UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

SECÇÕES CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Jorge Adriano Carneiro Nunes

Orientadora: Profª Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira

Feira de Santana
Abril de 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

SECÇÕES CÔNICAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Jorge Adriano Carneiro Nunes

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientadora: Profª Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira

Feira de Santana
Abril de 2014

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

Nunes, Jorge Adriano Carneiro

N925s Secções cônicas : uma proposta de ensino utilizando o software geogebra / Jorge Adriano Carneiro Nunes. – Feira de Santana, 2014.

85 f. : il.

Orientadora: Fabíola de Oliveira Pedreira.

Mestrado (dissertação) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.

1. Matemática (Ensino Médio) – Estudo e ensino. 2. Secções Cônicas. 2. Software Geogebra. I. Pedreira, Fabíola de Oliveira, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Jorge Adriano Carneiro Nunes do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte e dois dias do mês de abril de dois mil e quatorze às 10:00 horas na Sala MT55, Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Secções Cônicas: Uma Proposta de Ensino Utilizando o Software Geogebra"**, do discente **Jorge Adriano Carneiro Nunes** , do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Fabíola de Oliveira Pedreira (Orientadora, UEFS), Geraldo Assis Júnior (UESC) e Ademakson Souza Araújo (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 22 de abril de 2014.

Fabíola de Oliveira Pedreira
Profa. Ma. Fabíola de Oliveira Pedreira (UEFS)
Orientadora

Geraldo de Assis Junior
Prof. Me. Geraldo Assis Júnior (UESC)

Ademakson Souza Araújo
Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo (UEFS)

Visto do Coordenador:
Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Dedico este trabalho aos meus pais: Joaquim e Maria Angélica; a minha esposa: Kadija; e aos meus filhos: João Vitor e João Pedro.

Agradecimentos

Neste momento é salutar dizer muito obrigado:

À Deus pela oportunidade de transformar este sonho em realidade e por conduzir-me perseverante até o fim.

Aos meus filhos João Vitor e João Pedro fontes de energia e inspiração nessa jornada.

À minha amável esposa Kadija, pela paciência e companheirismo mesmo quando me fiz ausente em virtude dos estudos.

Aos meus pais Joaquim e Angélica por saberem conduzir meus passos ao caminho do bem e por me incentivar a dar passos no presente na perspectiva de alcançar um futuro próximo, também pela fé, amor, paciência e humildade com os quais me incentivaram e me ajudaram a ser sempre uma pessoa melhor.

À todos os colegas que ingressaram comigo em 2012 no PROFMAT, pelos dois anos de boa convivência e sobretudo pela amizade que deixaram nesse mestrado.

Aos professores Maurício Araújo, Haroldo Benatti, Darlan Oliveira, Kisnney de Almeida, Claudiano Goulart e Vânia Gonçalves pelo comprometimento, humildade, competência e por terem ajudado em todo o processo.

Ao professor/coordenador Jean Barros pelo cuidado com o curso e com todos os estudantes.

À minha querida professora Fabíola de Oliveira Pedreira pela dedicação e apoio na reta final, sendo tão solícita e prestativa durante a construção da dissertação.

À Universidade Estadual de Feira de Santana por ter aberto as portas para esse programa.

À CAPES, pelo apoio financeiro recebido (bolsas de estudo).

À Sociedade Brasileira de Matemática e todo corpo docente responsável pelo PROFMAT.

Peço a Deus que conceda saúde, sabedoria e paz a todos que direta ou indiretamente contribuíram nessa jornada.

Muito Obrigado!

Resumo

Na matemática do Ensino Médio são estudadas as secções cônicas, porém dificilmente o professor utiliza algum software para fundamentar esse conteúdo em sala de aula. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é apresentar ao professor algumas propostas de atividades utilizando o software Geogebra, gratuito e de fácil manuseio, para explorar alguns resultados que serão discutidos e analisados no decorrer dos capítulos, a exemplo da própria definição das cônicas e das suas simetrias. Vale salientar que o estudo das cônicas é de grande valia para o estudante, pois a geometria que está por trás das cônicas é bastante utilizada no nosso dia-a-dia. É comum nos depararmos com as parábolas, elipses e hipérboles no nosso cotidiano, desde ao ver uma antena de recepção de sinal via satélite até as grandes engenharias cívis como pontes entre outras. Dessa forma, essa temática está redigida em uma linguagem compatível ao Ensino Médio e poderá ser utilizada como material didático para o ensino das cônicas.

Palavras-chave: Secções Cônicas. Geogebra. Atividades.

Abstract

In mathematics of secondary school are studied conic sections, but hardly the teacher uses some software to substantiate this content in the classroom. Thus, the objective this paper presents some proposals for the teacher Geogebra activities using free software and easy handling, to explore some results that will be discussed and analyzed in the course of the chapters, such as the very definition of conic and its symmetries. It is noteworthy that the study of conic is of great value to the student, since the geometry is behind the bevel is widely used in our day- to-day. It common we encounter parables, ellipses, and hyperbolas in our everyday life, from seeing an antenna for receiving satellite signal even the great engineering cívis as bridges among others. This way, this topic is written in a compatible language to High School and can be used as teaching material for teaching of conic.

Keywords: Conic Sections. Geogebra. Activities.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

A nossa sociedade atual é submissa a tecnologia e isso trás para os professores um novo desafio que é o de lecionar a matemática em um mundo dominado por essa tecnologia. Dessa forma, deve-se rever toda a sua metodologia, suas ações e suas técnicas para que possam trabalhar a matemática de forma que ela fique mais prazerosa e interessante para os alunos.

As secções cônicas são curvas especiais, das quais se podem mencionar a elipse, a parábola e a hipérbole. Elas foram exploradas com bastante dedicação pelo matemático grego Apolônio de Perga e escritas em forma de equação por Pierre de Fermat. Hoje elas são aplicadas na geometria, na física, na óptica, por meio de telescópios espaciais, na astronomia, com os movimentos elípticos dos planetas, na engenharia, na arquitetura e nas novas tecnologias, através de antenas parabólicas.

No Ensino Médio, os conteúdos são distribuídos de tal forma que as cônicas vêm aparecer apenas no terceiro ano do Ensino Médio, sendo quase sempre trabalhadas de forma trivial e somente com o centro na origem, não trabalhando assim as cônicas com centros em outros pontos. Iremos ver nesse trabalho que as hipérboles e as elipses serão trabalhadas por meio de parâmetros a, b e c e as parábolas de parâmetro p. No ensino superior as secções cônicas voltam a ser estudadas em cálculo, para a construção de superfícies no espaço, em geometria analítica, com enfoque nas equações analíticas e álgebra linear, onde podemos estudá-las utilzando vetores e matrizes.

Esse trabalho tem como objetivo apresentar ao professor propostas de atividades com o software Geogebra que servirão de apoio didático ao ensino das secções cônicas e como consequência disso, despertar o interesse dos estudantes pela matemática, em especial pela geometria, incentivando o estudo e tendo como prêmio um melhor rendimento. Trabalhar o conteúdo paralelo com um software apropriado trás enormes benefícios para o professor em sala de aula como também para os alunos e, além disso, faz uma ponte da tecnologia com a sala de aula.

No decorrer desse estudo será explorado as secções cônicas utilizando a definição para chegar às equações na forma canônica ou reduzida. O material didático foi completamente elaborado para poder oferecer varias alternativas aos professores de matemática da educação básica, podendo se estender até a graduação.

O trabalho está organizado da seguinte forma: No primeiro capítulo: *Histórico das Cônicas*, é apresentado uma fundamentação histórica baseada em alguns autores sobre o inicio dos estudos das secções cônicas e seus principais desbravadores. Do segundo ao quarto capítulo são apresentadas as definições, os elementos, as equações reduzidas e do segundo grau da elipse, hipérbole e parábola, respectivamente. Já no último capítulo será apresentado algumas propostas de atividades destinadas ao Ensino Médio com o intuito de contribuir para que o professor possa ter sugestões de trabalho ao ensinar elipse, hipérbole e parábola.

Capítulo 1

HISTÓRICO DAS CÔNICAS

Ao estudar a História da Matemática é necessário lembrarmos que o conhecimento é construído de descobertas que envolvem incertezas e conflitos. Porém o avanço da ciência é imprescindível e estamos em um período de intensa pesquisa científica, inovação e de mudanças muito rápidas principalmente na tecnologia. Tudo isso influencia de forma bastante significativa a vida da sociedade. Dessa forma é de extrema importância conhecermos a história de forma geral para relacionarmos os fatos na busca das novas descobertas.

A história da matemática nos sugestiona a dizer que por muitos anos as secções cônicas atraíram, e ainda atraem, o interesse de vários matemáticos. Há relatos que esse interesse pelo estudo das cônicas inicia-se com o matemático grego Menaecmus (380 a.C. à 320 a.C.) discípulo de Eudóxio, como o primeiro a se dedicar ao estudo das diferentes secções planas que simplesmente chamamos de cônicas.

Em vários livros de história da matemática encontramos relatos que Menaecmus sabia que ao seccionar um cone reto - isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular - por um plano perpendicular a uma de suas diretrizes produziria curvas diferentes, bastando para tal variar o ângulo do vértice do cone. Sendo esse ângulo agudo tinha uma elipse, reto uma parábola e sendo obtuso uma hipérbole respectivamente conforme pode ser observado na figura 1.1.

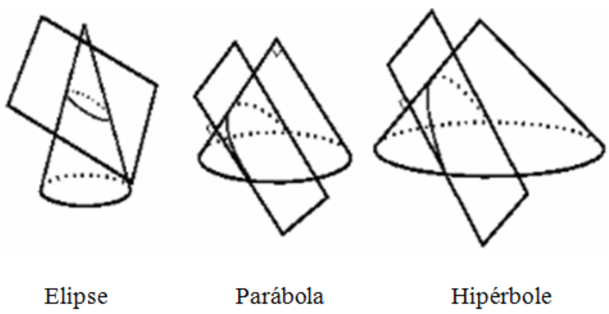


Figura 1.1: Secções Cônicas

Menaecmus ficou conhecido por ter sido o primeiro a demonstrar que as elipses, as parábolas e as hipérboles são resultantes dos cortes feitos em um cone por um plano não paralelo à sua base e nem perpendicular passando pelo vértice. Menaecmus foi motivado a fazer isso pelo interesse em solucionar um dos três problemas clássicos da Grécia Antiga que era a duplicação do cubo. Esse problema consistia em construir com régua e compasso um cubo cujo volume fosse o dobro do volume do cubo dado. E para alguns historiadores o começo do estudo das cônicas não é muito claro, mas muitos relatos levam a conclusão que elas originaram-se nas tentativas de resolução do problema da duplicação do cubo.

Segundo afirma Gayo (2012, p. 121) "...independente da história que seja considerada verdadeira, o que importa foi a repercussão", ou seja, a duplicação do cubo se repercutiu de forma tão rápida que chegou a academia de Platão, onde segundo o próprio Gayo (2012, p. 121) "...surgiram algumas alterações, surgindo assim, soluções geométricas propostas por Eudóxio, Menaecmus e pelo próprio Platão". Assim, ao se dedicar a resolução desse problema Menaecmus descobriu que existia uma família de curvas que possuíam propriedades que possibilitavam encontrar esta solução.

Segundo Pereira (2013, p. 17) Menaecmus dizia que cada secção cônica era encontrada em um formato diferente de cone. Dessa forma, as cônicas eram tratadas de forma isolada. Não havia interação entre parábola, elipse e hipérbole. Com os estudos de Apolônio de Perga é que houve a unificação das mesmas.

Consta nos escritos de Pappus de Alexandria que Aristeu (370 a.C. à 300 a.C.) um geômetra grego, foi o primeiro a fazer uma publicação sobre as secções cônicas.

Apolônio de Perga (262 a.C. à 190 a.C.), também conhecido como "O Grande Geómetra", foi quem mais se aprofundou no estudo sobre as cônicas.

Figura 1.2: Apolônio de Perga

> As secções cônicas eram conhecidas havia cerca de um século e meio quando Apolônio escreveu seu célebre tratado sobre essas curvas. [...] O tratado sobre Cônicas de Apolônio derrotou todos os Rivais no campo das secções cônicas, inclusive As cônicas de Euclides(BOYER, 1996, p. 99).

Como comenta Boyer (1996, p. 99), Apolônio foi o pioneiro a demonstrar que a elipse, parábola e hipérbole não eram obtidas diretamente de cones diferentes, mas podiam ser encontradas mudando a medida do ângulo de inclinação do plano da secção. Esse acontecimento foi relevante para dar identidade e relacionar os três tipos de curvas. Apolônio também demostrou que o cone poderia ser oblíquo ou escaleno e que mesmo assim as propriedades das curvas se mantiam as mesmas. Ou seja, não era necessário que o cone fosse reto, ou melhor, não importa o cone de origem, as curvas mantêm as suas propriedades.

Ainda para Boyer (1996, p. 100), Apolônio poderia ter iniciado de qualquer cone e ter tido como resultado as mesmas curvas e assim qualquer secção plana de qualquer cone poderia servir de curva base em sua definição. Foi Apolônio que utilizou os cones duplos para fazer secções e com isso fez com que a hipérbole ganhasse mais um ramo, como a conhecemos hoje. As obras Secções Cônicas de Apolônio e os Elementos de Euclides formam o ápice de toda matemática grega.

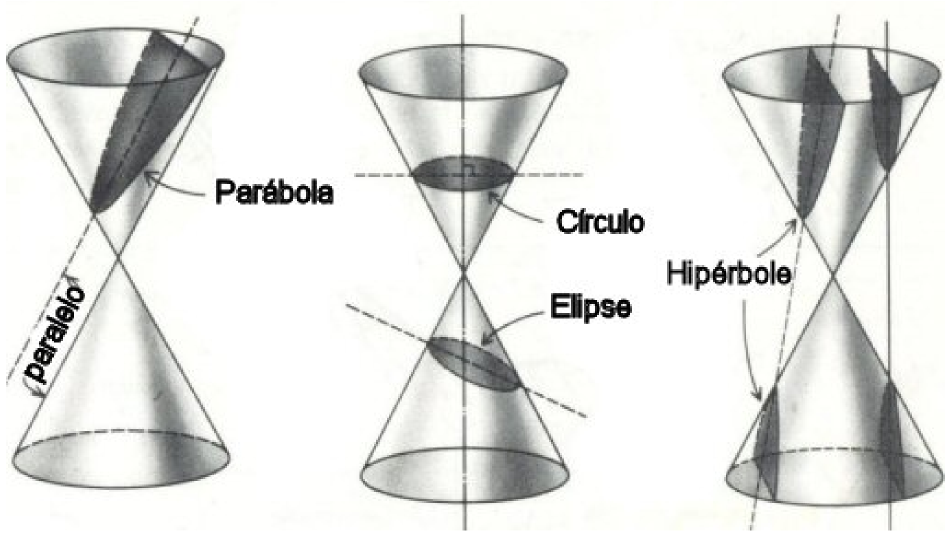


Figura 1.3: Secções Cônicas em cones duplos

Dessa forma podemos dizer que Apolônio foi o matemático que mais contribuiu para o desenvolvimento dos conceitos dessas curvas na antiguidade. Tendo organizado todos os conhecimentos já existentes até então na época, enriqueceu largamente a sua contribuição para as secções cônicas. Felizmente, no que se trata sobre a obra de Apolônio, muita informação dos livros da sua vasta obra foi preservada. A sua obra as Cônicas, era constituído de um tratado em oito livros. Nesse trabalho Apolônio provou entre outras coisas que:

- Os vários tipos de cônicas são obtidos a partir da mesma superfície cônica circular, bastando para tal variar o ângulo de inclinação do plano em relação ao eixo da superfície cônica;

- Não importa se o cone é circular reto ou oblíquo, em qualquer dos casos, a secção obtida pela intersecção de um plano é uma cônica;

- Uma circunferência nada mais é do que um caso particular da elipse, bastando para isso fazer o plano paralelo a base do cone.

Mesmo sendo Menaecmus o primeiro a se dedicar ao estudo das curvas cônicas, não foi ele que as batizou. Segundo Silva (2013, p. 12), foi Apolônio de Perga que batizou as cônicas com os nomes que nós hoje conhecemos tais como: parábola, hipérbole ou elipse. Já que até então não havia nenhuma nomenclatura específica em comum a todos os matemáticos. Naquele período das descobertas das cônicas, não se conhecia uma maneira analítica para se descrever tais curvas. A descoberta das equações cartesianas mais simples tanto da elipse, da parábola como também da hipérbole que conhecemos hoje se deve a Pierre Fermat.

Figura 1.4: Pierre de Fermat

Pierre de Fermat (1601-1665) teve uma motivação especial ao elaborar uma de suas obras denominada Ad locos et sólidos isagoge (1636), a qual tem uma aproximação do sistema de coordenadas na geometria Euclidiana de Descartes, que aconteceu ao restaurar a obra perdida Plane Loci de Apolônio. Nesse momento Fermat usou a linguagem algébrica para obter as demonstrações de vários teoremas enunciados por Pappus de Alexandria (290 à 350 d.C.) na sua descrição da obra de Apolônio. Dessa forma, a utilização da álgebra combinada com as propriedades dos lugares geométricos estudados por Apolônio, mostraram a Fermat que esses lugares geométricos poderiam ser representados em forma de equações algébricas com duas variáveis, as quais iria produzir toda a natureza fundamental do lugar geométrico como da natureza da sua construção.

Com isso Fermat aplicou os mesmos raciocínios e metodologia ao se debruçar sobre a obra Cônicas de Apolônio e através de suas propriedades definiu as equações das seções cônicas. Seus estudos o levou a sete equações que poderiam ser obtidas através da forma irredutível a partir da equação geral do segundo grau com duas variáveis, que é descrita atualmente como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

A depender dos valores dos coeficientes dessa equação, Fermat chamou os lugares geométricos obtidos da seguinte maneira: reta, hipérbole equilátera, par de retas concorrentes, parábola, círculo, elipse e hipérbole axial. Porém sabemos que também poderia ser um ponto, ou um par de retas paralelas ou simplesmente vazio.

O objetivo nos próximos capítulos é explorar a equação nos casos em que $B = 0$ e $A \neq 0$ ou $C \neq 0$. Para isso, estudaremos a elipse, a hipérbole e a parábola, os quais são os principais lugares geométricos obtidos pela equação do segundo grau com duas variáveis.

Capítulo 2

ELIPSE

2.1 Definição

Consideremos dois pontos F_1 e F_2 em um plano β, cuja distância seja dada por $2c$, conforme a figura abaixo.

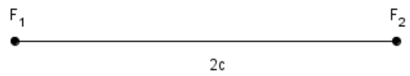


Figura 2.1: Distância focal

Seja $2a$ um número real tal que $2a > 2c$, ou seja, $a > c$. Chamamos de *Elipse* ϵ o lugar geométrico dos pontos do plano β cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 seja igual ao número real $2a$. Dessa forma, qualquer que seja o ponto P pertencente a *elipse* ϵ temos que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Observando a figura 2.2 logo abaixo, podemos aplicar a definição descrita acima e obter o seguinte resultado a partir dos pontos A, B e C:

$$d(A, F_1) + d(A, F_2) = d(B, F_1) + d(B, F_2) = d(C, F_1) + d(C, F_2) = 2a$$

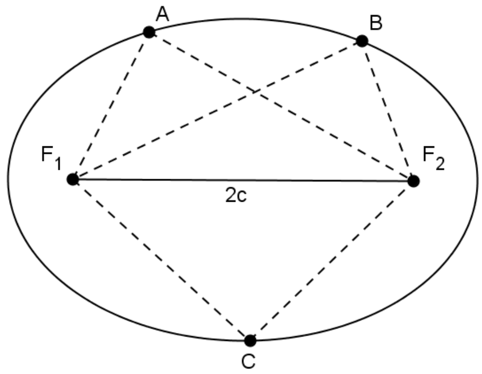


Figura 2.2: Elipse

2.2 Algumas Nomenclaturas

Observando a figura 2.3 iremos nomear os seguintes elementos:

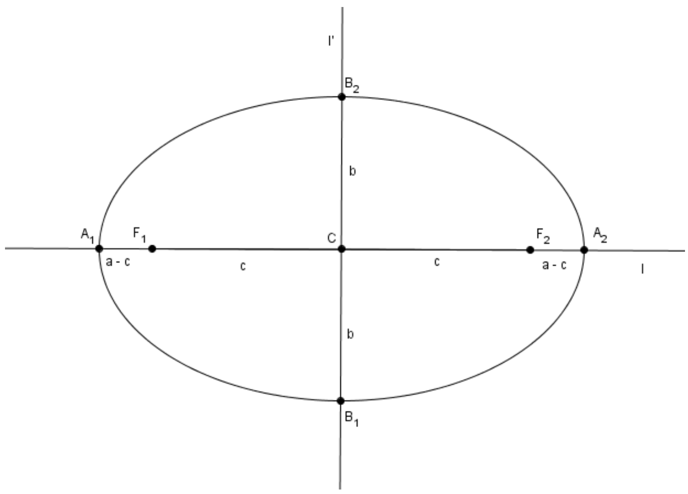


Figura 2.3: Elementos da elipse

Focos: Os pontos F_1 e F_2.

Reta focal: Reta l que contém os pontos F_1 e F_2.

Centro : Ponto médio C do segmento F_1F_2.

Reta não focal: Reta l' perpendicular ao segmento F_1F_2 passando por C.

Vértices: Interseção da elipse ϵ com a reta focal l: A_1 e A_2. Interseção da elipse ϵ com a reta não focal l': B_1 e B_2.

Eixo focal: Também chamado de *eixo maior* é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

Eixo não focal: Também chamado de *eixo menor* é formado pelo segmento B_1B_2 de comprimento $2b$.

Distância focal: Distância entre o centro C e cada um dos focos F_1 e F_2. Essa medida será representada pelo parâmetro c.

Excentricidade: É o valor dado pela razão $e = \frac{c}{a}$, onde c representa a medida da distância do centro aos focos e a representa a medida da distância do centro aos vérices sobre a reta focal. Como $a > c$, então $0 < e < 1$. Uma observação a ser feita é que o valor da excentricidade deixa a elipse mais arredondada ou afilada. A medida que a distância entre os focos aproxima de zero a excentridade também se aproxima de zero e como consequência a elipse fica parecida com uma circunferência, a qual é uma elipse especial justamente quando $e = 0$.

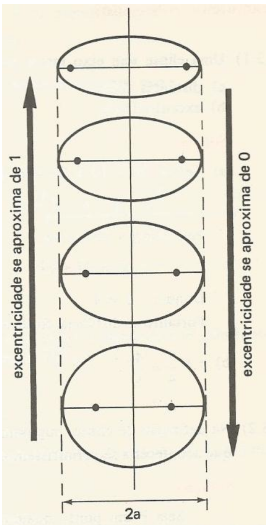


Figura 2.4: Variação da excentridade

2.3 Relação Entre os Parâmetros a, b e c

Os números a, b e c, também chamados de parâmetros, são respectivamente, a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e a distância do centro aos focos. Podemos observar essas distâncias na figura 2.5 logo abaixo.

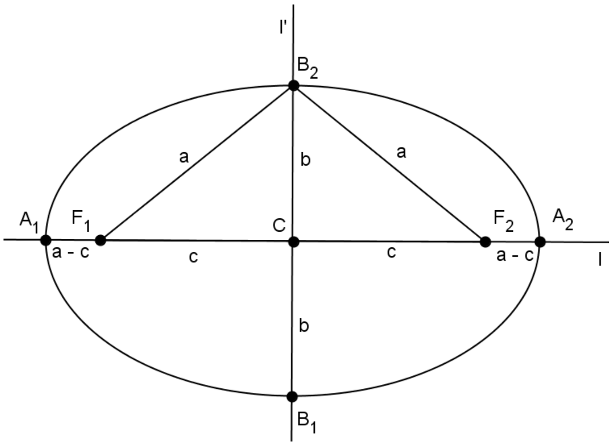


Figura 2.5: Relação entre os parâmetros a, b e c

Para chegar a relação que existe entre as distâncias a, b e c em uma elipse é necessário observar o fato de l' ser a mediatriz do segmento F_1F_2. Pois, pela propriedade da mediatriz de um segmento, qualquer ponto que esteja em l' tem a mesma distância a F_1 e a F_2. Dessa forma teremos que $d(B_2, F_1) = d(B_2, F_2)$, e pela definição da elipse, temos:

$$d(B_2, F_1) + d(B_2, F_2) = 2a$$

$$d(B_2, F_2) + d(B_2, F_2) = 2a$$

$$2d(B_2, F_2) = 2a$$

$$d(B_2, F_2) = a$$

Agora conforme a figura 2.5, o triângulo CB_2F_2 é retângulo e utilizando o Teorema de Pitágoras podemos chegar a seguinte relação.

$$d(B_2, F_2)^2 = d(B_2, C)^2 + d(C, F_2)^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

2.4 Elipse ϵ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Para essa situação teremos as seguintes coordenadas para os focos e os vértices.

$F_1 = (-c, 0)$ $\quad$ $A_1 = (-a, 0)$ $\quad$ $B_1 = (0, -b)$

$F_2 = (c, 0)$ $\quad$ $A_2 = (a, 0)$ $\quad$ $B_2 = (0, b)$

Tomando $P = (x, y) \in \epsilon$, conforme a figura 2.6, teremos

$d(P, F_1) = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}$

$d(P, F_2) = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$

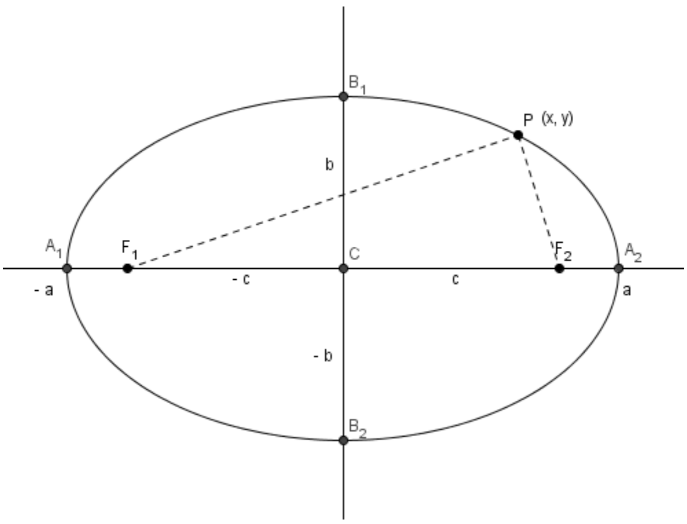


Figura 2.6: Forma canônica: eixo OX

Sabendo das relações $a > c > 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$, ou seja, $b^2 = a^2 - c^2$ temos pela definição da elipse que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2} = 2a - \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$a^2 - cx = a\sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

$$(a^2 - cx)^2 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esse última equação é conhecida como **equação reduzida** ou **forma canônica** da elipse com centro na origem e reta focal coincidente ao eixo OX.

2.5 Elipse ϵ com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Para essa situação agora temos as seguintes coordenadas para os focos e os vértices.

$F_1 = (0, -c)$ $\qquad$ $A_1 = (0, -a)$ $\qquad$ $B_1 = (-b, 0)$

$F_2 = (0, c)$ $\qquad$ $A_2 = (0, a)$ $\qquad$ $B_2 = (b, 0)$

Tomando um ponto $P = (x, y) \in \epsilon$, teremos:

$d(P, F_1) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = \sqrt{x^2 + 2cy + c^2 + y^2}$

$d(P, F_2) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{x^2 - 2cy + c^2 + y^2}$

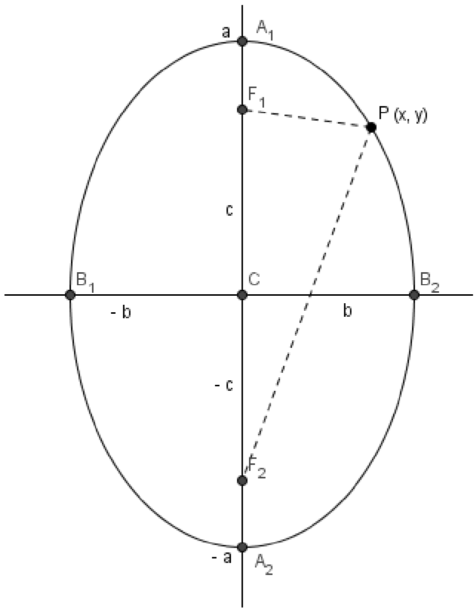


Figura 2.7: Forma canônica: eixo OY

Usando as relações $a > c > 0$, $a^2 = b^2 + c^2$ e a definição da elipse $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$, teremos de forma análoga à vista na seção anterior que:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Novamente essa é a **equação reduzida** ou **forma canônica** da elipse com centro na origem e reta focal coincidente ao eixo OY.

2.6 Translação: Elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$

Iremos analisar agora o caso em que a elipse não está centrada na origem e sendo assim os eixos irão sofrer uma translação. Sejam XOY um sistema de eixos ortogonais e $O' = (x_0, y_0)$ um ponto nesse sitema. Consideremos agora um novo sistema de eixos ortogonais $X'O'Y'$ cuja origem seja o ponto O' e que $O'X'$ seja paralelo a OX assim como $O'Y'$ paralelo a OY.

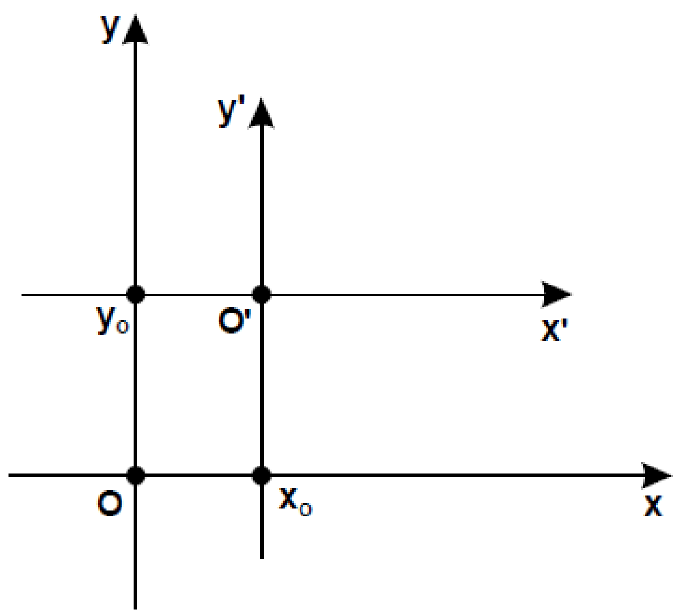


Figura 2.8: Translação dos eixos

Tomando um ponto P de coordenadas (x, y) em XOY e coordenadas (x', y') em $X'O'Y'$ conforme a figura 2.9 e usando as nocões de vetores, iremos tomar $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ como vetores unitários na direção e sentido de OX e OY respectivamente (e assim também com a mesma direção e sentido de $O'X'$ e $O'Y'$) para ter a seguinte combinação linear:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}, \\ \overrightarrow{OO'} = x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{O'P} = x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} \end{cases}$$

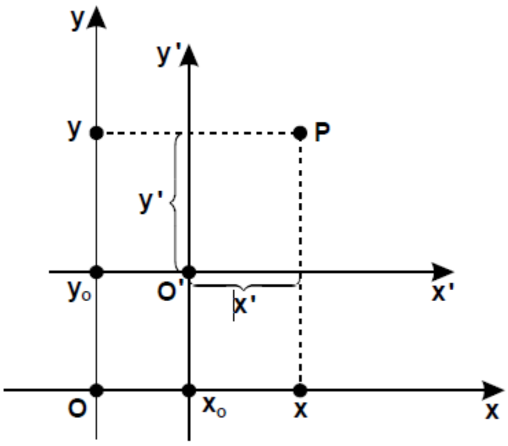


Figura 2.9: Ponto P no sistema $X'O'Y'$

Como $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$, então escrevendo esses vetores em combinação linear de $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ teremos:

$$x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2} = x_0\overrightarrow{e_1} + y_0\overrightarrow{e_2} + x'\overrightarrow{e_1} + y'\overrightarrow{e_2} = (x_0 + x')\overrightarrow{e_1} + (y_0 + y')\overrightarrow{e_2}.$$

Dessa forma, conforme esse resultado podemos relacionar as coordenadas de P nos dois sistemas coordenados XOY e $X'O'Y'$ da seguinte maneira.

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Para uma elipse com o centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ qualquer vamos ter dois casos.

<u>Primeiro caso</u>: Reta focal paralela ao eixo OX e consequentemente a $O'X'$. Conforme visto na seção 2.4 a equação da elipse com centro em O' no sistema $X'O'Y'$ será:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Substituíndo as relações das coordenadas entre os sistemas XOY e $X'O'Y'$ temos

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

Donde a equação da elipse no sistema de coordenadas XOY será

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Com os seguintes elementos:

Centro: $C = (x_0, y_0)$

Focos: $F_1 = (-c + x_0, y_0)$ e $F_2 = (c + x_0, y_0)$

Vértice: $A_1 = (-a + x_0, y_0)$ e $A_2 = (a + x_0, y_0)$

Reta focal: $l : y = y_0$

Reta não-focal: $l' : x = x_0$

Segundo caso: Reta focal parelela ao eixo OY e consequentemente a $O'Y'$. Conforme visto na seção 2.5 a equação da elipse com centro em O' no sistema $X'O'Y'$ é:

$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Subtituíndo as relações, análogo ao que foi feito no primeiro caso, ficaremos com a seguinte equação

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

E com os seguintes elementos:

<u>Centro</u>: $C = (x_0, y_0)$

<u>Focos</u>: $F_1 = (x_0, -c + y_0)$ e $F_2 = (x_0, c + y_0)$

<u>Vértice</u>: $A_1 = (x_0, -a + y_0)$ e $A_2 = (x_0, a + y_0)$

<u>Reta focal</u>: $l : x = x_0$

<u>Reta não-focal</u>: $l' : y = y_0$

2.7 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Desenvolvendo a equação da elipse ϵ de centro em $P = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX encontrada na seção 2.6 (o caso com reta focal paralela ao eixo OY é análago), teremos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{b_2} = 1$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 + a^2y^2 - 2a^2y_0y + a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Fazendo $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$, ficaremos com a seguinte equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Esta é uma equação do

2^o grau de uma elipse.

Agora tomando uma equação geral do segundo grau qualquer $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ em que $A>0$, $C>0$ e $B=0$, e usando a técnica de completar quadrado teremos,

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$x^2+\frac{D}{A}x+\frac{C}{A}y^2+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+\frac{C}{A}(y^2+\frac{E}{C}y)+\frac{F}{A}=\frac{D^2}{4A^2}$$

$$(x+\frac{D}{2A})^2+\frac{C}{A}(y+\frac{E}{2C})^2=\frac{D^2}{4A^2}-\frac{F}{A}+\frac{E^2}{4AC}=\frac{CD^2-4ACF+AE^2}{4A^2C}$$

Do fato de $A>0$ e $C>0$, decorre que:

- Se $CD^2-4ACF+AE^2<0$ teremos um conjunto vazio, pois a soma de dois quadrados é maior ou igual a zero.
- Se $CD^2-4ACF+AE^2=0$ teremos um ponto de coordenadas $(\frac{-D}{2A},\frac{-E}{2C})$.
- Se $CD^2-4ACF+AE^2>0$ teremos uma elipse de centro $(\frac{-D}{2A},\frac{-E}{2C})$.

Nesta seção podemos observar que uma equação da forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, também pode representar, além de uma elipse, um ponto ou um conjunto vazio e nesses casos chamamos de elipse degenerada. Não é tão fácil a interpretação da representação geométrica como centro, vértices, focos, reta focal de uma elipse escrita na forma de equação do segundo grau como escrita na forma canônica.

Outra questão a ser mencionada na equação geral do segundo grau de uma elipse é quando temos $B \neq 0$. Nessa situação, aparece o termo misto xy que é responsável por rotacionar os eixos coordenados, porém neste trabalho não iremos considerar esse caso.

Capítulo 3

HIPÉRBOLE

3.1 Definição

Consideremos dois pontos F_1 e F_2 num plano β, cuja distância seja igual a $2c$, conforme a figura abaixo:

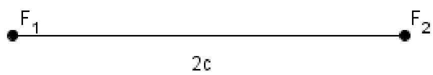


Figura 3.1: Focos da hipérbole

Tomemos $2a$ um número real tal que $2a < 2c$, ou seja, $a < c$ e $a > 0$. Chamamos de hipérbole o lugar geométrico de todos os pontos do plano β cuja a diferença das distâncias a F_1 e F_2, em valor absoluto, seja igual ao número $2a$.

Observando a figura 3.2 logo abaixo, podemos aplicar essa definição nos pontos A, B, C e D e obteremos o seguinte resultado.

$$\mid d(A, F_1) - d(A, F_2) \mid = \mid d(B, F_1) - d(B, F_2) \mid =$$

$$| \, d(C,F_1) - d(C,F_2) \, |=| \, d(D,F_1) - d(D,F_2) \, |= 2a$$

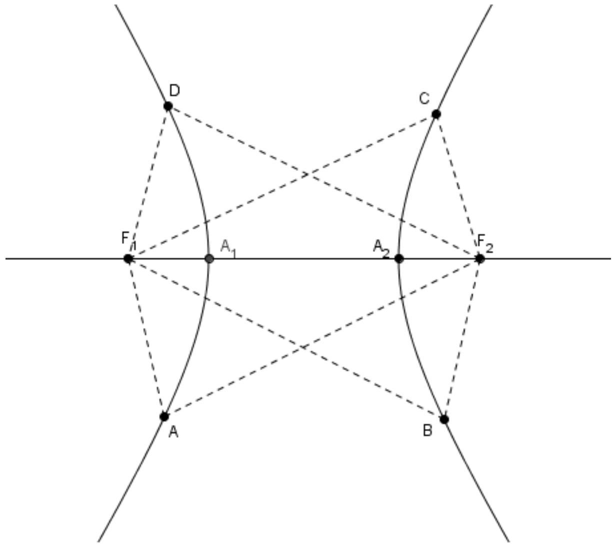


Figura 3.2: Hipérbole

3.2 Algumas Nomenclaturas

Observando a hipérbole abaixo temos:

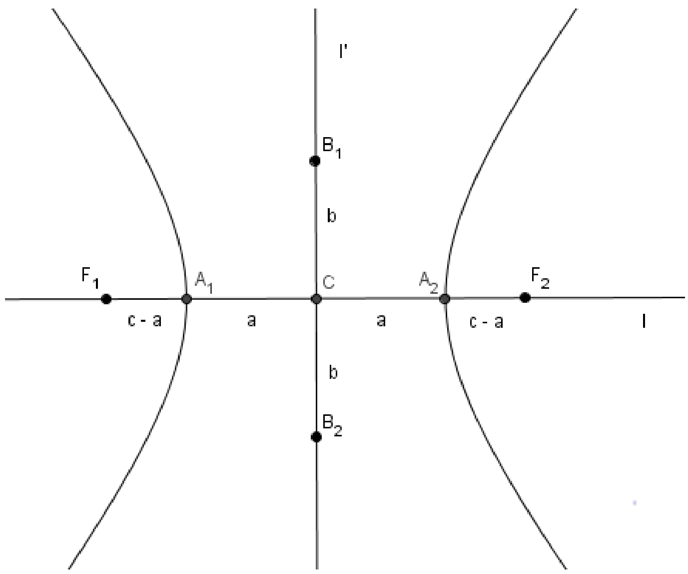


Figura 3.3: Elementos da Hipérbole

Focos: Os pontos F_1 e F_2.

Reta focal: Reta l que contém os focos F_1 e F_2.

Centro: Ponto médio C do segmento F_1F_2.

Reta não-focal: Reta l' perpendicular a reta l e que passa pelo ponto C.

Vértices: Pontos sobre a reta focal l cuja distância à C é igual à a, denominados de A_1 e A_2.

Vértices imaginários: Pontos sobre a reta não-focal l' cuja distância à C seja igual a um número real b que obedece a relação $b^2 = c^2 - a^2$, denominados de B_1 e B_2.

Eixo focal: Também chamado de eixo real, é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$.

Eixo não focal: Também chamado de eixo imaginário, é o segmento B_1B_2 que é perpendicular ao eixo focal e que tem ponto médio em C.

Excentricidade: O valor dado pela razão $e = \frac{c}{a}$. E como $c > a$, teremos que $e > 1$. A excentricidade da hipérbole está relacionada com a abertura ou fechamento de seus ramos. A medida que os focos se aproximam dos vértices, a excentricidade se aproxima de 1 e há um fechamento dos ramos e quando os focos se afastam dos vértices, a excentricidade cresce e há uma abertura dos ramos conforme podemos observar na figura abaixo.

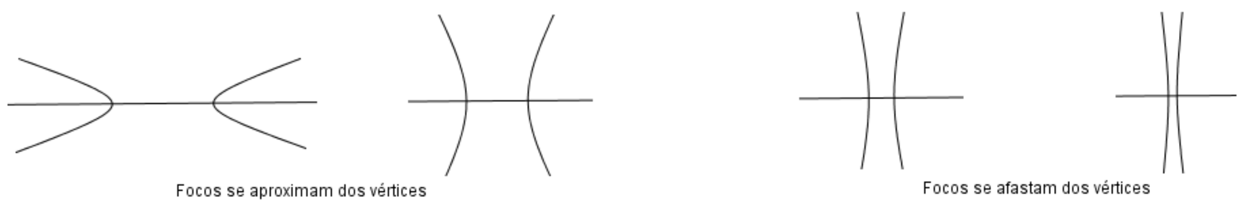


Figura 3.4: Variação da excentricidade da Hipérbole

Hipérboles conjugadas: São aquelas onde o eixo focal de uma é o eixo não focal da outra.

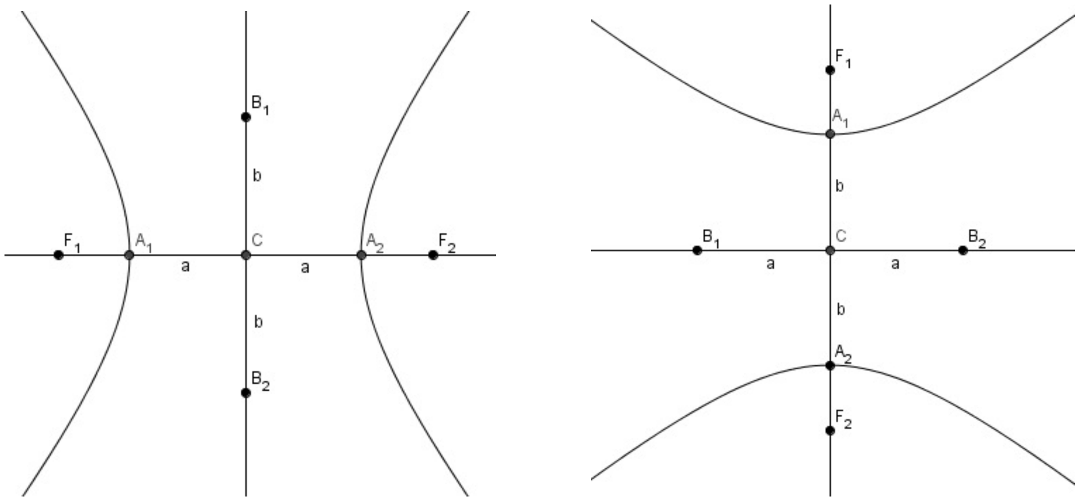


Figura 3.5: Hipérbole conjugada

<u>Retângulo de base</u>: É o retângulo que tem os vértices A_1, A_2, B_1 e B_2 como ponto médio de seus lados.

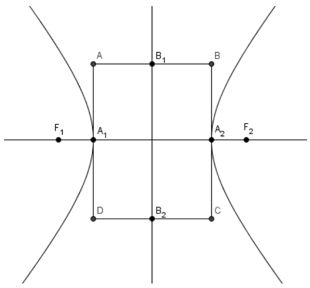


Figura 3.6: Retângulo base ABCD

<u>Assíntotas</u>: São as retas que contém as diagonais do retângulo de base e dessa forma passam pelo centro da hipérbole tendo inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação à reta focal. A figura abaixo mostra o retângulo e as assíntotas da hipérbole.

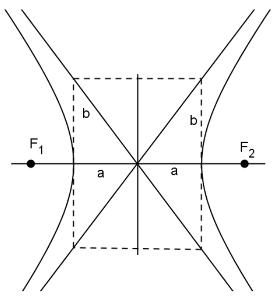


Figura 3.7: Retângulo base e as assíntotas da hipérbole

Hipérbole equilátera: É a hipérbole na qual os eixos focal e não-focal tem a mesma medida, ou seja, o retângulo de base é um quadrado e dessa forma as assíntotas são perpendiculares.

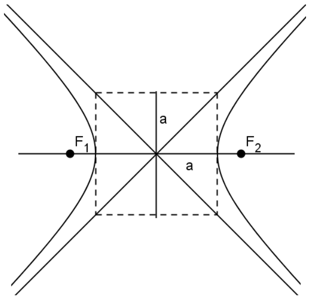


Figura 3.8: Hipérbole equilátera

Os números reais a, b e c, também chamados de parâmetros da hipérbole, são respectivamente a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, a distância do centro aos vértice sobre a reta não-focal e a distância do centro aos focos respectivamente.

3.3 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Fazendo o processo análogo ao que foi feito com a elipse iremos encontrar a equação da hipérbole, com o centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX, neste caso teremos as seguintes coordenadas para os vértices e os focos.

$F_1 = (-c, 0)$ $\qquad$ $A_1 = (-a, 0)$ $\qquad$ $B_1 = (0, -b)$

$F_2 = (c, 0)$ $\qquad$ $A_2 = (a, 0)$ $\qquad$ $B_2 = (0, b)$

Tomando $P = (x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, temos,

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}$$

$$d(P, F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2}$$

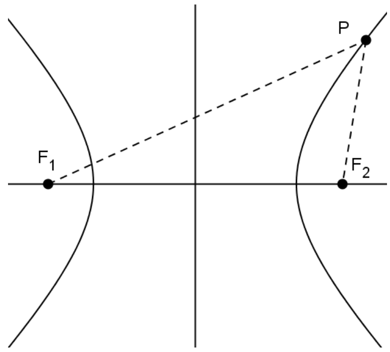


Figura 3.9: Distância de P ao focos F_1 e F_2

Aplicando a definição e considerando a relação entre os parâmetros $c^2 = a^2 + b^2$ ou $b^2 = c^2 - a^2$, teremos:

$$| \ d(P,F_1) - d(P,F_2) \ | = 2a$$

$$\begin{cases} d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a \\ d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = 2a \\ \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} - \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} = -2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 2a + \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \\ \sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = -2a + \sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2 \\ x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} + x^2-2cx+c^2+y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \\ 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} cx - a^2 = a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \\ cx - a^2 = -a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (cx - a^2)^2 = (a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2})^2 \\ (cx - a^2)^2 = (-a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \\ c^2x^2 - 2ca^2x + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = -a^4 + a^2c^2 \\ c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = -a^4 + a^2c^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Essa equação é a **forma canônica** ou **equação reduzida** da hipérbole com centro na origem e reta focal sobre o eixo OX.

3.4 Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Consideremos agora os vértices e os focos com as seguintes coordenadas.

$F_1 = (0, -c)$ $\qquad$ $A_1 = (0, -a)$ $\qquad$ $B_1 = (-b, 0)$

$F_2 = (0, c)$ $\qquad$ $A_2 = (0, a)$ $\qquad$ $B_2 = (b, 0)$

Para encontrarmos a equação nessa situação iremos proceder de forma análoga a seção anterior. Seja $P = (x, y)$ um ponto qualquer da hipérbole, logo:

$$d(P, F_1) = \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + 2cy + c^2}$$

$d(P, F_2) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2cy + c^2}$

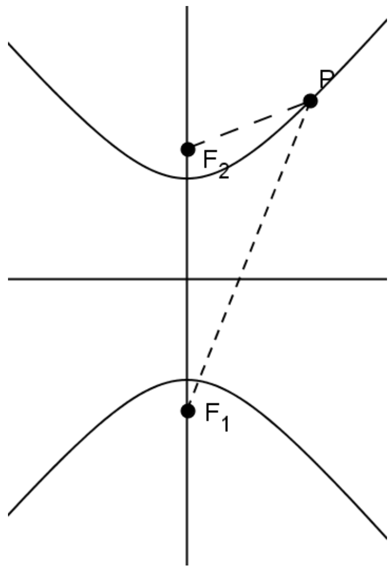


Figura 3.10: Hipérbole com reta focal paralela ao eixo OY

Aplicando a definição da hipérbole e considerando a relação $c^2 = a^2 + b^2$ e procedendo de forma análoga à vista na seção anterior chegaremos a equação,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Que é a **forma canônica** ou **equação reduzida** da hipérbole centrada na origem e eixo focal em OY.

3.5 Translação: Hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$

A equação da hipérbole de centro em um ponto qualquer fora da origem será feita de duas formas.

A primeira com eixo focal paralelo ao eixo OX e a segunda com eixo focal paralelo ao eixo OY. Conforme as figuras 3.11 e 3.12 podemos observar que quando o eixo focal da hipérbole for paralelo ao eixo OX teremos a reta $y = y_0$ como a equação cartesiana da reta focal e os pontos $(x_0 - c, y_0)$ e $(x_0 + c, y_0)$ como as coordenadas dos focos F_1 e F_2

respectivamente. Já quando o eixo focal for paralelo ao eixo OY teremos a reta $x = x_0$ como a equação cartesiana da reta focal e os pontos $(x_0, y_0 - c)$ e $(x_0, y_0 + c)$ como as coordenadas dos focos F_1 e F_2..

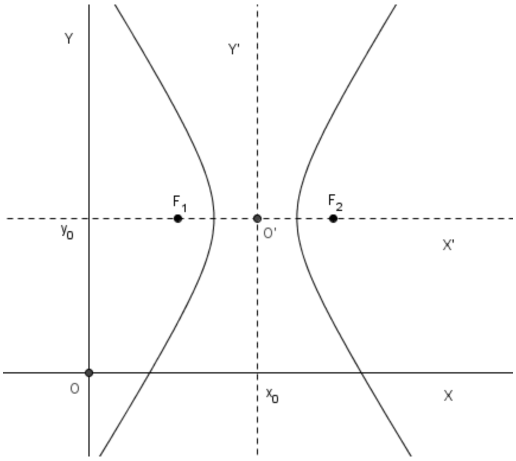


Figura 3.11: Translação do centro O para O' e $O'X'//OX$

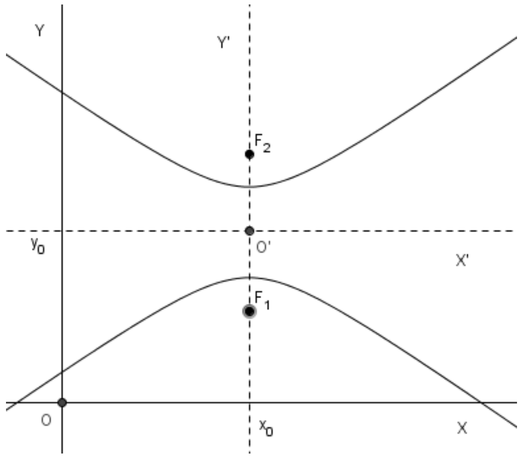


Figura 3.12: Translação do centro O para O' e $O'Y'//OY$

Tomando $X'O'Y'$ como novo sistema de eixos ortogonais com origem em O' e fazendo o mesmo processo realizado na seção 3.3 iremos ter as seguintes equações reduzidas da hipérbole:

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad e \qquad \frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

Mas, como visto também na seção 2.6, $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$ e substituindo nas equações anteriores teremos:

- Para o eixo focal paralelo ao eixo OX

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

- Para o eixo focal paralelo ao eixo OY

$$\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$$

Essas são as equações reduzidas da hipérbole no sistema de coordenadas XOY.

3.6 Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$

Desenvolvendo a equação da hipérbole, com centro em $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX, obtida na seção anterior (o caso da reta focal paralela ao eixo OY é análogo) teremos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 2xx_0 + x_0^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2yy_0 + y_0^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 = a^2b^2$$

$$b^2x^2 - 2b^2x_0x + b^2x_0^2 - a^2y^2 + 2a^2y_0y - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0$$

Tomando $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$, ficamos com a equação do segundo grau de uma hipérbole com a seguinte configuração $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Porém, se tomamos uma equação geral do segundo grau qualquer $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ em que $A \neq 0$, $C \neq 0$, $B = 0$ com $AC < 0$, teremos alguns casos a considerar. Usando a técnica de completar quadrado teremos,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + \tfrac{D}{A}x + \tfrac{C}{A}y^2 + \tfrac{E}{A}y + \tfrac{F}{A} = 0$$

$$(x + \tfrac{D}{2A})^2 + \tfrac{C}{A}(y^2 + \tfrac{E}{C}y) + \tfrac{F}{A} = \tfrac{D^2}{4A^2}$$

$$(x + \tfrac{D}{2A})^2 + \tfrac{C}{A}(y + \tfrac{E}{2C})^2 = \tfrac{D^2}{4A^2} - \tfrac{F}{A} + \tfrac{E^2}{4AC} = \tfrac{CD^2 - 4ACF + AE^2}{4A^2C}$$

De posse dessa última equação podemos analisar que:

- Se $CD^2 - 4ACF + AE^2 = 0$ teremos duas retas concorrentes.
  $y = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}(x + \frac{D}{2A}) - \frac{E}{2C}$
- E se $CD^2 - 4ACF + AE^2 \neq 0$ iremos ter uma hipérbole com reta focal paralela a um dos eixos coordenados dependendo do sinal de A e C.

No desenvolvimento dessa seção podemos observar que uma equação da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, também representou duas retas concorrentes e nessa situação chamamos a hipérbole de degenerada. Novamente na equação geral do segundo grau de uma hipérbole em que $B \neq 0$ aparece o termo misto xy que é responsável por rotacionar os eixos coordenados, porém neste trabalho não iremos considerar essa situação.

Capítulo 4

PARÁBOLA

4.1 Definição

Em um plano α tomemos uma reta d e um ponto F não pertencente a d. Chamamos de parábola o conjunto de todos os pontos de α que são equidistantes de F e d, ou seja, a parábola é dada por $\{P \in \alpha; d(P, d) = d(P, F)\}$.

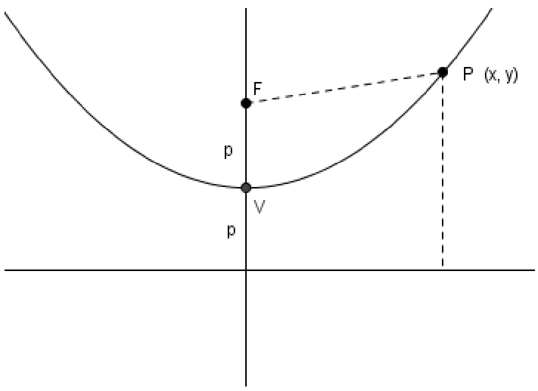


Figura 4.1: Parábola de foco F e reta diretriz d

De acordo com a figura 4.2 logo abaixo, os pontos A , B e C sobre a parábola satisfazem as igualdades: $d(A, F) = d(A, d)$, $d(B, F) = d(B, d)$ e $d(C, F) = d(C, d)$.

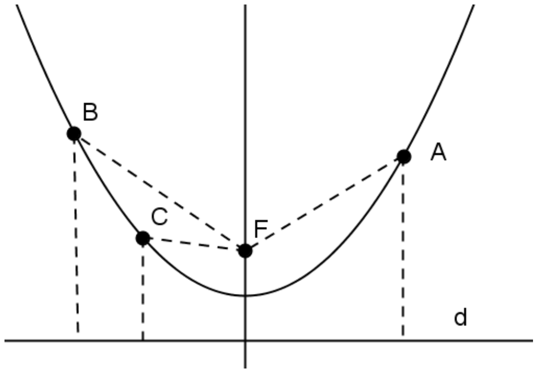


Figura 4.2: Parábola de foco F

4.2 Algumas Nomenclaturas

Observando a figura abaixo temos que:

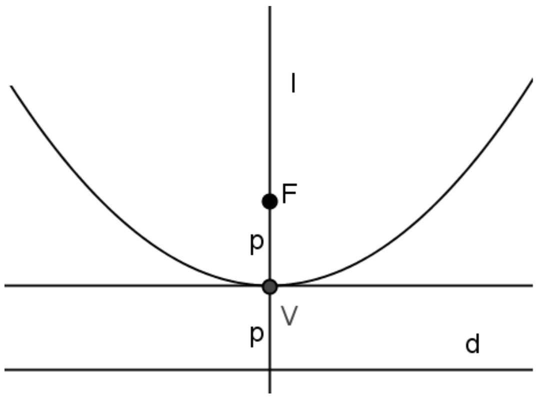


Figura 4.3: Elementos da parábola

Foco: O ponto F.

Reta diretriz: Reta d.

Reta focal: Reta l que contém o foco F e é perpendicular a reta diretriz.

Vértice: O ponto V que pertence a parábola e a reta focal.

Parâmetro da parábola: É o número p que representa a distância entre o vértice e o foco ou a distância entre o vértice e a reta diretriz.

$$\text{p} = d(F, V) = d(V, d)$$

Observação: Se A for o ponto de interseção entre a reta focal l e a reta diretriz d, então o vértice V será o ponto médio do segmento AF.

4.3 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Teremos duas situações para a parábola com o vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OX. A primeira será com o foco F à direita da reta diretriz e a segunda será com o foco F à esquerda da reta diretriz conforme as figuras 4.4 e 4.5.

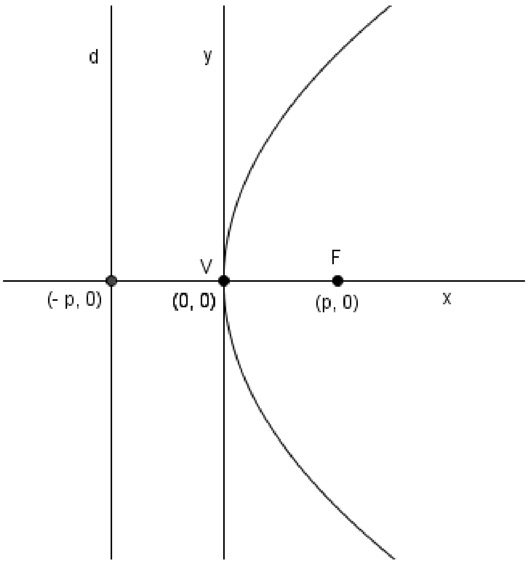


Figura 4.4: Foco à direita da reta diretriz

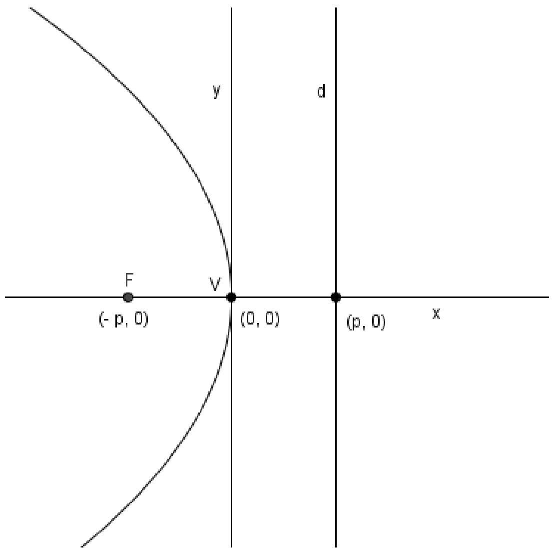


Figura 4.5: Foco à esquerda da reta diretriz

Com o foco à direita da diretriz temos o vértice $V = (0, 0)$, o foco $F = (p, 0)$ e a reta diretriz $d : x = -p$. Assim, tomando $P = (x, y)$ um ponto sobre a parábola, teremos a seguinte equação:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-o)^2} = |x + p|$$

$$(x-p)^2 + (y-o)^2 = |x+p|^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

Agora com o foco a esquerda da diretriz, teremos o vértice $V = (0,0)$, o foco $F = (-p, 0)$, a reta diretriz $d : x = p$. Novamente tomando $P = (x, y)$ um ponto sobre a parábola iremos encontrar a seguinte equação:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x-(-p))^2 + (y-o)^2} = |x-p|$$

$$(x+p)^2 + (y-o)^2 = |x-p|^2$$

$$x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2$$

$$y^2 = -4px$$

Essas duas equações $y^2 = 4px$ e $y^2 = -4px$ são as **equações reduzidas** , também chamadas de **forma canônica**, da parábola com centro na origem e reta focal coincidente ao eixo OX.

4.4 Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

De forma semelhante ao que foi feito na seção anterior, teremos duas situações para a parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo OY. A primeira com o foco F acima da reta diretriz e a segunda com o foco abaixo da reta diretriz conforme as figuras 4.6 e 4.7.

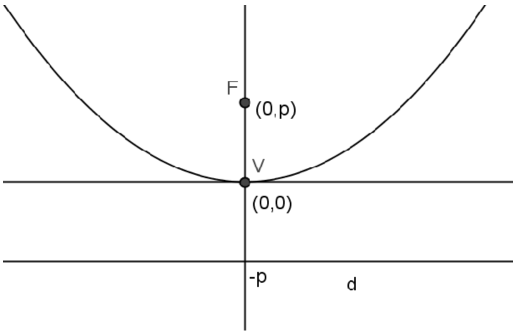


Figura 4.6: Foco acima da reta diretriz

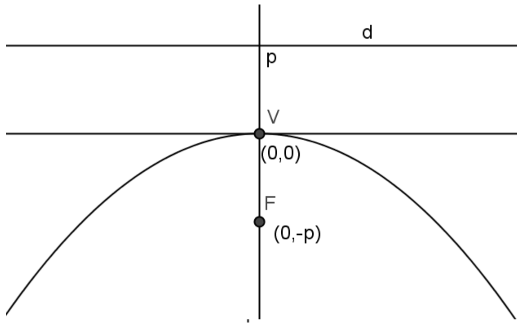


Figura 4.7: Foco abaixo da reta diretriz

Com o foco acima da reta diretriz teremos $F = (0, p)$, o vértice $V = (0, 0)$, a reta diretriz $d : y = -p$ e tomando $P = (x, y)$ um ponto da parábola teremos a seguinte equação:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$x^2 = 4py$$

Agora com o foco abaixo da reta diretriz iremos ter $F = (0, -p)$, o vértice $V = (0, 0)$, a reta diretriz $d : y = p$ e novamente tomendo $P = (x, y)$ um ponto da parábola chegaremos a seguinte equação:

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - (-p))^2} = |y - p|$$

$$x^2 + (y + p)^2 = |y - p|^2$$

$$x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2$$

$$x^2 = -4py$$

As equações $x^2 = 4py$ e $x^2 = -4py$ são as **equações reduzidas** ou **forma canônica** da parábola de centro na origem e reta focal coincidente ao eixo OY.

4.5 Translação: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX

Tomemos um novo sistema de coordenadas ortogonais $X'O'Y'$, com origem em $O' = (x_0, y_0)$ e eixos $O'X'$ e $O'Y'$ na mesma direção e sentido de OX e OY respectivamente conforme a figura abaixo.

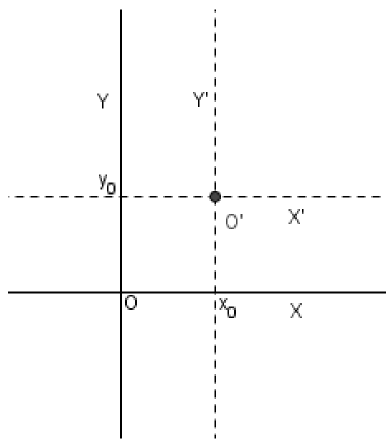


Figura 4.8: Translação dos eixos

Para escrever a equação da parábola com vértice em O' e reta focal paralela ao eixo OX procederemos de forma análoga ao que foi feito nos capítulos 3 e 4 para a elipse e a hipérbole respectivamente. Iremos considerar as coordenadas x e y escritas como $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$, onde x' e y' são as coordenadas de um ponto qualquer no sistema $X'O'Y'$.

No novo sistema de coordenada $X'O'Y'$ teremos duas situações semelhantes ao da seção 4.3. Uma com o foco $F = (x_0 + p, y_0)$ e a outra com o foco $F = (x_0 - p, y_0)$ ambos no sistema de coordenada XOY conforme as figuras 4.9 e 4.10.

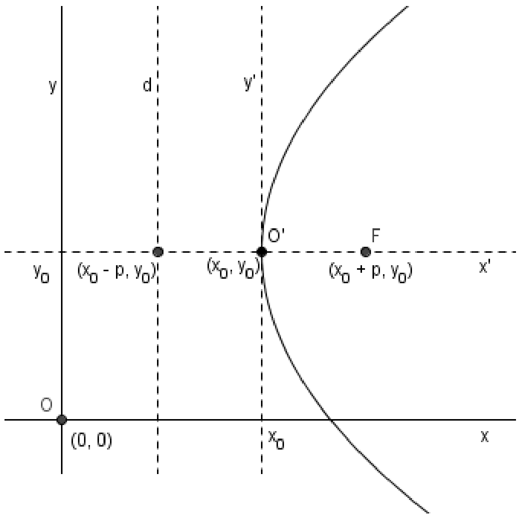


Figura 4.9: Translação com foco à direita

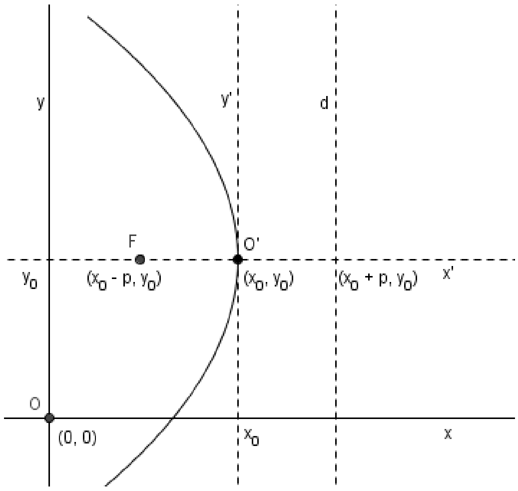


Figura 4.10: Translação com foco à esquerda

Com a parábola a direita da reta diretriz teremos a seguinte equação no sistema de coordenadas $X'O'Y'$: $y'^2 = 4px'$. Mas como $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$ a equação da parábola no sistema de coordenadas XOY será

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$$

E terá os seguintes elementos:

Foco: $F = (x_0 + p, y_0)$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Reta diretriz: $d : x = x_0 - p$

Reta focal: $l : y = y_0$

Para o caso da parábola com o foco $F = (x_0 - p, y_0)$ à esquerda da reta diretriz teremos a seguinte equação $y'^2 = -4px'$ no sistema de coordenadas $X'O'Y'$. Mudando para o sistema de coordenadas XOY a equação canônica da parábola será:

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$$

E terá os seguintes elementos:

<u>Foco</u>: $F = (x_0 - p, y_0)$

<u>Vértice</u>: $V = (x_0, y_0)$

<u>Reta diretriz</u>: $d : x = x_0 + p$

<u>Reta focal</u>: $l : y = y_0$

4.6 Translação: Parábola com vértice $V = (x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY

Como na seção anterior, basta considerar o sistema de coordenadas ortogonais $X'O'Y'$ com origem em $O' = (x_0, y_0)$ e eixos $O'X'$ e $O'Y'$ no mesmo sentido e direção de OX e OY respectivamente, e obter assim as equações e os elementos das parábolas de vértice em $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY conforme as figuras 4.11 e 4.12.

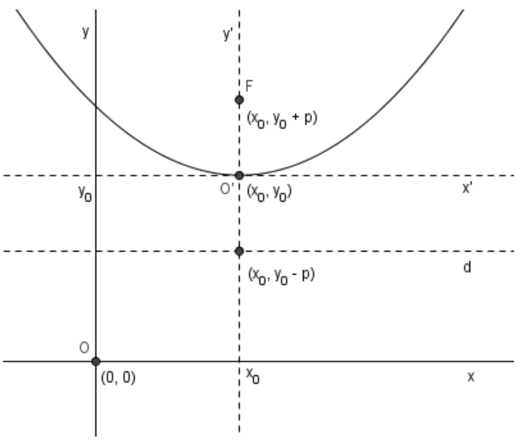


Figura 4.11: Translação com foco acima

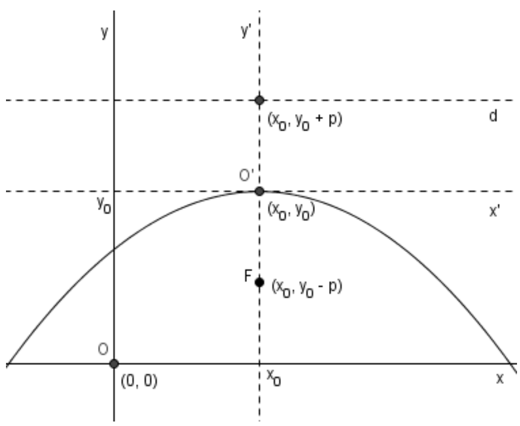


Figura 4.12: Translação com foco abaixo

Para o caso da parábola com o foco acima da reta diretriz teremos o $F = (x_0, y_0 + p)$ e a equação $x'^2 = 4py'$ no sistema $X'O'Y'$. Novamente fazendo as substituições $x' = x - x_0$

e $y' = y - y_0$ teremos a seguinte equação no sistema de coordenada XOY:

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

Com os seguintes elementos:

Foco: $F = (x_0, y_0 + p)$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Reta diretriz: $d : y = y_0 - p$

Reta focal: $l : x = x_0$

Já para o caso da parábola com foco abaixo da reta diretriz teremos $F = (x_0, y_0 - p)$ e equação $x'^2 = -4py'$ no sistema $X'O'Y'$ e fazendo as mudanças das coordenadas para o sistema XOY ficaremos com a seguinte equação com os seguintes elementos:

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$$

Foco: $F = (x_0, y_0 - p)$

Vértice: $V = (x_0, y_0)$

Reta diretriz: $d : y = y_0 + p$

Reta focal: $l : x = x_0$

4.7 A equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Desenvolvendo a equação canônica de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX obtida na seção 4.5 teremos:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

Isto é,

$$y^2 - 2y_0y + y_0^2 = \pm 4px \mp 4px_0$$

Ou seja,

$$y^2 \pm 4px - 2y_0y + (y_0^2 \pm 4px_0) = 0$$

Esta é a equação do segundo grau da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \pm 4p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Desenvolvendo a equação da parábola de vértice em $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY, teremos:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$$

Isto é,

$$x^2 - 2x_0x + x_0^2 = \pm 4py \mp 4py_0$$

Ou seja,

$$x^2 - 2x_0x \pm 4py + (x_0^2 \pm 4py_0) = 0$$

E esta equação também está na forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \pm 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

Observamos que em qualquer das situações descritas acima temos que $B = 0$ e $AC = 0$.

Tomando uma equação geral do segundo grau qualquer $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ em que $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$, teremos alguns casos particulares a considerar. Usando a técnica de completar quadrado teremos:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0$$

$$(y + \frac{E}{2C})^2 - \frac{E^2}{4C^2} + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0$$

$$(y + \frac{E}{2C})^2 = -\frac{D}{C}x - \frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}$$

- Se $D \neq 0$, então $(y + \frac{E}{2C})^2 = -\frac{D}{C}(x + \frac{F}{D} - \frac{E^2}{4CD})$, será uma **parábola** de vértice em $(\frac{E^2}{4CD} - \frac{F}{D}, -\frac{E}{2C})$ e reta focal paralela ao eixo OX.
- Se $D = 0$, então $(y + \frac{E}{2C})^2 = -\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}$, poderá ser um par de retas paralelas ao eixo OX caso $-\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2} > 0$

$$y = \pm\sqrt{-\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}} - \frac{E}{2C}$$

- Se $D = 0$, então $(y + \frac{E}{2C})^2 = -\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2}$, será apenas uma reta paralela ao eixo OX se $-\frac{F}{C} + \frac{E^2}{4C^2} = 0$.

$$y = -\frac{E}{2C}$$

- Agora se $D = 0$, então $(y+\frac{E}{2C})^2 = -\frac{F}{C}+\frac{E^2}{4C^2}$, será um conjunto vázio se $-\frac{F}{C}+\frac{E^2}{4C^2} < 0$.

Tomando $A \neq 0$ e $C = 0$ teremos, de forma análoga, os mesmos resultados, apenas invertendo o paralelismo do eixo OX para o eixo OY tanto nas parábolas quanto nas retas.

Observamos nessa seção que uma equação da forma $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$, também poderá representar, além de uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou um conjunto vazio e em todos esses casos chamamos de parábola degenerada. Assim como nos capítulos 3 e 4, a equação geral do segundo grau de uma parábola poderá apresentar o $B \neq 0$. Nessa situação o termo misto xy aparecerá na equação e rotacionará os eixos coordenados, porém neste trabalho não iremos considerar esse caso.

Capítulo 5

PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO MÉDIO

A tecnologia está sempre presente na vida do homem desde as mais simples até as mais complexas, facilitando nossas ações, nos ajudando a realizar certas tarefas que levariam dias, ou até mesmo nos substituindo em determinada situações. O que percebemos é que os recursos tecnológicos ora nos fascinam, ora nos assustam pela rapidez que eles aparecem.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 2001) no que se refere ao ensino-aprendizagem de geometria, o recurso às tecnologias da comunicação, é um dos caminhos para se ensinar geometria na sala de aula. Essa discussão também não é recente, mas ainda são poucos os professores de matemática do Ensino Médio que fazem uso dessas tecnologias em suas aulas. Os motivos são muitos: falta de computador nas escolas, despreparo do professor, desconhecimento de software, entre outros.

Ainda de acordo com os PCN, os computadores podem ser usados nas salas de aula de matemática como fonte de informação, como auxiliar no processo de construção de conhecimento, como meio para desenvolver a autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções e como ferramenta para realizar determinadas atividades. Porém, isso depende, em grande parte, da escolha de softwares que venham a atender os objetivos que se pretende atingir, da concepção de aprendizagem que orienta o processo educativo e do trabalho do professor em preparar, conduzir e avaliar este processo.

A utilização dos softwares educativos nas escolas é um assunto ainda muito polêmico, pois quando nas escolas começaram a introduzir a informática no ensino percebeu-se pela pouca experiência um processo um pouco caótico. Ainda se encontra muitas escolas que introduziram a informática no currículo escolar apenas com o pretexto de modernidade.

A tecnologia deve a cada dia conquistar espaço no meio educacional. Sua utilização como uma ferramenta de aprendizagem e sua capacidade de modificar o meio social vem aumentando de maneira bem rápida na sociedade.

Dessa forma, nesse capítulo serão apresentadas atividades que servirão de instrumentos para o professor do Ensino Médio em sala de aula. Para isso, utilizaremos o software denominado Geogebra, criado por Markus Hohenwarter, o qual é um software da área da matemática/geometria dinâmica desenvolvido para o ensino e aprendizagem da Álgebra e da Geometria. Além disso, ele é de fácil manuseio, é auto informativo e gratuito. O professor poderá baixá-lo no endereço eletrônico www.geogebra.org.

O Geogebra é conhecido como um programa dinâmico que permite ao usuário a construção de diversas figuras geométricas, como pontos, vetores, segmentos, polígonos, retas, gráficos de funções e curvas parametrizadas além é claro das secções cônicas que será o foco das atividades.

Esse software é formado por diversas ferramentas que nos permitem fazer construções de figuras das mais simples até as mais complexas. Possui uma interface bem apresentável e didática. Oferece várias vantagens relacionadas ao conteúdo, pois incentiva o usuário a usar a criatividade para descoberta de novas formas de construções geométricas. O programa também é bem aplicado para estudos de conteúdos matemáticos relacionados à álgebra e ao cálculo.

Muitos são os temas matemáticos que poderão ser explorados com os diferentes recursos deste programa. Espera-se depois de algum período de uso deste recurso tecnológico que as aulas tornem-se muito produtivas, porém é preciso que o professor tenha o domínio do conteúdo e que os aspectos operacionais do software sejam problemas de segundo plano.

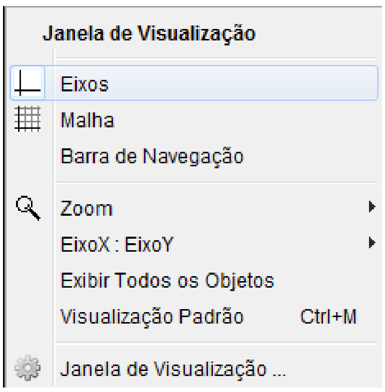
O objetivo geral desse trabalho é propor ao professor algumas atividades educacionais envolvendo a definição, as equações, a simetria e os elementos das cônicas utilizando o software Geogebra que servirá de apoio didático na sala de aula. A sugestão é que o professor desenvolva essas atividades com os alunos do 3º ano do Ensino Médio. Se possível fazendo revezamento entre aula teórica e aula prática com o geogebra.

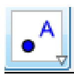
Em um primeiro momento será necessário que o professor mostre aos alunos a interface do programa e algumas ferramentas do Geogebra. Algumas construções que serão exploradas exige um conhecimento básico para executá-las. Para a sequência de cada atividade proposta o professor deverá dispor de uns 20 (vinte) minutos para construção e discussão. É interessante que o professor escolha 02 (dois) alunos que tenham mais afinidade com o software para serem seus monitores no desenvolvimento das atividades.

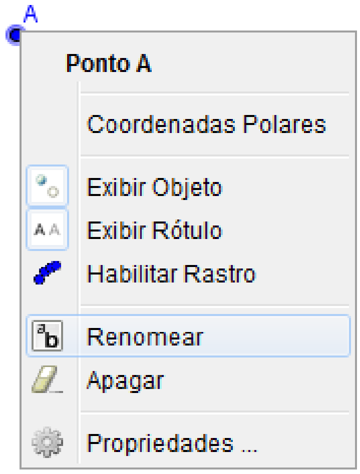
5.1 Atividade 01

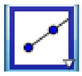
Vamos começar com a construção de uma elipse. Nessa atividade o professor poderá abordar a definição descrita no capítulo 2 e relembrar alguns resultados da geometria como a propriedade da mediatriz de um segmento. Seguiremos as seguintes sequências de passos.

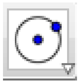
- Abrir o programa geogebra através do ícone GeoGebra.
- Agora para não deixar o aluno com o vício de criar ponto sempre nos eixos coordenados, vamos desativá-los. Para isso basta levar a seta do mouse até um dos eixos e clicar com o botão direito escolhendo na janela que abrirá a opção desativar os eixos.



- Vamos criar dois pontos com a ferramenta  para serem os focos da elipse. Em seguida iremos renomeá-los de F_1 e F_2. Para isso basta clicar com o botão direito do mouse em cima do ponto e selecionar a opção renomear.



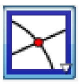
- Traçar uma semi-reta com a ferramenta  de origem em F_1 e que passe por F_2.

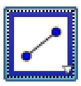
- Escolhendo a ferramenta , vamos construir um círculo de centro em F_1 e raio maior que o segmento F_1F_2. Podemos ocultar o ponto A que vai aparecer.

- Criar um ponto B pertencente ao círculo e que não seja na interseção do círculo com a semi-reta F_1F_2.

- Traçar dois segmentos definidos por dois pontos  BF_1 e BF_2.

- Traçar a mediatriz do segmento BF_2 através da ferramenta  . É importante nesse momento que o professor lembre a seus alunos que qualquer ponto na mediatriz de um segmento é equidistante de suas extremidades, pois essa propriedade será usada no decorrer da construção da elipse.

- Marcar o ponto de interseção  da mediatriz com o segmento BF_1 e renomeá-lo de P.

- Criar o segmento PF_2 com a ferramenta  .

  Nesse momento o professor pode ver com os alunos como está a construção. Ver figura 5.1.

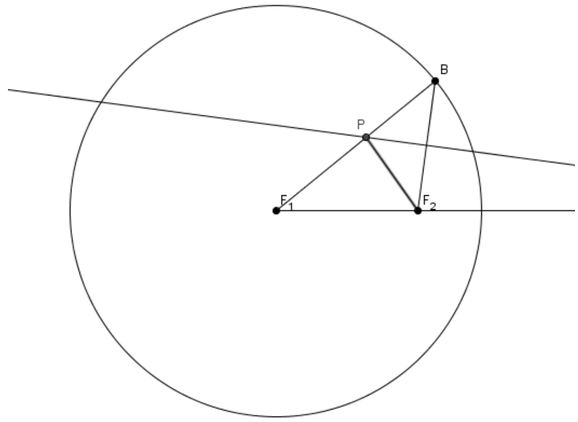


Figura 5.1: Construção da elipse

Tomando $2a$ como a distância entre F_1 e B teremos: $d(F_1, B) = d(F_1, P) + d(P, B) = 2a$. Como qualquer ponto na mediatriz é equidistante das extremidade de seu segmento, temos que $d(P, B) = d(P, F_2)$ e assim:

$$d(F_1, B) = d(F_1, P) + d(P, B) = d(F_1, P) + d(P, F_2) = 2a$$

Essa última igualdade é justamente a definição da elipse vista no capítulo 2. E dessa forma o ponto P pertence a elipse de focos F_1 e F_2 e distância entre os vértice igual a $2a$.

Para visualizar a elipse, conforme figura 5.2, vamos proceder da seguinte maneira:

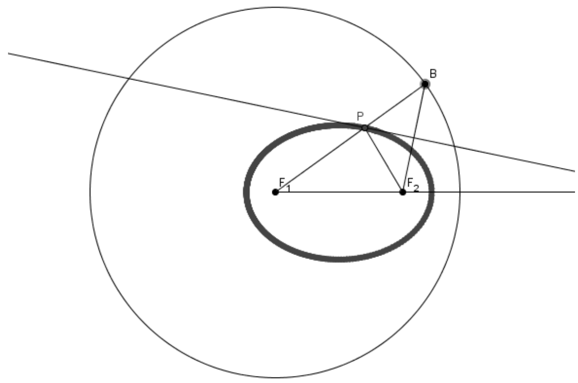


Figura 5.2: Elipse formada pelo rastro de P

- Clicar com o botão direito do mouse sobre o ponto P escolher habilitar rastro.
- Mover o ponto B sobre o círculo e visualizar a elipse.

Aqui o professor pode expor comentários sobre a definição da elipse e discutir com os alunos toda construção feita.

5.2 Atividade 02

Nessa próxima atividade o professor poderá discutir com seus alunos a simetria da elipse. Mostrar que ela é simétrica em relação a reta focal, em relação a reta não focal e ao seu centro. Para isso, deverá ser seguida a seguinte sequência de passos.

- Em uma janela do geogebra com os eixos ocultos, como fizemos na atividade anterior, iremos criar dois pontos e renomeá-los de F_1 e F_2. Esses pontos serão os focos da elipse.

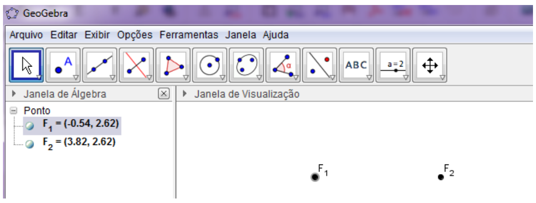


Figura 5.3: Focos da elipse

- Agora vamos traçar uma reta passando por F_1 e F_2. essa reta será nossa reta focal.

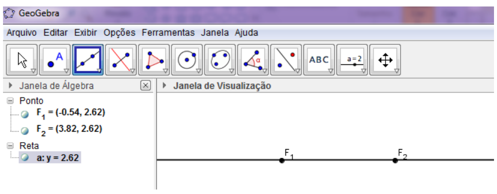


Figura 5.4: Reta focal

- Traçar a mediatriz do segmento F_1F_2 que será nossa reta não focal.

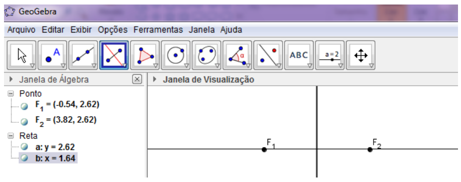


Figura 5.5: Mediatriz do segmento F_1F_2

- Marcar o ponto de interseção das retas focal e não focal e renomeá-lo de ponto C que será o centro da nossa elipse.

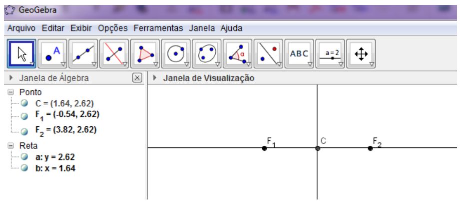


Figura 5.6: Ponto de interseção C

- Vamos escolher um ponto fora das retas focal e não focal e renomea-lo de ponto P. Esse ponto pertencerá a nossa elipse.

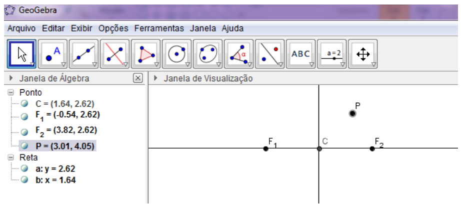
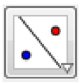
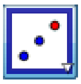


Figura 5.7: Criação do ponto P

Nesse momento é interessante que o professor veja como está a construção de cada aluno, pois é importante que todos estejam na mesma etapa da construção. Agora, antes de prosseguir, o professor poderá expor para os seus alunos um pouco sobre simetria. Discutir com eles o que significa um ponto ser simétrico a outro em relação a um referencial.

- Dando continuidade a construção, vamos marcar o ponto P' simétrico ao ponto P em relação a reta focal e o ponto P_1' simétrico a P em relação a reta não focal utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta . Logo após, marcar o ponto P_2' simétrico a P em relação ao centro da elipse através da opção reflexão em relação a um ponto .

É importante que o professor a cada etapa da construção verifique se os alunos estão acompanhado o desenvolvimento da atividade. Veja como ficará a nossa construção até aqui.

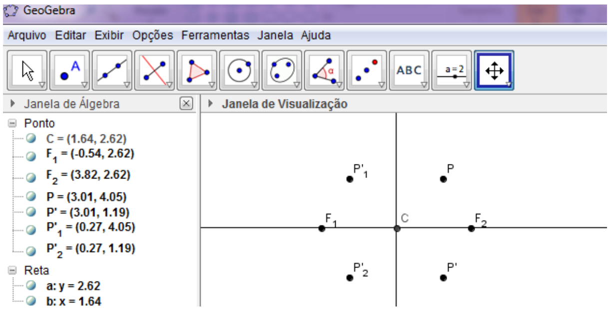
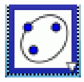


Figura 5.8: Construção dos pontos simétricos da elipse

- Para mostrar que esses três pontos pertencem a elipse de focos F_1 e F_2 com centro em C e passando por P, vamos construí-la utilizando a ferramenta elipse  e escolhendo os focos F_1 e F_2 e ponto P.

  Podemos visualizar que os três pontos criados pertecem a elipse como mostra a figura 5.9.

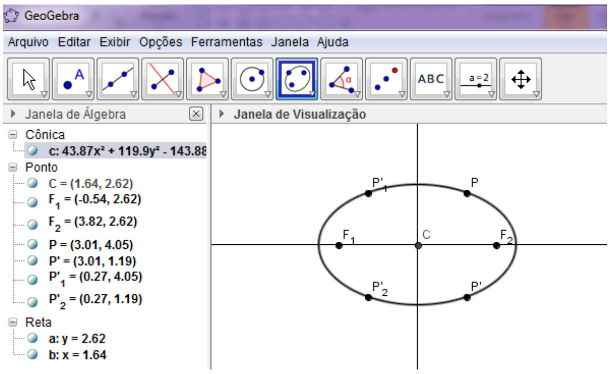


Figura 5.9: Elipse passando por P, P', P_1' e P_2'

Com isso o professor poderá concluir a construção e mostrar que a elipse é simétrica em relação a reta focal, a reta não focal e ao centro. Essa verificação também poderia ter sido feita criando a elipse e depois os pontos P, P', P_1' e P_2'.

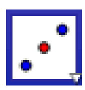
Outra tarefa que o professor pode explorar com essa construção é a verificação das simetrias da elipse utilizando a definição. Basta solicitar mais uma tarefa a sua turma. Pediria aos alunos que calculassem as distâncias dos focos a cada ponto de simetria e verificasse que:

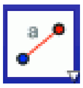
$$d(F_1, P) + d(F_2, P) = d(F_1, P') + d(F_2, P') = d(F_1, P_1') + d(F_2, P_1') = d(F_1, P_2') + d(F_2, P_2')$$

Concluindo assim que os pontos P', P_1' e P_2' pertencem a elipse conforme definição.

5.3 Atividade 03

Nessa atividade o professor poderá discutir com a sua turma o que acontece com a razão $\frac{c}{a}$ quando os focos aproximam ou afastam dos vértices. Essa razão é o que chamamos de excentricidade, onde c e a são, respectivamente, a distância do centro aos focos e aos vértices sobre a reta focal de uma elipse. No decorrer da discussão o professor pode também comentar com os seus alunos que a excentricidade e da elipse, como foi descrita na seção 2.2, é um valor compreendido entre 0 e 1. Para o desenvolvimento dessa atividade, procederemos da seguinte forma:

- Criar dois pontos renomeando de F_1 e F_2 para serem os focos da elipse.
- Traçar uma reta passando por F_1 e F_2. Essa reta será a reta focal da elipse.
- Criar uma elipse de focos em F_1 e F_2 e ocultar o ponto sobre a elipse que aparecer.
- Marcar os pontos de interseção da elipse com a reta focal e renomeá-los de A_1 e A_2. Esses pontos serão os vértices da elipse.
- Marcar o ponto médio do segmento F_1F_2 através da ferramenta  e nomeá-lo de C. Esse ponto C é o centro da elipse.
- Vamos agora traçar os segmentos CF_2 e CA_2 para podermos perceber o que acontece com a elipse ao variar o valor da excentricidade.
- Renomear os segmentos CF_2 de c e CA_2 de a.

- Criar um segmento com comprimento fixo fora da elipse com medida $\frac{c}{a}$ através da ferramenta . A medida desse segmento representará o valor da excentricidade.

- Calcular o comprimento desse segmento através da ferramenta . Veja na figura 5.10.

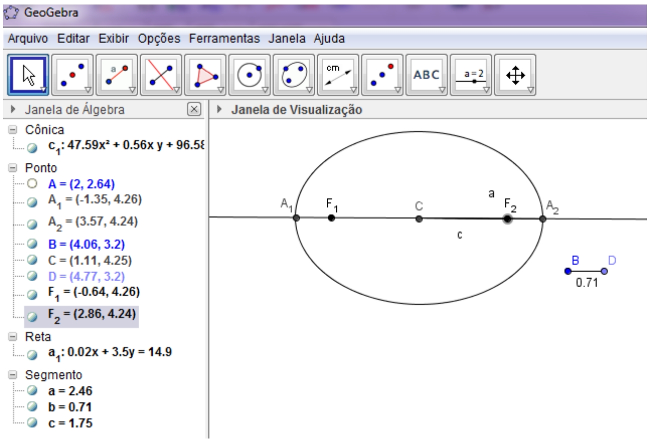


Figura 5.10: Elipse de focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2

Esta atividade possui muitas etapas, por isto é imprescindível que o professor acompanhe todas as construções feitas pelos alunos para que a atividade seja concluída com sucesso.

- Agora vamos aproximar e afastar os focos do centro e analisar o que acontece.

- Ao afastar os focos do centro C, a elipse fica alongada e a medida do segmento criado, ou da excentricidade $\frac{c}{a}$, aproxima-se de 1. Ver figura 5.11.

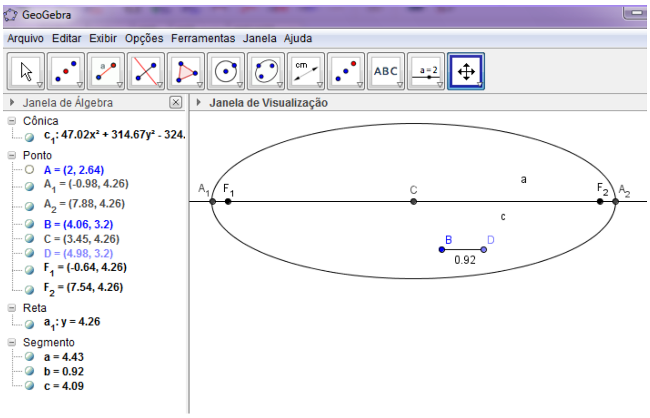


Figura 5.11: Elipse com focos afastados do centro C

- Ao aproximar os focos ao centro C, a elipse toma a forma de uma circunferência e a medida do segmento, ou da excentricidade $\frac{c}{a}$, aproxima-se de 0 tornando o segmento um ponto. Ver figura 5.12.

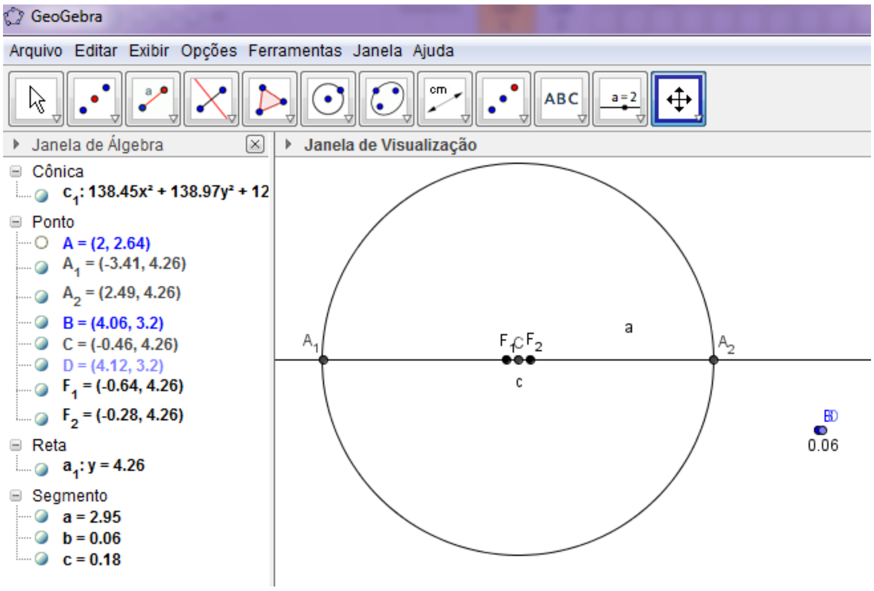


Figura 5.12: Elipse com focos próximos do centro C

Dessa forma, o professor poderá concluir, como descrito na seção 2.2, que no momento que a excentricidade se aproxima de zero a elipse fica parecida com uma circunferência e quando a excentricidade se aproxima de 1 a elipse fica afilada, alongada. É bom o professor chamar atenção para o caso particular da excentricidade ser igual a 0, pois neste caso ela será justamente uma circunferência.

5.4 Atividade 04

Construir a elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e logo após fazer a translação do centro para o ponto $(5, 4)$ destacando os principais elementos.

Nessa atividade o professor poderá discutir com os alunos a teoria descrita na seção 2.6 (*Translação: Elipse com o centro no ponto* $O' = (x_0, y_0)$). Tomar cuidado com os cálculos que serão utilizados e com o tempo para concluir a proposta. Seguiremos os seguintes passos:

- Ativar a malha clicando com o botão direito do mouse e selecionando a opção malha. Essa ferramenta é recomendada nessa atividade para uma melhor visualização da construção.

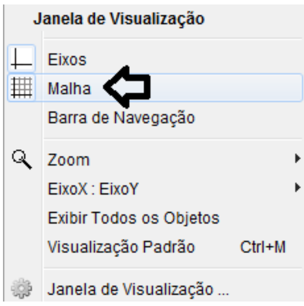


Figura 5.13: Ativando a malha

- Digitar no campo de entrada a equação da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

  Apartir daí, o professor poderá explorar os elementos dessa elipse centrada na origem e destacar os seus elementos. Ver figura 5.14.

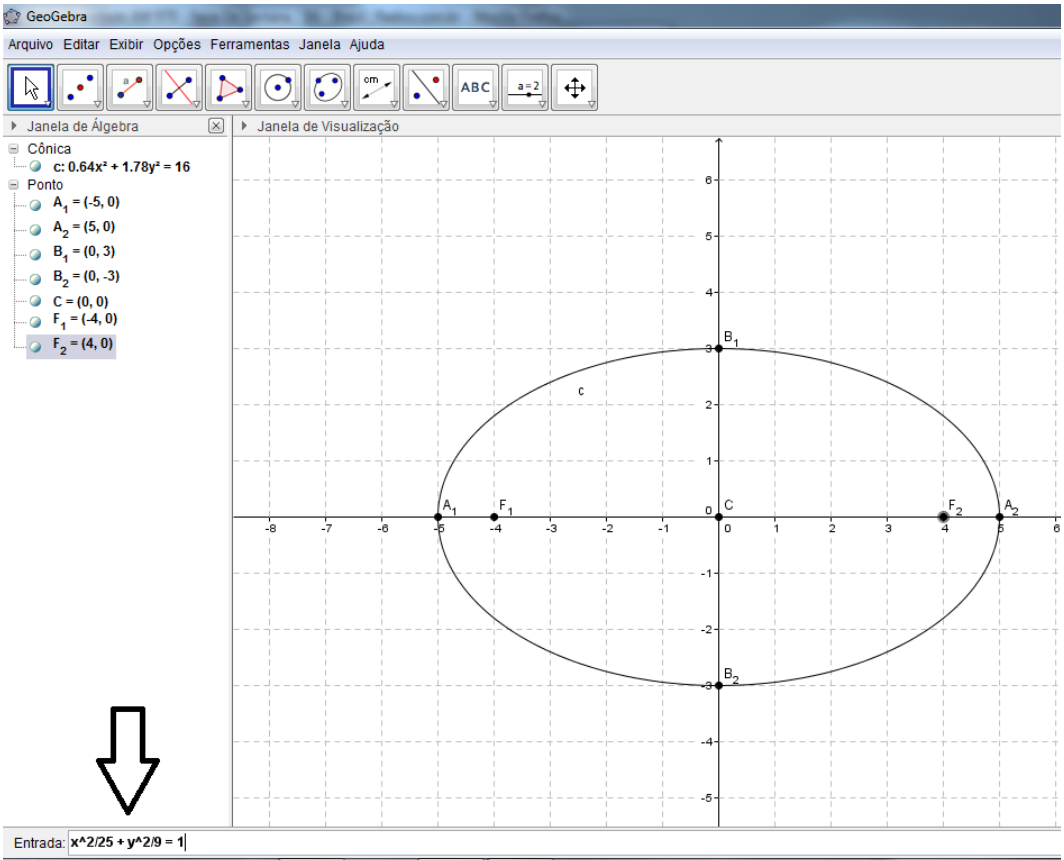


Figura 5.14: Elipse centrada na origem

- **Centro**: $C = (0, 0)$;
- **Vértices**: $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, 3)$ e $B_2 = (0, -3)$;
- **Focos**: $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$;
- **Reta focal**: $l : y = 0$;
- **Reta não-focal**: $l_1 : x = 0$.

  No caso dos focos não é tão fácil descobrir as suas coordenadas apenas analisando a elipse acima. Para isso, o professor terá que fazer as contas com os alunos utilizando os resultados da seção 2.3 (*Relação Entre os Parâmetros a, b e c*) para chegar as coordenadas dos focos.

  Agora o professor utilizará a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ descrita na seção 2.6 para obter a elipse transladada para o ponto $(5, 4)$ cuja equação reduzida será $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$. Novamente digitando na caixa de entrada essa equação obteremos a elipse conforme a figura 5.15.

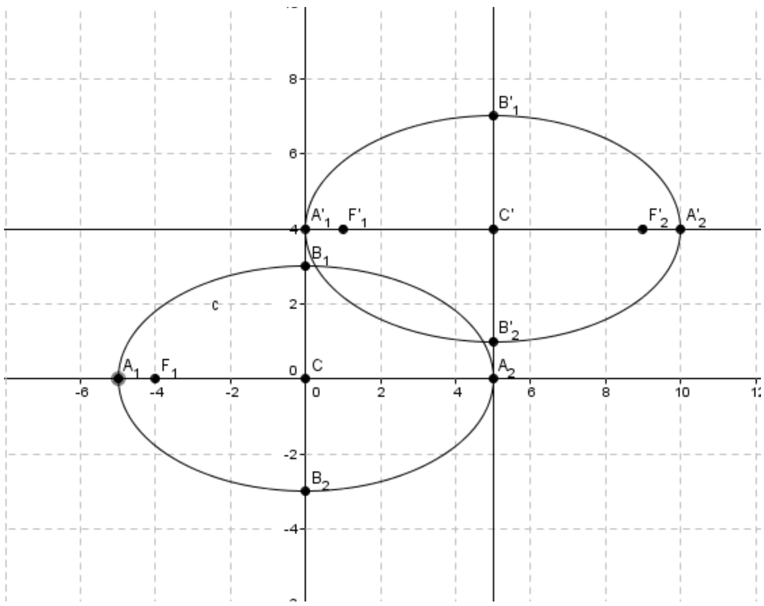


Figura 5.15: Elipse centrada no ponto $(5, 4)$

Dessa forma, podemos destacar os principais elementos dessa elipse através dos resultados do primeiro caso da seção 2.6.

- **Equação reduzida da elipse**: $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$
- **Centro**: $C' = (5, 4)$;
- **Vértices**: $A'_1 = (0, 4)$, $A'_2 = (10, 4)$, $B'_1 = (5, 7)$ e $B'_2 = (5, 1)$;

- **Focos**: $F_1' = (1, 4)$ e $F_2' = (9, 4)$;
- **Reta focal**: $l' : y = 4$;
- **Reta não-focal**: $l_1' : x = 5$.

É possível que algum aluno desenvolva os quadrados da equação $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$, que está na forma reduzida, e chegar a equação geral do 2º grau da forma $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F = 0$ vista na seção 2.7. Aqui cabe ao professor comentar que caso tenhamos uma equação do 2º grau, que seja de uma elipse, basta usar a técnica de completar quadrado e chegar a uma equação na forma canônica e realizar as etapas feitas anteriormente.

5.5 Atividade 05

O objetivo desta atividade é construir uma hipérbole. O professor irá explorar a definição apresentada no capítulo 3 e vários resultados da geometria no decorrer da construção. Seguiremos os seguintes passos em uma janela do geogebra.

- Com os eixos desabilitados, criar dois pontos e nomea-los de F_1 e F_2 para serem os focos da hipérbole.
- Traçar uma reta s passando pelos ponto F_1 e F_2. Essa será a nossa reta focal.
- Marcar um ponto A na reta focal s entre os pontos F_1 e F_2.
- Construir um círculo de centro em F_1 passando pelo ponto A. É aconselhável o professor acompanhar todos os passos da construção.
- Marcar um ponto B no círculo que não esteja nas interseções com a reta focal s.
- Traçar uma reta r passando pelos pontos B e F_1.
- Traçar o segmento F_2B e construir a sua mediatriz.
- Marcar o ponto de interseção P da reta r e a mediatriz do segmentoF_2B e logo após tracar o segmento F_2P.

Apartir da construção feita até agora, o professor poderá discutir com os seus alunos todo conceito da hipérbole apresentada no capítulo 3. Chamando a medida do segmento F_1B de $2a$, ou seja $d(F_1, B) = 2a$, mostrar que o ponto P pertence a uma hipérbole de focos F_1 e F_2.

O professor poderá conferir a construção dos alunos e orientá-los para eventuais erros tomando cuidado com o tempo disponível para concluir a atividade. Ver figura 5.16.

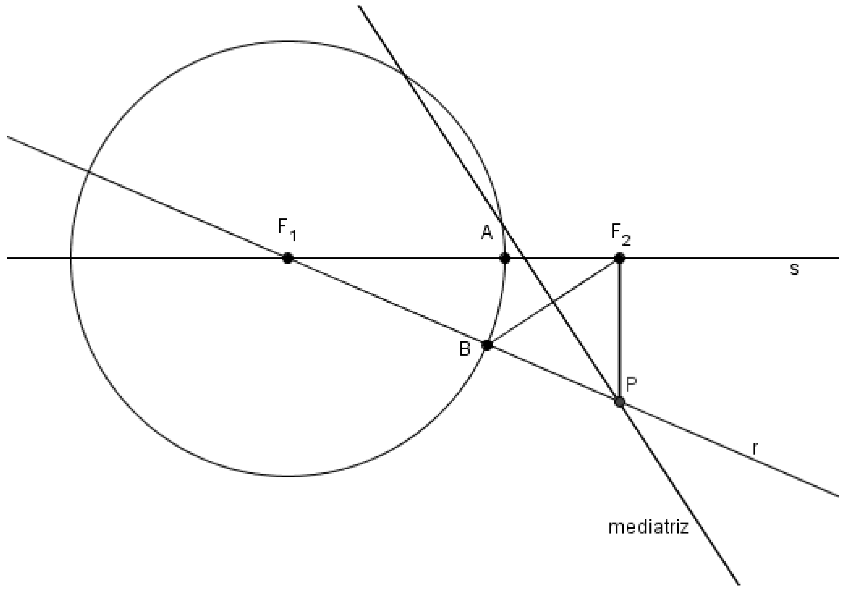


Figura 5.16: Construção da Hipérbole

Podemos observar que o ponto P pertence a mediatriz do segmento BF_2 e dessa forma $d(B, P) = d(F_2, P)$. Como os pontos F_1, B e P estão sobre a mesma reta r, então:

$$d(F_1, P) = d(F_1, B) + d(B, P)$$

O que nos dá,

$$d(F_1, B) = d(F_1, P) - d(B, P)$$

logo,

$$d(F_1, P) - d(F_2, P) = 2a$$

.

Por outro lado, pode ser observado também pelo professor que $d(F_2, P) - d(F_1, P) = d(B, P) - d(F_1, P) = -2a$. E portanto, chegar ao resultado $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$.

Assim, o ponto P tomado de forma aleátoria pertence a uma hipérbole de focos F_1 e F_2 cuja distância entre os vértices é $2a$. Para visualizar a hipérbole vamos habilitar o rastro no ponto P e mover o ponto B sobre o círculo. A medida que se faz isso, a hipérbole é construída. Ver figura 5.17.

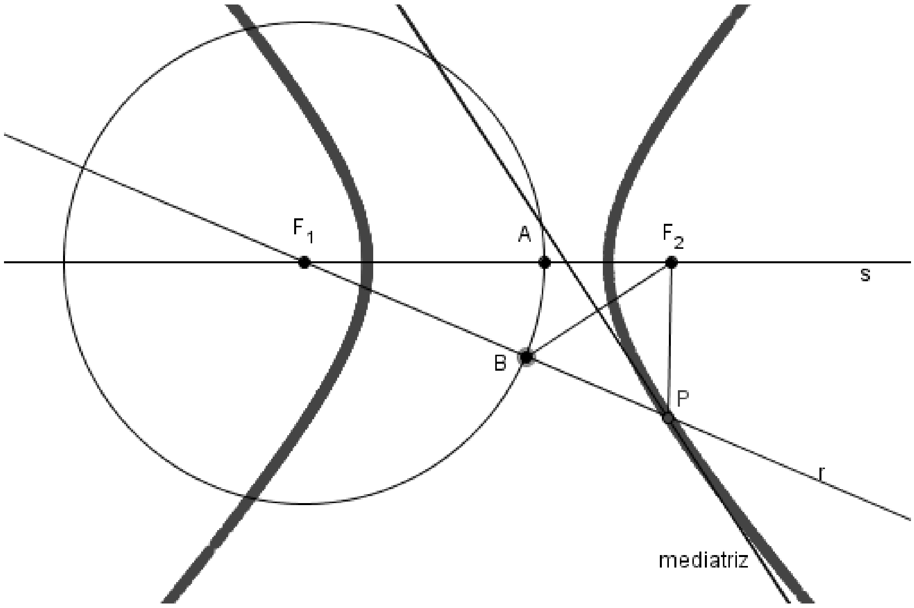


Figura 5.17: Hipérbole construída

O professor pode discutir e analisar com os alunos que o ramo da direita da hipérbole é traçado quando $d(F_2, P) < d(F_1, P)$ e o outro ramo da esquerda é traçado quando $d(F_2, P) > d(F_1, P)$.

5.6 Atividade 06

Como feito na atividade 02 com a elipse vamos mostrar com o auxílio do geogebra que a hipérbole é simétrica em relação a reta focal, a reta não-focal e ao seu centro.

Nessa atividade o professor poderá explorar o conceito de simétria como foi feito na atividade 02.

- Em uma janela do geogebra com a opção dos eixos dasabilitados iremos marcar dois pontos para serem os focos da hipérbole e chamá-los de F_1 e F_2.
- Traçar a reta l que passa por F_1 e F_2 para ser a reta focal.
- Marcar o ponto médio C do segmento F_1F_2. Esse ponto será o centro da hipérbole de focos F_1 e F_2.
- Traçar a reta l' perpendicular a reta l passando por C para ser a reta não-focal. Veja como ficará na figura.

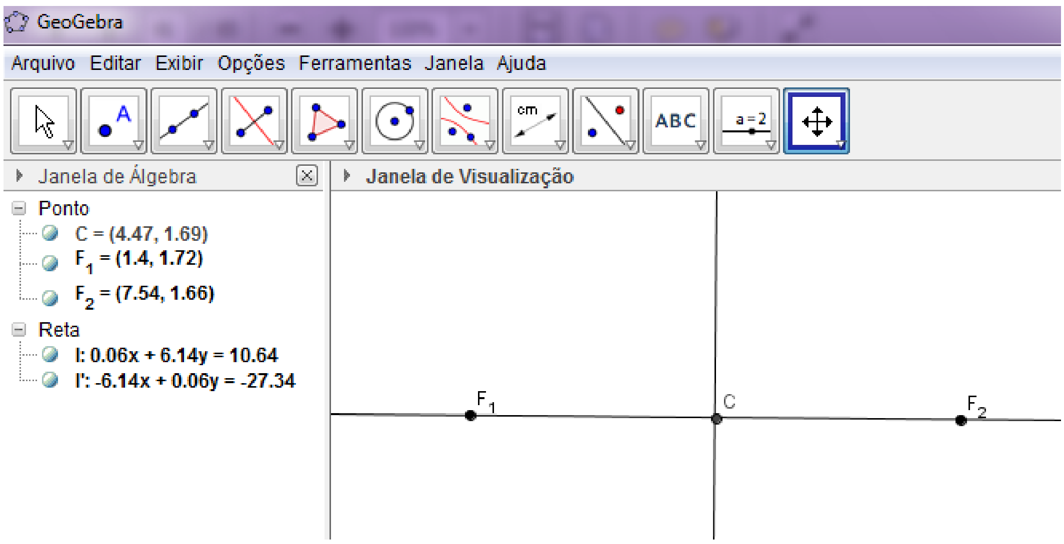
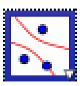


Figura 5.18: Início da construção

- Marcar um ponto P fora das retas l e l'. Esse ponto P pertencerá a nossa hipérbole de focos F_1 e F_2, reta focal l e reta não-focal l'.
- Agora vamos marcar os pontos P' que é simétrico a P em relação a reta focal l; P_1' que é simétrico a P em relação a reta não-focal l'; e o ponto P_2' que é simétrico a P em relação ao centro C da hipérbole.
- Vamos construir a hipérbole  de focos F_1 e F_2 passando por P. Após esses passos o professor poderá verificar a construção dos alunos.

Com essa última construção percebemos que os pontos P', P_1' e P_2' pertencem a hipérbole, dessa forma verificamos através do geogebra que a hipérbole é simétrica em relação a sua reta focal, reta não-focal e ao seu centro. Ver figura 5.19.

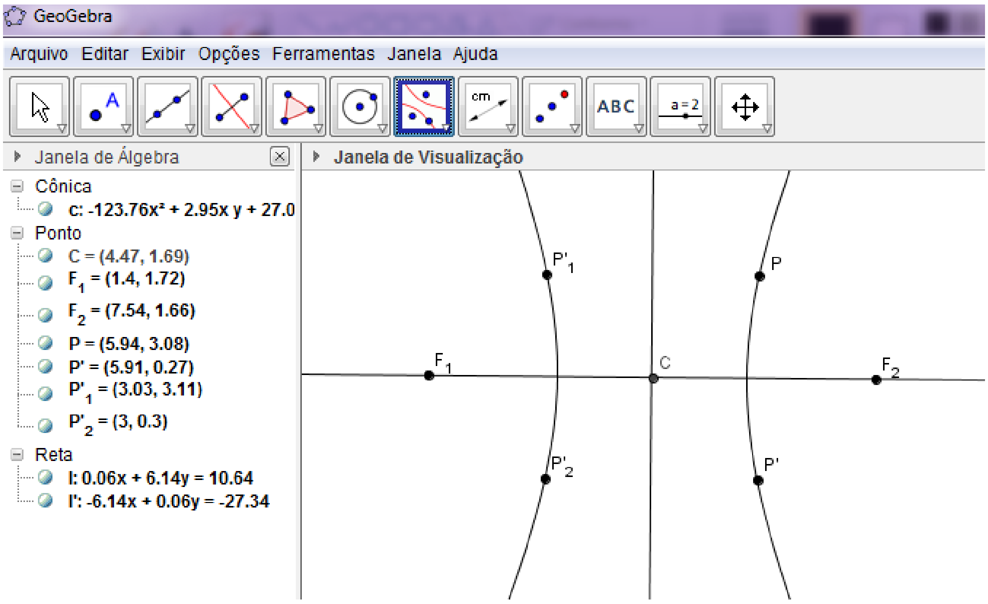


Figura 5.19: Hipérbole passando por P, P', P_1' e P_2'

O professor poderá explorar mais a construção pedindo para os alunos calcular as distância dos focos F_1 e F_2 aos pontos P, P', P_1' e P_2' e logo após verificar que:

$$d(F_1,P)-d(F_2,P)=d(F_1,P')-d(F_2,P')=d(F_2,P_1')-d(F_1,P_1')=d(F_2,P_2')-d(F_1,P_2')$$

Como mencionado, no caso da elipse - atividade 02, essa verificação poderia ser feita construíndo primeiro a hipérbole e depois os pontos P, P', P_1' e P_2', inclusive fazendo o ponto P mover na hipérbole, observando que esses pertenceriam a hipérbole. Essa seria mais uma opção de atividade a ser desenvolvida para verificação da simetria da hipérbole.

5.7 Atividade 07

Como descrita na seção 3.2, a excentricidade da hipérbole é medida pela razão $\frac{c}{a}$, onde c é a distância do centro ao foco e a é a distância do centro ao vértice. Nessa atividade o professor poderá discutir com os alunos o que acontece com a hipérbole quando variamos o valor da razão $\frac{c}{a}$ seguindo os seguinte passos:

- Abrir uma janela do geogebra e construir uma hipérbole chamando seus focos de F_1 e F_2.
- Traçar uma reta r passando por F_1 e F_2.
- Marcar o ponto médio C do segmento F_1F_2.
- Marcar os pontos de interserção A_1 e A_2 da reta r com a hipérbole.
- Traçar os segmentos CF_1 e CA_1 e chamá-los de c e a respectivamente.
- Criar um segmento de valor fixo com medida $\frac{c}{a}$.
- Calcular a medida desse segmento e mover o foco F_1 analisando o que acontece. Ver figura 5.20.

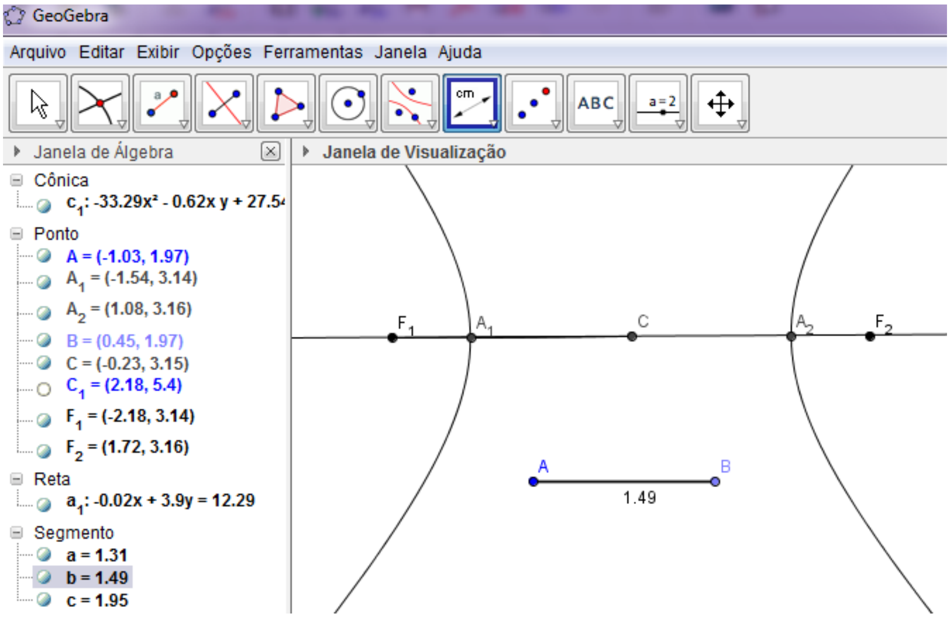


Figura 5.20: Excentricidade da Hipérbole

O professor poderá discutir com os alunos que ao aproximar os focos F_1 e F_2 dos vértices A_1 e A_2 percebemos que os ramos da hipérbole vão se fechando e a medida que afastamos os focos F_1 e F_2 dos vértices A_1 e A_2 os ramos da hipérbole vão se abrindo. Ver figuras 5.21 e 5.22.

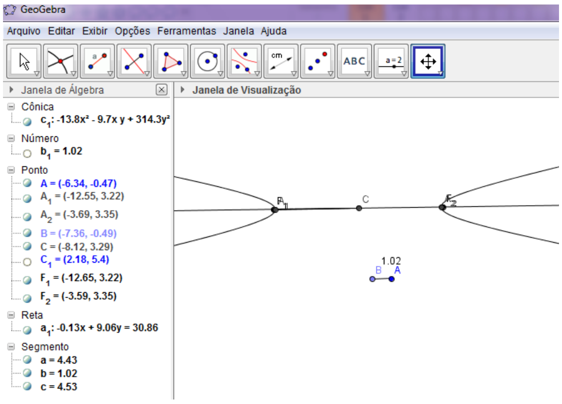


Figura 5.21: Focos aproximam dos vértices

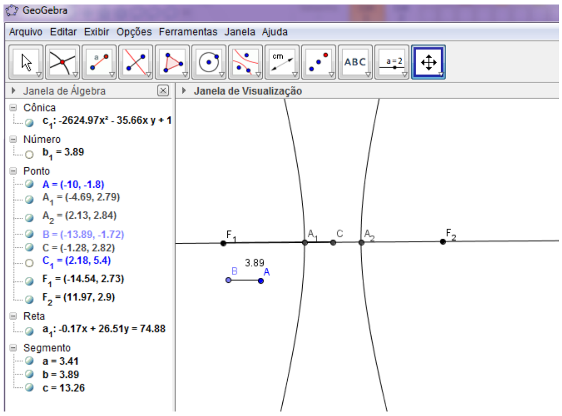


Figura 5.22: Focos afastam dos vértices

Assim concluímos que quando o valor da excentricidade se aproxima de 1 os ramos da hipérbole se fecham e quando a excentricidade aumenta o seu valor os ramos se abrem.

5.8 Atividade 08

Construir a hipérbole de equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ e logo após fazer a translação do centro para o ponto $(0, 5)$ destacando os seus principais elementos. Esta atividade proporciona ao professor discutir na aula a teoria descrita na seção 3.5 (*Translação: Hipérbole com centro no ponto* $O' = (x_0, y_0)$).

É recomendado tomar cuidado com o desenvolvimento dos cálculos e com o tempo para concluir a construção. Para isso, seguiremos as seguintes etapas:

- Com a malha ativada, digitar no campo de entrada a equação $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Nesse momento da construção, o professor poderá destacar os principais elementos dessa hipérbole centrada na origem. Ver figura 5.23.
- **Centro**: $C = (0, 0)$;
- **Vértices**: $A_1 = (-4, 0)$, $A_2 = (4, 0)$, $B_1 = (0, 3)$ e $B_2 = (0, -3)$;
- **Focos**: $F_1 = (-5, 0)$ e $F_2 = (5, 0)$;
- **Reta focal**: $l : y = 0$;

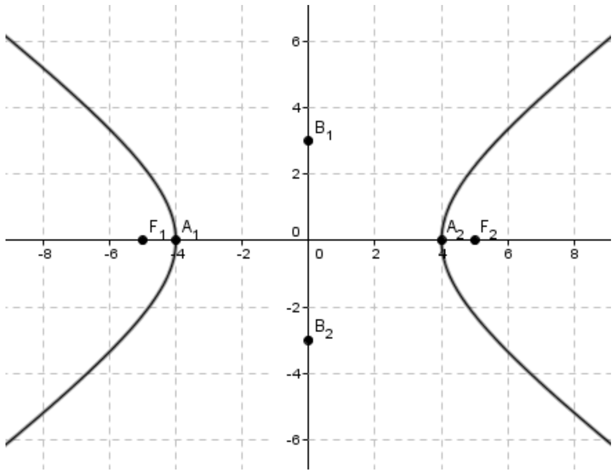


Figura 5.23: Hipérbole centrada na origem

- **Reta não-focal**: $l' : x = 0$.

  Para encontrar as coordenadas dos focos é necessário fazer os cálculos através da relação entre os parâmetro $c^2 = a^2 + b^2$.

  Para construir a hipérbole com centro transladado para o ponto $(0, 5)$ o professor utilizará os resultados da seção 3.5, *Translação: Hipérbole com centro no ponto* $O' = (x_0, y_0)$, através da equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, obtendo assim como resultado a equação $\frac{x^2}{16} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$. Digitando na caixa de entrada essa equação obteremos a hipérbole conforme a figura 5.24.

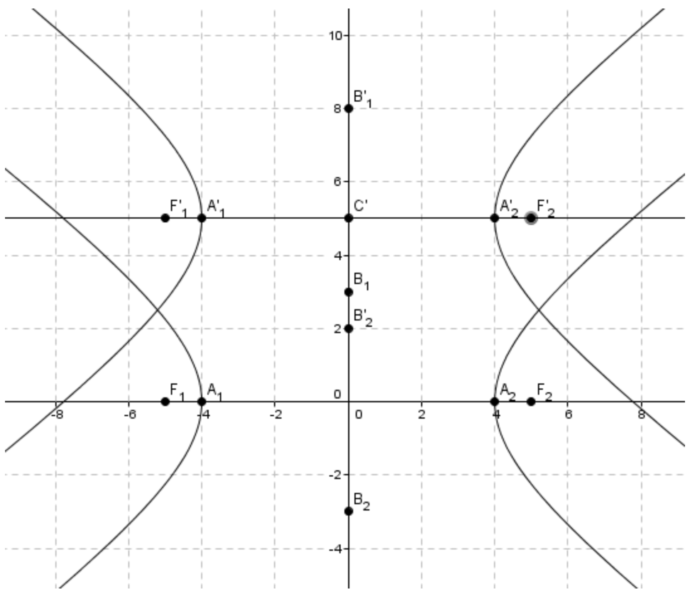


Figura 5.24: Hipérbole transladada para o ponto $(0, 5)$

Assim, conforme foi descrito no início da seção 3.5, podemos destacar os principais elementos dessa hipérbole:

- **Centro**: $C' = (0, 5)$;
- **Vértices**: $A'_1 = (-4, 5)$, $A'_2 = (4, 5)$, $B'_1 = (0, 8)$ e $B'_2 = (0, 2)$;
- **Focos**: $F'_1 = (-5, 5)$ e $F'_2 = (5, 5)$;
- **Reta focal**: $l_1 : y = 5$;
- **Reta não-focal**: $l'_1 : x = 0$.

Atividades semelhantes a esta poderão ser feitas com a equação do 2º grau de uma hipérbole. E para resolvê-la basta usar a técnica de completar quadrado e chegar a uma equação na forma canônica e realizar as etapas feitas anteriormente.

5.9 Atividade 09

Esta atividade propõe ao professor a construção de uma parábola utilizando apenas a definição apresentada no capítulo 4. Em uma janela do geogebra faremos os seguintes procedimentos.

- Traçar uma reta d passando por dois pontos A e B. Essa reta será a diretriz da parábola.
- Agora vamos marcar um ponto F fora da reta d para ser o foco da parábola.
- Marcar um ponto C qualquer na reta d e construir o segmento FC.
- Traçar a mediatriz do segmento FC. Observe que qualquer ponto sobre essa mediatriz estará a mesma distância das extremidades do segmento FC.
- Apartir do ponto C sobre a reta d, vamos traçar a reta perpendicular a d passando pelo ponto C.
- Marcar o ponto de interseção dessa perpendicular com a mediatriz do segmento FC e chamá-lo de P. Agora o professor poderá verificar como está a construção dos alunos.

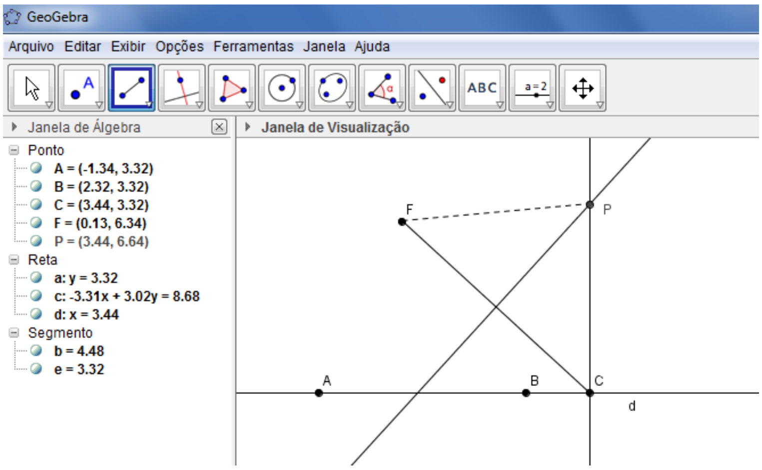


Figura 5.25: Construção da parábola de foco F

Nesse momento o professor poderá comentar com os alunos que o ponto P está sobre a mediatriz do segmento FC e como consequência é equidistante das extremidades F e C, ou seja, $d(P, F) = d(P, C)$. Porém, o ponto C pertence a reta d logo a distância do ponto P ao ponto C é igual a distância do ponto P a reta d, ou seja, $d(P, C) = d(P,\text{d})$.

Dessa forma acabamos de chegar a definição de uma parábola de foco F e reta diretriz d, pois o ponto P estará sempre a mesma distância da reta d e do ponto F.

Vamos habilitar o rastro no ponto P e mover o ponto C sobre a reta d e visualizar a parábola formada pelo rastro.

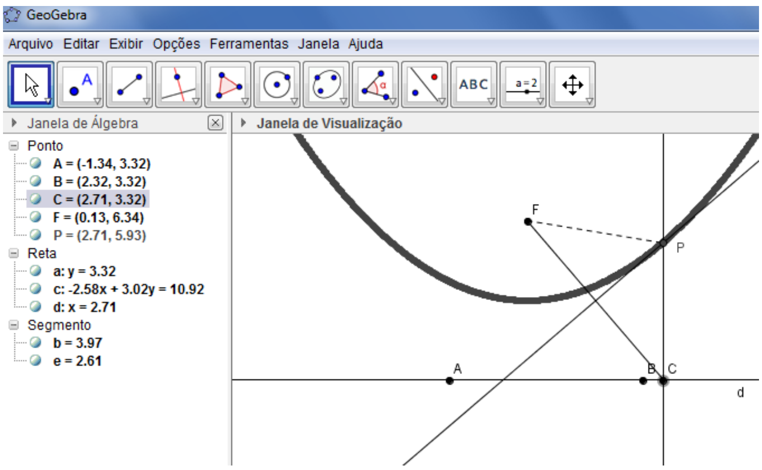


Figura 5.26: Construção da parábola de foco F e reta diretriz d

5.10 Atividade 10

Nas atividades 02 e 06 discutimos a simetria da elipse e da hipérbole em relação a sua reta focal e não-focal e também ao seu centro. Nessa atividade mostraremos que a parábola é simetrica em relação a sua reta focal. Faremos os procedimentos em uma janela do geogebra com os eixos desativados.

- Primeiramente vamos traçar uma reta passando por dois pontos A e B. Essa reta chamaremos de r e será a reta focal da parábola.
- Renomear o ponto A para ponto F que será o foco da parábola.
- Traçar a reta perpendicular a reta focal r passando pelo ponto B. Essa reta será chamada de reta diretriz d da parábola.
- Com a ferramenta , construir uma parábola de foco no ponto F e reta diretriz d.
- Agora vamos marcar um ponto P na parábola e o seu simétrico P' em relação a reta focal r.

Após essas etapas, podemos observar na figura 5.27 que o ponto P' pertence a parábola e movendo o ponto P sobre a parábola percebemos que P' permanecerá sobre a parábola.

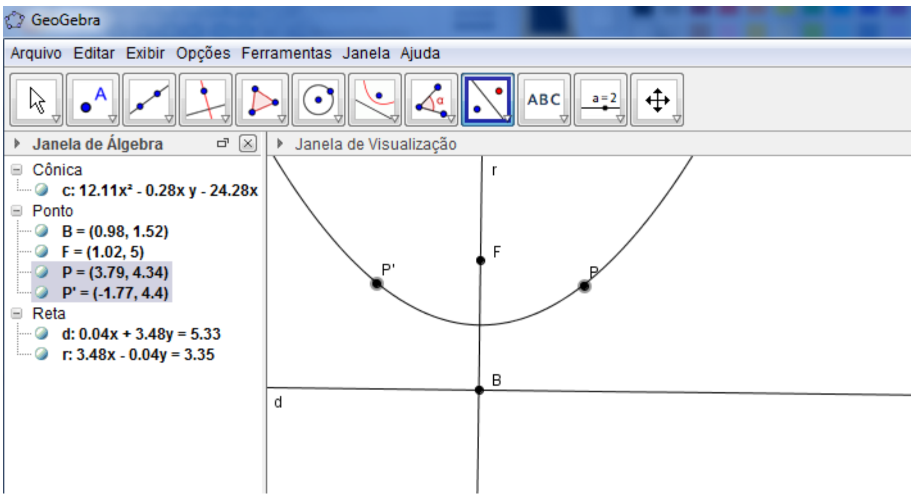


Figura 5.27: Simetria da parábola em relação a reta focal

Para confirmar isso, o professor poderá pedir para os alunos construir os segmentos PF e $P'F$ e calcular os seus comprimentos com a ferramenta  conferindo que $d(P,F) = d(P',F) = d(P',d)$.

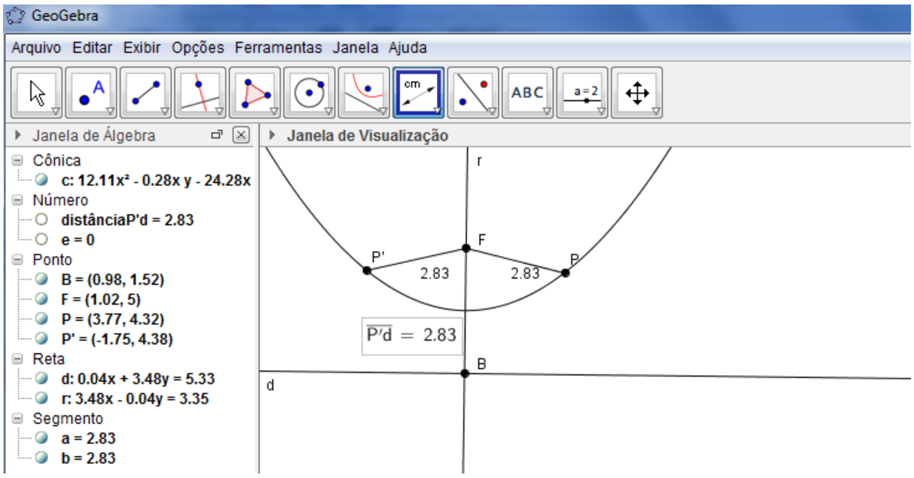


Figura 5.28: Distância de P' a F e a d

Outra atividade que poderá ser desenvolvida pelo professor sobre parábola é analisar com a turma o que acontece quando o foco se aproxima do vértice da parábola e quando o foco se afasta do vértice da parábola, conforme as figuras 5.29 e 5.30.

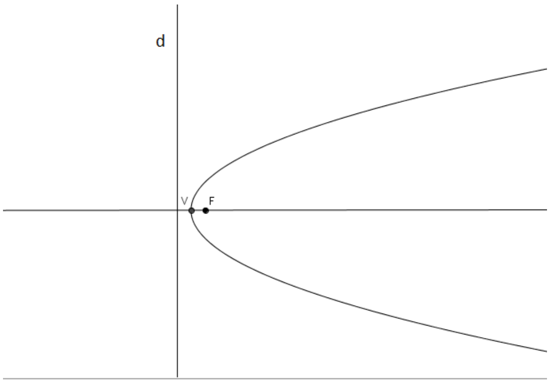


Figura 5.29: Foco aproxima do vértice

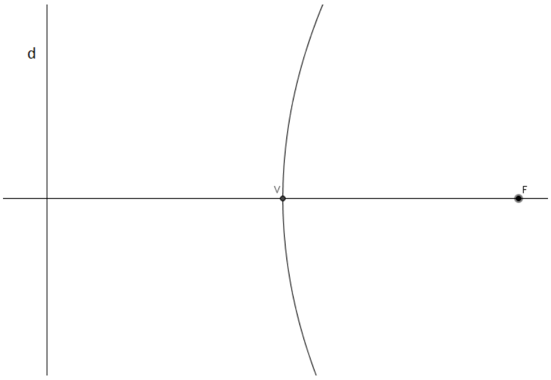


Figura 5.30: Foco afasta do vértice

5.11 Atividade 11

Nesta atividade trabalharemos com a equação $4x^2 + 40x - 16y + 100 = 0$, que representa uma cônica dada pela equação geral do 2º grau vista na seção 4.7. Podemos verificar qual o tipo de cônica e destacar seus principais elementos. É importante que o professor utilize os resultados da seção mencionada para fundamentar os resultados. Seguiremos as seguintes etapas:

- Usar a técnica de completar quadrado para obter a equação na forma canônica. A equação $4x^2 + 40x - 16y + 100 = 0$ equivale a $4y = (x + 5)^2$. Usando essa última equação e os resultados da seção 4.6 (Translação: Parábola com vértice $V = (x_0; y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY) chegaremos aos seguintes elementos:
- **Vértice**: $V = (-5, 0)$;
- **Parâmetro da parábola**: $p = 1$;
- **Foco**: $F = (-5, 1)$;
- **Reta focal**: $l : x = -5$;
- **Reta diretriz**: $d : y = -1$.

  Agora basta digitar na caixa de entrada a equação $4y = (x + 5)^2$. Ver figura 5.31.

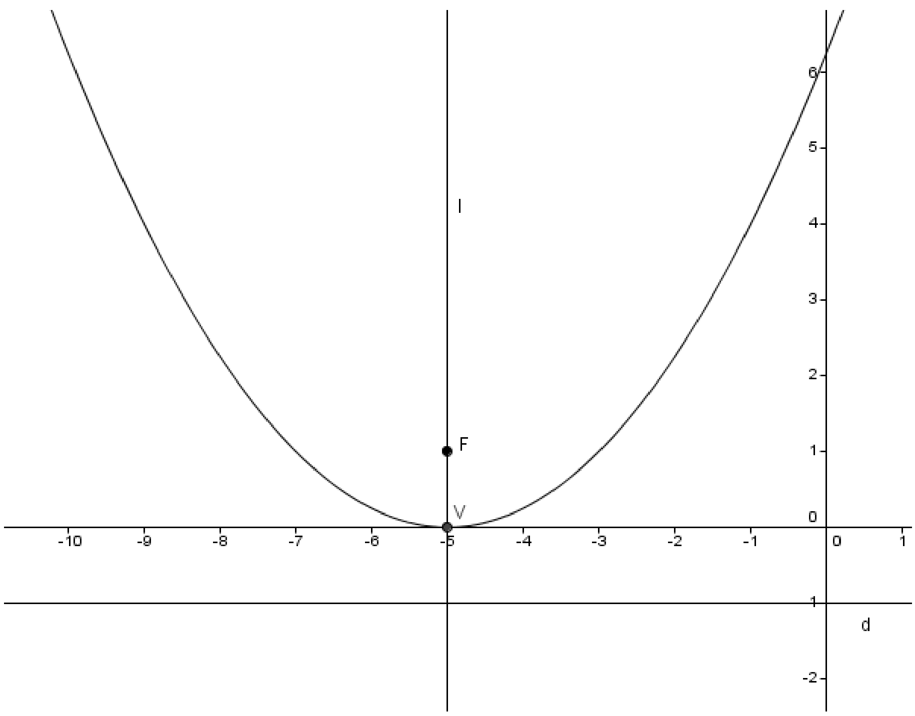


Figura 5.31: Construção da parábola

Nessa atividade, além da equação do 2º grau da parábola, o professor também poderá explorar a translação do vértice da parábola para o ponto (-5, 0). Pode ser observado essa translação comparando a parábola centrada na origem de equação $4y = x^2$ com a descrita nessa atividade $4y = (x+5)^2$. Veja figura 5.32 com as duas parábolas construídas no geogebra.

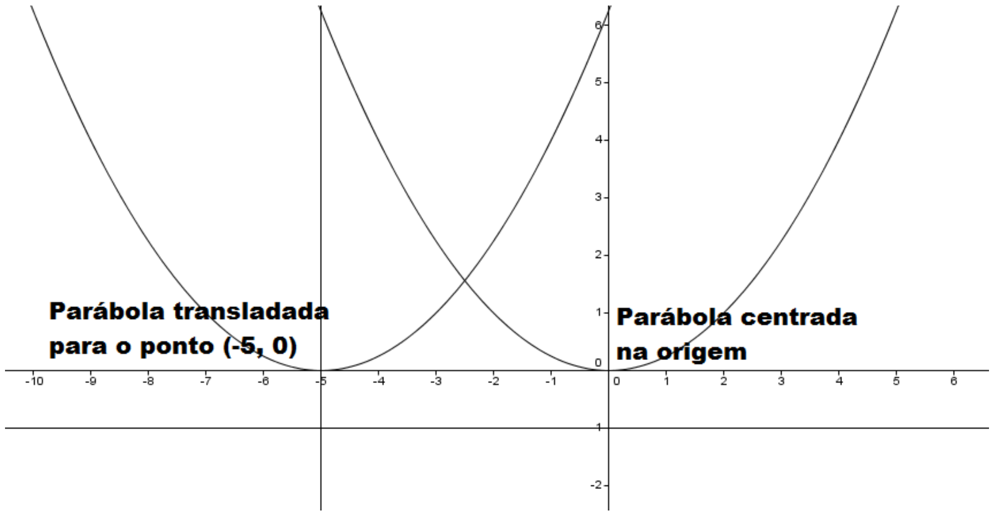


Figura 5.32: Comparando as parábolas

O professor pode explorar várias atividades de cônicas com o Geogebra. O importante é administrar o tempo e acompanhar a construção dos alunos para que as sequências dos passos sejam bem sucedidas.

Capítulo 6

Conclusão

A abordagem das secções cônicas descrita neste trabalho foi redigida com uma linguagem de fácil compreensão podendo ser utilizada como material didático no Ensino Médio. É fato que o professor tem um grande aliado para o ensino das cônicas que é o software Geogebra. O uso da tecnologia em sala de aula tornou-se um instrumento importante para o professor, principalmente na disciplina de matemática, já que ela apresenta muitas dificuldades com abstrações e aspectos formais.

Nas atividades descritas no capítulo 05 foi proposta a utilização do software de geometria dinâmica, Geogebra, simplesmente pelo fato de favorecer um ambiente mais acalorado e receptivo para os alunos, já que estamos com uma geração que se encontra familiarizada com os computadores e a tecnologia, sem contar que o Geogebra é facilitador da aprendizagem.

É importante ter em mente que a utilização do Geogebra em sala de aula é apenas um meio para se ensinar e não a finalidade da aprendizagem, já que o uso desse programa deve servir para diminuir as limitações relacionadas à compreensão e a visualização de um objeto. Vale salientar ainda que o objetivo dos softwares educativos, no caso o Geogebra, é o de fazer com que os estudantes adquiram os mais variados conceitos colocando em prática as informações transmitidas pelo professor e dessa forma construir o conhecimento.

Esse trabalho não tem a pretensão de apresentar um roteiro tradicional de abordagem das secções cônicas, muito menos de restringir o conteúdo ao que foi apresentado aqui, mas simplesmente de mostrar que com as atividades propostas, o professor tem a oportunidade de criar muitas outras intervenções pedagógicas e desse modo incentivar os seus alunos a participarem das aulas bem como a ajudá-los a serem autônomos na busca de novos conhecimentos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil - 1998, p. 43) retratam a necessidade de se introduzir as tecnologias em sala de aula. Para tanto, como forma de tornar dinâmico o processo de ensino-aprendizagem, as atividades que foram propostas tem a finalidade de criar uma conexão entre o livro didático e a sala de aula. Espera-se, pois, que elas possam servir de sugestão para que se planejem aulas/atividades tanto por iniciativa de professores quanto de graduandos.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

[2] BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio, Brasília - 1998.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2001

[4] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 2. ed. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

[5] COLAÇO, Susana. et al. A utilização do GeoGebra em contexto de sala de aula. Disponível em: *http://www.apm.pt/files/_SP_Colaco_Branco_Brito_Rebelo_4a413f0bcd4ee.pdf*, acessado em: 19 de novembro de 2013.

[6] GAYO, Jairo. Fundamento e Historia da Matemática, Centro Universitário Leonardo da Vinci - Indaial - SC, Grupo Uniasselvi, 2012; 196p.

[7] MA23-Geometria Analítica.Coleção Profmat Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] NETO, Aref Antar...[et al]. Geometria analítica: 2º grau. São Paulo: Ed. Moderna, 1980 (Noções de Matemática; v.6).

[9] PEREIRA, Gisele Polyana Rodrigues. O ensino das cônicas através de estudos contextualizados até sua concepção na geometria analítica: parábola. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de Lavras. Disponível em: *http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/*123456789/261, acessado em: 02 de setembro de 2013.

[10] SILVA, Silvio Tomé. Cônicas: uma abordagem geométrica e algébrica. Maringá, 2013. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissional em Matemática - PROF-

MAT, Universidade Estadual de Maringá. Disponivel em: $http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/335$, acessado em: 02 de setembro de 2013.