamente eficientes, pois acreditavam que tais vantagem poderiam ser a salvação caso iniciassem outra guerra. A implementação de algoritmos possibilitou a resolução com sucesso de problemas antes não alcançáveis. Um exemplo muito importante envolvendo a parceria grafo algoritmo encontra-se na prova computacional do teorema das quatro cores dada por Appel e Haken em 1976.

Ao longo deste trabalho muitas soluções serão apresentadas por algoritmos executados em grafos, com a sutileza de evitar a simbologia e os comandos próprios da linguagem algorítmica. Essa metodologia segue o mesmo princípio de aprender a tabuada mesmo sabendo que existem calculadoras. Neste caso o mais importante é encontrar um procedimento lógico para solução, melhorando o **pensamento organizado**. Uma das dificuldades encontradas por alunos durante a resolução de um problema é manter um pensamento organizado. Neste ponto os processos algorítmicos podem ser uteis, pois contribuem com as etapas da resolução do problema. Apresentamos um esquema de um processo de resolução completa:

$$\overbrace{\text{Problema} \longrightarrow \text{Grafo}}^{\text{Modelagem por grafo}} \longrightarrow \overbrace{\text{Algoritmo} \longrightarrow \text{Solução}}^{\text{Computação}}$$

Este capítulo procurou justificar o pensamento da escolha do tema, mostrando um panorama do estudo de grafos e do Ensino de Matemática no Brasil, assim como a metodologia utilizada com modelagem e algoritmos. Nos próximos capítulos faremos um estudo sobre a Teoria de Grafos para o Ensino Médio.

2 O conceito de Grafos

2.1 Grafo e Subgrafo

Partindo de um problema simplesmente recreativo mas que ajudará a defini-lo, o grafo mostrará seu lado prático na resolução de problemas. Essa iniciativa segundo Fomin é sugerida para os professores que irão iniciar seus alunos aos estudos dos grafos ([9], p.47):

> [...] O conceito de grafo só deveria ser introduzido depois de diversos problemas [...], que envolvem a utilização de um grafo para representar o problema. É importante que os estudantes compreendam logo que o mesmo grafo pode ser desenhado de maneiras diferentes. [...]

Considere o problema abaixo retirado de [9]:

Um tabuleiro com a forma de uma cruz é obtido de um tabuleiro 4×4 *retirando-se as quatro quinas (veja a Figura 2.1). Um cavalo*[1] *pode se mover neste tabuleiro de modo a passar por todos os quadrinhos exatamente uma vez e terminar no quadrado de onde saiu?*

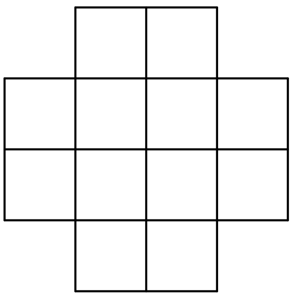


Figura 2.1: Tabuleiro 4×4

É quase certo que ao iniciar a resolução do problema acima procure-se sua solução por meio da tentativa, ou seja, tentar simular os movimentos do cavalo a partir de um

[1] Cavalo: peça do tabuleiro do xadrez que se movimenta em L.

das casas do tabuleiro. Tal iniciativa logo parecerá impossível. Segundo ([10], p.94), “um detalhe visualizado em nossa imaginação pode ser esquecido, mas o mesmo detalhe desenhado em um papel ai permanece, de tal maneira que, quando a ele voltamos, relembramos as observações anteriores”.

O que Polya alerta é que ao tentar simular o passeio do cavalo pelas casas do tabuleiro, em algum momento futuro cometer-se-á algum erro, ou ficará com impressão que se esqueceu de algo, por não confiar em detalhes anteriores. Ainda segundo ([10], p.94), “Figuras são, não apenas o objetivo dos problemas geométricos, como também um importante auxílio para problemas de todos os tipos, que nada apresentam de geométrico na sua origem”.

A sugestão de Polya será adotada em quase todo este trabalho, tentar modelar a situação através de um desenho, neste problema em questão basta-se enumerá os quadrinhos conforme a Figura 2.2 e escolher um ponto de partida para a peça do cavalo iniciar seu percurso. O diagrama da Figura 2.3 ilustra os movimentos do cavalo. Veja que existe um caminho ligando os pontos de tal forma que independentemente de onde o cavalo parta ele sempre poderá chegar a origem do seu percurso. Portanto a resposta para o problema acima é **sim**.

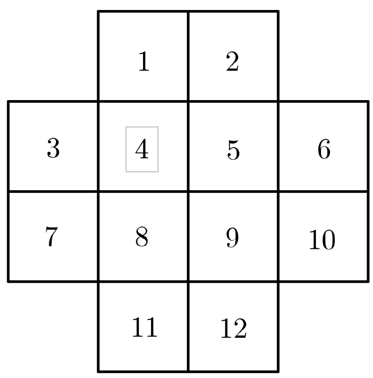


Figura 2.2: Enumeração do tabuleiro

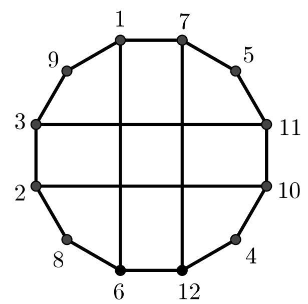


Figura 2.3: Grafo que modela o problema

Chama-se este diagrama de **grafo**. Os pontos são chamados de **vértices** do grafo e os segmentos são suas **arestas**. As arestas podem ser segmentos de retas, arcos ou uma linha curva qualquer o importante é ligar dois vértices.

Evidentemente para um matemático ou um professor de matemática tal definição não seria suficiente para conceituar grafo, entretanto para um primeiro contato no Ensino Médio seria o bastante. O rigor simbólico em um primeiro momento pode ser deixado de lado, priorizando-se o reconhecimento dos elementos que compõem um grafo, apresenta-lo através de desenho com vértices e arestas já seria suficientemente rigoroso.

Definição 2.1. *Define-se **grafo** G como um par de conjuntos (V, A), onde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto de vértices e $A \subset \{(v_i, v_j)/v_i, v_j \in V\}$ é o conjunto de aresta (uma aresta é um par (v_i, v_j) de vértices).*

Outras definições importantes de grafos: Um **laço** é um vértice ligado a ele mesmo por uma aresta (Figura 2.4)[2]. Um **multigrafo** é um grafo que possui vértices ligados por mais de uma aresta (Figura 2.5). Grafos sem laços ou arestas múltiplas[3] são chamados de **grafos simples**.

Figura 2.4: Laço

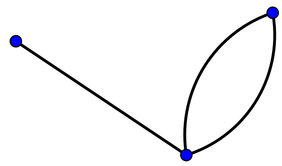


Figura 2.5: Multigrafo (com aresta múltipla)

Se todos os vétices e arestas de um grafo G' são os mesmos de alguns de G, então G' é um subgrafo de G.

Definição 2.2. *Considere os grafos $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$. Se $V' \subset V$ e $A' \subset A$ dizemos que G' é um **subgrafo** de G, em síbolos temos $G' \subset G$ e falamos que G contém G'.*

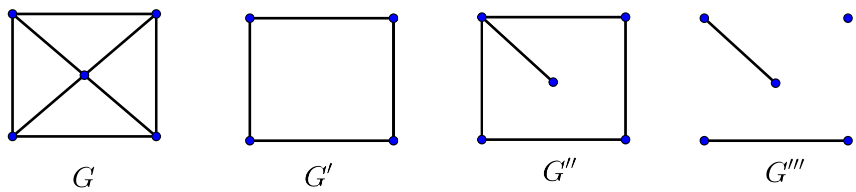


Figura 2.6: Subgrafos de G

Na Figura 2.6, temos que G', G'' e G''' são subgrafos de G.

Um grafo é **completo** quando todo par de vértices pertencentes a ele é ligado por uma aresta. Em símbolos, K_n representa um grafo completo com n vértices. Na figura 2.7, tem-se K_5.

[2]Um mesmo vértice pode possuir varios laços.
[3]Um conjunto de arestas saindo de um único vértice.

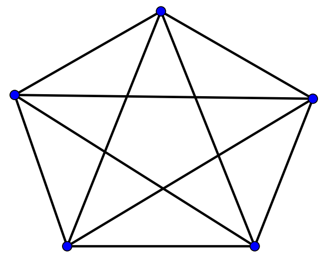


Figura 2.7: Grafo completo K_5

2.2 Grau de um vértice

Segundo ([9], p.46), "a única coisa importante sobre um grafo é quais os vértices que estão conctados e quais os que não estão".

Esta seção será dedicada a aspectos enumerativos ou de contagem envolvendo vértices de um grafo. Considere o exemplo abaixo puramente ilustrativo.

Em uma escola está ocorrendo um campeonato interclasses. As equipes são $1A$, $1B$, $2A$, $2B$, $3A$ e $3B$, suponhamos que houve alguns confrontos, foram eles: $1A$ e $1B$, $1A$ e $2A$, $1A$ e $3A$, $2A$ e $3A$, $2A$ e $3B$, $2A$ e $2B$, $2B$ e $3B$, e por fim $3A$ e $3B$. Obtendo o grafo dos confrontos na Figura 2.8.

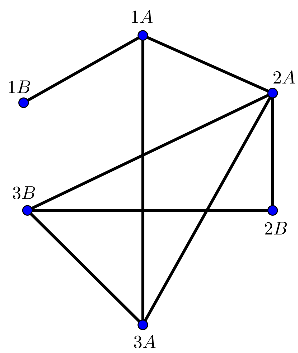


Figura 2.8: Interclasse

Com base neste grafo pode-se definir o **grau de um vértice**.

Definição 2.3. *O* ***grau de um vértice*** *é determinado pela quantidade de segmentos que parte deste vértice.*

Assim por exemplo, o vértice representado pelo $1A$ tem grau 3, o $2A$ tem grau 4 e $1B$ tem grau 1. Em símbolos, $d(v_i)$ representará o grau do vértice v_i, ou seja,

$d(1A) = 3$, $d(2A) = 4$ e $d(1B) = 1$. Um vértice de grau 0 é dito **isolado** e um vértice de grau 1 é dito **pendente**. O menor grau de um vértice em G é o **grau mínimo**, e escreve-se $\delta(G)$, e o maior é o **grau máximo**, com $\Delta(G)$, assim temos $\delta(G) = 1$ e $\Delta(G) = 4$ para o grafo do problema. Em um vértice com laço o grau é no mínimo dois, pois para o laço deve-se considera grau dois, um ao inicia-lo e outro ao finaliza-lo.

Ainda segundo ([9], p.49), "dizemos que um vértice é ímpar se seu grau for ímpar. Um vértice de grau par é dito um vértice par".

Seguem dois exemplos de aplicações retirados de [9] que servirão de motivação para os próximos teoremas.

> *Em Interiorana existem 15 telefones. Eles podem ser conectados por fios de modo que cada telefone seja conectado a exatamente cinco outros?*

A resolução deste problema e de outros correlatos a estes, são assegurados pelo próximo resultado.

Teorema 2.1. *(Euler) Em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos, no grafo $G = (V, A)$*

$$\sum_{v_i \in V} d(v_i) = 2|A|$$

onde $|A|$ denota o número de elementos do conjunto A.

Demonstração. Por contagem dupla vamos considerar $a = (v, u)$ uma aresta de G, observe que a é contada exatamente duas vezes, uma vez para o vértice v e outra para u, assim temos duas vezes a aresta ao somarmos o grau dos vértices. □

Antes de tentar efetivamente resolver o problema acima, vale ressaltar uma técnica de demonstração muito valiosa para o matemático conhecida por redução ao absurdo, segundo ([10], p.60), "a demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia".

Para resolução do problema anterior nos apoiaremos na técnica de redução ao absurdo.

Suponhamos que a situação do problema acima fosse possível, ou seja, considere os telefones como os vértice de um grafo e as ligações suas arestas, temos que cada telefone é conectado a outros cinco, assim cada vértice tem grau 5, pelo teorema 2.1 em um grafo, a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Daí o nosso número de ligações é dado por $\dfrac{15 \cdot 5}{2}$ que não é um número inteiro, logo tal grafo não existe.

Prosseguindo com a apresentação de novos resultados que possibilitarão a resolução de problemas e o desenvolvimento da teoria de grafo, vejamos mais um problema retirado de [9].

Uma turma tem 30 alunos. É possível que nove deles tenham 3 amigos cada (na turma), onze tenham 4 amigos e dez tenham 5 amigos ?

Problemas como este podem ser resolvidos facilmente, a partir da utilização do teorema abaixo.

Teorema 2.2. *(Euler) Em todo grafo, o número de vértice com grau ímpar é par.*

Demonstração. Pelo teorema anterior a soma dos graus dos vértices de um grafo tem que ser divisível por 2, logo essa soma tem que ser par e como a soma de ímpares só resulta em um par se as parcelas de números impares forem par. Daí segue o teorema. □

Assim sendo, a resposta do nosso problema é **não**, pois se isso fosse possível teríamos um grafo com 30 vértices representando os alunos, onde nove destes vértices estariam cada um ligados a 3 outros vétices e dez a outros 5, ou seja teríamos dezenove vértices com grau ímpar, contrariando o teorema. Daí a partir desta simples, mas poderosa observação resolvem-se inúmeros problemas.

O caminho daqui para frente será utilizar estes problemas juntamente com seus teoremas como estratégia para os próximos que surgirem. Segundo ([10], p.41), "ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anterior resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo".

Definição 2.4. *Um grafo é **regular** (k-regular) quando todos os seus vértices têm o mesmo grau k.*

Dessa forma na Figura 2.9, tem-se um grafo 3-regular.

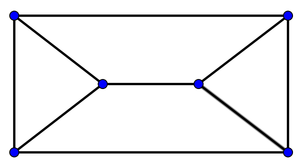


Figura 2.9: Grafo 3-regular

2.3 Isomorfismo

Uma pergunta feita por quase todos que estudam grafo pela primeira vez é se existem formas diferentes de desenhar um mesmo grafo sem perder suas propriedades e características. A resposta a essa pergunta é sim, tais grafos serão ditos isomorfos, ou seja, que existe um isomorfismo entre eles. Mas para isso deve-se seguir algumas exigências.

Definição 2.5. *Dois grafos desenhados de forma diferente, são ditos **isomorfos** se eles tem o mesmo número de vértices digamos n e numerando todos os vértices de 1 a n verificamos que os correspondentes vértices do primeiro grafo que estão ligados por uma aresta também estão ligados no segundo grafo.*

Exemplo 2.1. Considere os dois grafos da Figura 2.10 observe que eles possuem o mesmo número de vértices e que as arestas são formadas pelos mesmos pares de vértices, ou seja, (v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_4) e (v_4, v_5), isso implica que os dois são isomorfos.

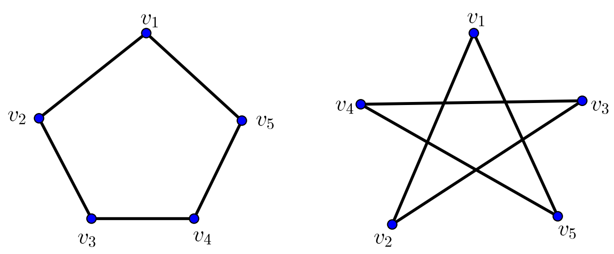


Figura 2.10: Grafos isomorfos

Cabe ao professor logo após definir grafo e suas componentes vértice e aresta, definir o conceito de isomorfismo, pois isso ampliará a visão e facilitará o desenho do grafo para o alunos modelar e resolver o problema. Segundo ([9], p.150):

> [...] Intuitivamente, os estudantes compreendem bem quando os grafos são "idênticos". Mas é interessante ouvir suas próprias tentativas independentes de dar uma definição precisa de isomorfismo. Algumas dessas "definições" podem envolver algo como "grafos são isomorfos (idênticos) se tiverem o mesmo número de vértices e arestas" [...]

2.4 Passeio

As próximas definições são de fundamental importância para o encandeamento lógico do estudo de grafo. Após entender que um grafo é formado por vértices e arestas e que o mesmo pode ser desenhado de diferentes formas sem perder suas características e propriedades, o professor poderá questionar seus alunos sobre as possibilidades de se fazer um percurso de um vértice a outro passando por arestas do grafo. Este questionamento pode ser feito com o objetivo de incentivar a possibilidade de modelar situações práticas do cotidiano.

Um percurso sobre um grafo será definido como sendo um passeio e este por sua vez, será classificado em **caminho**, **ciclo** ou somente **passeio** quando não atender as outras classificações.

Definição 2.6. *Um* ***passeio*** *P de comprimento $n \geq 1$ em um grafo G é uma sequência*

$$P = (v_0, v_1, ..., v_n)$$

de vértices (não necessáriamente distintos) de G tal que v_{i-1} é adjacente a v_i com $1 \leq i \leq n$. O passeio P é ***fechado*** *se $v_0 = v_n$.*

Algumas passagens na definição devem ser esclarecidas pelo professor. Por exemplo, um vértice é **adjacente** a outro se eles forem ligados por uma mesma aresta. No primeiro grafo (Figura 2.12) v_0 é adjacente a v_1, mas não é a v_3. Para que ocorra um passeio sobre um grafo é necessário que todos os vértices possam ser percorridos (digamos por um lápis).

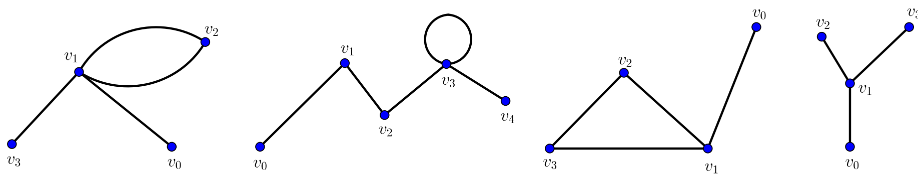


Figura 2.11: Passeios

2.4.1 Caminho

Definição 2.7. *Um* ***caminho*** *em um grafo é um passeio tal que todos os vértices são distintos.*

Exemplo 2.2. Considere os grafos da Figura 2.12, tais grafos caracterizam um caminho, observe que ao realizarmos uma passeio sobre os grafos percorremos todos os vértices somente uma única vez, ou seja no primeiro grafo temos $P = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ e no segundo grafo $P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$.

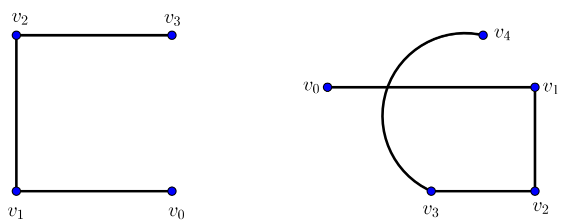


Figura 2.12: Caminho

Na Figura 2.11 temos quatro grafos que não são caminhos. No primeiro grafo temos o passeio $P = (v_0, v_1, v_2, v_1, v_3)$, não é um caminho, pois v_1 foi repetido no percurso, isso ocorre por ele ser um multigrafo. Já no segundo o passeio $P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_3, v_4)$, não é um caminho, pois o laço em v_3 faz usá-lo duas vezes. No terceiro e quarto grafos temos os passeios $P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_1)$ e $P = (v_0, v_1, v_2, v_1, v_3)$ que não são caminhos.

2.4.2 Ciclos

Definição 2.8. *Um **ciclo** em um grafo é um passeio fechado em G, de comprimento $n \geq 3$.*

Exemplo 2.3. Considere os grafos da figura 2.13, tais grafos carcterizam um ciclo, observe que ao realizarmos uma passeio sobre os grafos existe um somente um vértice visitado mais que uma vez (no caso $v_0 = v_n$), ou seja, no primeiro grafo temos $P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_0)$ e no segundo grafo $P = (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_0)$.

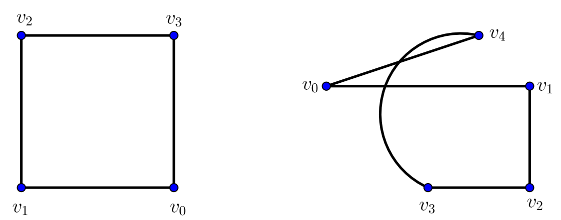


Figura 2.13: Ciclo

Voltando a Figura 2.11 temos quatro grafos que não são ciclo. Entretanto o que ocorre com as arestas múltiplas e o laço. Uma das condições para um passeio ser um ciclo é que seu comprimento seja $n \geq 3$, isso significa pelo menos três arestas e três vértices, logo no primeiro e no segundo grafo as arestas múltiplas e o laço não são ciclos, pois tem comprimentos respectivamente dois e um. No caso do terceiro grafo temos apenas um subgrafo que é um ciclo, mas o grafo não é. No caso do quarto grafo é trivial não ser um ciclo.

2.5 Conectividade

Um grafo é dito conexo quando existe uma conexão entre quaisquer dois de seus vértices, ou seja, existe um caminho que leva qualquer vértice a outro vértice passando pelas arestas do mesmo grafo, caso contrário, diz-se que o grafo é desconexos. Considere o problema abaixo retirado de [9].

> *O país dos Sete tem 15 cidades, cada uma delas ligadas a pelo menos 7 outras. Prove que é possível ir de qualquer cidade para qualquer outra, possivelmente passando por algumas cidades no meio do caminho.*

A resolução deste problema está intimamente ligada a noção de conectividade de um grafo, uma vez que se pode modelar a situação fazendo com que as cidades sejam os vértices do grafo e o fato ir de uma cidade à outra sejam suas aresta.

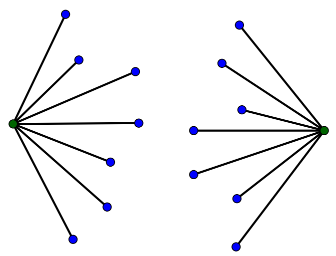


Figura 2.14: País dos Sete

Suponhamos que não exista um caminho entre duas destas cidades. Como cada uma está conectada a pelo menos 7 outras cidades teremos 14 cidades distintas, pois por hipótese não existe um caminho entre as duas cidades. Entretanto para que isto ocorra seriam necessárias 16 cidades, um absurdo, pois temos somente 15, e neste caso uma das duas cidades coincidiria com alguma das outras 14 cidades fazendo como que exista um caminho entre as duas. Considere a Figura 2.14 para um melhor entendimento.

Definição 2.9. *Um grafo é dito* ***conexo*** *se dados dois vértices quaisquer, existe um caminho (uma sequência de arestas, cada uma das quais começando no ponto final da anterior) ligando os dois vértices.*

Exemplo 2.4. Considere os dois grafos da Figura 2.15, observe que qualquer vértice dos grafos se conecta com os demais, ou seja, existe um caminho entre eles, por exemplo nos dois casos v_1 se conecta com v_2, v_3, v_4 e v_5, isso caracteriza a conectividade.

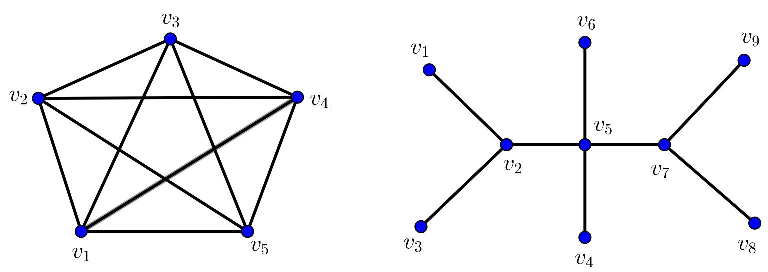


Figura 2.15: Conexo

Definição 2.10. *Um grafo é dito* ***desconexo*** *se ele for formado por "pedaços" de grafos todos eles conexos. (ou seja, se não for conexo).*

Exemplo 2.5. Considere o grafo da Figura 2.16, parece estranho dizermos o grafo abaixo, pois o que na verdade vemos são dois grafos e um vértice sem aresta, entretanto é isso que caracteriza um grafo ser desconexo, esses "pedaços" são chamadas de **componetes conexas** do grafo. Além do mais podemos também dizer que um grafo conexo possui somente uma componente conexa.

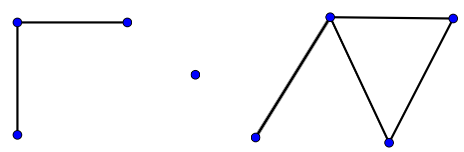


Figura 2.16: Desconexo

Para uma melhor absorção do que venha a ser e como utilizar a noção de grafo desconexo. Considere o problema abaixo retirado de [9].

> *Na Terra do Nunca só existe um meio de transporte: tapete mágico. Vinte e uma linhas de tapetes servem a capital. Uma única linha voa para Muitolonge e cada uma das outras cidades é servida por exatamente 20 linhas de tapetes mágicos. Mostre que é possível viajar de tapete mágico da capital para Muitolonge (talvez mudando de companhia no meio do caminho).*

Uma solução para este problema é separar o grafo em componentes conexas e utilizar o teorema 2.2.

Considere a componente conexa que contenha a capital. Precisa-se provar que tal componente contenha Muitolonge, caso contrário não seria possível um percurso da Capital para Muitolonge. Para efeito de demonstração suponhamos que Muitolonge não esteja em tal componente conexa. Assim por hipótese teríamos 21 arestas partindo de um vértice (Capital) e 20 arestas partindo de todos os outros vértices (as outras cidades). Portanto neste grafos o número de vértices com grau ímpar é ímpar, um absurdo pelo teorema 2.2, logo é possível ir da Capital para Muitolonge.

A abordagem até este ponto é suficiente para que o aluno entenda os conceitos iniciais sobre Grafos, algumas características e definições próprias da teoria. A parti daqui outros conceitos mais elaborados podem ser introduzidos pelo professor sem comprometer o pensamento lógico e prático dos Grafos. Isso será feito no próximo capítulo.

3 Problemas de grafos para o Ensino Médio

3.1 Problema de conexão mínima

Estudo sobre Árvores

Uma empresa afim de minimizar o custo com a instalação de seus computadores encontra-se com o seguinte problema:

> *Um conjunto de 8 computadores encontram-se a uma certa distância um do outro, cada par de computadores deverá ser ligado usando uma quantidade de fibra ótica, encontrar uma rede que conecte-os usando a menor quantidade de fibra ótica possível.*

Problemas como este são conhecidos por **problema de conexão mínima** e podem ser resolvidos utilizando uma **árvore geradora mínima** um grafo não orientado onde os vértices representam os computadores, as arestas representam as possiveis conexões e o peso/custo em cada aresta representando a quantidade de fibra ótica necessária.

A **Teoria das Árvores** surgiu em 1847 com Kirchhoff ao utilizar modelos de grafos para estudar circuitos elétricos. Em 1869 Jordan estudou árvores de um ponto de vista estritamente matemático. Antes de tentar resolver o problema algumas definições e teoremas serão de fundamental importância.

Definição 3.1. *Uma* ***árvore*** *é um grafo conexo sem ciclo em qualquer de seus subgrafos.*

Na Figura 3.1, observa-se que o primeiro grafo segue as condições apresentadas na definição de árvore, um grafo conexo e sem ciclos. Entretanto os outros dois grafos não podem ser uma árvore, pois o segundo possui um ciclo (em vermelho) e o terceiro possui um vértice (em laranja) que não se conecta com nenhum outro do grafo.

É comum usar árvores com um vértice especial, chama-se **raiz** de uma árvore qualquer vértice de grau 1. Os outros vértice de grau 1 serão chamados de **folha** da árvore. Considre a Figura 3.2

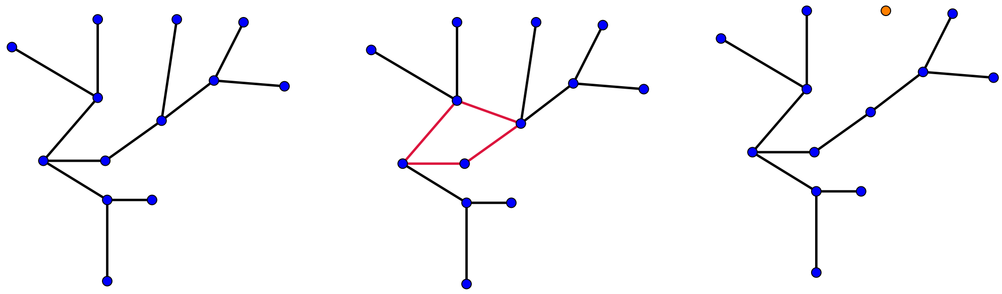


Figura 3.1: Árvores e não árvores

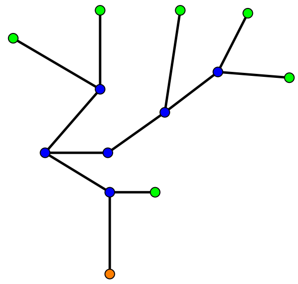


Figura 3.2: Uma árvore com raiz e folhas

Definição 3.2. *Uma árvore com uma raiz determinada é chamada de* ***árvore enraizada****.*

Teorema 3.1. *Toda árvore com v vértices tem $v-1$ arestas.*

Demonstração. Intuitivamente se tiver um único vértice não teremos nenhuma aresta, com dois vértices teremos uma única aresta, segue que a cada passo a diferença de 1 é mantida (Figura 3.3). □

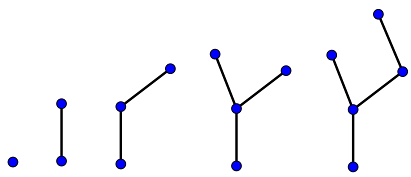


Figura 3.3: Árvores

Dada uma árvore com v vértices e a arestas, ao removermos uma aresta α o grafo pode ou não continuar conexo, se ele ficar desconexos a aresta α representará uma **aresta de corte**. Após a retirada de uma aresta da árvore se suas componentes conexas forem árvores este grafo será chamado de **floresta** (Figura 3.4).

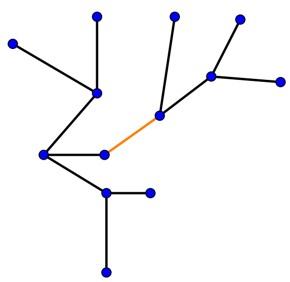


Figura 3.4: Árvores virando floresta

Ao retirarmos arestas de uma árvore que não representam arestas de corte obtemos um subgrafo chamado **árvore geradora**.

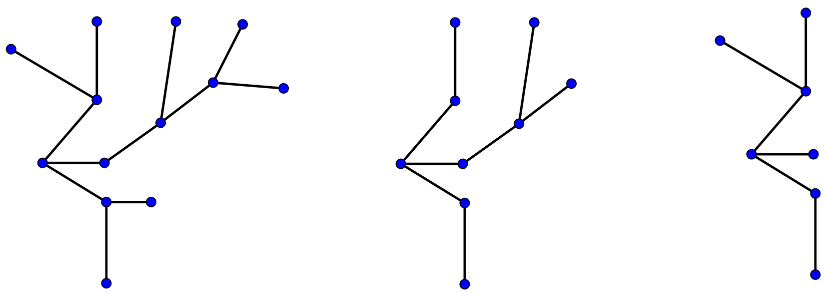


Figura 3.5: Uma árvore e suas árvores geradoras

Na Figura 3.5 observa-se que os dois últimos grafos são ambas árvores geradoras da primeira, assim podem-se ter várias árvores geradoras para uma mesma árvore. O estudo da melhor árvore geradora é de fundamental importância prática.

Na modelagem do problema inicial pretende-se encontrar um subgrafo gerador (que contém todos os vértices do grafo original), conexo (para garantir a ligação de todos os computadores) e cuja soma dos custos de suas arestas seja a menor possível.

O **algoritmo de Kruskal** fornece uma solução ótima para o problema da conexão de peso mínimo. Resumidamente, *o algoritmo escolhe as arestas de menor peso, excluindo aquelas que formem ciclos e finalizando quando todos vértices forem conectados.*

Este algoritmo foi descrito pela primeira vez por Kruskal em 1956, no mesmo artigo onde ele redescobriu o algoritmo de Jarnik. Este algoritmo também foi redescoberto

Figura 3.6: Joseph B. Kruskal, 1928-2010

em 1957 por Loberman e Weinberger, mas de alguma forma evitado ser renomeada depois deles. Segundo os Arquivos de Matemáticos americanos, Dolph Briscoe Center for American History, The University of Texas at Austin (2012):

> Joseph B. Kruskal, Jr. nasceu em 1928, na cidade de Nova York. Ele completou seu Bacharelado (1948) e Mestrado (1949), ambos em Matemática, na Universidade de Chicago. Obteve seu PhD em Matemática na Universidade de Princeton, em 1954. Embora formado em matemática pura, o trabalho de Kruskal na Bell Labs encorajou-o a explorar as estatísticas, ciência da computação, e várias outras áreas da Matemática aplicada. Suas principais áreas de pesquisa e publicação incluíam: combinatória; conjuntos parcialmente-bem-ordenados (o tema de sua tese de doutorado), escalonamento multidimensional (MDS) e suas aplicações em diversos campos, particularmente lingüística, psicometria e comparação de sequências.

Passando a resolução do problema aplicando Kruskal, o grafo que representa a modelagem do problema inicial está representado na Figura 3.7, os vértices são representados pelos computadores (c_1, c_2, ..., c_8), e as arestas representam as possíveis ligações entre os computadores, os valores em cada grafo representam os custo/pesos da operação.

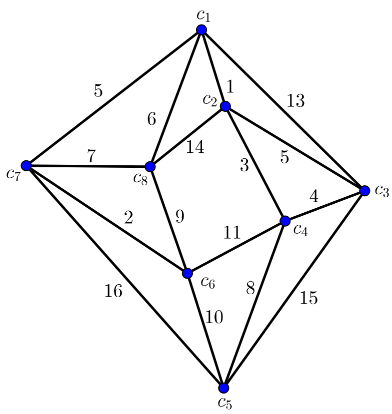


Figura 3.7: Grafo com respectivos pesos de fibra ótica

Pela idéia de Kruskal, deve-se escolher a aresta de menor valor, o que inicialmente não será problema visto que duas arestas não são suficientes para se forma um ciclo. Daí escolhe-se as arestas (c_1, c_2) e (c_6, c_7), com pesos/custo de 1 e 2 respectivamente (Figura 3.8).

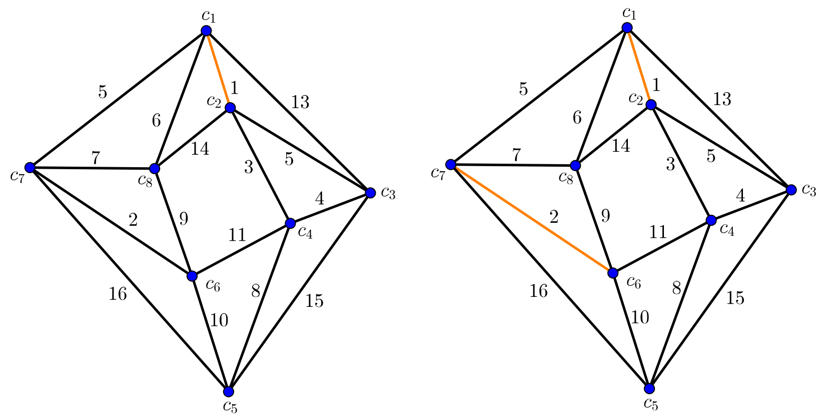


Figura 3.8: Passos 1 e 2 do algoritmo de Kruskal

Seguindo com os procedimentos do algoritmo, marca-se mais dois vértices, agora deve-se ter cuidado, pois a formação de ciclo pode ser realizada o que invalida o uso de Kruskal, marca-se (c_2, c_4) e (c_3, c_4), com pesos/custo de 3 e 4 respectivamente (Figura 3.9).

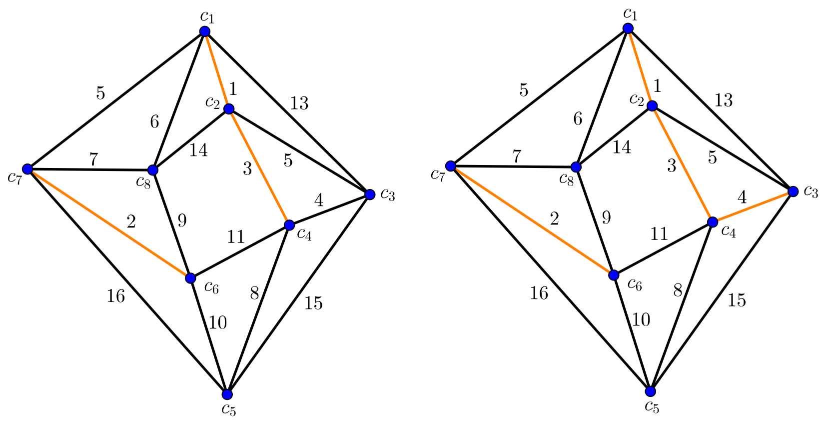


Figura 3.9: Passos 3 e 4 do algoritmo de Kruskal

A quinta aresta a ser incluída apresenta duas situações que conduzem ao mesmo peso/custo (Figura 3.10):

- (c_2, c_3) forma ciclo;

- (c_1, c_7) não forma ciclo,

Dai o algoritmo escolhe aquele que não forma ciclo, ou seja, (c_1, c_7) somando peso/custo 5.

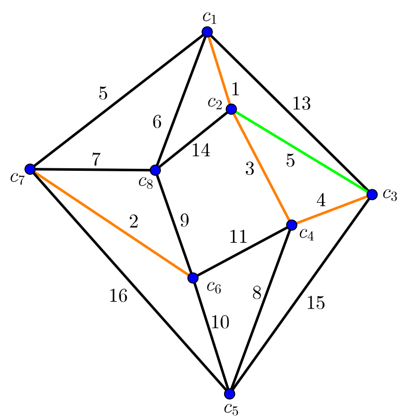


Figura 3.10: Passo 5 do algoritmo de Kruskal e formação de ciclo

Sem dificuldades o algoritmo, inclui a sexta aresta (c_1, c_8), com peso/custo 6 (Figura 3.11).

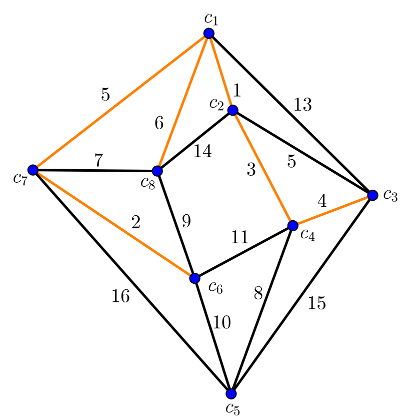


Figura 3.11: Passo 6 do algoritmo de Kruskal e formação de ciclo

A sétima aresta a ser incluída também segue duas situações, mas desta vez conduzem a peso/custo diferentes, vejamos a melhor escolha:

- O algoritmo procura primeiro o menor peso/custo, logo a escolha é por (c_7, c_8), entretanto ele fecha um ciclo, assim o algoritmo exclui (Figura 3.11);

- O algoritmo segue e escolhe (c_4, c_5) com um peso/custo maior, mas sem ciclo.

Dai o algoritmo escolhe aquele que não forma ciclo, ou seja, (c_4, c_5) somando peso/custo 8 (Figura 3.12).

Com todos os vértices agora conectados, sem formação de ciclo, temos a melhor árvore, ou seja, uma árvore geradora mínima, um grafo não orientado, onde os vértices (computadores), tem as arestas com menor peso/custo de conexões. Portanto temos um ótimo peso/custo total de 29 representando a quantidade de fibra ótica.

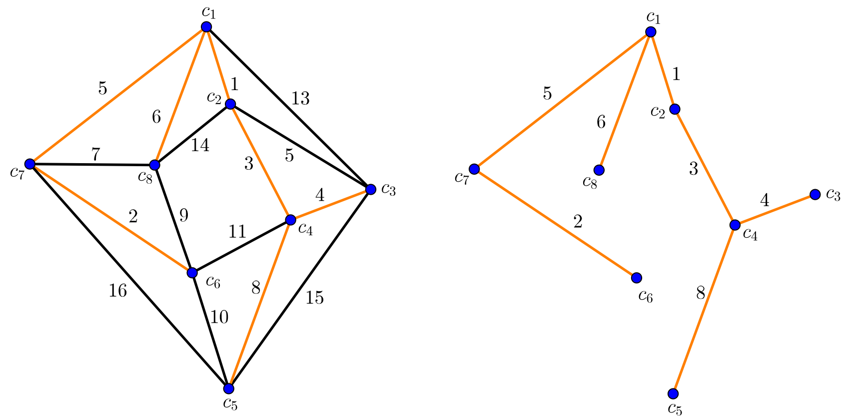


Figura 3.12: Passo 7 do algoritmo de Kruskal e formação da melhor árvore geradora mínima

O resumo interativo do processo do algoritmo de Kruskal encontra-se na tabela 3.1.

Aresta	**Comentário**	**Valor**
(c_1, c_2)	Inclui a 1ª aresta	01
(c_6, c_7)	Inclui a 2ª aresta	02
(c_2, c_4)	Inclui a 3ª aresta	03
(c_3, c_4)	Inclui a 4ª aresta	04
(c_2, c_3)	Forma ciclo	–
(c_1, c_7)	Inclui a 5ª aresta	05
(c_1, c_8)	Inclui a 6ª aresta	06
(c_7, c_8)	Forma ciclo	–
(c_4, c_5)	Inclui a 7ª aresta	08
	Custo total	29

Tabela 3.1: Processo do algoritmo de Kruskal

Observações metodológicas

A resolução de problemas de conexão mínima usando Kruskal é uma excelente estratégia para motivar e aborda o estudo da Teoria das Árvores, visto que a facilidade de entender o processo de implementação do algoritmo fixa as idéias sobre árvores.

Com base no estudo feito anteriormente o ensino de árvores pode ser iniciado na primeira série do Ensino Médio. Para um estudo isolado o professor pode seguir o roteiro abaixo:

1. Definições de grafos e subgrafo + exemplos (50 min.) (capitulo 2. Seção 1).

2. Definição de passeio fechado (ciclo) + exemplos (50 min) (capitulo 2. Seção 4, 5, 6).

3. Definição de conectividade e componente conexa + exemplos (50 min) (capitulo 2. Seção 7).

4. Explicação sobre modelagem e algoritmo (30 min) (Capitulo 1. Seção 2).

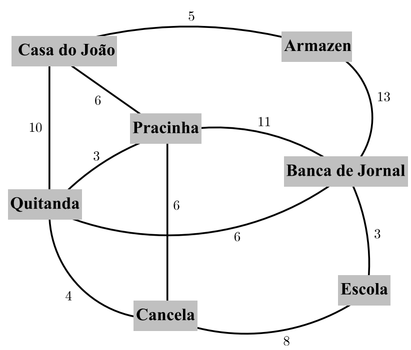
5. Estudo de árvores (4 aulas de 50 min) (Capitulo 3. Seção 1).

6. Exercícios para fixação use [9].

Sobre as escolhas dos problemas o professor pode optar por problemas com grafos já modelados, buscando utilizar o algoritmo de Kruskal para obter uma árvore geradora mínima. Para turmas mais avançadas pode-se usar problemas ainda não modelados, objetivando a busca de um modelo por grafo para só depois usar o algoritmo de Kruskal ou qualquer teorema visto neste texto. Essa última forma de abordagem foi a utilizada neste trabalho.

Modelo de Atividade

1. Encontre o menor caminho que liga a casa de João a todos os outros pontos. (Problema retirado de [11]).



2. Uma rede de vôlei tem a forma de um reticulado retangular de dimensões 50×600. Qual é o número máximo de trechos unitários que podem ser cortados da rede antes dela se dividir em mais de um pedaço? (Problema retirado de [9]).

3.2 Problema das pontes de Königsberg

Estudo sobre Grafos Eulerianos

Tudo inicia com um desafio proposto pelos cidadãos de Königsberg (hoje Kalingrado).

> *A cidade (Figura 3.13) era dividida em quatro distritos e por braços do rio Pregel, que eram conectados por sete pontes. Ao caminhar por ali, atravessando essas pontes, surgiu a questão: é possível fazer um passeio de modo que se atravesse todas as pontes exatamente uma única vez? (Adaptado de [7])*

Figura 3.13: Cidade de Königsberg em 1736

O primeiro matemático a propor um resultado para o problema foi Leonhard Euler (Figura 3.14) considerado o maior matemático do século XVIII. Em 1736 Euler publicou um artigo na qual demonstrava que tal passeio não era possível, ele havia descoberto uma **condição necessária** para o problema. Esse resultado é considerado por muitos como sendo o primeiros em Teoria dos Grafos. Por volta de 1873, um matemático alemão chamado Hierholzer completou as ideias de Euler com a publicação de um artigo, onde demonstrava o **caso de suficiência**. Muitos acreditavam que Euler conhecia a suficiência do problema.

Nascido em 15 de abril de 1707, em Basileia, na Suíça, Leonhard Euler foi um pioneiro em matemática, contribuindo fortemente para os campos da geometria, trigonometria, cálculo e grafos, entre muitos outros. Ele lançou centenas de artigos e

Figura 3.14: Leonhard Euler (1707-1783)

publicações durante sua vida, sendo que metade destes trabalhos foram publicados depois de perder a visão.

Problemas como das pontes Königsberg foram de fundamental importância para as bases da Teoria dos Grafos, pois somente um **grafo euleriano** permitiria tal passeio. Entretanto antes de tentar resolver o problema das pontes, algumas definições e resultados serão de fundamental importância.

Do que foi visto anteriormente, um percurso sobre um grafo G será definido como sendo um **passeio** P de comprimento $n \geq 1$, se existir uma sequência

$$P = (v_0, v_1, ..., v_n)$$

de vértices (não necessáriamente distintos) de G, tal que v_{i-1} é adjacente a v_i com $1 \leq i \leq n$. O passeio P é **fechado** se $v_0 = v_n$. Dessa forma, definimos:

Definição 3.3. *Um* ***passeio euleriano*** *em um grafo conexo é um passeio fechado que passa por toda aresta exatamente uma vez.*

Passando a modelar o problema das pontes de Königsberg por um grafo, deve-se representar cada ilha por um vértice e cada ponte por uma aresta, conforme a Figura 3.15.

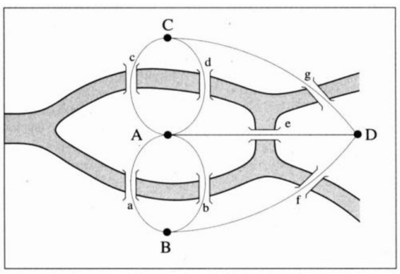


Figura 3.15: Grafo que modela as pontes Königsberg

Usando o argumento devido a Euler, deve-se supor que tal passeio seja possível. Assim ele escolhe um dos vértices do grafo que modela o problema para que o passeio não comece por ele.

Segundo o raciocínio de Euler, em algum momento no tempo devemos visitar a ilha utilizando uma das 5 pontes a ela conectada, escolhe-se uma; em seguida saímos da ilha por uma segunda ponte, conforme o problema, tal ponte é diferente da que se usou para entrar; novamente entramos nela por uma terceira ponte, e ai deixamos por uma quarta ponte, e então entramos novamente por uma quinta ponte. Logo será impossível completar o passeio passando exatamente uma vez por todas as 7 pontes, pois como existe somente 5 pontes ligando a tal ilha ao retornar a ilha pela quinta vez não poderemos sair desta, sem que novamente utilize-se uma das pontes anteriormente. Ver Figura 3.16.

Como uma forma de exemplificar a situação descrita acima. Suponha que o vértice A não seja escolhido para iniciar o passeio, segue uma resumo interativo na Tabela 3.2 da idéia de Euler.

Aresta	**Comentário**
e	visitar o vértice A primeira vez, utilizar a primeira ponte
a	sair do vértice A primeira vez, utilizar a segunda ponte
b	visitar o vértice A segunda vez, utilizar a terceira ponte
c	sair do vértice A segunda vez, utilizar a quarta ponte
d	visitar o vértice A última vez, utilizar a última ponte

Tabela 3.2: Uma possibilidade de não realizar o passeio.

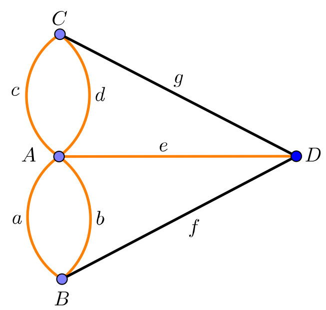


Figura 3.16: Paseio não euleriano

O mesmo raciocínio se aplica aos demais distritos da cidade, só que agora serão menos pontes para se preocupar, pois os outros distritos possuem somente três pontes.

Supondo agora que tal passeio não comece em um dos vértice que representa um dos distritos que possui três pontes, logo em algum momento, deve-se visitar este vértice passando por uma das três pontes que liga ao distrito, em seguida, deve-se deixa-lo por uma segunda ponte e finalmente retorna-la por uma terceira. Dessa forma observa-se que uma ou mais pontes não foram utilizada, portanto o passeio se torna impossível. Ver Figura 3.17.

A fim de exemplificar o descrito acima, suponha que o vértice B não seja escolhido para iniciar o passeio, segue uma das possibilidades em resumo na Tabela 3.3.

Aresta	**Comentário**
f	visitar o vértice B primeira vez, utilizar a primeira ponte
a	sair do vértice B primeira vez, utilizar a sgunda ponte
e	realizando passeio
g	realizando passeio
d	realizando passeio
b	visitar o vértice B última vez, utilizar a última ponte

Tabela 3.3: Outra possibilidade de não realizar o passeio.

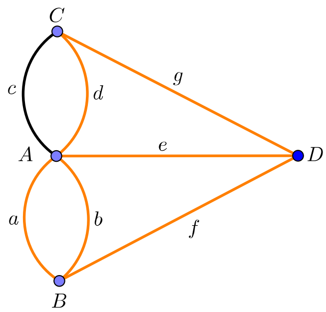


Figura 3.17: Novo passeio não euleriano

Euler logo percebeu que para concluir a impossibilidade de se realizar tal passeio, necessitaria de uma lista exaustiva de situações para este problema. Então ele formulou um critério para saber se é possível realizar um passeio, isso em qualquer cidade com qualquer número de pontes.

Até o momento Euler não dispunha de uma terminologia organizada de grafo, mas pode enunciar seu teorema. Mas antes de enuciar o teorema conforme os dias atuais, vamos considerar o lema:

Lema 3.1. *Todo grafo $G = (V, A)$ conexo no qual se tenha $d(v) \geq 2$ para todo $v \in V$, contém um ciclo.*

Demonstração. Basta iniciar um percurso a partir de um vértice qualquer, cada vértice atingido no decorrer do percurso, ou está sendo visitado pela primeira vez e daí podemos continuar, ou já foi visitado antes e teremos, portanto, percorrido um ciclo. $\square$

Teorema 3.2. *(Euler 1736) Um grafo G conexo é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices tem grau par.*

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja G um grafo euleriano, por definição, G possui um passeio fechado (ciclo) que passa por todas as aresta exatamente uma vez. Ao fazer um percurso a partir de um vértice qualquer, todo vértice pelo caminho utiliza-se de duas arestas, uma antes deste vértice e outra depois. Portanto o grau de cada vértice deve ser par.

($\Leftarrow$) Fazendo indução sobre o número de arestas de G. Se todos os vértices de G tem grau par, então o menor grafo possui pelo menos três arestas (desconsiderando o caso de uma grafo com apenas um vértice), logo G é euleriano.

Supondo que G seja conexo com n arestas, e com todos os vértices de grau par. Pelo lema G possui algum ciclo. Seja C um ciclo de G com número máximo de arestas. Segue duas situações, se C tiver comprimento n o teorema estará provado, pois $C = G$. Caso contrário considere o grafo $H = G - C$, onde em H todos os vértices tem grau par. Assim ao menos uma das componentes conexas de H terá vértices com grau par. Seja H_0 essa componente, sendo um grafo conexo com vértices com grau par, pelo lema H_0, possui ciclo. Adicionando as arestas deste ciclo aos de C obtém-se C' de comprimento maior que C. Mas isso contraria a hipótese de C ser máximo. Daí o teorema está provado.

□

Usando o teorema podemos confirmar que o grafo que modela o problema das pontes de Königsberg não é euleriano, pois todos seus vértices possuem grau ímpar. A saber $d(A) = 5$, $d(B) = 3$, $d(C) = 3$ e $d(D) = 3$.

Uma pergunta interessante a ser feita neste ponto é; é possível modificar um grafo para que ele seja euleriano? Sim, o problema de eulerizar grafos a um custo mínimo é um ramo da teoria de grafos muito estudado. Ao modelar um problema real quase sempre obtém-se um grafo não euleriano. Imagine uma prefeitura com o objetivo de criar uma nova rua (a baixo custo) para que o carro do lixo faça o percurso sem passar duas vezes por uma mesma rua. Se o percurso não é possível de ser realizado nas condições atuais é porque o grafo que modela as ruas da cidade não é euleriano, assim o objetivo para os engenheiros da prefeitura será o de eulerizar o grafo atual. A eulerização ocorre com a inclusão de arestas, no caso de exclusão é pouco utilizado para fins práticos (fecha uma rua!).

De volta ao grafo das pontes de Königsberg, como se poderia obter um grafo eulerizado? De posse do teorema, um grafo admite um passeio euleriano se todos os seus vértices têm grau par. Dessa forma torna cada vértice par seria um custo alto, pois seriam necessárias no mínimo três novas arestas (pontes). Para eulerizar basta utilizar o teorema a seguinte:

Teorema 3.3. *Se um grafo conexo tem exatamente dois vértices com grau ímpar, então ele tem um passeio euleriano.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo com exatos dois vértices com grau ímpar, sejam a e b tais vértices. Definimos um grafo H com o mesmo conjunto de vértice de G e aumentamos em um o número de arestas de H em relação a G com inclusão da aresta ab. Com isso o grau dos vértices a e b aumenta um e passam a ser par. Pelo teorema 3.2, H possui um passeio euleriano. Seja então $P = v_0v_1...v_iabv_j....v_nv_0$ o passeio euleriano em H, sem perda de generalidade podemos reescrever $P = av_0v_1...v_iv_j....v_nba$ continuamos com um passeio euleriano sem a aresta ab, assim G é euleriano. $\square$

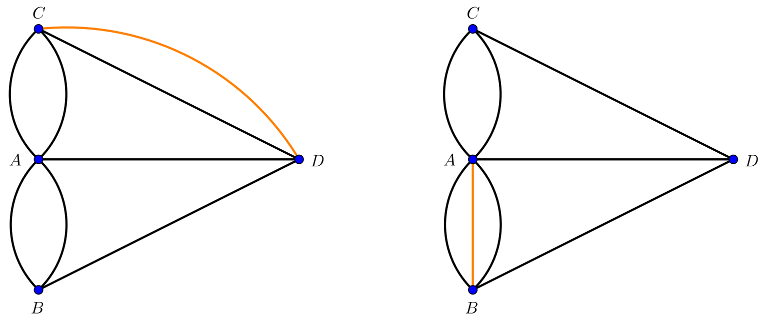


Figura 3.18: Grafos eulerizados

A estratégia em utilizar o teorema é simplesmente a de tornar o grafo euleriano, sem a preocupação com o custo envolvido. Na Figura 3.18 a inclusão de uma das duas arestas (em laranja) torna o grafo euleriano. Uma rápida verificação pelo teorema, tem-se para o primeiro grafo só os vértices A e B com grau ímpar, a saber $d(A) = 5$, $d(B) = 3$, $d(C) = 4$, e $d(A) = 4$. No segundo grafo tem-se C e D ímpar, a saber $d(A) = 6$, $d(B) = 4$, $d(C) = 3$, e $d(A) = 3$.

Observações metodológicas

O trabalho com grafos em sala para os alunos do ensino médio deve buscar o incentivo da investigação por meio da tentativa. Apresentar grafos e perguntar se tais grafos possuem um passeio euleriano é de fundamental importância para o desenvolvimento do aluno que estuda grafo pela primeira vez.

O uso do teorema só deve ser incentivado depois que o aluno tentar exaustivamente buscar a resposta por meio da tentativa. Resta para o teorema a missão de confirmar a solução dada pelo aluno. Entretanto as definições devem ser incentivadas sempre, pois nelas encontram-se as condições que diferenciam um grafo euleriano de outros. Para os grafos não eulerianos deve-se incentivar a tentativa de eulerização através do acréscimo mínimo de arestas e validar através do teorema.

O estudo de grafos do ponto de vista de ser possível realizar um passeio euleriano, ou em casos de eulerização pode ser realizado em qualquer uma das três series do ensino médio. Visto que o problema é facilmente entendido e a solução pode ser dada sem o uso de teoremas ou fórmulas complicadas. Logo o teorema pode ser omitido servido somente de ferramenta para verificação por parte do professor.

Para um estudo isolado de grafos eulerianos, pode seguir o roteiro:

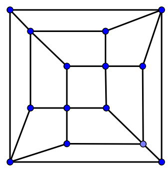
1. Definições de grafos e subgrafo + exemplos (30 min.) (capitulo 2. Seção 1).
2. Definição de caminho e ciclo + exemplos (30 min) (capitulo 2. Seção 4, 5, 6).
3. Estudo sobre grafos eulerianos + exemplos (4 aulas de 50 min) (capitulo 3. Seção 2).
4. Exercícios para fixação use [9].

Os problemas podem ser abordados em sequência, primeiro com exercícios de verificação e posteriormente com problemas de modelagem. Reconhecer quando um grafo admitir um passeio euleriano é de fácil assimilação pelo aluno, entretanto o mesmo não ocorre quando queremos modelar um problema por meio de um grafo. Na próxima parte desta seção, estão alguns exemplos de problemas que podem ser abordados em sala de aula.

Modelo de Atividade

1. É possível desenhar o grafo G ou H, sem levantar o lápis do papel e desenhando cada aresta exatamente uma vez?

2. A figura a seguir representa as ligações rodoviárias entre 14 cidades. Existe um caminho passando por cada cidade exatamente uma vez?



3.3 Problema de designação de tarefas

Estudo sobre Emparelhamento

Uma empresa dispõem de 5 vagas de emprego em setores diferentes, 5 candidatos se inscrevem para ocupar as vagas.

> *Três dos candidatos, possuem habilidades para ocupar até 3 setores, um outro candidato possui habilidade para ocupar duas outras vagas e somente um candidato se inscreveu para uma única vaga. Supondo que possa ter havido mais de um candidato para cada vaga, a empresa poderá empregar cada candidato de tal maneira que cada um ocupe uma das vagas disponíveis, de acordo com as suas qualificações?*

Problemas como este são conhecidos como **problema de designação de tarefas** ou **dos casamentos**. Neste tipo de problema procuram-se condições para a existência de um **emparelhamento completo**. Para resolvê-lo usa-se a condição do **Teorema de Hall**.

Apesar do número de candidatos ser igual ao número de vagas (5 candidatos e 5 vagas), em muitos casos não é possível que a empresa empregue todos, ou seja, pode ser que não exista um emparelhamento completo. Isso depende da situação especifica de cada problema, neste caso, vai depender dos candidatos possuírem aptidões para a mesma vaga. Mas antes de tentar resolver o problema, algumas definições e teoremas serão necessários.

A situação do problema deve ser modelada por um grafo. A idéia é que se considere os candidatos e as vagas como sendo os vértices, para as aresta deve-se considerar as aptidões de cada candidato à uma vaga, já que uma aresta ligando dois candidato ou ligando duas vagas nada tem a ver para a solução do problema.

Assim, pode-se considerar um grafo com dois grupos de vértices, aqueles representados pelos candidatos e aqueles representados pelas vagas, grafos deste tipo são chamados bipartidos, mais precisamente, temos que

Definição 3.4. *Um grafo é dito* ***bipartido*** *se seus vértices podem ser separados em dois conjuntos V_1 e V_2 de tal forma que toda aresta conecta um vértice de V_1 a um vértice de V_2.*

Modelando o problema por meio de um grafo bipartido, considere os vértices $\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$ representando os candidatos e os vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ as vagas.

Para a correspondência entre os dois conjuntos de vértices, suponha que o candidato c_1 tem aptidões para assumir as vagas v_1, v_2 e v_3. Já o candidato c_2 tem aptidões para assumir as vagas v_1, v_4 e v_5. O c_3 tem aptidões para assumir as vagas v_1 e v_2. E o c_4 tem aptidões para assumir as vagas v_3, v_4 e v_5. E por fim o candidato c_5 tem aptidões para assumir somente a vagas v_1. O grafo da Figura 3.19 modela o problema.

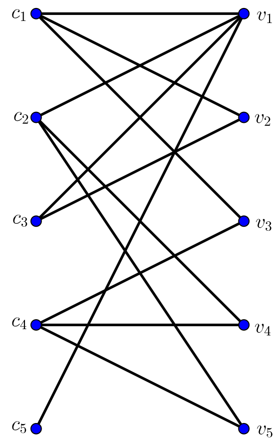


Figura 3.19: Grafo que modela o problema das vagas

Resta agora buscar um emparelhamento completo que mostre que todos os candidatos poderão ser empregados. Mas antes devemos definir emparelhamento.

Definição 3.5. *Um* ***emparelhamento*** *M em um grafo $G = (V, A)$ é um subconjunto do conjunto de suas aresta A, ou seja, $M \subset A$, onde elas são duas a duas não adjacentes.*

Ver exemplo de um emparelhamento na Figura 3.20.

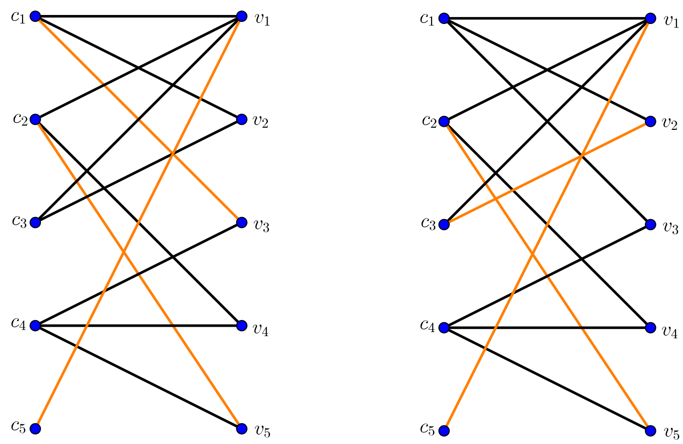


Figura 3.20: Emparelhamento

Definição 3.6. *Seja M um emparelhamento em G. Um vértice v diz-se* ***saturado*** *em*

M (ou emparelhado) se alguma aresta de M é incidente nesse vértice; caso contrário, v diz-se ***livre****.*

Ainda na figura 3.20 o primeiro emparelhamento, possui os vértices c_1, c_2, c_5, v_1, v_3 e v_5 como saturados e os vértices c_3, c_4, v_2 e v_4 como sendo livres.

Definição 3.7. *M é um* ***emparelhamento perfeito*** *de G se todos os vértices de G forem saturados.*

Definição 3.8. *Um grafo bipartido $G = (V, A)$, onde $V = V_1 \cup V_2$, diz-se* ***completo*** *quando todo vértice de V_1 está saturado com um vértice de V_2.*

Neste ponto cabe uma ressalva sobre a diferença entre um emparelhamento ser perfeito ou completo, de forma simples todo grafo perfeito é completo, entretanto nem todo grafo completo é perfeito. Considerare $|V_1| < |V_2|$, pois neste caso V_2 poderá possui um vértice livre em M, basta imaginar uma sexta vaga v_6 para nosso problema inicial, ai teremos um emparelhamento completo, mas não perfeito, visto que v_6 seria um vértice de G não saturado em M (Figura 3.21).

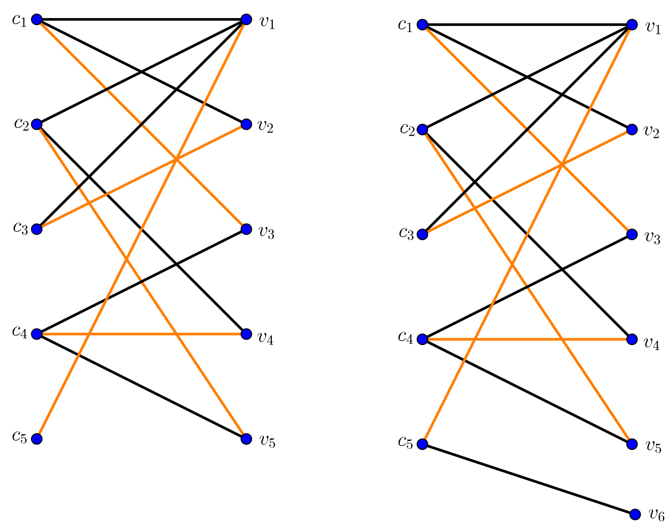


Figura 3.21: Emparelhamento completo e perfeito e outro só completo

Definição 3.9. *Um caminho* ***alternante*** *P em G é um caminho cujas arestas estão alternadas em arestas do emparelhamento M e as que não pertence ao emparelhamento de $A \setminus M$.*

Definição 3.10. *Um caminho* ***aumentável*** *em G é um caminho alternante P', cujos extremos são livres.*

Para um melhor entendimento considere o emparelhamento da Figura 3.22. Para se obter um caminho alternante a partir deste emparelhamento considere a inclusão das arestas v_1c_3, v_2c_1, v_3c_4 e v_5c_2 em destaque na Figura 3.23. Obtém-se assim o caminho alternante $P = c_5v_1c_3v_2c_1v_3c_4v_2c_2v_4$ da Figura 3.24, vale destacar que o mesmo caminho também é aumentante, pois os vértices extremos c_5 e v_4 são livres.

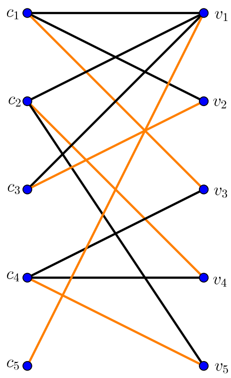


Figura 3.22: Emparelhamento M em G

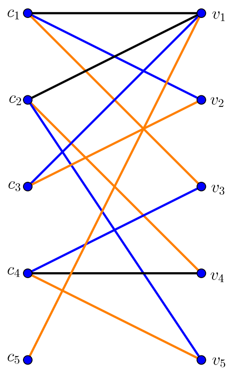


Figura 3.23: Inclusão de aresta alternantes

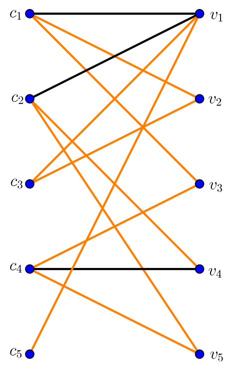


Figura 3.24: Caminho almentante

As idéias por trás do teorema do casamento foram descobertas independentemente em vários contextos diferentes. Destaque para o húngaro Dénes König (1894-1944), Figura 3.26, e o britânico Philip Hall (1904-1982), Figura 3.25, todos encontraram caminhos para as idéias envolvidas.

Hall apresentou seu teorema em 1935 como um resultado sobre conjuntos em teoria de grupos. A ideia por traz deste teorema é a de definir uma representação distinta para um conjunto de objetos. A demonstração do teorema de Hall, embora possa parecer elegante do ponto de vista matemático, não conduz imediatamente a uma representação distinta, pois apenas fornece um teste para verificar se tal representação existe. Dénes König ajudou a reorganizar o estudo de grafos fazendo importantes contribuições para a teoria de emparelhamentos, mostrando como encontra-los de uma forma eficiente.

Teorema 3.4. *(Hall 1935) Seja $G = (V, A)$ um grafo bipartido, com $V = V_1 \cup V_2$. G tem um emparelhamento completo se, e somente se, $|\Gamma(S)| \geq |S|$, para todo subconjunto S de V_1 .*

Onde $\Gamma(S)$ denota a vizinhança de S, isto é, o conjunto de vértices adjacentes aos vértices de S (dois vértices são adjacentes se existe uma aresta ligando eles). Em símbolos, temos:

$$\Gamma(S) = \bigcup_{v \in S} \Gamma(v)$$

$\Gamma(v)$ é a vizinhança do vértice v.

Figura 3.25: Philip Hall (1904-1982)

Figura 3.26: Dénes König (1894-1944)

Demonstração.

($\Rightarrow$) Seja G um grafo bipartido, com $V = V_1 \cup V_2$. Dado M um emparelhamento completo em G, ou seja, que tem todos os vértices de V_1 saturado. Para qualquer subconjunto S de V_1, a vizinhança de S tem cardinalidade maior que ou igual a S.

($\Leftarrow$) Agora devemos mostrar que todos os vértices de V_1 são saturados, ou seja que o emparelhamento M é completo em G. Seja G um grafo bipartido, com $V = V_1 \cup V_2$ e $|\Gamma(S)| \geq |S|$ para todo $S \subseteq V_1$.

Suponhamos que M_1 seja um emparelhamento máximo em G, ou seja, para todo emparelhamento M em G, tem-se $|M_1| > |M|$. Entretanto M_1 não satura todo vértice de V_1. Seja v um vértice de V_1 que não está saturado por M_1 em V_1. Considere T o conjunto dos vértices ligados a v por caminho alternante para o emparelhamento M_1. Como M_1 é máximo, v deve ser o único vértice de T não saturado.

Defina $S = T \cap V_1$ e $X = T \cap V_2$. Os vértices em $S \setminus \{v\}$ estão emparelhados por M_1 com os de X. Portanto $|X| = |S| - 1$ e $X \subseteq \Gamma(S)$, na verdade $X = \Gamma(S)$, pois cada vértice em $\Gamma(S)$ está ligado a v por um caminho alternante de M_1, assim

$$|\Gamma(S)| = |T| = |S| - 1 < |S|$$

um absurdo pois contradiz o teorema. Logo $|M_1| = |M|$, com M sendo um emparelhamento completo em G

$\square$

Pelo Teorema de Hall o problema inicial tem um emparelhamento completo, ou seja, dá para contratar todos os empregados para as vagas. Na Figura 3.27 foi destacado um emparelhamento completo e justificado com um exemplo da condição $|\Gamma(S)| = 4 \geq 2 = |S|$, pois $S = \{c_4, c_5\}$ e $\Gamma(S) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$

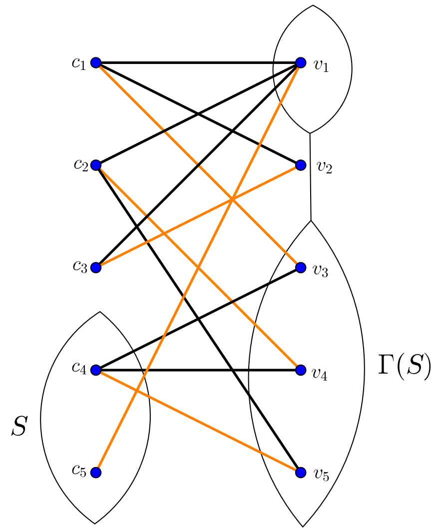


Figura 3.27: Emparelhamento completo com a condição de Hall

Corolário 3.1. *Se G é um grafo bipartido k-regular com $k > 0$, então G tem um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido, com $V = V_1 \cup V_2$. Sendo G k-regular todo vértice de V_1 e V_2 possuem o mesmo grau k, assim $|V_1| = |V_2|$. Seja $S \subseteq V_1$ qualquer, tem-se $k|\Gamma(S)| \geq k|S|$, ou seja, $|\Gamma(S)| \geq |S|$, logo pelo Teorema de Hall, G tem um emparelhamento M que satura todos os vértices de V_1, sendo $|V_1| = |V_2|$, temos um emparelhamento M perfeito. $\square$

Vejamos um problema adaptado de [8]:

> *Suponhamos que a empresa contratou 3 candidatos dos 5, estes iram operar 3 máquinas. Pelo conhecimento e pelas características pessoais de cada operário o custo por hora é diferente, segundo a atribuição das máquinas a cada operário. Qual o menor custo para a empresa?*

O custo para as operações em cada maquina é especificado na Tabela 3.4.

Considerando os vértices sendo dois conjuntos, maquinas (M_1, M_2, M_3) e operarios (O_1, O_2, O_3), obtem-se um grafo bipartido e completo, conforme a Figura 3.28.

O grafo da Figura 3.28 é bipartido 3-regular, então pelo teorema tem um emparelhamento perfeito. Resta encontrar o menor custo para a empresa. Para isso, basta usar o **Algoritmo Húngaro** na matriz de custo.

	M_1	M_2	M_3
O_1	3	5	6
O_2	5	4	2
O_3	2	3	4

Tabela 3.4: Matriz de custos

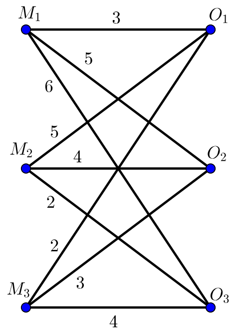


Figura 3.28: Emparelhamento completo

Algoritmo Húngaro

1. Para cada linha, subtraia o mínimo da linha.

2. Para cada coluna, subtraia o mínimo da coluna.

3. Use o mínimo de traços t possíveis para cobrir todos os zeros da matriz. Segue duas opções:

   (a) Se $t = n$, onde n é a ordem da matriz, temos uma solução ótima. Escolha um 0 por linha e coluna.

   (b) Se $t \neq n$, não encontramos ainda uma solução ótima, assim determine a menor entrada que não tenha sido riscada. Subtraia essa entrada de todas as entradas não riscadas e a some a todas as entradas com 2 riscos (Volta ao passo 3).

Segue um exemplo antes de passar ao problema .

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Passo 1: Para cada linha, subtraia o mínimo da linha.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Passo 2: Para cada coluna, subtraia o mínimo da coluna.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\ \qquad -1 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Passo 3: Cubra cada 0 com o mínimo de traços.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Como são $t = 2$ traços e a ordem da matriz é 3, subtraia a menor entrada não riscada de todas as outras e some as entradas com 2 risco.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Repete Passo 3: Cubra cada 0 com o mínimo de traços.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Solução: Escolha um 0 por linha e coluna.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 & 0 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{2} & 2 & 3 \\ 3 & \mathbf{1} & 5 \end{vmatrix}$$

Basta comparar as entradas com zeros com as entradas da matriz original, Total $= 4 + 2 + 1 = 7$ ou então através dos valores subtraidos das linhas e colunas, ou seja, Total $= 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$

Para resolver o problema para a empresa deve-se considerar a matriz de custo.

	M_1	M_2	M_3
O_1	3	5	6
O_2	5	4	2
O_3	2	3	4

Tabela 3.5: Matriz de custos

Passo 1: Para cada linha, subtraia o mínimo da linha.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{matrix}$$

Passo 2: Para cada coluna, subtraia o mínimo da coluna.

$$\begin{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -1 \end{matrix}$$

Solução: Escolha um 0 por linha e coluna.

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & 3 \\ 3 & 1 & \mathbf{0} \\ 0 & \mathbf{0} & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & 5 & 6 \\ 5 & 4 & \mathbf{2} \\ 2 & \mathbf{3} & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{Total} = 3 + 2 + 3 = 8$$

Para a empresa o menor custo é 8 que corresponde operador 1 com a máquina 1, operador 2 com a máquina 3 e operador 3 com a máquina 2, ou seja, com o emparelhamento perfeito do grafo da Figura 3.29.

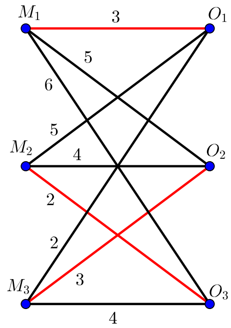


Figura 3.29: Emparelhamento perfeito com custo mínimo

Observações metodológicas

O estudo de emparelhamento sugerido neste trabalho segue duas abordagens, com o primeiro problema, buscou-se a apresentação da teoria, apresentar um problema e modelá-lo por um grafo bipartido, definir um emparelhamento e diferenciá-lo em perfeito e completo foram o objetivo pretendido. O teorema central para a teoria foi o de Hall nele existe o necessário para a demonstração do corolário que motiva o segundo problema. A estratégia de resolver o segundo problema é utilizar o algoritmo Húngaro, pois operações em matrizes é algo estudado no Ensino Médio.

O estudo de emparelhamento conforme sugerido neste trabalho pode ser abordado na terceira série do Ensino Médio, sem o uso do teorema de Hall e usando somente seu corolário devidamente formulado. Essa restrição a terceira série deve-se em primeiro lugar ao próprio rigor da teoria em segundo ao amadurecimento com matrizes que se espera que o aluno possua. Para um estudo isolado de emparelhamento em grafo, pode seguir o roteiro:

1. Definições de grafos e subgrafos + exemplos (30 min.) (capítulo 2. Seção 1)

2. Definição de grafo completo e grafo bipartido completo + exemplos (30 min) (capítulo 2. Seção 1, capítulo 3. Seção 1)

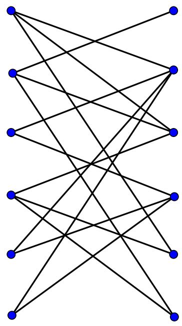
3. Estudo sobre emparelhamento + exemplos (200 min) (capitulo 3. Seção 3)

4. Exercícios para fixação use [7]

Abaixo encontra-se um modelo para atividades em sala, primeiro é sugerido um problema para encontrar um emparelhamento perfeito dado um grafo bipartido, no outro uma situação para utilizar o algoritmo Húngaro.

Modelo de Atividade

1. Encontre um emparelhamento perfeito para o grafo. Caso possível encontre um caminho alternante e verifique se o emparelhamento é aumentável.



2. Considere a matriz abaixo:

	Zagueiro	Volante	Atacante
Jogador 1	3	5	6
Jogador 2	5	4	2
Jogador 3	2	3	4

Se você fosse um técnico de um time com salários atrasados (número de salários atrasados na tabela) e quisesse sabotar o time. Como escalar um time para que ele tenha a maior chance de perder?

3.4 Problema das ligações

Estudo sobre Grafo Planar

Um professor propôs a seus alunos o seguinte problema:

> *Será possível ligar água, luz e telefone a três casas sem que essas ligações se cruzem?*

Esse problema é um clássico entre os matemáticos que estudam grafo, pois permite introduzir de forma natural e até motivadora o conceito de **grafo planar**. Esse estudo tem várias implicações práticas, um exemplo muito utilizado consiste em colocar uma rede sobre uma placa de circuito impresso. Para a resolução do problema inicial deve-se verificar uma das situações: procurar um isomorfismo ao grafo que modele a situação e verificar se esse é planar, ou utilizar o **Teorema de Kuratowski** que também permite verificar se o problema é possível.

Definição 3.11. *Um grafo é dito **planar** quando suas arestas não se intersectam.*

Por exemplo o grafo da Figura 3.30 é planar em quanto que o grafo da Figura 3.31 não é.

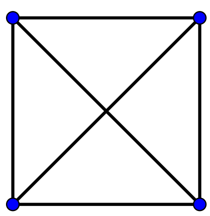


Figura 3.30: Grafo planar

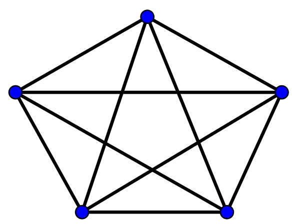


Figura 3.31: Grafo não planar

Segundo a definição, um grafo é planar se suas arestas não se cruzarem, mas porquê o grafo da Figura 3.30 é planar se suas arestas se cruzam? A busca de uma resposta motiva a utilizar uma estratégia com isomorfismo, a ideia é buscar um grafo isomorfo ao grafo dado que não cruze arestas e verificar a planaridade (Figura 3.32).

Como a ideia aplicada ao grafo da Figura 3.30 mostrou-se eficiente, por que não fazer o mesmo com o grafo da Figura 3.31. Entretanto o mesmo não ocorre, realmente o grafo não é planar, pois o grafo da Figura 3.33 não pode descruzar todas as arestas, ficam sempre duas se cruzando por qualquer isomorfo que se procure ao grafo da Figura 3.31.

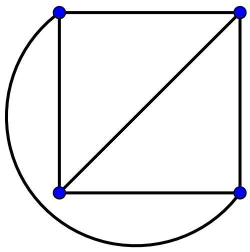


Figura 3.32: Grafo planar

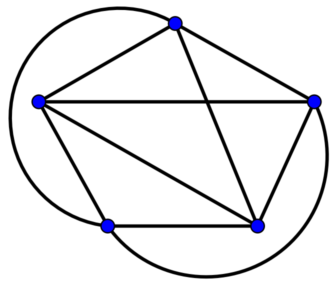


Figura 3.33: Grafo não planar

Em grafos planares, vale a relação de Euler para poliedros convexos. Essa relação envolve as aresta, faces e vértices dos poliedros regulares. No estudo de grafo planar essa relação também se aplica e pode-se tirar muitos outros resultados importantes para o estudo de grafo planar.

Para grafos planares os vértices e arestas são elementos facilmente concebíveis, entretanto as faces podem causar dúvidas. Um grafo com somente um ciclo possui duas faces uma representada pela região interna ao ciclo e a outra com a região externa ao ciclo. No caso das árvores que não possuem ciclos tem-se uma única região, ou seja uma única face. No grafo planar da Figura 3.30 temos 4 vértices, 6 arestas e 4 faces (3 dos ciclos e 1 da região externa).

Teorema 3.5. *(Euler 1752) Seja G um grafo planar e conexo com v vértices, a arestas e f faces, então*

$$v - a + f = 2$$

Demonstração. Por indução sobre o número de arestas.

Seja G uma árvore com uma aresta, logo o número de vértice é dois e por ser uma árvore tem uma face. Segue que

$$f - a + v = 1 - 1 + 2 = 2$$

Portanto vale o teorema.

Suponhamos que o teorema vale para um grafo conexo qualquer com no máximo $a - 1$ arestas provemos que ele também vale para um grafo com a arestas.

Se G for uma árvore teremos uma face ($f = 1$) e em toda árvore vale a relação $v - a = 1$. Portanto

$$f - a + v = 1 + 1 = 2$$

Caso G contenha ciclo retira uma aresta $(a - 1)$ e utiliza-se a hipótese de indução. Assim tem-se o mesmo número de vértices (v) e o número de faces diminui para $(f - 1)$. Daí

$$(f-1)-(a-1)+v=2$$

logo vale

$$f-a+v=2$$

.

□

Lema 3.2. *Num grafo planar vale $2a \geq 3f$.*

Demonstração. Ao contar as arestas das faces de um grafo planar estaremos contando as arestas duas vezes, como a menor face formada deve ter no mínimo 3 vértices (face triangular), vale

$$a \geq \frac{3f}{2}$$

ou seja

$$2a \geq 3f$$

. □

Corolário 3.2. *Um grafo planar com $v \geq 3$ vértices tem no máximo $3v-6$ arestas. Cada triangulação plana com v vértices tem $3v-6$ arestas.*

Demonstração. Pelo lema anterior:

$$2a \geq 3f \quad \Rightarrow \quad f \leq \frac{2a}{3} \tag{3.1}$$

da relação de Euler:

$$f-a+v=2 \quad \Rightarrow \quad f=a-v+2 \tag{3.2}$$

substituindo (3.1) em (3.2),temos:

$$\begin{aligned} \frac{2a}{3} \geq a-v+2 \quad &\Rightarrow \quad 2a \geq 3a-3v+6 \\ &\Rightarrow \quad a \leq 3v-6 \end{aligned} \tag{3.3}$$

□

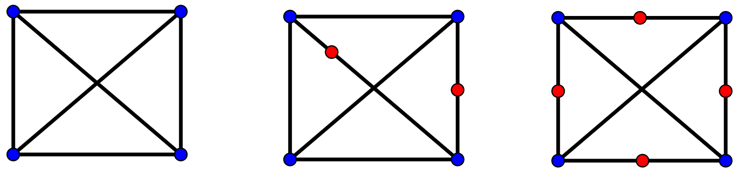


Figura 3.34: G' e G" são homeomorfos

Definição 3.12. *Dois grafos são **homeomorfos** se ambos puderem ser obtidos do mesmo grafo por uma sequência de subdivisões elementares, nas quais uma única aresta vu é subdividida por duas novas arestas, ou seja, vw e wy.*

Os grafos G' e G'' foram obtidos de G por subdivisões das arestas, assim G' é homeomorfo a G''.

Definição 3.13. *Um grafo bipartido G com $V = V_1 \cup V_2$ em que todos os vértices de V_1 são ligados a todos os vértices de V_2 é dito é completo e escreve-se $K_{n,m}$, onde $n = |V_1|$ e $m = |V_2|$.*

Teorema 3.6. *(Kuratowski 1930) Um grafo é planar se, e somente se, não contiver subgrafo homeomorfo a K_5 e $K_{3,3}$.*

Demonstração. Por representar algo além das pretensões deste trabalho a demonstração não será feita, para vê-la consultar ([12], p.107). □

Entretanto um resultado pode ser demonstrado.

Proposição 3.1. *Um grafo completo K_5 não é planar.*

Demonstração. Usando uma demonstração indireta, suponha que K_5 é planar, ou seja, suas arestas não se cruzam. Passando ao cálculo do número de arestas, deve-se ter $C_{5,2} = 10$ arestas, pois K_5 tem 5 vértices, usando a fórmula de Euler para obter o número de faces, tem-se:

$$\begin{aligned} f - a + v = 2 \quad &\Rightarrow \quad f - 10 + 5 = 2 \\ &\Rightarrow \quad f = 7 \end{aligned} \tag{3.4}$$

sendo K_5 planar vale

$$2a \geq 3f \Rightarrow 2 \cdot 10 \geq 3 \cdot 7$$

o que é um absurdo, logo K_5 não é planar. □

Usando o resultado desta proposição, apresenta-se outra justificativa para o grafo da Figura 3.31 não ser planar, esse grafo é do tipo K_5 e conforme visto não é planar.

Neste ponto já dispõe-se de ferramentas suficiente para resolver o problema inicial das ligações. Primeiro, deve-se buscar um grafo que modele a situação. Um grafo bipartido com um subconjunto de vértices representando os serviços e outro representando as casas. Como os serviços de água, luz e telefone, devem ser ligados a cada casa, obtém-se o grafo $K_{3,3}$, o problema consiste em fazer com que as ligações não se cruzem logo $K_{3,3}$ precisa ser planar.

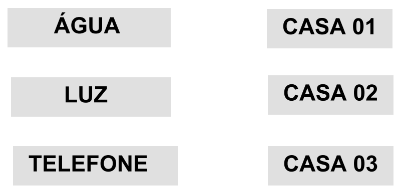


Figura 3.35: O problema das ligações

Considerando o grafo da Figura 3.36, deve-se buscar uma representação para deixar o grafo sem arestas se cruzando, como se pode notar qualquer tentativa é em vão, visto que ficará sempre uma casa sem serviço. Uma destas tentativas é descrita na Figura 3.37. Uma outra forma de ver que o grafo da Figura 3.36 não é planar é considerar o Teorema de Kuratowski que afirma que um grafo $K_{3,3}$ não é planar.

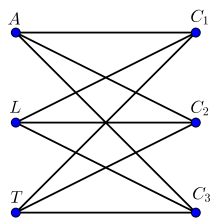


Figura 3.36: Grafo das ligações

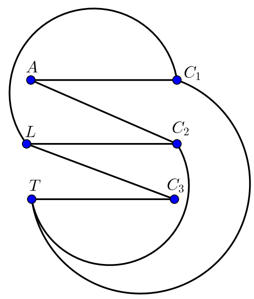


Figura 3.37: Grafo não planar

Uma importante aplicação do Teorema Kuratowski é mostrar que o grafo de Petersen não é planar.

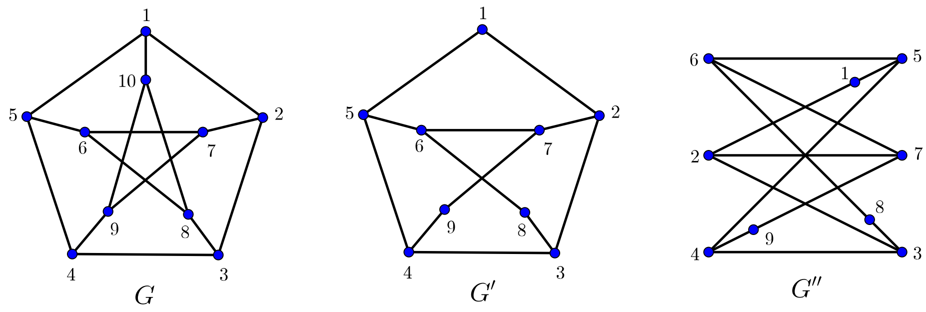


Figura 3.38: Grafo de Petersen

Retirando em G o vértice 10 juntamente com as arestas incidentes, obtém-se um subgrafo G' (Figura 3.38). Agora, basta mostrar que este subgrafo de Petersen seja homeomorfo a K_5 ou $K_{3,3}$. Na Figura 3.38 o grafo G'' é homeomorfo a um grafo $K_{3,3}$, e como também é homeomorfo a G', então G' é homeomorfo a G''. Logo G não é planar.

Observações metodológicas

O estudo de grafos planares neste trabalho procurou abordar o reconhecimento da planaridade em grafos.

Para isso usou-se grafos isomorfos e o Teorema de Kuratowski. Em um primeiro momento o professor poderá dar um grafo e perguntar se tal grafo é planar, é interessante que esse primeiro grafo não possua arestas se cruzando, em seguida pode mostrar outro grafo planar mas em que suas arestas se cruzem e analisar a resposta dada pelo aluno. Neste ponto, o professor retomará a idéia de isomorfismo, mostrando sua estratégia para reconhecer grafos planares. Essa idéia pode ser abordada em quaisquer das três séries do Ensino Médio.

Uma outra alternativa para o estudo do reconhecimento de grafos planares encontra-se em abordar o resultado do teorema de Kuratowski, neste caso usa-se a idéia de homeomorfismo. Dado um grafo um pouco mais complicado de ver a planaridade por isomorfismo. Toma-se um subgrafo e procura-se transforma-lo em grafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ou K_5. Essa estratégia pode ser abordada somente na terceira série do Ensino Médio, visto a complexidade na passagem para grafos homeomorfos a $K_{3,3}$ ou K_5.

O estudo com a relação de Euler é de fundamental importância para as estratégias anteriores, dada a importância que ela possui na verificação da planaridade de grafos, além de sua utilização nas demonstrações dos teoremas. Para um estudo individual segue o roteiro:

1. Definições de grafos e subgrafos + exemplos (30 min.) (capítulo 2. Seção 1).

2. Isomorfismo + exemplos (30 min) (capítulo 2. Seção 3).

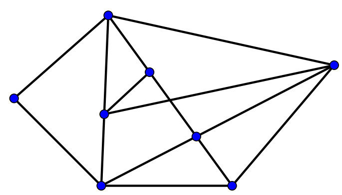
3. Estudo sobre grafos planares + exemplos (200 min) (capítulo 3. Seção 4).

4. Exercícios para fixação use [9].

Para um estudo mais completo sobre grafos planares no Ensino Médio o professor poderá ler [13]. Para um estudo mais avançado o leitor pode verificar [12]. Aseguir encontra-se um modelo para atividades em sala, primeiro é sugerido um problema para verificar a planaridade através de isomorfismo ou utilizando as ideias do teorema Kuratowski. No outro, há uma situação para utilizar a relação de Euler.

Modelo de Atividade

1. Verifique se o grafo abaixo é planar.



2. Existem 7 lagos na Terra dos Lagos. Eles estão ligados por 10 canais de modo que seja possível usá-los para nadar de qualquer um dos lagos a qualquer outro. Quantas ilhas existem na terra dos Lagos?

3.5 Problema de alocação

Estudo sobre Coloração

Uma franquia de Hot Dog pretende alocar barraquinhas em um parque, e encontrou-se com a seguinte situação (adaptado de [8]):

> *O parque possui seis esquinas, cada barraca deve ser instalada em uma esquina, tal que esquinas próximas só admitem uma barraquinha. Qual o número máximo de barracas que podem ser instaladas no parque?*

Problemas como este buscam evitar o esforço repetitivo ou resolver um conflito de interesses. Neste caso, para resolvê-lo procura-se um grafo que modele o problema e forneça o **número de independência** $\alpha(G)$ de um **subconjunto independente** de vértices.

Para a modelagem do problema por meio de um grafo, cada vértice $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ deve representar uma esquina e cada aresta o caminho entre as esquinas, conforme a Figura 3.39.

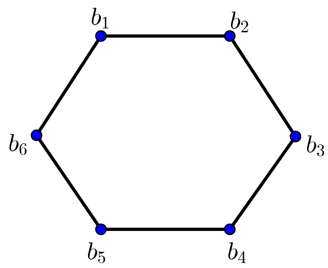


Figura 3.39: Grafo que modela o problema da alocação

Definição 3.14. *O conjunto de vértices não adjacentes de V em G chama-se um* ***subconjunto independente****.*

Na Figura 3.40 existem os subconjuntos independentes $\{b_1, b_4\}$ e $\{b_1, b_3, b_5\}$. Tais subconjuntos permitem uma distinção entre **subconjunto independente máximo** e **maximal**. Observa-se que na formação do subconjunto independente do primeiro grafo só foi possível destacar dois vértices com as escolhas de b_1 e b_4, mas pelo segundo grafo observa-se que seria possível um subconjunto com mais elementos. Portanto tem-se que $\{b_1, b_4\}$ é um subconjunto independente maximal e $\{b_1, b_3, b_5\}$ um máximo. O estudo aqui realizado será o de encontrar subconjuntos independentes máximos.

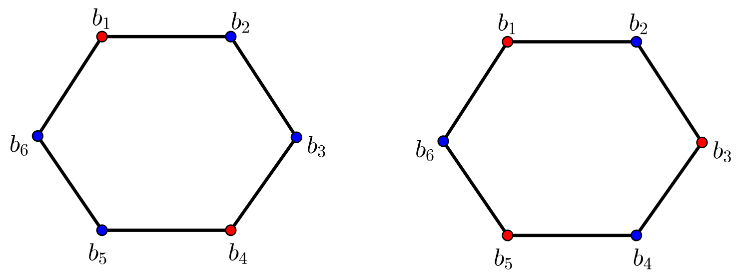


Figura 3.40: Subconjuntos independentes

Definição 3.15. *O **número de independência** $\alpha(G)$ é a cardinalidade do subconjunto independente máximo de vértices do grafo.*

Na Figura 3.40 o segundo grafo representa a solução para o problema inicial, com o número de independência $\alpha(G) = 3$, isso significa que o número máximo de barraquinha a ser instalada seria 3.

A Tabela 3.6 resume o processo algorítmico: *incluir os vértices sem conflito de independência para compor um subconjunto independente.*

Vértice	**Comentário**
b_1	entra no subconjunto
b_2	recusa
b_3	entra no subconjunto
b_4	recusa
b_5	entra no subconjunto
b_6	recusa
subconjunto	$\{b_1, b_3, b_5\}$

Tabela 3.6: Subconjunto independente máximo.

Portanto o algoritmo fornece o subconjunto independente máximo $\{b_1, b_3, b_5\}$. O problema de encontrar o número de independência ainda é um problema complicado, visto ainda não existirem algoritmos eficientes, por exemplo uma pequena variação em um problema pode não fornecer uma resposta ótima. Suponha uma troca de posição entre dois vértices, o que ocorre? Obtém-se o grafo da Figura 3.41.

Aplicando novamente o algoritmo a Tabela 3.7 resume as etapas para compor o subconjunto independente.

A troca de posições entre b_2 e b_4 afastou b_2 de b_1 possibilitando que o algoritmo incluisse b_2 no subconjunto independente, entretanto impediu a inclusão dos demais. Isso

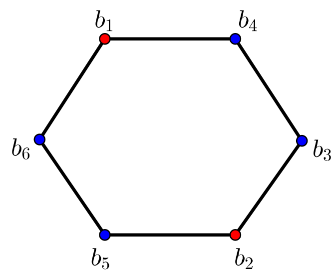


Figura 3.41: Subconjuntos independentes

Vértice	**Comentário**
b_1	entra no conjunto
b_2	entra no conjunto
b_3	recusa
b_4	recusa
b_5	recusa
b_6	recusa
subconjunto	$\{b_1, b_2\}$

Tabela 3.7: Subconjunto independente máximal.

ocorre porque o algoritmo obedece a uma sequência de numeração dos b's. Portanto, o algoritmo fornece o subconjunto independente maximal $\{b_1, b_2\}$.

Uma das aplicações de subconjuntos independentes é o problema da coloração de vértices. O simples fato de colorir vértices permite explorar e resolver diversos problemas. Voltando ao problema do parque podemos usar 6 cores no máximo para pintar os vértices do grafo, entretanto o número mínimo de cores é 2. Utilizando um algoritmo guloso: *colorir vértice com a primeira cor disponível.* Obtemos o resumo interativo na Tabela 3.8 abaixo:

O resultado é uma variação da resposta dada para o problema inicial que foi 3 barracas no máximo. Observa-se que ao usar duas cores cada cor representa um subconjunto independente máximo com $\alpha(G) = 3$ e que podem ser escolhidos para instalar as barracas. Ver Figura 3.42.

O que ocorre se trocar de posição os vértices? O processo interativo do algoritmo expresso na Tabela 3.9 mostra que duas cores não seriam suficientes, sendo necessário a utilização de outra para colorir todos os vértices.

Vértice	**Comentário**
b_1	cor 1
b_2	cor 2
b_3	cor 1
b_4	cor 2
b_5	cor 1
b_6	cor 2

Tabela 3.8: Tabela de coloração.

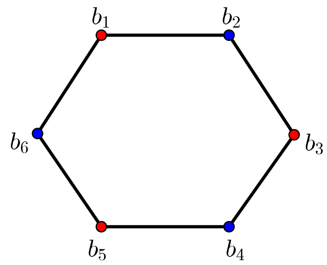


Figura 3.42: Subconjuntos independentes

O resultado também é uma variação da resposta dada para o problema inicial quando se troca de posição dois vértices, pois neste caso só poderiam utilizar duas barracas no máximo. Observa-se que ao usar três cores cada cor representa um subconjunto independente maximal que podem ser escolhidos para instalar as barracas. Ver Figura 3.43.

Definição 3.16. *O menor número de cores para colorir os vértices de um grafo G é chamado* ***número cromático*** *de G e denotado por $\chi(G)$.*

No que foi tratado anteriormente, tem-se para os grafos das Figuras 3.42 e 3.43 respectivamente $\chi(G) = 2$ e $\chi(G) = 3$.

O grafo que representa a Figura 3.42 possui $\chi(G) = 2$, ou seja, duas cores são suficientes para colorir seus vértices sem que vértices adjacentes tenham cores iguais. Neste caso foi fácil verificar, entretanto como saber quando um grafo pode ser colorido com 2 cores?

Para fixa ideias, suponha que o prefeito da cidade quer realizar uma reforma na praça, suas opções são:

- Reforma a praça com a criação de um caminho ligando as esquinas b_1 e b_4.

Vértice	Comentário
b_1	cor 1
b_2	cor 1
b_3	cor 2
b_4	cor 3
b_5	cor 2
b_6	cor 3

Tabela 3.9: Tabela de coloração com vértices trocados.

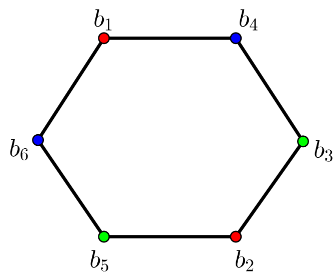


Figura 3.43: Subconjuntos independentes

- Reforma a praça com um caminho ligando as esquinas b_1 e b_3.

Para a franquia de hot dog qual das reformas lhe seria melhor, sabendo que ela adquiriu outros serviços de alimentação além de hot dog? Sendo que o melhor para a franquia é atender todas as esquinas com o menor número de barracas com um tipo de alimento.

Veja que na Figura 3.46 a reforma na praça com a criação de um caminho ligando as esquinas b_1 e b_4 precisou de duas cores para colorir todos os vértices do grafo, ou seja, dois serviços de alimentação são suficientes para atender o parque conforme os critérios estabelecidos pela a franquia. Entretanto na Figura 3.47 a reforma na praça com um caminho ligando as esquinas b_1 e b_3 não é um bom negócio pra a franquia, isso comparando com a outra situação, pois uma terceira cor foi necessário, sugerindo para a franquia um terceiro serviço de alimentação.

Os próximos resultado justificam e expandem essa situação modelada por grafo.

Teorema 3.7. *Podemos colorir um grafo G com duas cores se, e somente se, ele não possui ciclo ímpar.*

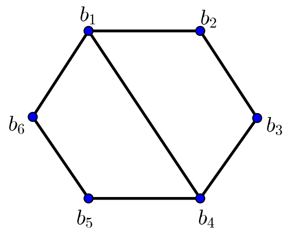


Figura 3.44: Caminho entre as esquinas b_1 e b_4

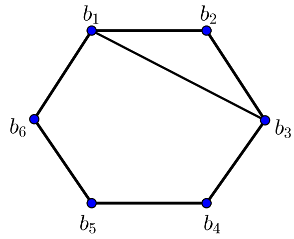


Figura 3.45: Caminho entre as esquinas b_1 e b_3

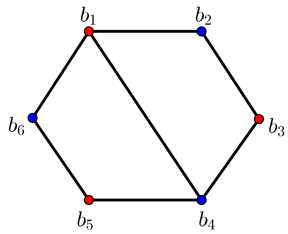


Figura 3.46: Caminho entre as esquinas b_1 e b_4

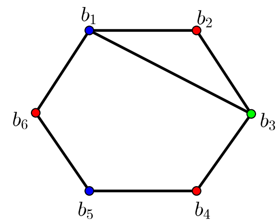


Figura 3.47: Caminho entre as esquinas b_1 e b_3

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que o grafo não possui ciclo ímpar, tome dois vértices adjacentes e pinte cada um com uma cor digamos preto e branco, a partir desse ponto basta alternar a cor dos vértices adjacentes a esses dois primeiros, ou seja, o preto pinte o seu adjacente de branco e depois preto e depois banco, para o outro vértice branco faça a mesma coisa começando com branco.

($\Leftarrow$) Suponha que G é um ciclo ímpar, logo possui um número ímpar de vértices, retire um vértice, sobra uma quantidade para de vértices, pinte cada um com uma cor alternadamente digamos preto e branco. Agora inclua o vértice retirado e pinte, observe que essa cor deve ser diferente de preto e branco, logo serão necessárias no mínimo três cores,

□

Nas condições do teorema fica fácil saber que o grafo da Figura 3.45 necessitaria de 3 cores já que existe um ciclo ($b_1b_2b_3$). No grafo da Figura 3.44 não tem ciclo por isso foi possível só duas cores.

No capítulo 2, seção 2, o vértice de maior grau foi definido como sendo o grau máximo de G, mais precisamente temos:

Definição 3.17. *Dado um grafo $G = (V, E)$, o **grau máximo** de G é o inteiro não negativo*

$$\Delta(G) = max\{d_G(v); u \in V(G)\}$$

Teorema 3.8. *(Brooks 1941) Para todo grafo G, tem-se que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Demonstração. Colorimos vértice por vértice. Cada vértice pode ser adjacente a, no máximo, $\Delta(G)$ vértices. Podemos sempre encontrar uma cor com a qual colorir o vértice da vez. □

Em outras palavras o teorema diz que, se todos vértices do grafo G tem grau no máximo igual a d, então o grafo pode ser colorido com $d + 1$ cores. Essa condição é apenas suficiente, mas não necessária, pois existem grafos com vértices de grau grande e duas cores são suficientes para colorir todos os vértices do grafo.

Os grafo das Figuras 3.45 e 3.44 possuem $\Delta(G) = 3$, logo pelo teorema seriam necessários 4 cores para colori-los, entretanto para o grafo da Figura 3.45 foram necessários 3 e para o grafo da Figura 3.44 são necessários apenas 2 cores. O teorema pode ser usado como limite superior.

Observações metodológicas

O estudo da coloração de grafos é algo muito complexo. Desta forma nesse trabalho o professor encontrará estratégias somente para coloração de vértices. Para um estudo completo sobre coloração ver ([12], p. 111).

O professor pode usar o primeiro problema para abordar o estudo de subconjuntos independentes dos vértices de um grafo, mostrando uma importante estratégia para problemas de alocação, minimizando esforço e maximizando lucros. O número de independência mostra o valor ideal no caso do problema o total de barracas necessárias no parque.

Para o segundo problema o professor pode incentivar o aluno a resolver problemas de diversificação na alocação de serviços. Como uso de problemas do menor número diversificação, para isso basta usar as condições do teorema das 2 cores para coloração de grafos. O Teorema de Brooks servirá de estratégia para limitar o número de cores a serem usadas.

Para um estudo individual segue o roteiro:

1. Definições de grafos e subgrafo + exemplos (30 min.) (capítulo 2. Seção 1).

2. Definição de ciclo + exemplos (30 min) (capítulo 2. Seção 6).

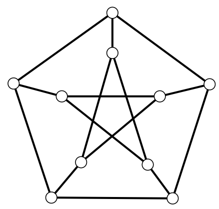
3. Estudo sobre coloração de grafos + exemplos (4 aulas de 50 min) (capítulo 3. Seção 5).

4. Exercícios para fixação use [14].

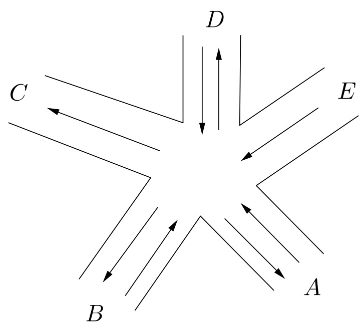
A seguir encontra-se um modelo para atividades em sala, primeiro é sugerido um problema para colorir o grafo de Petersen é interessante usar o teorema de Brooks para limitar o número de cores. No outro há uma situação que se deve utilizar cores para otimizar o trânsito, a sugestão nele é fundamental para solução.

Modelo de Atividade

1. Determine o menor número de cores necessárias para pintar o grafo de Petersen, de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor.



2. O desenho abaixo representa um cruzamento. As direções permitidas estão assinaladas por setas.



Como organizar o trânsito? Sugestão: considere as rotas possíveis como sendo os vértices, e as arestas são sempre que as direções forem incompatíveis

4 Conclusão

A preocupação com ensino é algo que deve ser constante, principalmente no país em desenvolvimento como o Brasil. Seguindo este raciocínio um convite aos grafos pretende ser mais uma possibilidade de estudo sobre a Teoria dos Grafos.

Este trabalho procurou mostrar um pouco sobre grafos e como ele poderia ser abordado no Ensino Médio. Por meio de problemas, buscou-se motivar a teoria muitas vezes incompreensiva, tornando-a mais atrativa para o professor e posteriormente ao aluno. O uso de modelagem em situações práticas foi uma estratégia para chamar atenção do alcance matemático que o grafo possui na resolução de problemas.

Espera-se que este trabalho possa juntar-se a outros servindo de guia para professores que pretendem introduzir grafos em suas aulas de matemática. Acredito que o grande diferencial encontrado neste seja a perícia na escolha dos temas e o cuidado com desenvolvimento lógico da teoria, de forma simples mas sem comprometer o rigor natural da matemática. Espero que esse cuidado com abordagem do assunto possa despertar em professores e alunos algo que os especialistas chamam de **febre de grafo**, que em outras palavras significa o vício de estudar grafos.

Em um trabalho sobre ensino é natural pensar sobre quais serão seus resultados na aprendizagem. Neste trabalho acredito que já tenha ocorrido aprendizagem, pelo menos para uma pessoa, o autor. Dessa forma podemos acreditar em mudanças, pois um professor motivado pode realizar grandes transformações no ensino.

Referências

[1] NETTO, P. O. B. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos. 5 ed.* São Paulo: Blucher, 2011.

[2] LUCCHESI, C. L. *Introdução a Teoria dos Grafos.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[3] LIMA, E. L. *Matemática e Ensino, 3 ed.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4] BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Eduacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares, volume 3.* Brasília: MEC; SEMTEC, 2012.

[5] BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem Matemática no Ensino. 5 ed.* São Paulo: Contexto, 2010.

[6] BURAK, D. *Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula.* [S.l.]: Revista de Modelagem na Educação Matemática, Vol. 1, No. 1, 10-27, 2010.

[7] LOVASZ, L.; PELIKAN, J.; VESZTERGOMBI, K. *Matemática Discreta.* Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] NETTO, P. O. B.; JURKIEWICZ, S. *Grafos: introdução e prática.* São Paulo: Blucher, 2009.

[9] FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. *Cículos Matemático: A Experiência Russa.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[10] POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[11] JURKIEWICZ, S. *Grafos - Uma Introdução.* [S.l.]: Apostila 5 do Estágio de treinamento dos alunos premiados da OBMEP, 2009.

[12] DIESTEL, R. *Graph Theory - Electronic Edition.* New York: (Graduate Texts in Mathematics, vol. 173) Springer - Verlag, 2005.

[13] BRITO, A. P. D. *Grafos, a Fórmula de Euler e os Poliedros Regulares.* [S.l.]: Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2014.

[14] BARBOSA, R. M. *Conexões e Educação Matemática: Bricadeiras, explorações e ações*. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

[15] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 4 Combinatória*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[16] BONDY, J. A.; MURTHY, U. S. R. *Graph Theory With Applications*. New York: American Elsevier, 1976.

[17] LEAL, W. d. S. *O ensino de algoritmos no ensino médio: por que não?* Duque de Caxias: Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio, 2009.