Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Elementos de Álgebra que Auxiliam nos Fundamentos do Cálculo

Iron Felisberto de Freitas

Goiânia

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] Dissertação [ ] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Iron Felisberto de Freitas
E-mail:	ironfreitas@yahoo.com.br
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Estatutário - Servidor Público Federal – IF Goiano – Campus Ceres
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: Capes
País: Brasil	UF: Go — CNPJ: 00889834/0001-08
Título:	Elementos de Álgebra que Auxiliam nos Fundamentos do Cálculo
Palavras-chave:	Conjuntos. Símbolos. Linguagem Matemática. Sistemas numéricos. Funções e Parábola.
Título em outra língua:	Algebra Elements That Help in the Fundaments of Calculus
Palavras-chave em outra língua:	Sets. Symbols. Language Mathematics. Number systems. Functions and Parable.
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	27/03/2015
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Pós-Graduação em Matemática-PROFMAT
Orientador (a):	Marcos Leandro Mendes Carvalho
E-mail:	marcosleandrocarvalho@yahoo.com.br
Co-orientador (a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Freitas

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 06/04/2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Iron Felisberto de Freitas

Elementos de Álgebra que Auxiliam nos Fundamentos do Cálculo

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Freitas, Iron Felisberto de
Elementos de Álgebra que Auxiliam nos Fundamentos do Cálculo [manuscrito] / Iron Felisberto de Freitas. - 2015.
XVII, 136 f.: il.

Orientador: Prof. Marcos Leandro Mendes Carvalho.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.
Inclui símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras, lista de tabelas.

1. Conjuntos. 2. Simbolos. 3. Linguagem Matemática. 4. Sistemas Numéricos. 5. Funções. I. Carvalho, Marcos Leandro Mendes , orient. II. Título.

Iron Felisberto de Freitas

Elementos de Álgebra que Auxiliam nos Fundamentos do Cálculo

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Marcos L. M. Carvalho

Prof. Dr. Marcos Leandro Mendes Carvalho
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Jolivê Mendes de Santana Filho

Prof. Dr. Jolivê Mendes de Santana Filho
IFG-GOIÂNIA

Edcarlos D. da Silva

Prof. Dr. Edcarlos Domingos da Silva
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Iron Felisberto de Freitas graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal de Goiás - UFG, 1992. Especializou-se em Elementos de Matemática pela PUC-Minas, 1997.

Dedico este trabalho ao Senhor *Inácio Antônio de Araújo*, homem de inabalável fé em Deus, que nos deixou um grande legado de amor à família.

Agradecimentos

Aos meus pais Valdemar de Freitas e Perciliana de Jesus (*in memoriam*) pela minha vida, por ensinarem os vossos filhos através de exemplos de vida e, desde muito cedo nos ensinaram princípios éticos que nenhuma escola oficial nos ensinaria.

Aos meus pais de coração Inácio Araújo (*in memoriam*) e Elza Machado, que pelas vossas histórias de vida me mostraram que jamais poderia eu desistir desse meu intento.

A Joana Maria, minha esposa motivadora em todos os momentos difíceis que juntos temos passado.

Aos meus filhos Gabriel Luís e Fernanda Luís que, desde muito cedo sempre envolvidos com a leitura de boa qualidade e que, por consequência, produzem textos maravilhosos. E como filhos agradeço à Deus todos os dias de ter a responsabilidade de cuidá-los.

Ao amigo e orientador Marcos Leandro, homem de imensa fé em Deus e trabalhador produtivo na ciência Matemática, convicto de que Fé e Ciência contribuirá para construção de uma sociedade mais justa e harmônica. A fim de homenageá-lo como professor vou parafrasear Einstein " O *Professor* é sutil, mas não é maldoso".

Ao colega de PROFMAT/2013, Luís Henrique na certeza que a amizade começada nesse momento é para sempre.

A CAPES pelo suporte financeiro, com a bolsa de estudos que foi fundamental nesses dois anos. Também, por entender que o Brasil tem muito a fazer na formação do professor. E este, tem muito a ver eticamente com a qualidade na Educação.

Resumo

O presente trabalho aborda a construção lógico-formal dos sistemas numéricos desde, o conjunto dos números naturais até ao dos números reais. Sendo o primeiro destes conjuntos apresentado pelos axiomas de Peano (1858 - 1932), e o último resulta dos cortes de Dedekind (1831 - 1916) sobre ao conjunto dos números racionais. A passagem do conjunto dos números naturais ao dos inteiros e destes ao dos racionais é realizado por classes de equivalências. Em uma perspectiva histórica, a fim de que, a Matemática pudesse avançar, era preciso migrar de uma noção de "realidade" para um conceito abstrato de número não subordinado à ideia de quantidade. Desde o início desta construção lógico-formal dos sistemas numéricos faz-se necessário o uso do conceito de correspondências entre dois conjuntos não vazios quaisquer. Por fim, são também abordadas as funções polinomiais de 1º e 2º graus e seus respectivos gráficos no plano cartesiano ortogonal.

Palavras-chave

Conjuntos. Símbolos. Linguagem Matemática. Sistemas numéricos. Funções e Parábola.

Abstract

This paper addresses the formal-logical construction of number systems from the set of natural numbers to the real numbers. Being the first of these sets presented by the axioms of Peano (1858 - 1932) and the latter results of Dedekind cuts (1831 - 1916) on the set of rational numbers. The passage the set of natural numbers to the integers and for these the rational is done by equivalence classes. From a historical perspective, in order to do that mathematics could advance, had to migrate from a sense of "reality" to an abstract concept of number not subject to the amount of idea. Since the beginning of this formal-logical construction of number systems it is necessary to use the concept of correspondences between any two non-empty sets. Finally , are also addressed the polynomial functions of 1st and 2nd degrees and the respective charts in orthogonal Cartesian plane .

Keywords

Sets. Symbols. Language Mathematics. Number systems. Functions and Parable.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Pretendemos desenvolver neste trabalho a primeira parte de um programa de Fundamentos do Cálculo em específico no que se refere aos conteúdos: sistemas numéricos, funções de uma variável real à valores reais e seus gráficos, dando a esses conhecimentos a qualidade necessária na conceituação, manipulação e aplicação. Procurando adequar o estudante que termina o Ensino Médio e que acaba imediatamente de ingressar à Universidade que, busca os cursos de graduação em que terão os Fundamentos do Cálculo como alicerce para a compreensão dos conteúdos afins propiciando ao estudante tomar decisão.

Ressalvando que, ao longo de formação acadêmica e, bem como da futura vida profissional o sujeito vai ter maior compreensão do seu *saber fazer* se os conhecimentos básicos de cálculo forem sólidos no sentido de que, aos conceitos relacionados com o do seu *saber* sejam cada vez mais lúcidos. Nesse sentido, MORIN (2007, p 14) quando discute *os princípios do conhecimento pertinente* evidencia que:

> *A supremacia do conhecimento de acordo com as disciplinas impede frequentemente de operar o vínculo entre as partes e a totalidade, e deve ser substituído por um modo de conhecimento capaz de apreender os objetos em seu contexto, sua complexidade, seu conjunto.*

A citação de MORIN deve ser observada na lógica estabelecida no nosso modelo de ensino atual. Pautado desde as séries intermediárias do ensino fundamental ao médio, na compartimentação das disciplinas, tornando-se uma anomalia no encerramento do ensino médio. Por exemplo, a Matemática divide-se em: Álgebras I, II e III, Geometrias Plana, Espacial, Métrica, Volumétrica e Analítica, Trigonometria, Combinatória e Probabilidade, etc.. Exigindo assim, de modo "natural" para a existência do modelo, professores mais especializados em uma dessas disciplinas, em detrimento de um conhecimento matemático consistente e articulado.

Em conformidade com MORIN ainda com respeito a *apreender os objetos em seu contexto, sua complexidade, seu conjunto* ROQUE e CARVALHO (2012, p XIV) fazem a seguinte colocação

> *Em contraposição à interpretação algébrica dos procedimentos de resolução de problemas mesopotâmicos, pesquisadores mais atuais propuseram que os algoritmos numéricos podem ter sido baseados em procedimentos de cortar e colar figuras para obter outras com a mesma área. Isto sugere a divisão em disciplinas, como álgebra ou geometria, é inadequada para analisar épocas nas quais a Matemática não era uma disciplina, como é hoje, com subáreas bem delimitadas.*

Certos de que, questões históricas de uma área de conhecimento, podem ser evidenciadas como recursos pedagógicos que vão prestar benefícios para se trabalhar em sala de aula. Não seria diferente com vários conteúdos de Matemática, mesmo a partir do ponto de vista de suas inquietações provocadas aos interessados em suas respectivas épocas. Tal situação pode motivar estudantes e professores a trabalhar com a pesquisa proporcionando à estes oportunidade de lançar luz sobre coisas que, às vezes são tidas como inquestináveis e intocáveis. E, ao mesmo tempo, possibilitando a estes atores condições de questionamentos com relação aos conteúdos elencados de forma morta no currículo oficial e assim, abrindo espaço para que passem também a elaborar questões sobre o mundo nos quais estão inseridos.

Falaremos, de forma resumida, das técnicas infinitesimais para tratar problemas com objetivo físico, como os que envolviam o cálculo de tangentes a curvas e de áreas definidas por elas. Tais técnicas começaram ser sistematizadas nas décadas do século XVII, em particular por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton (1642-1727), conhecidos como os "fundadores" do que chamamos hoje de "cálculo infinitesimal". As técnicas infinitesimais usadas neste contexto foram questionadas por alguns pensadores da época. Gerando acirrado debate a respeito da legitimidade dos métodos do cálculo, que faziam intervir quantidades infinitamente pequenas. Tais fatos levaram à introdução de métodos algébricos na busca de uma exposição que pudesse fornecer a procura da legitimidade das técnicas do cálculo, fundamental para a Matemática praticada no século XVIII.

Não é novidade para nós que lidamos com o ensino de matemática que, desde as séries inciais do ensino fundamental, já nos deparamos com o desafio de ensinar sobre a linguagem de conjuntos e as noções de lógica. E os problemas com tais conteúdos às vezes nos surpreendem. Problemas estes que vão desde a qualidade dos textos disponíveis para cada ciclo de ensino, perpassando pela qualidade de formação do professor. E, até mesmo com as ditas perguntas "sem sentido" dos alunos como, por exemplo: "o professor a *cerquinha* da figura que representa o conjunto A que você desenhou aí no quadro *pertence* a ele"?

Portanto, a utilização da linguagem de conjuntos já está consolidada, mesmo alheio aos problemas do ensino, em todos os níveis. Não devemos esquecer que ela tem um papel fundamental e imprescindível na produção da Matemática atual. Na prática, os conjuntos substituem, com exatidão e precisão, condições e propriedades, usadas para definir os elementos de uma categoria, que caso contrário, poderiam ser formuladas por longas e cansativas frases.

A linguagem matemática, como sabemos, consiste na língua materna, (no nosso caso a portuguesa) e na linguagem simbólica, que usa símbolos matemáticos. Na linguagem matemática, a língua materna e a linguagem simbólica interagem para comunicar as mensagens. A linguagem matemática tem características bastante peculiar, apesar de universal, de generalizar e de tornar mais simples o domínio das ideias.

Com relação a linguagem matemática, o que devemos conhecer a fim de comunicarmos com eficiência, entedendo as mensagens e nos fazendo nos entender, DE MORAIS FILHO (2013, p 2) ressalva que

> *Os enunciados de resultados e as demonstrações matemáticas são feitas usando-se a linguagem materna. Por isso, como primeiro passo, já que estamos acostumados com a língua materna, torna-se importante conhecer os significados e como usar os vários símbolos matemáticos. O passo seguinte é treinar para usar essa linguagem com fluência e eficácia.*

Não podemos perder de vista que, uma notação matemática é um conjunto de símbolos podendo ainda ser apenas um único símbolo representando um objeto ou uma ideia matemática. Tais símbolos podem ser construídos com letras de algum alfabeto, com algarismos de um sistema numérico, etc.. Uma notação matemática precisa ter as seguintes características, ainda segundo DE MORAIS FILHO (2013, p 3) *i)* *Deve ser uma forma de comunicação concisa e precisa, que contribua para a facilidade e para economia de linguagem.*

ii) *Não deve expressar ambiguidades.*

iii) *Na medida do possível, deve ter uma forma estética simples, fácil de ser manipulada, de ser memorizada e de nos fazer lembrar o objeto que representa, toda vez que a virmos.*

Em uma teoria matemática, quando existe a necessidade de definir algo, isso é feito em termos de conceitos anteriores. Mas estes, por sua vez, também dependem de outras ideias precedentes. E assim segue. A fim de evitar esse processo que leve a círculos viciosos é então que utilizaremos do método axiomático. Esse método consta de duas partes: primeira, simplesmente aceitamos certos termos da teoria sem uma explicação formal de seu significado - estes termos são chamados *conceitos primitivos*. Em seguida, introduzimos alguns axiomas, ou seja, certas proposições que se tomam como verdadeiras independentemente de qualquer demonstração. Assim sendo, só existe mais uma classe de proposições: a daquelas que se demonstram a partir dos axiomas por raciocínios lógicos corretos.

Quando na história da matemática nos deparamos com a crise da incomensurabilidade já com os pitagóricos podemos perceber em um primeiro momento que, tal situação foi contornada pelo matemático e astrônomo ligado à Escola de Platão, Eudoxo de Cnidos (408 a.C. - 355 a.C.), que criou a Teoria das Proporções a fim de tratar as grandezas incomensuráveis através da geometria, o que para à época, embora genial, contribui para a desacelaração do desenvolvimento da teoria dos números e da álgebra por muito tempo.

O coroamento dos fundamentos matemáticos do conceito de número, que trataremos nos próximos capítulos, ocorreu já no final do século XIX, principalmente por meio dos trabalhos propostos por Richard Dedekind (1831 - 1916), Georg Cantor (1845 - 1918) e Guiseppe Peano (1858 - 1932). Tais estudos foram motivados pelas demandas teóricas que surgiram a partir do volume de conhecimento matemático adquirido a partir do cálculo diferencial e integral do século XVII.

Manteremos a apresentação seguida pelos matemáticos do século XIX e XX já consagrada pela história, possibilitando-nos apresentar os sistemas numéricos em uma ordem logicamente coerente, rápida e elegante que são: naturais, inteiros, racionais e reais. Estudos apontam que, os números naturais são os primeiros admitidos pela nossa intuição. E, é a partir daí que alguns matemáticos do século XIX buscam complementar o conceito matematicamente rigoroso de número. Pelo que vimos, eles podem ser construídos a partir da Teoria de Conjuntos ou podem ser apresentados através de axiomas, como fez Peano. Na sequência vem os inteiros contruídos através números naturais e aos racionais construídos rigorosamente a partir dos inteiros e finalizando, os reais contruídos a partir dos racionais seguindo o modelo de Dedekind e Cantor.

Para tratarmos de funções e seus gráficos apresentamos as coordenadas cartesianas ortogonais no plano que tem seu início na representação de pontos por meio de números reais. A representação dos pontos por coordenadas torna possível resolver algebricamente diversos problemas geométricos, e que é base, em outro viés, para o uso de vetores permitindo assim o estudo de vários conceitos geométricos de forma mais simples e objetiva.

E por fim, é dado um tratamento analítico através dos gráficos das funções constantes, linear, polinomiais de primeiro e segundo graus. Ressalvando que, de forma intuitiva, os movimentos de translação que realizamos com a parábola de equação $y = x^2$ e eixo de simetria paralelo ao dos y e que, a mesma pode representar de forma geral o gráfico da função real à valores reais definida por $y = f(x) = ax^2 + bx + c \ \ (a \neq 0)$.

Capítulo 1

Nota Histórica sobre o Cálculo

É comum ouvimos falar e, com certa simplicidade, que a "invenção" do Cálculo Diferencial e Integral é atribuída a dois homens, Newton e Leibniz.

Na realidade o que podemos perceber mediante pesquisas bibliográficas da história da matemática é que o Cálculo é produto de uma longa evolução que não foi iniciada nem concluída por Newton e Leibniz, porém, desempenharam papel decisivo. Espalhados pela Europa do século XVII, em sua maior parte fora das universidades, havia um grupo de cientistas ativos que se empenhavam em dar continuidade aos trabalhos matemáticos de Galileu Galilei (1564 - 1643) e Johann Kepler (1571 - 1630). Por meio da troca de correspondências e de viagens, estes homens mantinham entre eles estreito contato.

Dois problemas centrais chamavam sua atenção. Em primeiro lugar, o *problema das tangentes: determinar as retas tangentes a uma curva dada*, o problema fundamental do Cálculo Diferencial. Em segundo lugar, o *problema da quadratura: determinar a área dentro de uma curva*, dado o problema fundamental do Cálculo Integral. O grande mérito de Newton e Leibniz foi e de terem identificado claramente a estreita *associação entre estes dois problemas*. Nas mãos deles, os novos métodos unificados tornaram-se poderosos instrumentos da Ciência.

O que ainda é evidenciado para a época é que, boa parte do sucesso foi devido à maravilhosa notação simbólica inventada por Leibniz. Seu feito não é de forma alguma desvalorizado pelo fato de que estava ligado às de ideias não perceptíveis e insustentáveis capazes de perpetuar uma falta de compreensão precisa em mentes que preferiam o misticismo à nitidez. Newton, sem dúvida alguma o maior cientista, parece ter-se inspirado pricipalmente em Isaac Barrow (1630 - 1677), seu professor e predecessor em Cambridge. Leibniz era pessoa que dedicava de forma brilhante a advogacia, a diplomacia e a filosofia exclusivamente por gosto e não por ofício ou obrigação, uma das mentes mais ativas e versáteis de seu século. Havia aprendido a nova matemática em um tempo incrivelmente curto com o físico Christiaan Huygens (1629 - 1695) quando visitava Paris em missão diplomática. Logo em seguida publicou resultados que continham o núcleo do Cálculo Moderno.

Newton, cujas descobertas tinham sido feitas muito antes, era avesso à publicação. Além disso, embora houvesse originalmente encontrado muitos dos resultados em sua obra prima, os *Philosophiæ naturalis principia mathematica (Princípios matemáticos da Filosofia Natural)*, pelos métodos do Cálculo, preferia uma apresentação no estilo da Geometria Clássica, e quase nenhum traço de Cálculo aparecia explicitamente no *Princípios matemáticos da filosofia natural.* Somente mais tarde seus trabalhos sobre o método das *fluxões* foram publicados. Um pouco mais tarde, no início dos anos 70 do século XVII, Newton reformula os algoritmos na linguagem de *fluentes* e *fluxões*, e de acordo com ROQUE e CARVALHO (2012, p 286/7)

> *Para Newton os fluentes eram quantidades variáveis com o tempo, quantidades que* ***fluem****. Esta concepção levou alguns historiadores a afirmar que sua noção de continuidade se relacionava com o movimento, a variação das quantidades no tempo, diferentemente de Leibniz, que empregava justificativas de natureza metafísica. A taxa de variação de uma quantidade com tempo era chamada* ***fluxão****.*

Taduzindo-se à linguagem moderna da matemática teríamos para as ideias de Newton que, dadas as quantidades fluentes $v,\ x,\ y$ e z, então seus fluxões são designados, respectivamente, por $\dot{v},\ \dot{x},\ \dot{y}$ e $\dot{z}$. O problema fundamental do Cálculo seria, então: dada a relação entre quantidades fluentes, encontrar a relação entre seus fluxões, e vice-versa. Desse modo, se tivermos os fluentes x e y, o interessante não é calcular os fluxões em si, mas a razão entre eles $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$, que determinava a inclinação da tangente à curva descrita nas variáveis x e y.

Os fatos narrados acima faz com que os admiradores de Newton iniciassem uma acirrada disputa sobre prioridade com os amigos de Leibniz. Eles acusaram este último de plágio, embora, em uma atmosfera saturada de elementos de uma nova teoria, nada fosse mais natural do que descobertas simultâneas e independentes.

A disputa resultante sobre prioridade na "invenção" do Cálculo Diferencial e Integral constituiu um exemplo infeliz de excesso de ênfase em questões de precedência e reivindicações quanto à propriedade intelectual, o que predispôs ao envenenamento do ambiente social e até mesmo o moral nos contatos das produções científicas naturais da época. Em relação a acirrada disputa sobre prioridade da invenção do Cálculo ROQUE e CARVALHO (2012, p 245) afirmam que:

> *Na deselegante polêmica sobre a prioridade da invenção do Cálculo, na qual participaram seguidores de Leibniz e de Newton, os segundos instigados pelo Newton, Leibniz escreveu, em sua defesa, em 1714, livro o* ***Historia et Origo Calculi Differentialis (História e origem do cálculo diferencial)****. Hoje, os historiadores refutam a ideia de que Leibniz plagiou Newton e ressaltam que os métodos e motivações dos dois eram basicamente diferentes.*

Na análise matemática do século XVII e da maior parte de século XVIII, o ideal grego do raciocínio claro e rigoroso parecia ter sido abandonado. A "intuição" e o "instinto" substituíram a razão em muitas situações importantes. Isto apenas encorajou uma crença acrítica no poder sobrehumano dos novos métodos. Imaginava-se de maneira geral que uma apresentação clara dos resuldados do Cálculo não só era desnecessária como impossível. Caso não estivesse a nova ciência em mãos de um pequeno grupo de homens extremamente competente, graves erros e até mesmo um colapso poderia ter ocorrido. Estes pioneiros foram orientados por um forte sentimento institivo que fez com que não se afastassem muito do objetivo.

No entanto, quando a Revolução Francesa abriu caminho para uma imensa ampliação dos conhecimentos avançados, quando um número cada vez maior de homens desejava participar da atividade científica, a revisão crítica da nova análise não podia mais ser adiada. Este desafio foi enfretado com êxito no século XIX.

Hoje, o Cálculo pode ser ensinado sem um traço de mistério e com completo rigor. Não há mais nenhuma razão para que este instrumento básico das ciências não possa ser compreendido por todas as pessoas instruídas. Segundo NOBRE (1996, p 33),

> *. . . ao levantar tais questões, que são históricas, o professor de matemática estará dando condições para que os alunos possam se iniciar naquilo que originou o desenvolvimento do pensamento sobre os infinitésimos, que foi um marco para o que é conhecido como a 'Revolução Científica', iniciada*

no século XVI e abastecida pelos estudos de Newton e Leibniz referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

Capítulo 2

Conjuntos, símbolos e correspondências

Preliminares

Antes de passarmos efetivamente à descrição dos assuntos propostos neste trabalho faz-se necessário que, mesmo de uma forma breve, abordemos uma revisão da linguagem dos conjuntos, das notações que usaremos quando for coveniente. E ressalvando que, conjuntos e correspondências são duas das noções mais fundamentais em Matemática pois, aparecem direta e indiretamente em todos as definições. Portanto devemos considerá-las como *noções primitivas*, as quais permanecem indefinidas.

A linguagem e o simbolismo dos conjuntos estão atualmente tão incorporados à produção de textos de matemática que chega a tornar-se difícil redigir sem o seu emprego. De fato, o uso bem dosado desse simbolismo tem vantagens incontestáveis, pela economia de pensamento e de tempo que propicia. No entanto, a ênfase exagerada que tem sido posta nesse simbolismo tem prejudicado ao ensino da matemática, desde o ensino médio, levando os estudantes e até mesmo professores menos avisados, ou menos amadurecidos com tal linguagem a confudir erroneamente "Matemática Moderna" com "Teoria dos Conjuntos".

O que podemos perceber é que "Matemática Moderna" é a matemática que se desenvolve, que se estuda nas universidades e se pesquisa em centros especializados na atualidade; é a matemática que revela útil ao atual estágio de desenvolvimento cultural e tecnológico da humanidade; é a matemática que resolve problemas que o homem precisa resolver. Sob esse aspecto, o Cálculo, embora tenha nascimento no século XVII, ainda participa da "Matemática Moderna". Neste trabalho, usaremos com moderação a linguagem dos conjuntos; empregaremos o simbolismo dos conjuntos na medida em que julgamos isso bom e vantajoso. Não pretendemos dar à este trabalho feição rebuscada pelo excesso de símbolos. Será principalmente através de uma linguagem matemática conveniente que procuraremos transmitir conhecimentos dos fundamentos de cálculo, que desse modo, pensamos em uma leitura mais amena. Por consequência à uma aprendizagem menos árida.

2.1 Conjuntos

Como sabemos, é empregando desde os ensinos fundamental e médio o símbolo: $\in$, representativo da relação de pertinência, que tem lugar entre um conjunto e os seus elementos. Consideremos, agora, a relação de inclusão, (escreve-se: $\subset$) entre conjuntos como segue a:

Definição 2.1.1. Sejam A e B conjuntos, dizemos que A é subconjunto ou parte de B e escrevemos $A \subset B$, quando todo elemento de A é também elemento de B. Em tal caso, também dizemos que B contém A, e escrevemos $B \supset A$.

2.1.1 Propriedades da inclusão

A relação de inclusão é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é, valem as:

Propriedades 2.1.1.

i) $A \subset A$, qualquer que seja A.

ii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

iii) Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

De um modo geral, em matemática, somos quase sempre levados a trabalhar com os subconjuntos de um conjunto fundamental $\mathcal{U}$, conforme a:

Definição 2.1.2. Conjunto universo - $\mathcal{U}$, é o conjunto de todos os itens (objetos) considerados como elementos de um discurso.

2.1.2 Operações com conjuntos

Algumas operações podem ser efetuadas com esses subconjuntos. Sejam A e B subconjuntos quaisquer do universo $\mathcal{U}$, seguem as definições.

Definição 2.1.3. A união de A e B, indicada por $A \cup B$ é o conjunto dos elementos de $\mathcal{U}$ que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Em símbolos, escreveremos:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid \ x \in A \ \text{ ou } \ x \in B\}.$$

Definição 2.1.4. A interseção de A e B, indicada por $A \cap B$, é o conjunto dos elementos de $\mathcal{U}$, comuns a A e B.
Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid \ x \in A \ \text{ e } \ x \in B\}.$$

Observação 2.1.1. Quando não existe ponto comum aos conjuntos A e B, escrevemos $A \cap B = \phi$, onde o símbolo ϕ indica o conjunto vazio. Dizemos que os conjuntos A e B, são disjuntos.

Definição 2.1.5. A diferença entre A e B, indicada por $A - B$, é o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.
Em símbolos:

$$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid \ x \in A \ \text{ e } \ x \notin B\}.$$

Definição 2.1.6. Quando $B \subset A$, a diferença $A - B$ também se diz complemento de B em relação a A. O complemento de um conjunto B relativamente ao conjunto $\mathcal{U}$ diz-se simplesmente complemento de B e indica-se por $\mathcal{C}_B$. Portanto:

$$\mathcal{C}_B = \mathcal{U} - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin B\}.$$

Observação 2.1.2. É fácil ver que $A - B = A \cap \mathcal{C}_B$.

As operações definidas acima estabelecem no conjunto das partes do universo $\mathcal{U}$ uma estrutura algébrica que possui importantes propriedades. Não sendo neste momento nosso objetivo desenvolver o estudo dessa estrutura, portanto limitaremos a elencar algumas das principais propriedades.

2.1.3 Propriedades das operações com conjuntos

Sejam A, B e C subconjuntos arbitrários de $\mathcal{U}$. Então valem as seguintes:

Propriedades 2.1.2.

i) $A \cup B = B \cup A$. (Comutatividade da união)

ii) $A \cap B = B \cap A$. (Comutatividade da interseção)

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. (Associatividade da união)

iv) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. (Associatividade da interseção)

v) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cup B = B$.

vi) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B = A$.

vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

viii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ix) $A \cup \phi$, qualquer que seja A.

x) $A \cap \mathcal{U} = A$, qualquer que seja A.

xi) $\mathcal{C}_{(\mathcal{C}_A)} = A$.

xii) $A \subset B$ se, e somente se, $\mathcal{C}_A \supset \mathcal{C}_B$.

xiii) $\mathcal{C}_\phi = \mathcal{U}$ e $\mathcal{C}_\mathcal{U} = \phi$.

xiv) $\mathcal{C}_{A \cup B} = \mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B$. (1ª lei de De Morgan)

xv) $\mathcal{C}_{A \cap B} = \mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B$. (2ª lei de De Morgan)

Observações 2.1.1.

O1) A **Propriedade 3.1.2** *vii)* é a distributividade da interseção relativamente à união.

O2) A **Propriedade 3.1.2** *viii)* é a distributividade da união relativamente à interseção.

O3) A **Propriedade 3.1.2** *ix)* diz que o conjunto vazio é neutro em relação à união.

O4) A **Propriedade 3.1.2** *x)* da mesma forma o conjunto universo é neutro em relação à interseção.

O5) A **Propriedade 3.1.2** *xi)* diz que a complementação é uma transformação involutiva.

O6) A **Propriedade 3.1.2** *xiv)* a 1ª lei de De Morgan diz que o complemento da união de dois conjuntos é a interseção dos seus complementos.

O7) A **Propriedade 3.1.2** *xv)* enquanto que a 2ª lei de De Morgan diz que complemento da interseção de dois conjuntos é a união dos seus complementos.

A fim de complemantar os conhecimentos da parte teórica no que refere à conjuntos e às demonstrações de várias das propriedades apresentadas acima é indispensável uma leitura atenta do texto de LIMA (1976). Mesmo que, de acordo com esse autor, conjuntos seja tratado do chamado "ponto de vista ingênuo".

2.2 O símbolo da implicação lógica

Em face da íntima ligação entre Matemática e a Lógica, é natural que alguns autores de Matemática empregem em seus escritos símbolos da Lógica. Tendo em vista a já assinalada preocupação de não usar simbolismo em demasia, empregamos, ocasionalmente, apenas um dos muitos símbolos existentes. Trata-se do símbolo de implicação, que é a seta $\Longrightarrow$.

Quando escrevemos $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{T}$, queremos dizer que a hipótese $\mathcal{H}$ implica a tese $\mathcal{T}$, isto é, se $\mathcal{H}$ é verdadeira, então $\mathcal{T}$ é verdadeiro. Neste caso, também costumamos dizer que $\mathcal{T}$ é condição necessária para que se verifique $\mathcal{H}$, e que $\mathcal{H}$ é condição suficiente para que se verifique $\mathcal{T}$.

A recíproca da proposição $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{T}$ é a proposição $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{H}$. Se esta recíproca é também verdadeira, então $\mathcal{T}$ é condição necessária e suficiente para que se verifique H (e, obviamente, $\mathcal{H}$ é também condição necessária e suficiente para que se verifique $\mathcal{T}$).

Quando são verdadeiras as duas proposições $\mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{T}$ e $\mathcal{T} \Longrightarrow \mathcal{H}$, escrevemos mais condensadamente $\mathcal{H} \Longleftrightarrow \mathcal{T}$. Neste caso, as afirmações $\mathcal{H}$ e $\mathcal{T}$ são logicamente equivalentes; $\mathcal{H}$ é verdadeira se, e somente se, $\mathcal{T}$ é verdadeira.

Exemplo 2.2.1. A fim de elucidar a discussão acima e estará mostrado uma situação como consequência dos **Axiomas 2 da subseção 4.3.1** o seguinte resultado: *se o número real x é positivo, então x é maior que 0.*

Designando por $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos, podemos enunciar através dos símbolos essa proposição como: $x \in \mathbb{R}_+^* \Longrightarrow x > 0$. A recíproca, também verdadeira, é: $x > 0 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}_+^*$. As duas proposições podem reunir-se em um só enunciado, na forma:

$$x \in \mathbb{R}_+^* \Longleftrightarrow x > 0.$$

O enunciado acima pode ser lido como: *O número real x é positivo se, e somente se, x é maior que 0.*

2.3 Correspondências

Está previsto neste trabalho, **Capítulo 6**, que lidaremos com certos tipos de correspondências que serão as chamadas funções. Mas, já o próximo capítulo, **Sistemas Numéricos**, temos então, a necessidade ao apresentarmos os axiomas de Peano, de acordo com a abordagem que faremos mesmo que, de forma intuitiva, conhecermos a ideia de correspondências e em especial as que são funções.

Sejam A e B dois conjuntos. Dizemos que uma correspondência de A em B é dada quando tivermos uma regra que associa a cada elemento $x \in A$ um elemento $y \in B$; tal elemento y é dito a imagem de x pela correspondência.

Ao tomarmos os conjuntos A e B não vazios de números reais, damos uma regra ou correspondência que associa a cada número real $x \in A$ um número real $y \in B$. Uma tal correspondência é dita uma função, definida no conjunto A e com valores no conjunto B. Escrevemos $f : A \longrightarrow B$ para denotar que f é uma função de A em B.

Observação 2.3.1. Não estamos aqui definindo a noção de correspondência, mas só então, traduzindo o termo "correspondência" em uma forma mais usual.

Exemplo 2.3.1. Sejam $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\}$ o conjunto dos números naturais e $B = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\}$ o conjunto dos naturais ímpares. A regra que a cada número associa ao seu correspondente número ímpar (por exemplo $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 5, \ldots,$ $n \mapsto 2n - 1, \ldots$) estabelece uma correspondência de A em B.

No **Exemplo 2.3.1** observe-se para dois fatos:

i) todo elemento de B é imagem de algum elemento de A,

ii) quaisquer dois elementos distintos de A têm imagens distintas.

O exemplo anterior sugere a seguinte nomenclatura.

Uma correspondência sobrejetiva de A em B, é uma correspondência de A em B tal que todo elemento de B é a imagem de algum elemento de A. Portanto, a correspondência do **Exemplo 2.3.1** é sobrejetiva.

Uma correspondência de A em B, é dita injetiva quando dois elementos distintos quaisquer de A tiverem imagens distintas em B.

Assim, a correspondência no **Exemplo 2.3.1** também é injetiva.

Exemplo 2.3.2. Seja A o conjunto das circunferências do plano, com raios inteiros, e B o conjunto dos números naturais, $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$. A correspondência que associa a cada circunferência seu raio é sobrejetiva no conjunto B, mas não é injetiva, uma vez que duas circunferências diferentes podem ter um mesmo raio quando tiverem centros não coincidentes.

Exemplo 2.3.3. Sejam A e B ambos iguais ao conjunto nos números naturais; a correspondência que associa a cada número seu quadrado é injetiva, mas não é sobrejetiva em B.

2.4 Produto cartesiano

A fim de apresentar o conceito lógico-formal dos sistemas numéricos utilizaremos o de produto cartesiano, o qual descreveremos de modo geral, para dois conjuntos quaisquer.

Desde o ensino fundamental e médio admitimos intuitivamente o conceito de par ordenado como: "um par de objetos onde a ordem tem importância". Pois bem, se indicarmos tais objetos por x e y a ordem em que eles aparecem no símbolo $(x\ ,\ y)$ é importante. Por essa razão chamamos $(x\ ,\ y)$ um par ordenado. Além disso, x e y são oriundos de conjuntos. Vamos generalizar essa ideia como segue.

Seja $\mathcal{U}$ um conjunto universo. Podemos então formar pares ordenados $(u\ ,\ v)$ onde $u,\ v \in \mathcal{U}$. Vamos admitir que, dois pares ordenados $(u\ ,\ v)$, $(x\ ,\ y)$ são iguais se, e só se, $u = x$ e $v = y$. Vamos sem equívoco, chamar x a primeira coordenada e y a segunda coordenada de $(x\ ,\ y)$.

Uma vez munidos do conceito de par ordenado, construímos o produto cartesiano $A \times B$ de subconjuntos $A,\ B \subseteq \mathcal{U}$ como segue a

Definição 2.4.1. O produto cartesiano $A \times B$ de A e B é o conjunto de todos pares ordenados $(x\ ,\ y)$ com $x \in A$ e $y \in B$. Em símbolos

$$A \times B = \{(x\ ,\ y) \mid x \in A \quad \text{e} \quad y \in B\}.$$

Observações 2.4.1.

O1) Nosso conjunto universo agora é $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

O2) Se $A = B$ o produto cartesiano $A \times A$ de A e A é o conjunto de todos os pares ordenados $(x\ ,\ y)$ com $x,\ y \in A$. Em símbolos

$$A \times A = \{(x\ ,\ y) \mid x,\ y \in A\}.$$

O3) Em geral temos que $A \times B \neq B \times A$.

O4) $A \times B = \phi$ se e somente se $A = \phi$ ou $B = \phi$.

Exemplos 2.4.1.

i) Se $A = \{2,\ 4\}$ e $B = \{a,\ b\}$, temos que

$$A \times B = \{(2\ ,\ a),\ (2\ ,\ b),\ (4\ ,\ a),\ (4\ ,\ b)\}.$$

ii) Se $A = \{1,\ 3\}$, então $A \times A = \{(1\ ,\ 1),\ (1\ ,\ 3),\ (3\ ,\ 1),\ (3\ ,\ 3)\}$.

iii) Se $A = \phi$, então $A \times A = \phi$.

2.5 Relações binárias

Definição 2.5.1. Dados $A,\ B \subseteq \mathcal{U}$, $(A,\ B$ não vazios$)$ uma relação binária com domínio A e campo de valores B é definida como sendo qualquer subconjunto R de $A \times B$.

Observação 2.5.1.

O1) Se $(x\ ,\ y) \in R$ escrevemos também xRy. (lê-se: x está relacionado com y segundo R).

O2) Se $(x\ ,\ y) \notin R$ escreveremos $x\not{R}y$.

O3) Se $A = B$ dizemos que R é uma relação em A.

Exemplos 2.5.1.

i) Sejam os conjuntos $A = \{2,\ 3,\ 4\}$ e $B = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Consideremos, agora, o conjunto de pares ordenados $(x\ ,\ y)$ de $A \times B$ tais que $x \mid y$ (lê-se: x é divisor de y), teremos a relação binária

$$R = \{(x\ ,\ y) \in A \times B \mid \ \ x \mid y\} = \{(2\ ,\ 2),\ (2\ ,\ 4),\ (2\ ,\ 6),\ (3\ ,\ 3),\ (3\ ,\ 6),\ (4\ ,\ 4)\}.$$

ii) Se $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, então $R = \{(x\ ,\ y) \in A \times A \mid x < y\} = \{(1\ ,\ 2),\ (1\ ,3),\ (2\ ,\ 3)\}$ é uma relação binária em A.

Uma relação binária em A será chamada simplesmente de relação em A, pois não trataremos de relações que não sejam binárias.

Definição 2.5.2. Uma relação R em A não vazio diz-se relação de equivalência se possuir as seguintes propriedades:

i) Reflexiva: xRx, para todo $x \in A$.

ii) Simétrica: se $x,\ y \in A$ e xRy então yRx.

iii) Transitiva: para $x,\ y,\ z \in A$ se xRy e yRz então xRz.

Exemplos 2.5.2.

i) O **Exemplo 2.4.1** *ii)* é uma relação de equivalência, pois vale as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

ii) A relação $R = \{(1\ ,\ 1),\ (2\ ,\ 2),\ (3\ ,\ 3),\ (1\ ,\ 3),\ (3,\ 1)\}$ é uma relação de equivalência sobre $A = \{1,\ \ 2,\ \ 3\}$.

iii) $R = \{(x\ ,\ x) \mid x \in A\}$ é uma relação de equivalência em A. Esta relação se chama igualdade em A (ou identidade de A), e se denota por "=". Logo $(x\ ,\ x) \in =$, para todo $x \in A$, que escrevemos usualmente como $x = x$, para todo A.

Definição 2.5.3. Sejam R uma relação de equivalência num conjunto A e $a \in A$ um elemento fixado arbitrarimente. O conjunto

$$\bar{a} = \{x \in A \mid xRa\}$$

chama-se classe de equivalência de a pela relação R. Ou seja, $\bar{a}$ é o conjunto constituído por todos os elementos de A que são equivalentes a a.

Exemplo 2.5.1. As classes de equivalência dadas pela relação R do *item ii)* dos **Exemplos 2.4.1** são $\bar{1} = \{1\ ,\ 3\}$, $\bar{2} = \{2\}$ e $\bar{3} = \{3\ ,1\}$.

Proposição 2.5.1. Sejam R uma relação de equivalência em um conjunto A e a e b elementos quaisquer de A então:

i) aRb;

ii) $a \in \bar{b}$;

iii $b \in \bar{a}$;

iv) $\bar{a} = \bar{b}$;

são condições equivalentes entre si.

Demonstração. $i) \Longrightarrow ii)$, decorre imediatamente da definição de classe de equivalência que $a \in \bar{b}$.
$ii) \Longrightarrow iii)$, de *ii)* resulta que aRb, logo, pela simetria, bRa e portanto $b \in \bar{a}$.
$iii) \Longrightarrow iv)$, de *iii)* resulta que bRa, logo, de acordo com as propriedades simétrica e transitiva, temos xRa, se, e só se, xRb; portanto, $\bar{a} = \bar{b}$. E por fim,
$iv) \Longrightarrow i)$, supondo-se que *iv)* seja verdade e notando-se que $a \in \bar{a}$ teremos $a \in \bar{b}$, de onde concluímos, aRb. ■

Definição 2.5.4. Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. O conjunto constituído das classes de equivalência em A pela relação R é denotado por A/R é denominado conjunto quociente de A por R.

Definição 2.5.5. Seja A um conjunto não vazio. Dizemos que uma classe $\mathcal{F}$ de subconjuntos não vazios de A é uma partição de A se, e somente se:

i) dois membros quaisquer de $\mathcal{F}$ ou são iguais ou são disjuntos;

ii) a união dos membros de $\mathcal{F}$ é igual a A.

Exemplo 2.5.2. $\mathcal{F} = \{\{a\},\ \{b\},\ \{c,\ d\},\ \{e\}\}$ é uma partição do conjunto $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$.

Para finalizar esse capítulo enuciaremos as proposições seguintes que são de fundamentais importância para os conceitos de número inteiro, número racional, número real, vetor, etc., que são fixados por meio de relações de equivalência e classes de equivalência. As demonstrações dessas proposições encontram-se nos textos de DOMINGUES (1991) e MONTEIRO (1978).

Proposição 2.5.2. Se R é uma relação de equivalência sobre um conjunto A, então A/R é uma partição de A.

Proposição 2.5.3. Se $\mathcal{F}$ é uma partição de A, então existe uma relação R de equivalência sobre A de modo que $A/R = \mathcal{F}$.

Capítulo 3

Sistemas Numéricos

Preliminares

Como foi abordado na introdução desse trabalho teremos que lidar, na essência com as funções reais de uma variável real. Nada mais natural começarmos com uma revisão do sistema do números reais. Considerando que o aluno vem estudando a Matemática há vários anos nos ensinos fundamental (em específico do quinto ao nono ano) e médio o que, podemos admitir que esteja de posse de noções já desenvolvidas sobre os números. A experiência prévia com os sistemas numéricos para tal propósito é de vital importância, vamos então passar em revista alguns aspectos do assunto. Lembrando que os principais sistemas numéricos de que trata a Matemática são os seguintes:

1. $\mathbb{N}$ = sistemas dos números naturais,

2. $\mathbb{Z}$ = sistemas dos números inteiros,

3. $\mathbb{Q}$ = sistemas dos números racionais,

4. $\mathbb{R}$ = sistemas dos números reais.

Objetivamos deixar claro a distinção entre os conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, dos quais o último é o que mais nos interessará.

Como sabemos, a fim de indicar que x é um número real, escrevemos simbolicamente: $x \in \mathbb{R}$. O símbolo $\in$ representa a relação de pertinência. Quando escrevemos

$n \in \mathbb{Z}$, queremos dizer que n é elemento do conjunto $\mathbb{Z}$, isto é, n é um número inteiro. De modo análogo, a e $b \in \mathbb{N}$ significa que a e b pertecem ao conjunto $\mathbb{N}$, a e b são números naturais. Já o símbolo $\notin$ é usado para negar a pertinência. Por exemplo, $x \notin \mathbb{Q}$ quer dizer x não é um número racional.

3.1 Números naturais

A ideia de número natural sempre esteve associada à ideia de quantidade e à necessidade de contagem. Ideia essa exemplificada com muita frequência nos livros didáticos do ensino fundamental por meio da metáfora:

> *o pastor a fim de controlar o seu rebanho utilizava das pedrinhas que colocava em uma sacola, cada pedrinha correspondendo a um animal de seu rebanho.*

O que podemos observar é que tal situação descrita é esclarecedora como utilização de um modelo. Esse modelo simples e concreto, constitui um bom exemplo da utilização de uma correspondência bijetora, na origem do processo de contagem. Segundo CARAÇA (1945):

> *A ideia de número natural não é um produto puro do pesamento, independente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando de maneira completa a ideia de número, para depois aplicá-la à prática de contagem, é cômada mas falsa.*

Para sairmos dessa ideia utilitária dos números naturais para o conceito lógico-formal dos mesmos sabemos que, toda teoria que os abordam pode ser deduzida dos três axiomas, conhecidos como axiomas de Peano (1858 - 1932). Vamos então à apresentação tomando-se por base os escritos de LIMA (1976, p 26 e 27).

São dados, como objetos não-definidos, um conjunto $\mathbb{N}$, cujos elementos são chamados *números naturais* e uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, o número $s(n)$, valor que a função s assume no ponto n, é chamado o *sucessor de* n.

A função s satisfaz aos seguintes axiomas de Peano:

Axiomas 1.

i) $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é injetora;

ii) Existe um elemento em $\mathbb{N}$, que denotaremos por 0, e chamaremos de *zero*, que não está na imagem de s, isto é, $0 \notin Im(s)$;

iii) (**Princípio da Indução**) Se $X \subset \mathbb{N}$ é um subconjunto tal que $0 \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se também $s(n) \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O Princípio da Indução é útil para demonstrar proposições que se referem a inteiros. Ele está implícito em todos os argumentos onde se diz "e assim por diante", "e assim sucessivamente" ou "etc.".

As definições por indução se baseiam na possibilidade de se iterar uma função que seja, por exemplo, a função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. A cada $n \in \mathbb{N}$ podemos, de modo único, associar uma função $s^n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de tal maneira que:

$$s^1 = s \quad \text{e} \quad s^{s(n)} = s \circ s^n.$$

Exemplo 3.1.1. Em particular, se $s(0) = 1$ e $s(1) = 2$, teremos $s^2 = s \circ s$, $s^3 = s \circ s \circ s$.

A existência da *n-ésima* iterada s^n de uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ é um teorema, chamado Teorema da Definição por Indução, que não teremos como objetivo a sua demonstração. Portanto, admitamos que, dada a função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, sabemos associar, de modo único, a cada número natural $n \in \mathbb{N}$, uma função $s^n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, chamada *n-ésima iterada de s*, de modo que

$$s^1 = s \quad \text{e} \quad s^{s(n)} = s \circ s^n.$$

Usando as iteradas da função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, definiremos a adição de números naturais.

3.1.1 Adição de números naturais

Definição 3.1.1. Dados $m,\ n \in \mathbb{N}$, sua soma $m + n \in \mathbb{N}$ é definida por

$$m + n = s^n(m).$$

Podemos observar que somar m com 1 é tomar o sucessor de m enquanto que, em geral, somar m com n é partir de m e iterar n vezes a operação de tomar o sucessor. Então por definição:

$$\begin{cases} m + 1 = s(m), & (3.1) \\ m + s(n) = s(m + n). & (3.2) \end{cases}$$

3.1.2 Propriedades operatórias da adição

Quaisquer que sejam $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$ e, utilizando-se das equações (3.1) e (3.2) da **Definição 3.1.1** é possível perceber que a operação de adição em $\mathbb{N}$ valem as seguintes

Propriedades 3.1.1.

i) Associativa: $(m + n) + p = m + (n + p)$;

ii) Comutativa: $m + n = n + m$;

iii) Lei do cancelamento: $m + n = m + p \Longrightarrow n = p$;

iv) Tricotomia: Dados $m,\ n \in \mathbb{N}$, exatamente uma das três alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n$, ou existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + p$, ou, então existe $q \in \mathbb{N}$ com $n = m + q$.

Vamos omitir as demonstrações das propriedades acima. No texto de LIMA (1976), comenta que estas demonstrações são realizadas por indução. Em FERREIRA (2011, p 29) trás as demonstrações para os itens *i)*, *ii)* e *iii)*, para o item *iv)* esse autor indica um roteiro.

3.1.3 Relação de ordem entre os naturais

A relação de ordem entre os números naturais é definida em termos da adição.

Definição 3.1.2. Dados os números naturais m, n e dizemos que m é *menor do que* n, e escrevemos

$$m < n,$$

para significar que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $n = m + p$.

3.1.4 Propriedades da relação de ordem

A relação $<$ valem das seguintes

Propriedades 3.1.2.

i) Transitiva: Se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$.

Demonstração. Pela **Definição 3.1.2** existem r, $s \in \mathbb{N}$ tais que: $n = m + r$ e $p = n + s$. Somando membro a membro as igualdades temos:

$$n + p = (m + n) + (r + s)$$

o que equivale a igualdade

$$n + p = n + m + (r + s).$$

Logo, $p = m + (r + s)$, daí, $m < p$. ■

ii) Tricotomia: Dados m, n, exatamente uma das alternativas seguintes pode ocorrer: ou $m = n$, ou $m < n$ ou $n < m$.

Omitiremos a demonstração desta propriedade.

iii) Monotonicidade da adição: Se $m < n$ então, para todo $p \in \mathbb{N}$ tem-se

$$m + p < n + p.$$

Demonstração. Se $m < n$ significa que existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $m + t = n$. Então $(m + p) + t = n + p$. Portanto $m + p < n + p$. ■

Observação 3.1.1. Se $m < n$ significa que, para um certo $p \in \mathbb{N}$, temos $n = s^p(m)$, isto é, n é o $\underbrace{\text{sucessor do sucessor} \ldots \text{do sucessor}}_{\text{iterar } s(m)\ p \text{ vezes}}$ de m.

3.1.5 Multiplicação de números naturais

Apresentaremos agora, a multiplicação de números naturais. Como vimos **Definição 3.1.1**, a soma $m + n$ foi definida como o resultado que se obtém quando se itera n vezes, a partir de m, operação de tomar o sucessor, definiremos o produto $m.n$ como a soma de n parcelas iguais a m, ou melhor, o resultado que se obtém quando se adiciona a m, $n - 1$ vezes o mesmo número m.

Em modos precisos, para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $f_m : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a função definida por

$$f_m(p) = p + m.$$

f_m é função "somar m". Esta função será usada para definir a multiplicação de números naturais, como segue a seguinte

Definição 3.1.3. O produto de dois números naturais é definido assim,

$$\begin{cases} m.1 = m \\ m.(n+1) = (f_m)^n(m). \end{cases}$$

Vimos que, multiplicar m por 1 não altera. Multiplicar m por um número maior do que 1, ou seja, por número da forma $n + 1$, é iterar n-vezes a operação de somar m, começando com m. Vejamos os

Exemplos 3.1.1.

Se $n = 1$, temos: $m.(1 + 1) = m.2 = f_m^1(m) = m + m$.

Se $n = 2$, vem: $m(2 + 1) = m.3 = f_m^2(m) = m + m + m$.

Lembrando a definição de $(f_m)^n$, vemos que o produto $m.n$ está definido indutivamente pelas propriedades:

$$\begin{cases} m.1 = m & (3.3) \\ m.(n+1) = m.n + m. & (3.4) \end{cases}$$

3.1.6 Propriedades operatórias da multiplicação

A igualdade (3.4) sugere que o produto deve valer da propriedade distributiva

$$m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p.$$

De fato. Seja X o conjunto dos números $p \in \mathbb{N}$ tais que $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$ sejam quais forem $m,\ n \in \mathbb{N}$. Acabamos de observar que $1 \in \mathbb{N}$. Além disso, se $p \in X$, concluiremos que

$$(m+n) \cdot (p+1) = (m+n) \cdot p + m + n = m \cdot p + n \cdot p + m + n =$$

$$= m \cdot p + m + n \cdot p + n = m \cdot (p+1) + n \cdot (p+1).$$

Onde, na sequência de igualdades anterior usamos, a definição de produto, a hipótese de que $p \in X$, a associatividade da adição e, de novo, a definição de produto.

Portanto, segue-se que $p+1 \in X$. Assim, $X = \mathbb{N}$, ou seja

$$(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p,$$

quaisquer que sejam $m,\ n,\ p \in \mathbb{N}$.

A multiplicação de números naturais ainda valem das seguintes

Propriedades 3.1.3.

i) Associativa: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$;

ii) Comutativa: $m \cdot n = n \cdot m$;

iii) Lei do Cancelamento: $m \cdot p = n \cdot p \Longrightarrow m = n$;

iv) Distributiva: $m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p$;

v) Monotonicidade: $m < n \Longrightarrow m \cdot p < n \cdot p$.

Da mesma forma, omitiremos as demonstrações das **Propriedades 3.1.3**.

3.2 Números inteiros

A discussão que faremos nesse momento terá como referência os textos dos autores DOMINGUES (1991) e FERREIRA (2011).

Como vimos nas **Subseções 3.1.1** e **3.1.5** em $\mathbb{N}$ estão definidas duas operações que denominamos de adição e multiplicação. No ensino fundamental, em específico o sétimo ano, os números inteiros negativos e suas propriedades, são introduzidos para dar significado as subtrações $a - b$ em $\mathbb{N}$, quando $a < b$.

Uma vez apresentados tais situações sobre a necessidade dos números inteiros negativos são dadas, de modo ingênuo, outras definições com eles, numa tentativa de estender as operações aritméticas e suas propriedades no conjunto $\mathbb{N}$ para o novo conjunto $\mathbb{Z}$. E é essa prática pedagógica que vem sendo oferecido aos nossos jovens do ensino fundamental ano após ano.

Do ponto de vista da estruturação matemática, apenas admitir a existência de números inteiros negativos e juntá-los ao conjunto $\mathbb{N}$ e o professor sabe que não é adequado, qualquer que seja a sua formação acadêmica.

Como ressaltado no início dessa seção, temos em $\mathbb{N}$ as operações de adição e multiplicação. Já a subtração, como a compreendemos da matemática elementar, não é, a rigor, uma operação em $\mathbb{N}$. Assim sendo, o que faremos a partir de agora é constuir esses números negativos por meio da estrutura da aritmética que muni $\mathbb{N}$, por meio das noções de conjuntos e de relações de equivalência.

Observe-se que está subententido a cada "diferença" $a - b$ em $\mathbb{N}$, o par $(a\ ,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se admitirmos por um momento a nossa noção intuitiva de números inteiros e de subtração, notemos que: se $a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ e $c \geq d$, vale a equivalência:

$$a - b = c - d \Longleftrightarrow a + d = c + b. \tag{3.1}$$

Definiremos uma relação $\sim$ sobre o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ do seguinte modo

Definição 3.2.1. Se $(a \ , \ b)$ e $(c \ , d)$ são dois elementos quaisquer de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, então, colocaremos

$$(a \ , \ b) \sim (c \ , \ d) \Longleftrightarrow a + d = b + c.$$

Proposição 3.2.1. A relação $\sim$, dada pela **Definição 3.2.1**, é uma relação de equivalência.

Demonstração. De acordo com a **Definição 2.5.2** devemos demonstrar que relação $\sim$ é:

i) Reflexiva. Para todo elemento $(a \ , \ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos $(a \ , \ b) \sim (a \ , \ b)$, pois $a + b = b + a$ em virtude da **Propriedade 3.1.1** *ii)*.

ii) Simétrica. Sejam $(a \ , \ b)$ e $(c \ , \ d)$ dois elementos quaisquer de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e suponhamos que $(a \ , \ b) \sim (c \ , \ d)$, ou seja, que $a + d = b + c$; daqui resulta pela **Propriedade 3.1.1** *ii)*, $d + a = c + b$, ou, $c + b = d + a$, portanto,

$$(c \ , \ d) \sim (a \ , \ b).$$

iii) Transitiva. Sejam $(a \ , \ b)$, $(c \ , \ d)$ e $(e \ , \ f)$ três elementos quaisquer de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e suponhamos que $(a \ , \ b) \sim (c \ , \ d)$ e $(c \ , \ d) \sim (e \ , \ f)$, logo

$$a + d = b + c \tag{3.2}$$

$$c + f = d + e. \tag{3.3}$$

Consideremos, então, o número natural $(a + d + f)$; conforme as **Propridades 3.1.1** *i)* e *ii)* e as igualdades (3.2) e (3.3), temos

$$(a + f) + d = a + (f + d) = a + (d + f) = (a + d) + f = (b + c) + f =$$

$$= b + (c + f) = b + (d + e) = b + (e + d) = (b + e) + d;$$

portanto, de acordo com a **Propriedade 3.1.1** *iii)*, teremos:

$$a + f = b + e, \text{ logo } \quad (a \ , \ b) \sim (e \ , \ f).$$

$\blacksquare$

Observação 3.2.1. Sendo $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ temos então que, $\sim$ determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência.

Pela **Definição 2.5.4** podemos dizer que, para cada $(a\ ,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indicaremos por $\overline{(a\ ,\ b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a\ ,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Assim:

$$\begin{aligned} \overline{(a\ ,\ b)} &= \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (x\ ,\ y) \sim (a\ , b)\} \\ &= \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + b = y + a\}. \end{aligned}$$

Significa que o conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por $\sim$, ou seja, o conjunto de todos as classes $\overline{(a\ ,\ b)}$, para qualquer $(a\ ,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, será indicado por $\mathbb{Z}$. Então, será chamado de conjunto dos números inteiros. Assim segue a

Definição 3.2.2. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/ \sim = \{\overline{(a\ ,\ b)} \mid (a\ ,\ b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$.

Exemplos 3.2.1.

i) $\overline{(5\ ,\ 3)} = \{(2\ ,\ 0);\ (3\ ,\ 1);\ (4\ ,\ 2);\ (5\ ,\ 3);\ \ldots\}$

ii) $\overline{(3\ ,\ 5)} = \{(0\ ,\ 2);\ (1\ ,\ 3);\ (2\ ,\ 4);\ (3\ ,\ 5);\ \ldots\}$

iii) $\overline{(6\ ,\ 3)} = \{(3\ ,\ 0);\ (4\ ,\ 1);\ (5\ ,\ 2); (6\ ,\ 3);\ \ldots\}$

Observações 3.2.1.

O1) É obvio que: $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(c\ ,\ d)} \Longleftrightarrow (a\ ,\ b) \sim (c\ ,\ d) \Longleftrightarrow a + d = b + c.$

Seja um elemento $(a\ ,\ b)$ qualquer de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dois casos podem ocorrer:

- se $a \geq b$, então $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(a - b,\ 0)}$, pois $a + 0 = b + (a - b)$.
- se $b \geq a$, então $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(0\ ,\ b - a)}$, uma vez que $a + (b - a) = b + 0$.

O2) Dos casos discutidos imediatamente acima podemos concluir que, se $\overline{(a\ ,\ b)} \in \mathbb{Z}$, então $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(p\ ,\ 0)}$ ou $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(0\ ,\ p)}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Essa maneira de representar o elemento $\overline{(a\ ,\ b)}$ é única. De fato, se considerarmos $p,\ q \in \mathbb{N}$, então $\overline{(p\ ,\ 0)} = \overline{(0\ ,\ q)}$, o que equivale a $p + 0 = 0 + q$ e daí $p = q$.

3.2.1 Adição de números inteiros

Dados $\overline{(a\ ,\ b)}$, $\overline{(c\ ,\ d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Vejamos o que deve ser

$$\overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(c\ ,\ d)}.$$

Se $\overline{(a\ ,\ b)}$, expressa de modo natural, a "diferença" $(a - b)$, e $\overline{(c\ ,\ d)}$ expressa $(c - d)$, a matemática elementar nos dá

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$$

Esta última expressão se traduz como a classe $\overline{(a\ ,\ b) + (c\ ,\ d)}$. Tal observação nos leva a

Definição 3.2.3. Sejam $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Chama-se soma de m com n, se indica por $m + n$, o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$m + n = \overline{(a + c\ ,\ b + d)}.$$

Faz-se necessário verificarmos que a definição acima, não depende de como representamos as classes, isto é, a definição dada não depende dos representantes da classe de equivalência em questão. Assim dizemos neste caso que, a adição de números inteiros está bem definida.

Proposição 3.2.2. Sejam $m,\ n \in \mathbb{Z}$. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(a'\ ,\ b')}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)} = \overline{(c'\ ,\ d')}$, então

$$m + n = \overline{(a + c\ ,\ b + d)} \quad \text{e} \quad m + n = \overline{(a' + c'\ ,\ b' + d')}.$$

Demonstração. Da **Proposição 2.5.1** *iv)* como $\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(a'\ ,\ b')}$ e $\overline{(c\ ,\ d)} = \overline{(c'\ ,\ d')}$ então $(a\ ,\ b) \sim (a'\ ,b')$ e $(c\ ,\ d) \sim (c'\ ,\ d')$ o que é equivalente, respectivamente a:

$$a + b' = b + a' \tag{3.4}$$

$$c + d' = d + c'. \tag{3.5}$$

Pela **Definição 3.2.3** temos:

$$m+n=\overline{(a\ ,\ b)}+\overline{(c\ ,\ d)}=\overline{(a+c\ ,\ b+d)} \qquad \text{e} \tag{3.6}$$

$$m+n=\overline{(a'\ ,\ b')}+\overline{(c'\ ,\ d')}=\overline{(a'+c'\ ,\ b'+d')}. \tag{3.7}$$

Mostremos que os segundos membros de (3.6) e (3.7) coincidem. Isso equivale a mostrar que:

$$(a+c)+(b'+d')=(b+d)+(a'+c').$$

Somando-se membro a membro as igualdades (3.4) e (3.5) temos:

$$(a+b')+(c+d')=(b+a')+(d+c')$$

ou,

$$(a+b')+(d'+c)=(b+a')+(c'+d)$$

ou ainda,

$$a+(b'+d')+c=b+(a'+c')+d.$$

Portanto:

$$(a+c)+(b'+d')=(b+d)+(a'+c'), \quad \text{como queríamos.}$$

■

Observação 3.2.2. A **Proposição 3.2.2** nos permite concluir que a relação dada por

$$(m\ ,\ n)\longrightarrow m+n$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ e portanto é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. A essa operação chama-se adição em $\mathbb{Z}$.

3.2.2 Propriedades operatórias da adição

Quaisquer que sejam $m,\ n,\ p\in\mathbb{Z}$ valem as seguintes

Propriedades 3.2.1.

i) Assocìtiva: $(m+n)+p = m+(n+p)$.

Demonstração. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)}$, $n = \overline{(c\ ,\ d)}$, e $p = \overline{(e\ ,\ f)}$, são elementos de $\mathbb{Z}$ temos conforme a **Definição 3.2.3** e a **Propriedade 3.1.1** *i)* aplicadas a elementos de $\mathbb{N}$:

$$(m+n)+p = \left(\ \overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(c\ ,\ d)}\ \right) + \overline{(e\ ,\ f)} = \overline{(a\ ,\ b)} + \left(\ \overline{(c\ ,\ d)} + \overline{(e\ ,\ f)}\ \right)$$

$$\Longleftrightarrow (m+n)+p = \overline{((a\ ,\ c)+e\ ,\ (b+d)+f)} = \overline{(a+(c+e),\ b+(d+f))}$$

$$\Longleftrightarrow (m+n)+p = \overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(c+e\ ,\ d+f)} = \overline{(a\ ,\ b)} + \left(\overline{(c\ ,\ d)} + \overline{(e\ ,\ f)}\right).$$

Portanto $(m+n)+p = m+(n+p)$. ■

ii) Comutativa: $m+n = n+m$.

Demonstração. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)}$, então $m+n = \overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(c\ ,\ d)}$. Conforme a **Definição 3.2.3** e a **Propriedade 3.1.1** *ii)*, temos:

$$m+n = \overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(c\ ,\ d)} = \overline{(a+c\ ,\ b+d)} = \overline{(c+a\ ,\ d+b)} = \overline{(c\ ,\ d)} + \overline{(a\ ,\ b)}.$$

Portanto $m+n = n+m$. ■

iii) Existe elemento neutro: $m + 0' = m$.

Demonstração. Considerando-se a classe de equivalência $0' = \overline{(0\ ,\ 0)}$ temos, para todo elemento $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ de $\mathbb{Z}$:

$$m + 0' = \overline{(a\ ,\ b)} + 0' = \overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(0\ ,\ 0)} = \overline{(a+0\ ,\ b+0)} = \overline{(a\ ,\ b)} = m;$$

portanto, $0' = (0\ ,\ 0)$ é o elemento neutro para a operação de adição definida sobre $\mathbb{Z}$. Notemos que um par ordenado $(a\ ,\ b)$ pertence à classe de equivalência $0' = \overline{(0\ ,\ 0)}$ se, e só se, $a = b$. ■

iv) Elemento oposto (ou simétrico aditivo): Para todo $m = \overline{(a\ ,\ b)} \in \mathbb{Z}$ existe $m' \in \mathbb{Z}$ de modo que $m + m' = 0$. Usaremos a notação: $-m = m'$.

Demonstração. Seja $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ um elemento qualquer de $\mathbb{Z}$ e consideremos a classe de equivalência $\overline{(b\ ,\ a)}$; temos

$$\overline{(a\ ,\ b)} + \overline{(b\ ,a)} = \overline{(a+b\ ,\ b+a)} = \overline{(a+b\ ,\ a+b)} = \overline{(0\ ,\ 0)} = 0',$$

portanto, $\overline{(b\ ,\ a)}$ é o oposto de $\overline{(a\ ,\ b)}$: $-\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(b\ ,\ a)}$ ou $-m = m'$. ■

iv) Lei do cancelamento: Quaisquer que sejam $m,\ n,\ p$ de $\mathbb{Z}$, então $m+r = n+r$ implica em $m = n$.

Demonstração. Temos $m = m + 0 = [m + r + (-r)] = (m + r) + (-r) = (n + r) + (-r) = n + [r + (-r)] + 0 = n$. ■

3.2.3 Subtração de números inteiros

Para cada par de elementos $m,\ n \in \mathbb{Z}$, segue a

Definição 3.2.4. Chama-se diferença entre m e n e indica-se por $m-n$ o elemento $m + (-n) \in \mathbb{Z}$. Ou seja:

$$m - n = m + (-n).$$

Observações 3.2.2.

O1) De acordo com definição imediatamente acima, temos que $m - n \in \mathbb{Z}$, quaisquer que sejam $m,\ n \in \mathbb{Z}$, a relação dada por

$$(m\ ,\ n) \longrightarrow m - n$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ - ou seja, é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. A essa operação denominamos subtração em $\mathbb{Z}$.

O2) A operação de subtração sobre $\mathbb{Z}$, não é associativa, nem comutativa e tampouco admite elemento neutro.

3.2.4 Multiplicação de números inteiros

As motivações apresentadas para a definição formal da adição em $\mathbb{Z}$ podem ser consideradas aqui para a multiplicação. Definiremos multiplicação em $\mathbb{Z}$ do seguinte modo:

Definição 3.2.5. Sejam $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Chama-se produto de m por n, indica-se por mn, (ou $m.n$) o elemento de $\mathbb{Z}$ definido por:

$$mn = \overline{(ac + bd\ ,\ ad + bc)}.$$

Devemos verificar se a multiplicação em $\mathbb{Z}$ está bem definida.

Proposição 3.2.3. Sejam $m,\ n \in \mathbb{Z}$. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(a'\ ,\ b')}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)} = \overline{(c'\ ,\ d')}$, então

$$mn = \overline{(ac + bd\ ,\ ad + bc)} \quad \text{e} \quad mn = \overline{(a'c' + b'd'\ ,\ a'd' + b'c')}.$$

Demonstração. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(a'\ ,\ b')}$ e $n = \overline{(c\ ,\ d)} = \overline{(c'\ ,\ d')}$, pela **Definição 3.2.5** $mn = \overline{(ac + bd\ ,\ ad + bc)}$ e $mn = \overline{(a'c' + b'd'\ ,\ a'd' + b'c')}$. Como $(a\ ,\ b) \sim (a'\ ,\ b')$ e $(c\ ,\ d) \sim (c'\ ,\ d')$, então

$$a + b' = b + a' \quad \text{e} \quad c + d' = d + c'.$$

Daí obtemos:

$$c(a+b') = c(b+a'),\ a'(c+d') = a'(d+c'),\ d(b+a') = d(a+b') \quad \text{e} \quad b'(d+c') = b'(c+d').$$

Desenvolvendo esses produtos e, somando membro a membro as igualdades obtidas, feitos os cancelamentos possíveis, teremos

$$(ac + bd) + (a'd' + b'c') = (bc + ad) + (a'c' + b'd')$$

o que nos dará:

$$mn = \overline{(ac + bd\ ,\ ad + bc)} = \overline{(a'c' + b'd'\ ,\ a'd' + b'c')}.$$

■

Observação 3.2.3. A **Proposição 3.2.3** nos dá o significado que, a relação

$$(m\ ,\ n) \longrightarrow mn$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ e, por isso, uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Trata-se, obviamente, da multiplicação em $\mathbb{Z}$.

3.2.5 Propriedades operatórias da multiplicação

Quaisquer que sejam $m,\ n,\ p \in \mathbb{Z}$ valem as seguintes

Propriedades 3.2.2.

i) Associativa: $(mn)p = m(np)$.

ii) Comutativa: $mn = nm$.

Demonstração. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)}$ e $n\overline{(c\ ,\ d)}$ são elementos de $\mathbb{Z}$, então

$$mn = \overline{(ac + bd\ ,\ ad + bc)} = \overline{(ca + db\ ,\ cb + da)} = nm.$$

■

iii) Existe elemento neutro: É a classe $(1\ ,\ 0)$.

Demonstração. Para todo $\overline{(a\ ,\ b)}$ implica que

$$\overline{(1\ ,\ 0)}.\overline{(a\ ,\ b)} = \overline{(1.a + 0.b\ ,\ 1.b + 0.a)} = \overline{(a\ ,\ b)}.$$

■

iv) Lei do anulamento do produto: Se $m,\ n \in \mathbb{Z}$ e $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

Demonstração. Vimos na **Observação 3.2.1** *O2)* que todo elemento de $\mathbb{Z}$ pode ser representado univocamente sob a uma das seguintes formas: $\overline{(p\ ,\ 0)}$ ou $\overline{(0\ ,\ p)}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Suponhamos, por exemplo, $m = \overline{(a\ ,\ 0)}$ e $n = \overline{(0\ ,\ b)}$. Logo $mn = \overline{(a\ ,\ 0)}.\overline{(0\ ,\ b)} = \overline{(0\ ,\ ab)} = \overline{(0\ ,\ 0)}$. Daí $0 + 0 = ab + 0$ o que implica $a = 0$ ou $b = 0$. Donde $m = 0$ ou $n = 0$. Idem para os demais casos. ■

v) Distributiva em relação à adição: $m(n + p) = mn + mp$.

Demonstração. Se $m = \overline{(a\ ,\ b)}$, $n = \overline{(c\ ,\ d)}$ e $p = \overline{(e\ ,\ f)}$ são elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$, teremos, conforme as **Definições 3.2.3** e **3.2.5** e as propriedades; distributiva da multiplicação em relação à adição, associativa e comutativa aplicadas a elementos de $\mathbb{N}$:

$$m(n + p) = \overline{(a\ ,\ b)}\left(\overline{(c\ ,\ d)} + \overline{(e\ ,\ f)}\right) = \overline{(a\ ,\ b)}.\overline{(c + e\ ,\ d + f)}$$

$$\Longleftrightarrow m(n+p) = \overline{(a(c+e)+b(d+f)\ ,\ a(d+f)+b(c+e))}$$

$$\Longleftrightarrow m(n+p) = \overline{(ac+bd)+(ae+bf)\ ,\ (ad+bc)+(af+be)}$$

$$\Longleftrightarrow m(n+p) = \overline{(ac+bd\ , ad+bc)} + \overline{(ae+bf\ ,\ af+be)}$$

$$\Longleftrightarrow m(n+p) = \overline{(a\ ,\ b)}.\overline{(c\ ,\ d)} + \overline{(a\ ,\ b)}.\overline{(e\ ,\ f)}.$$

Portanto: $m(n+p) = mn + mp$.

■

3.2.6 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \overline{(p\ ,\ 0)}$ ou $m = \overline{(0\ ,\ p)}$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Assim, se fizermos

$$\begin{array}{ll} \overline{(0\ ,\ 0)} = 0 & \overline{(0\ ,\ 1)} = -1 \\ \overline{(1\ ,\ 0)} = +1 & \overline{(0\ ,\ 2)} = -2 \\ \overline{(2\ ,\ 0)} = +2 & \overline{(0\ ,\ 3)} = -3 \\ \vdots & \vdots \\ \overline{(p\ ,\ 0)} = +p & \overline{(0\ ,\ p)} = -p. \end{array}$$

torna-se válido escrever

$$\mathbb{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}.$$

Os números 0, +1, +2, +3, ... dizem-se inteiros não negativos, assim, temos o conjunto inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$. Enquanto que 0, -1, -2, -3, ..., são os inteiros não positivos, que determinam o conjunto dos inteiros não positivos indicado por: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0\}$.

Todo elemento $m \in \mathbb{Z}_+/\{0\} = \{+1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$ é chamado inteiro positivo; e todo $m \in \mathbb{Z}_-/\{0\} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1\}$ é um inteiro negativo. É fácil ver que, se $m \in \mathbb{Z}_+$, então $-m \in \mathbb{Z}_-$ e vice-versa.

Definição 3.2.6. Sejam $m,\ n \in \mathbb{Z}$. Diz-se que m é menor que ou igual a n e anota-se $m \leq n$ se

$$n = m + p$$

para algum $p \in \mathbb{Z}_+$. Neste caso também pode-se escrever $n \geq m$, onde lê-se:" n é maior que ou igual a m".

Se $n = m + p$, onde $p \in \mathbb{Z}_+/\{0\}$, então m se diz menor que n. Notação: $m < n$. É equivalente dizer que n é maior que m e anotar $n > m$.

Em particular $0 \leq p$, para todo $p \in \mathbb{Z}_+$, pois $p = 0 + p$; e $q \leq 0$, para todo $q \in \mathbb{Z}_-$, uma vez que $0 = q + (-q)$. Também: $0 < p$, para todo $p \in \mathbb{Z}_+/\{0\}$ e $p < 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}_-/\{0\}$.

3.2.7 Propriedades da relação $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$

Vimos na **Subseção 3.1.3** que sobre o conjunto dos números naturais está definida uma relação $\leq$ que satifaz as **Propriedades 3.1.2**. Então nesse momento o objetivo é estender tais propriedades ao conjunto $\mathbb{Z}$.

Sejam $m,\ n,\ p \in \mathbb{Z}$ seguem as seguintes

Propriedades 3.2.3.

i) Reflexiva: $m \leq m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

ii) Antissimetrica: $m \leq n$ e $n \leq m$ implica $m = n$.

iii) Transitiva: $m \leq n$ e $n \leq p$ implica $m \leq p$.

iv) $m \leq n$ ou $n \leq m$.

v) Compatibilidade com a adição: Se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$, para todo $p \in \mathbb{Z}$.

vi) Compatibilidade com a multiplicação: Se $m \leq n$ e $0 \leq p$ implica $mp \leq np$.

As propriedades acima não serão demostradas aqui, o leitor que mostrar interesse as encontrará com muita riqueza de detalhes nos textos de DOMINGUES (1991) e MONTEIRO (1978).

O conjunto $\mathbb{Z}$, munido das operações apresentadas através das definições de **3.2.3**, **3.2.5** e **3.2.6** é chamado conjuntos dos números inteiros. E os elementos de $\mathbb{Z}$, nessas condições, são chamados números inteiros.

3.2.8 Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$

Notemos ainda que, dentro da construção lógico-formal dos números inteiros que fizemos, o conjunto dos números inteiros positivos, $\mathbb{Z}_+$, está em bijeção com $\mathbb{N}$. A importância desta bijeção, no tocante aos aspectos algébricos e a ordenação, $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia de $\mathbb{N}$, no sentido proposto pelo seguinte

Teorema 3.2.1. Seja $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(p) = \overline{(p\ ,\ 0)}$. Então f é bijetiva e valem as seguintes propriedades:

i) $f(p+q) = f(p) + f(q)$;

ii) $f(pq) = f(p).f(q)$;

iii) Se $p \leq q$, então $f(p) \leq f(q)$.

Demonstração. Temos que $f(\mathbb{N}) = \{f(p) \mid p \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_+ = \{0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$, logo f é sobrejetiva. Por outro lado, de $\overline{(p\ ,\ 0)} = \overline{(p'\ ,\ 0)}$ resulta $p = p'$, daí f é injetiva e, portanto f é bijetiva de $\mathbb{N}$ sobre $\mathbb{Z}_+$.

i) Temos $f(p+q) = \overline{(p+q\ ,\ 0)} = \overline{(p\ ,\ 0)} + \overline{(q\ ,\ 0)} = f(p) + f(q)$, para todo $p,\ q \in \mathbb{N}$.

ii) Temos $f(pq) = \overline{(pq\ ,\ 0)} = \overline{(p\ ,\ 0)}.\overline{(q\ ,\ 0)} = f(p).f(q)$, para todo $p,\ q \in \mathbb{N}$.

iii) Se $p \leq q$, então $q = p + r$, para algum $r \in \mathbb{N}$ e portanto

$$f(q) = \overline{(q\ ,\ 0)} = \overline{(p+r\ ,\ 0)} = \overline{(p\ ,\ 0)} + \overline{(r\ ,\ 0)} = f(p) + \overline{(r\ ,\ 0)}$$

o que implica

$$f(p) \leq f(q).$$

■

O teorema que acabamos de demonstrar nos garante porque se pode identificar $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}_+$ e por conseguinte considerar a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. E ainda mais, nessa identificação o número natural 0 passa a se confundir com inteiro $0 = \overline{(0\ ,\ 0)}$, o natural 1 com o inteiro $+1 = \overline{(1\ ,\ 0)}$, e assim por diante. A função f considerada costuma ser chamada de imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$ por razões demonstradas nas propriedades imediatamente acima.

Para concluir essa seção, façamos a discussão sobre a subtração nos conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$. Se $a,\ b \in \mathbb{N}$ levando-se em conta a identificação de $\mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}_+$:

$$a - b = \overline{(a\ ,\ 0)} - \overline{(b\ ,\ 0)} = \overline{(a\ ,\ 0)} + \overline{(0\ ,\ b)} = \overline{(a\ ,\ b)}$$

o que mostra que a subtração de dois números naturais é sempre possível em $\mathbb{Z}$.

3.3 Números racionais

Já no ensino fundamental, aprendemos que um número racional q é a "razão" entre dois números $a,\ b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. O termo "razão" naquele contexto significa "divisão".

A partir de agora para o nosso contexto, os termos "razão" "divisão" e mesmo "fração" devem ser definidos com base no que já temos tratado em toda **Seção 3.2**, isto é, o conjunto dos números inteiros e suas propriedades algébricas. Notemos que em $\mathbb{Z}$ estão definidas apenas as operações de adição, multiplicação e a subtração, que é um caso particular da adição:

$$a - b \text{ é, por definição, } a + (-b), \text{ onde } -b \text{ é o simétrico aditivo de } b.$$

A fim de definirmos a divisão, poderíamos tentar fazê-lo de modo análogo à definição de subtração, ou seja, $a \div b = a.b^{-1}$ onde b^{-1} é o inverso multiplicativo de b, isto é, o número que multiplicado por b resulta no neutro multiplicativo 1. O problema, como sabemos, é que os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são o 1 e o -1, o que não faz sentido a proposta de definição de divisão acima, dentro dos propósitos de uma definição formal de número racional.

3.3.1 Construção dos números racionais

Definição 3.3.1. Seja $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}/\{0\} = \{\ \ldots, -3,\ -2\ -1,\ +1,\ +2,\ +3,\ \ldots\}$ e consideremos sobre

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(a\ ,\ b) \mid a \in \mathbb{Z}\ \text{ e }\ b \in \mathbb{Z}^*\}$$

a relação $\sim$ definida por

$$(a\ ,\ b) \sim (c\ , d)\ \text{ se, e somente se, }\ ad = bc.$$

Teorema 3.3.1. A relação $\sim$ dada pela **Definição 3.3.1** é de equivalência.

Como consequência do **Teorema 3.3.1** a relação $\sim$ determina sobre $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ classes de equivalência.

Definição 3.3.2. Para cada par $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicado por $\dfrac{p}{q}$, ou seja:

$$\frac{p}{q} = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x\ ,\ y) \sim (p\ ,\ q)\} = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid xq = yp\}.$$

Exemplos 3.3.1.

i) $\dfrac{1}{2} = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x\ ,\ y) \sim (1\ ,\ 2) = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid 2x = y\}$. Assim, temos: $(1\ ,\ 2) \in \dfrac{1}{2}$; $(3\ ,\ 4) \in \dfrac{3}{4}$; $(5\ ,\ 2) \notin \dfrac{1}{2}$.

ii) $\dfrac{7}{1} = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid (x\ ,\ y) \sim (7\ ,\ 1) = \{(x\ ,\ y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \mid x = 7y\}$. Logo obtemos: $(7\ ,\ 1) \in \dfrac{7}{1}$; $(-21\ ,\ -3) \in \dfrac{7}{1}$; $(2\ ,\ 7) \notin \dfrac{7}{1}$.

Propriedade 3.3.1. (Propriedade fundamental das frações) Se $(a\ ,\ b)$ e $(c\ ,\ d)$ são elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, então $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se, e somente, $ad = bc$.

A propriedade fundamental das frações nos dá um significado preciso para o símbolo de fração $\frac{a}{b}\cdot$ Trata-se de uma classe de equivalência com respeito à relação de equivalência que acabamos de apresentar.

Definição 3.3.3. Denominamos conjunto dos números racionais, denotamos por: $\mathbb{Q}$, o conjunto quociente de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, isto é,

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / \sim = \left\{ \frac{p}{q} \mid (p \ , \ q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}.$$

Observação 3.3.1. Cada $c \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}$ $(m, n \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)$. De fato, se $c = \frac{m}{n}$ é qualquer racional e se t é um número inteiro diferente de zero, temos $c = \frac{tm}{tn} = \frac{m}{n} \cdot$ Dois elementos $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ podemos ter

$$a = \frac{ps}{qs} \text{ e } b = \frac{qr}{qs}\cdot$$

3.3.2 Adição e multiplicação com números racionais

Definição 3.3.4. Sejam $a = \frac{p}{q}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chamamos soma de a com b e indicamos por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ da seguinte maneira:

$$a + b = \frac{sp}{sq} + \frac{qr}{qs} = \frac{sp + qr}{sq} \cdot$$

Definição 3.3.5. Chamamos produto de $a = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ por $b = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ o elemento

$$ab = a.b = \frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q}.$$

Teorema 3.3.2. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, estão bem definidas.

Observações 3.3.1.

O1) Como consequências do **Teorema 3.3.2** temos que a correspondência

$$(a\ ,\ b) \longrightarrow a+b,$$

de acordo com a **Definição 3.3.4**, é uma aplicação, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos adição em $\mathbb{Q}$.

O2) Enquanto que, também pelo **Teorema 3.3.2** temos que a correspondência

$$(a\ ,\ b) \longrightarrow ab,$$

de acordo com a **Definição 3.3.5**, é uma aplicação, trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos multiplicação em $\mathbb{Q}$.

Propriedades 3.3.1. O conjunto $\mathbb{Q}$, munido das operações de adição e multiplicação, tem as propriedades algébricas de $\mathbb{Z}$ onde:

i) o elemento neutro aditivo é $\dfrac{0}{1}$;

ii) o elemento neutro multiplicativo é $\dfrac{1}{1}$;

iii) dado o racional $\dfrac{p}{q} \neq \dfrac{0}{1}$, existe $\dfrac{r}{s}$ em $\mathbb{Q}$ tal que $\dfrac{p}{q} \cdot \dfrac{r}{s} = \dfrac{1}{1}$.

Definição 3.3.6. Se $a,\ b \in \mathbb{Q}$, denomina-se diferença entre a e b, e indica-se por $a-b$ o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:

$$a-b = a+(-b).$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$ então

$$(a\ ,\ b) \longrightarrow a-b.$$

é uma operação sobre $\mathbb{Q}$ à qual chamamos subtração em $\mathbb{Q}$.

Definição 3.3.7. Entendemos por divisão em $\mathbb{Q}$, a operação de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}/\{0\}$ em $\mathbb{Q}$ definida por

$$(a\ ,\ b) \longrightarrow ab^{-1}.$$

O elemento ab^{-1} é chamado quociente de a por b e pode ser indicado por $a \div b$.

Para todo $(a\ ,\ b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é fácil ver que: $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{-a}{-b}\cdot$

Das afirmações acima, podemos considerar que se $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, então b pode ser tomado positivo. Tal fato usaremos para definir uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

3.3.3 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Definição 3.3.8. Sejam $a = \dfrac{p}{q}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$ com $q,\ s > 0$. Nessas condições, diz-se que a é menor que ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $ps \leq qr$.

Observações 3.3.2.

O1) De modo análogo pode-se dizer que b é maior que ou igual a a e escrever $b \geq a$.

O2) Com as mesmas condições da **Definição 3.3.8**, se $ps < qr$, diz-se que a é menor que b (notação: $a < b$) ou que b é maior que a (notação: $b > a$).

Teorema 3.3.3. A relação $\leq$, introduzida pela **Definição 3.3.8** está bem definida e é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

Sejam $m,\ n,\ p \in \mathbb{Q}$ seguem as seguintes

Propriedades 3.3.2.

i) Compatibilidade da ordem com as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, isto é, vale:

1. se $m \leq n$, então $m + p \leq n + p$;

2. se $m \leq n$ e $p \geq \dfrac{0}{1}$, então $mp \leq np$;

3. se $m \leq n$ e $p \leq \dfrac{0}{1}$, então $mp \geq np$.

ii) Tricotomia. Dados m, n, uma, e apenas uma, das situações seguintes ocorre: ou $m = n$, ou $m < n$, ou $m > n$.

Observação 3.3.2. Adotamos a notação: $\mathbb{Q}/\{0\} = \mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Q}_-$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}^*_-$, e $\mathbb{Q}^*_+$, com os significados usuais, como no caso de $\mathbb{Z}$.

3.3.4 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$

Seja a função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por

$$f(n) = \frac{n}{1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Esta função f quando na construção de $\mathbb{Q}$ tem por objetivo indentificar elementos de $\mathbb{Z}$ a elementos de $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.3.4. A função $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \dfrac{n}{1}$ é injetora. Além disso, f preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ no seguinte sentido:

i) $f(p+q) = f(p) + f(q)$;

ii) $f(pq) = f(p).f(q)$;

iii) se $p \leq q$, então $f(p) \leq f(q)$.

Esse teorema sobre f nos mostra que a sua imagem é $\mathbb{Z}$ ou seja

$$f(\mathbb{Z}) = \left\{\frac{n}{1} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$. Pois bem, devido a esse fato cada inteiro n se confunde com sua imagem $\dfrac{n}{1}$ $\left(\text{ou seja, } n = \dfrac{n}{1}\right)$. Portanto $\mathbb{Z}$ passa a ser identificado com $f(\mathbb{Z})$. Como $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Levando em conta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pode-se concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A função f é chamada função imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

De acordo as colocações postas, se $p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$, então:

$$p \div q = \frac{p}{1} \div \frac{q}{1} = \frac{p}{1} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

Por outro lado, dado o número racional, $\dfrac{p}{q}$ então:

$$\frac{p}{q} = \frac{p}{1} \cdot \frac{1}{q} = \frac{p}{1} \div \frac{q}{1} = p \div q.$$

Por isso chamamos cada representação $\dfrac{p}{q}$ $(p,\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0)$ de um número racional dado de fração ordinária de numerador p e denominador q. Se mdc(p , q)=1, a fração se diz irredutível.

Para o caso em que p é múltiplo de q , isto é, $p = qr$ $(r \in \mathbb{Z})$, então:

$$p \div q = \frac{p}{q} = \frac{qr}{q} = \frac{r}{1} = r.$$

O conjunto $\mathbb{Q}$, construído conforme apresentado nas **Subseções 3.3.3** e **3.3.4** com a adição, a multiplicação e a relação de ordem, é o conjunto dos números racionais e seus elementos, os números racionais.

Como o leitor pode observar nessa seção foram omitidas as demonstrações dos teoremas e propriedades. Fato que não ocorre na **Seção 3.2** a qual apresentamos demonstrações de várias proposições que dão subsídios para aquelas demonstrações. Podendo ainda, recorrer para consulta aos textos de DOMINGUES (1991), FERREIRA (2011) e MONTEIRO (1978).

Propriedade 3.3.2. Para quaisquer $p,\ q \in \mathbb{Q}$, se $p < q$, então existe $r \in \mathbb{Q}$ para o qual vale $p < r < q$.

Demonstração. Se $p,\ q \in \mathbb{Q}$, $p < q$ implica $p + p < p + q$ e $p + q < q + q$. Logo $p + p < p + q < q + q$. Mas

$$p + p = 1.p + 1.p = (1 + 1)p = 2p$$

de modo análogo, $q + q = 2q$. Logo:

$$2p < p + q < 2q.$$

Multiplicando ambos os membros dessas desigualdades por $\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\cdot(2p) < \frac{1}{2}\cdot(p+q) < \frac{1}{2}\cdot(2q).$$

Como

$$\frac{1}{2}\cdot(2p) = \left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)p = 1.p = p$$

do mesmo modo

$$\frac{1}{2}(2q) = q$$

portanto,

$$p < \frac{1}{2}(p+q) < q.$$

Como

$$r = \frac{1}{2}(p+q) \in \mathbb{Q},$$

como queríamos demostrar. ■

3.3.5 Representação geométrica de um número racional

Os números racionais podem ser representados geometricamente. Recordemos o problema da medição dos segmentos de reta. Sejam a e b dois segmentos de reta, e suponhamos que exista um segmento c que seja submúltiplo comum de a e b, isto é, existem os números inteiros positivos p e q tal que $a = pc$, $b = qc$.

Exemplo 3.3.1. A Figura 3.1 ilustra o caso em que $a = 5c$ e $b = 3c$.

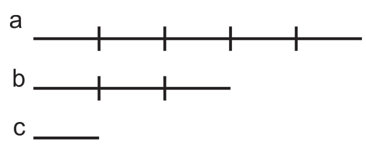

Figura 3.1: Segmentos comensuráveis.

Os segmentos a e b dizem-se então comensuravéis, e a razão $\dfrac{a}{b}$ desses segmentos é o número racional $\dfrac{p}{q}\cdot$ Escreve-se:

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \qquad \text{ou ainda} \qquad a = \frac{p}{q}\cdot b. \tag{3.8}$$

E se escolhermos b como unidade de comprimento, o número $\frac{p}{q} \cdot b$ será a medida de a. No **Exemplo 3.3.1**, temos: $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$, isto é, a é igual $\frac{5}{3}$ de b.

Quando b é submúltiplo de a (ou, a é múltiplo de b), isto é, existe um número inteiro positivo t tal que $a = tb$, daí a razão $\frac{a}{b}$ é o número t e temos um caso particular da situação acima descrita.

Dado um segmento de reta b, escolhido como unidade, isto é, $OU = b = 1$. Seja um número racional positivo $\frac{p}{q}$ (p e q inteiros positivos), podemos facilmente construir um segmento a cuja medida seja esse número. Para isso, basta dividir b em q partes iguais e construir o segmento a que seja igual a p vezes a q-ésima parte de b, quer dizer, $a = m \cdot (\frac{1}{q}) \cdot b$. É claro então que $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ ·

Agora sim, temos como representar geometricamente os números racionais por pontos de uma reta. Consideremos uma reta r, Figura 3.2, na posição horizontal; escolhemos como positivo o sentido da esquerda para a direita (indicado por uma seta), fixemos na reta um ponto O ao qual chamaremos origem, e adotaremos $OU = 1$ como uma unidade de comprimento arbitrária.

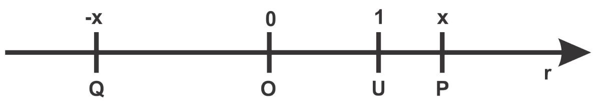

Figura 3.2: Reta real

Dado um número racional positivo x, podemos representá-lo pelo ponto P, situado à direita da origem, tal que o segmento $\overline{OP}$ tenha por medida x. O número negativo $-x$ será representado pelo ponto Q da reta, situado à esquerda da origem, tal que o segmento $\overline{OQ}$ tenha por medida o número x. Assim, os números x e $-x$ dizem números simétricos. O número zero é representado pela origem O.

Capítulo 4

Números reais

4.1 Construção dos números reais

É comum o consenso de que o conceito de número real é um dos mais profundos da matemática, como podemos perceber em relatos da história (BOYER. 2002, COURANT. 2000, ROQUE & CARVALHO. 2012). Remonta aos gregos da escola pitagórica, com a descoberta da incomensurabilidade, (como exposto na **Seção 4.2**) entre o lado e a diagonal de um quadrado. A construção desse conceito por Eudoxo, século IV a.C, com sua teoria das proporções, registrada nos Elementos de Euclides, e só foi concretizada no século XIX. Coube aos matemáticos alemães, Cantor (1845 - 1918) e Dedekind (1831 - 1916), a partir dos racionais por métodos distintos, conhecidos por Classes de equivalência de Sequências de Cauchy e por Cortes de Dedekind, respectivamente. Sendo que, Dedekind inspirou-se na Teoria das Proporções de Eudoxo.

O que tentaremos fazer a partir de agora, é construir os números reais, tendo como ponto de partida o conjunto dos números racionais com suas propriedades algébricas e aritméticas, de modo análogo às construções anteriores, para tal intento seguem as definições.

Definição 4.1.1. Seja $A \subset \mathbb{Q}$, $A \neq \phi$. Um elemento $a \in A$ é chamado mínimo de A se $a \leq x$ para todo $x \in A$. Notação: $a = \min A$.

A propriedade antissimétrica da relação $\leq$ garante que um subconjunto não vazio $A \subset \mathbb{Q}$ não pode ter mais que um mínimo.

Definição 4.1.2. Uma cota superior de um conjunto não vazio $B \subset \mathbb{Q}$, é um número racional k tal que $k \geq x$, para todo $x \in B$. Diz-se que $B \subset \mathbb{Q}$, $B \neq \phi$, é limitado superiormente se B admite uma (e portanto infinitas) cota superior em $\mathbb{Q}$. Se o conjunto das cotas superiores de $B \subset \mathbb{Q}$, $B \neq \phi$, tem um mínimo s este é chamado supremo de B. Notação: $s = \sup B$.

Definição 4.1.3. Um elemento c de um conjunto não vazio $C \subset \mathbb{Q}$ se diz máximo de C se, para todo $x \in C$, $x \leq c$.

A propriedade antissimétrica da relação $\leq$ garante também que C não pode ter mais que um máximo. Notação: $c = \max C$.

4.1.1 Cortes de Dedekind

A definição que virá a seguir é inspirada nas propriedades apresentadas na seção anterior para o conjunto de aproximações racionais por falta na medida de um segmento de reta. Dela sairá o conceito de número real.

Definição 4.1.4. Um conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ recebe o nome de corte em $\mathbb{Q}$ se

i) $\alpha \neq \phi$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

ii) Se $x \in \alpha$ e $y < x$, então $y \in \alpha$;

iii) Para todo $x \in \alpha$ existe $y \in \alpha$ de maneira que $y > x$.

Observações 4.1.1.

O1) A ideia que se encontra por trás da **Definição 4.1.4** é a de caracterizar um número real α pelo conjunto de todos os números racionais que o precedem.

O2) A condição *iii)* da **Definição 4.1.4** nos diz que α não tem máximo.

Proposição 4.1.1. Se $p \in \mathbb{Q}$ e $\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < p\}$, então α é um corte em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Para o item *i)*, temos que $\alpha \neq \phi$ e $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

Item *ii)* se $x \in \alpha$, então $x < p$ e portanto, para todo $y < x$, vale a relação $y < p$, o que significa que $y \in \alpha$, e por fim, a prova do

Item *iii)* se $x \in \alpha$ então $x < p$, pela **Propriedade 3.3.2**, existe $y = \dfrac{x+p}{2} \in \mathbb{Q}$ de maneira que $x < y < p$. O fato de ser y menor que p garante que $y \in \alpha$, pois y é racional. Portanto todo $p \in \mathbb{Q}$ o conjunto α é chamada corte racional. ■

Definição 4.1.5. Os cortes do tipo da **Proposição 4.1.1** são denominados cortes racionais e se representam por p^*.

Mostraremos a seguir que existem cortes que não são racionais.

Proposição 4.1.2. Seja $\alpha = \mathbb{Q}_- \cup \{p \in \mathbb{Q}_+ \mid p^2 < 2\}$. Então α é um corte que não é racional.

Demonstração. Prova do item *i)* $\alpha \neq \phi$, pois, $\mathbb{Q}_- \subset \alpha$ $(\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\})$. $\alpha \neq \mathbb{Q}$, pois, $3 \in \mathbb{Q}$ e $3 \notin \alpha$.

Item *ii)*. Sejam p, q dois racionais quaisquer, com $p \in \alpha$ e $q < p$. Temos:

1) se $p \in \mathbb{Q}_-$, então $q \in \mathbb{Q}_-$, logo, $q \in \alpha$.

2) se $p > 0$ e $q \leq 0$, então $q \in \alpha$.

3) se $p > 0$ e $q > 0$, temos,

$$q < p \text{ e } q > 0 \text{ implica em } q^2 < p^2.$$

De $p^2 < 2$, segue $q^2 < 2$, logo, $q \in \alpha$.

Item *iii)* Seja $p \in \alpha$, com $p > 0$. Temos, para todo $n \in \mathbb{N}/\{0\}$,

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 = p^2 + \frac{2p}{n} + \frac{1}{n^2} \leq p^2 + \frac{2p}{n} + \frac{1}{n}$$

ou

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 \leq p^2 + \frac{1}{n} \cdot (2p + 1).$$

Por outro lado,

$$p^2 + \frac{1}{n} \cdot (2p + 1) < 2 \iff n > \frac{2p - 1}{2 - p^2} \cdot$$

Tomando-se, então, $n > \dfrac{2p - 1}{2 - p^2}$, resulta

$$\left(p + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

o que mostra que α não tem máximo. ∎

4.1.2 Definição de números reais

A **Proposição 4.1.2** põe em evidência uma deficiência do corpo ordenado $\mathbb{Q}$: existe subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$, limitados superiormente, que não admitem supremo em $\mathbb{Q}$. O conjunto dos números reais é uma extenção do conjunto dos números racionais, construída com o objetivo de preencher as lacunas de $\mathbb{Q}$ determinadas pela ausência desses supremos.

Definição 4.1.6. Seja $\mathbb{R}$ o conjunto de todos os cortes em $\mathbb{Q}$. Os elementos de $\mathbb{R}$ serão chamados números reais, consequentemente, $\mathbb{R}$ será chamado conjunto dos números reais desde que as operações adição e multiplicação e a relação $\leq$ em $\mathbb{R}$ sejam definidas como seguem.

4.1.3 Adição com números reais

Definição 4.1.7. Se α e β são cortes em $\mathbb{Q}$, a soma γ de α com β é o conjunto

$$\gamma = \{a + b \mid a \in \alpha,\ b \in \beta\}.$$

Proposição 4.1.3. A soma γ também é um corte em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Mostremos que γ satisfaz as condições da **Definicão 4.1.4**.

i) Como α e β não são vazios, existem $a \in \alpha$, $b \in \beta$; assim $a + b \in \gamma$, logo $\gamma \neq \phi$. Por outro lado, sejam $p \in \mathbb{Q}/\alpha$ e $q \in \mathbb{Q}/\beta$. Como $p > a$, para todo $a \in \alpha$ e $q > b$, para todo $b \in \beta$, então $p + q > a + b$ para todo $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, isto é $p + q \neq \gamma$, logo $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

ii) Seja $a + b$ $(a \in \alpha$ e $b \in \beta)$ um elemento de γ e consideremos um racional $p < a+b$. Então $a+b = p+q$ para um conveniente $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$. Fazendo $b-q = t$, então $b = q + t$, (o que mostra que $t < b$ e portanto $t \in \beta$) e $p = a + t$. Como, porém, $a \in \alpha$ e $b \in \beta$, então $p \in \gamma$.

iii) Seja $z \in \beta$ tal que $z > b$. Então $a + z > a + b$ e $a + z \in \gamma$. ■

Logo, $(\alpha\ ,\ \beta) \longrightarrow \alpha + \beta$ é uma operação sobre $\mathbb{R}$ à qual chamamos adição de números reais.

4.1.4 Propriedades operatórias da adição

Para essa operação valem as seguintes

Propriedades 4.1.1.

i) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (Associativa)

ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (Comutativa)

iii) Existe elemento neutro: é o corte racional, indicado por 0^*, que indicaremos apena por 0. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha + 0^* = \alpha$.

iv) Simétrico aditivo: existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + \beta = 0^*$. Denotaremos β por $-\alpha$.

4.1.5 Relação $\leq$ em $\mathbb{R}$

Definição 4.1.8. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dizemos que α é menor que ou igual a β e escrevemos $\alpha \leq \beta$ quando $\alpha \subset \beta$.

Para a relação de $\leq$ assim definida valem as seguintes

Propriedades 4.1.2.

i) $\alpha \leq \alpha$ (Reflexiva)

ii) $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$ (Antissimétrica)

iii) $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma \Longrightarrow \alpha \leq \gamma$ (Transitiva)

iv) $\alpha \leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$.

Observações 4.1.2.

O1) Sempre teremos: $\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha \leq \beta$ e $\alpha \geq \beta$.

O2) Por $\alpha < \beta$ entende-se que $\alpha \subset \beta$ e $\alpha \neq \beta$. Neste caso podemos escrever $\beta > \alpha$.

O3) Os conceitos de não-positivo, positivo, não-negativo e negativo são definidos de forma habitual.

O4) É fácil ver que: $r \in \alpha \Longrightarrow r^* < \alpha$.

Exemplo 4.1.1. Mostrar que $\alpha \in \mathbb{R}$ é positivo se, e somente se, existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > 0$ e $x \in \alpha$.

Demonstração. Se $\alpha > 0 = 0^*$, então $0^* \subset \alpha$ e $0^* \neq \alpha$. Logo existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin 0^*$. De onde concluímos que $p \geq 0$. Se $p > 0$, a demonstração se encerra. Se $p = 0$, o item *iii)* da **Definição 4.1.4** garante que existe $x \in \alpha$, $x > 0$.

Reciprocamente, se existe $x \in \alpha$, $x > 0$, como todo $p < x$ pertence a α, devido à condição *ii)* da **Definição 4.1.4**, podemos conluir $0^* \subset \alpha$ e $0^* \neq \alpha$ e portanto, $0 < \alpha$. ■

4.1.6 Multiplicação com números reais

Definição 4.1.9. Sejam α, $\beta \in \mathbb{R}$, o produto de α por β (indica-se por: $\alpha\beta$ ou $\alpha.\beta$) é definido por:

- Se $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, então:

$$\alpha\beta = \mathbb{Q}_- \cup \{ab \mid a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a > 0,\ b > 0\}.$$

- Se $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, $\alpha\beta = 0$.
- Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, então $\alpha\beta = (-\alpha)(-\beta)$.
- Se apenas um dos cortes é menor que zero, digamos $\alpha < 0$ e $\beta \geq 0$, então:

$$\alpha\beta = -(-\alpha)(\beta).$$

A correspondência $(\alpha\ ,\ \beta) \longrightarrow \alpha\beta$ é uma operação sobre $\mathbb{R}$ que, trata-se da multiplicação de números reais.

O leitor que se interessar pela demonstração da afirmação acima ver o texto de **GUIDORIZZI** (1997).

Para essa operação valem as seguintes

Propriedades 4.1.3.

i) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ (Associativa)

ii) $\alpha\beta = \beta\alpha$ (Comutativa)

iii) Existe elemento neutro: é o corte racional 1^*, que indicaremos apenas por 1. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha.1^* = \alpha = 1\alpha$.

iv) Inverso: se $\alpha \neq 0^*$ em $\mathbb{R}$, existe um único $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha\beta = 1^*$. Denotaremos inverso de α por α^{-1}.

v) Distributiva em relação à adição: $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, para quaisquer α, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Ressalvando ainda que a relação $\leq$ é compatível com adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$, ou seja valem as

Propriedades 4.1.4. Sejam $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha \leq \beta$ e $0 \leq \gamma$. Então:

i) $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;

ii) $\alpha \leq \beta \Longrightarrow \alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

Por se tratar de uma tarefa um tanto árdua e não é o que mais importa nesse momento, omitiremos as demonstrações das propriedades acima. Por isso, passemos a discussão de resultados mais específicos do conjunto $\mathbb{R}$.

Observação 4.1.1. Pelo desenvolvimento do texto até nesse momento podemos concluir que $\mathbb{R}$, tal como $\mathbb{Q}$, é corpo ordenado. As particularidades do corpo ordenado dos números reais vão aperecer na continuidade do texto.

4.1.7 Imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$

Diferentemente de como foi tratado nas imersões apresentadas nas **Subseções 3.2.8** e **3.3.4** restringiremos a mencionar que $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(p) = p^*$:

- é injetora,
- preserva as operações de adição e multiplicação, o que significa:

$$f(p+q) = f(p) + f(q) \ \ [\Longleftrightarrow (p+q)^* = p^* + q^*]$$

$$f(pq) = f(p)f(q) \ \ [\Longleftrightarrow (pq)^* = p^*q^*]$$

- preserva as relações de ordem, ou seja:

$$p \leq q \Longrightarrow f(p) \leq f(q)$$

ou

$$p \leq q \Longrightarrow p^* \leq q^*.$$

Portanto, podemos identificar cada $p \in \mathbb{R}$ com o corte p^* e assim considerar $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, enquanto corpos ordenados. Na sequência de nosso estudo, portanto, faremos p^* para todo $p \in \mathbb{Q}$, sempre que for conveniente. A função f é chamada função imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. Na identificação apresentada por f, os elementos p^* passam a ser chamados números racionais e os de $\mathcal{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ números irracionais. O corte α da **Proposição 4.1.2** é um número irracional.

Observações 4.1.3.

O1) Como afirmamos na **Observação 4.1.2**, $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado. O significa que, todas as propriedades valem para $\mathbb{Q}$, enquanto corpo ordenado, como as que são apresentadas **Seção 4.3**, também valem em $\mathbb{R}$.

O2) Para a continuidade do nosso trabalho, sempre que for conveniente, usaremos também letras minúsculas para indicar números reais.

Exemplo 4.1.2. Seja p, $0 < p < 1$ um número real. Mostar que:

$$0 \leq m \leq n \Longrightarrow 0 < p^n \leq p^m.$$

Demonstração. Mostraremos, por indução finita sobre m, que

$$0 < p^{m+1} < p^m \quad \text{(para todo } m \geq 0).$$

$m = 0:$ $0 < p < p^0$ ou $0 < p < 1$ o que é vardadeiro. Seja $r \geq 0$ e suponhamos $0 < p^{r+1} < p^r$. Como $p > 0$, então

$$0.p < p^{r+1}.p < p^r.p$$

ou seja:

$$0 < p^{(r+1)+1} < p^{r+1}.$$

Consequentemente:

$$0 < \ \ldots \ < p^{m+3} < p^{m+2} < p^{m+1} < p^m.$$

Por outro lado é óbvio que, se $m = n \geq 0$, então $p^n = p^m$. ∎

Exemplo 4.1.3. (*Desigualdade de Bernoulli*) Mostrar que, para todo número real $a \geq -1$ e todo número natural $n \geq 1$, vale a desigualdade:

$$(1+a)^n \geq 1 + na.$$

Demonstração. Por indução finita sobre n:

$$n = 1 : (1+a)^1 = 1 + a = 1 + 1.a \text{ Verdadeira.}$$

Seja $r \geq 1$ e suponhamos $(1+a)^r \geq 1 + ra$. (hipótese de indução)

$n = r + 1 :$ Multipliquemos a desigualdade anterior por $1 + a \geq 0 :$

$$(1+a)^{r+1} \geq (1+ra)(1+a) = 1 + ra + a + ra^2.$$

Como $ra^2 \geq 0$, então:

$$1 + ra + a + ar^2 \geq 1 + ra + a = 1 + (r+1)a.$$

Onde:

$$(1+a)^{r+1} \geq 1 + (r+1)a.$$

■

Proposição 4.1.4. (*O corpo ordenado* $\mathbb{R}$ *é arquimediano*) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Então existe $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ de maneira que $n\alpha > \beta$.

Demonstração. Consideremos o caso $\beta > \alpha$. Como $\alpha > 0$, então $\beta > 0$ e, portanto, existem racionais positivos r e s tais que $r \in \alpha$ e $s \notin \beta$. Sendo $\mathbb{Q}$ arquimediano, então

$$nr > s$$

para algum $n \in \mathbb{N}/\{0\}$. Considerando a imersão de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, a desigualdade anterior pode ser expressa por:

$$n^* r^* = (nr)^* > s^*.$$

Como $r \in \alpha$, então $r^* \subset \alpha$, o que pode ser traduzido por $\alpha \geq r^*$. Mas, considerando $n^* > 0$, então:

$$n^* \alpha \geq n^* r^*.$$

Por outro lado, em virtude da escolha de s é claro que $s^* \geq \beta$. Onde:

$$n\alpha = n^*\alpha \geq n^*r^* > s^* \geq \beta.$$

■

Exemplo 4.1.4. Seja a, $0 < a < 1$, um número real. Mostrar que para todo $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ de maneira que $a^n < \epsilon$.

Demonstração. Sendo $0 < a < 1$, então $b = a^{-1} > 1$. Logo $b = 1 + h$, para algum $h \in \mathbb{R}$, $h > 0$. Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ para o qual

$$nh > \epsilon^{-1} - 1$$

e portanto:

$$nh + 1 > \epsilon^{-1}.$$

Pela desigualdade de Bernoulli:

$$b^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Portanto,

$$(a^{-1})^n = b^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > \epsilon^{-1}.$$

Mas

$$(a^{-1})^n = (a^n)^{-1}$$

e, então:

$$(a^n)^{-1} > \epsilon^{-1}.$$

Onde:

$$a^n < \epsilon.$$

■

A próxima proposição é de fundamental importância para a discussão que propomos sobre densidade do conjunto $\mathbb{R}$, cuja demonstração é encontrada em DOMINGUES (1991) e FERREIRA (2011).

Proposição 4.1.5. Sejam $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R},\ \alpha < \beta$. Então existe um número racional p tal que $\alpha < p < \beta$.

Observações 4.1.4.

O1) Seja K um corpo ordenado. Se existe $X \subset K,\ X \neq \phi$, de maneira que para quaisquer $x,\ y \in K,\ x < y$, seja sempre possível determinar $p \in X$ de modo que $x < p < y$, então se diz que X é denso. A **Proposição 4.1.5** nos garante que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. Também se pode provar que $\mathcal{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dos números irracionais é denso em $\mathbb{Q}$.

O2) Seja $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi$. Um elemento $\lambda \in \mathbb{R}$ é uma cota superior de A se $\alpha \leq \lambda$, para todo $\alpha \in A$. Se A admite cota superior em $\mathbb{R}$, diz-se que A é limitado superiormente. Neste caso, como enunciaremos a seguir, o conjunto das cotas superiores de A tem um mínimo λ_0. O elemento λ_0 que é único, chama-se supremo de A. Notação: $\lambda_0 = \sup A$.

Teorema 4.1.1. Seja $A \subset \mathbb{R},\ A \neq \phi$. Se A é limitado superiormente, então A admite supremo em $\mathbb{R}$.

Observação 4.1.2. Temos relatado que, tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}$ são corpos ordenados. Mas enquanto o primeiro existem subconjuntos não vazios e limitado superiormente que não admitem supremo em $\mathbb{Q}$, como o visto na **Proposição 4.1.2**. O mesmo não acontece em $\mathbb{R}$ - o que é provado pelo **Teorema 4.1.1**. A fim de especificar essa diferença dizemos que $\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo. Portanto, o corpo $\mathbb{Q}$ não é completo.

O corpo ordenado $\mathbb{R}$ também é contínuo no sentido em que vale o próximo teorema, por sua vez, equivale ao **Teorema 4.1.1**.

Teorema 4.1.2. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ tais que $A \cup B = \mathbb{R}$ e ainda, que todo $a \in A$ é menor que todo $b \in B$. Então existe um único $c \in \mathbb{R}$ que não é superado por nenhum $a \in A$ e que não supera nenhum $b \in B$.

Para maiores entedimentos e demonstrações dos **Teoremas 4.1.1** e **4.1.2** recomendamos os textos de DOMINGUES (1991), FERREIRA (2011) e MONTEIRO (1978).

4.2 Números irracionais

Na representação que descrevemos na **Subseção 3.3.5**, mesmo de forma intuitiva cada número racional corresponde a um ponto bem determinado da reta. E ainda, como existe uma infinidade de números racionais, a representação de todos eles exige uma infinidade de pontos da reta. Não está fora de propósito presumir que todos os pontos da reta sejam empregados nessa representação, isto é, que todo ponto da reta seja imagem de um número racional.

Entretanto, sem uma verificação cuidadosa da questão, do ponto de vista da Álgebra realizada na **Seção 4.1**, juntamente com os axiomas da Geometria Euclidiana, entre os quais o da continuidade, mostra que tal presunção é falsa e que existem pontos da reta que não são imagens de números racionais. Essa afirmação precisa ser esclarecida. Consideremos a seguir exemplos históricos.

4.2.1 A $\sqrt{2}$ e outras não racionalidades

Tomemos o quadradado cujo lado é a unidade de comprimento e chamemos de x a medida da sua diagonal, como mostra a Figura 4.1. De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2.$$

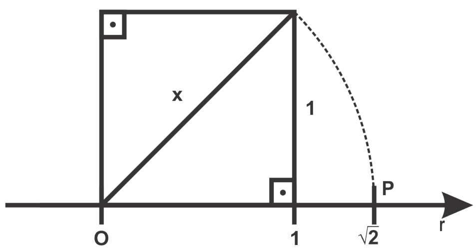

Figura 4.1: Um ponto que não representa um racional.

O número positivo cujo quadrado é 2 é, por definição, a raiz quadrada de 2, e se indica pelo símbolo $\sqrt{2}$. Portanto, $x = \sqrt{2}$. Considerando na reta r, à direita da origem, o ponto P tal que o segmento $\overline{OP}$ seja congruente à diagonal do dito quadrado. Esse ponto P é, de acordo com a representação descrita, a imagem do número $\sqrt{2}$. Pois bem, vamos enunciar o seguinte

Teorema 4.2.1. O número $\sqrt{2}$ não é racional.

Demonstração. Demonstraremos esta afirmação com base no conhecido resultado da Teoria dos Números segundo o qual:

"um número inteiro é par se o seu quadrado é par".

Se $\sqrt{2}$ fosse racional, poderíamos escrever $\sqrt{2} = \dfrac{m}{n}$, onde m e n são inteiros não nulos que podemos supor primos entre si, isto é, mdc(m,n)=1. Teríamos então:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2, \qquad \text{donde} \qquad m^2 = 2n^2.$$

Nessas condições, m^2 é par e, em consequência, m também é par, isto é, $m = 2p$, onde p é um inteiro. Segue-se que:

$$4p^2 = 2n^2, \qquad \text{donde} \qquad n^2 = 2p^2.$$

Então n^2 é par; logo n também é par. Assim, chegamos ao seguinte absurdo: *os números inteiros* m *e* n *são simultaneamente pares e primos entre si.* Desse modo, temos que admitir que número $\sqrt{2}$ não é racional. ∎

A discussão imediatamente acima mostra (como outras podem ser propostas) que, na reta existem pontos que não são imagens de números racionais. Tais pontos representam os chamados *números irracionais*, dos quais $\sqrt{2}$ é um exemplo. Existem muitos números irracionais, por exemplo, como propõe o

Teorema 4.2.2. Se p é um número natural que não é o quadrado de outro número natural, então $\sqrt{p}$ é um número irracional.

Os números irracionais não são somente as raízes quadradas a que nos referimos. Podemos considerar raízes cúbicas, quartas, quintas, etc.. Tais considerações nos leva a seguinte

Definição 4.2.1. Se a é um número positivo, chamamos $\sqrt[n]{a}$ ao número positivo b tal que $b^n = a$.

Teorema 4.2.3. Se p é um número natural que não seja a $n-$ésima potência de outro número natural, então $\sqrt[n]{p}$ não é número racional.

As demonstrações dos **Teoremas 4.2.2** e **4.2.3** encontram com muita riqueza de detalhes no texto de LOVÁSZ (2013).

O problema da extração de raízes é fonte de muitos exemplos de números irracionais, não devemos pensar que todos os irracionais têm origem nesse problema. Já vimos que do ponto de vista geométrico, os números racionais resultam da comparação de dois segmentos de reta comensuráveis. Nessa ordem de ideias, os irracionais resultam da comparação de dois segmentos incomensuráveis, isto é, que não admitem um submúltiplo comum. A diagonal e o lado de um quadrado constituem o primeiro exemplo de um par de segmentos incomensuráveis; a razão entre a diagonal e o lado é o número $\sqrt{2}$.

Outra situação é a razão entre o lado de um triângulo equilátero e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo é o número $\sqrt{3}$. E um dos mais famosos exemplos é dado pelo comprimento C de uma circunferência e pelo diâmetro $D = 2R$ da mesma; a razão $\dfrac{C}{R}$ é o número π:

$$\frac{C}{D} = \frac{C}{2R} = \pi, \qquad \text{donde} \qquad C = 2\pi R.$$

O número π é conhecido desde a antiguidade, mas a sua irracionalidade só foi demonstrada no século XVIII.

4.3 Resultados importantes em $\mathbb{R}$

Os resultados seguintes são postos no sentido de complementar as propriedades operatórias da adição e multiplicação e, bem como, pelo caráter prático no desenvolvimento do Cálculo.

Teorema 4.3.1. (Unicidade do zero) Só existe um elemento neutro relativamente à adição.

Demonstração. Se 0 e $\bar{0}$ fossem neutros teríamos:

$$\bar{0} + 0 = \bar{0} \qquad \text{e} \qquad 0 + \bar{0} = 0.$$

Mas, $\bar{0} + 0 = 0 + \bar{0}$, em virtude da comutatividade. Resultaria, pois: $\bar{0} = 0$. ■

Observação 4.3.1. De modo análogo se demonstra a unicidade da unidade relativamente à multiplicação.

Teorema 4.3.2. (Unicidade do simétrico) Para cada $a \in \mathbb{R}$ existe um único elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = 0$.

Demonstração. Se existissem dois elementos $b,\ c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a + b = 0 \qquad \text{e} \qquad a + c = 0,$$

resultaria:

$$c = c + 0 = c + (a + b) = (c + a) + b = (a + c) + b = 0 + b = b + 0 = b,$$

isto é, seria $c = b$. Portanto, o simétrico de a é único; e que será indicado por $-a$. ■

Teorema 4.3.3. (Unicidade do inverso) Para cada número real $a \neq 0$ existe um único elemento $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a.a^{-1} = 1$.

Demonstração. Se existissem dois elementos $b,\ c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$a.b = 1 \qquad \text{e} \qquad a.c = 1,$$

resultaria: $c = c.1 = c.(a.b) = (c.a).b = (a.c).b = 1.b = b.1 = b$, isto é, seria $c = b$. Portanto, o inverso de a é único; e que será designado por a^{-1}. ■

Teorema 4.3.4. (Lei do cancelamento da adição) Se $a+b=a+c$, então $b=c$.

Demonstração. Da igualdade $a+b=a+c$, somando a ambos os membros o simétrico de a, resulta:

$$-a+(a+b)=-a+(a+c), \quad \text{ou} \quad (-a+a)+b=(-a+a)+c.$$

Mas, $-a+a=a+(-a)=0$. Portanto: $0+b=0+c$, ou, finalmente, por ser 0 elemento neutro $b=c$, como queríamos dizer. ■

Teorema 4.3.5. (Lei do cancelamento da multiplicação) Se $a \neq 0$ e $ab=ac$, então $b=c$.

Demonstração. Por ser $a \neq 0$, existe o inverso a^{-1}. Multiplicando ambos os membros da igualdade $ab=ac$ por a^{-1} e usando alguns dos axiomas apresentados, podemos escrever a sequência de equivalências:

$$a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac) \Longleftrightarrow (a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$$

$$\Longleftrightarrow (aa^{-1})b=(aa^{-1})c \Longleftrightarrow 1b=1c \Longleftrightarrow b=c.$$

■

Teorema 4.3.6. Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, tem-se $a0=0$.

Demonstração. Para prová-la, partamos da igualdade $0+0=0$. Multiplicando ambos os membros por a, resulta:

$$a(0+0)=a0.$$

Por ser 0 neutro temos: $a(0+0)=a0+0$. Por outro lado, usando a distributividade, temos:

$$a(0+0)=a0+a0.$$

De onde concluímos que:

$$a0+a0=a0+0,$$

após o cancelamento: $a0=0$, como queríamos provar. ■

Teorema 4.3.7. (Lei do anulamento do produto) Se $a \neq 0$ e $ab=0$, então $b=0$.

Demonstração. Se $a \neq 0$ existe a^{-1} e, por força dos axiomas descritos, temos sucessivamente a sequência de equivalências:

$$ab = 0 \Longleftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}0 \Longleftrightarrow (a^{-1}a)b = a^{-1}0$$

$$\Longleftrightarrow (aa^{-1})b = a^{-1}0 \Longleftrightarrow 1b = a^{-1}0 \Longleftrightarrow b = a^{-1}0.$$

Mas, já provamos que $a^{-1}0 = 0$. Portanto, $b = 0$. ■

Os **Teoremas 4.3.6** e **4.3.7** permitem-nos afirmar que *um produto de números reais é nulo se, e somente se, um dos fatores é nulo.*

Os teoremas que se seguem, nos darão as regras de sinais para a multiplicação de números reais.

Teorema 4.3.8. Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$-(-a) = a.$$

Demonstração. A igualdade

$$-a + a = a + (-a) = 0$$

nos diz que a é o simétrico de $-a$, ou seja: $a = -(-a)$. ■

Teorema 4.3.9. Quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Demonstração. Usando o resultado do **Teorema 4.3.8** e da **Associatividade**, resulta:

$$(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab.$$

■

4.3.1 Números reais positivos

O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é ordenado. Isto significa que $\mathbb{R}$ tem um subconjunto $\mathbb{R}^*{}_+$, chamado conjunto dos números reais positivos, satisfazendo os seguintes

Axiomas 2.

i) Se $a,\ b \in \mathbb{R}^*{}_+,$ então $a + b \in \mathbb{R}^*{}_+.$

ii) Se $a,\ b \in \mathbb{R}^*{}_+,$ então $ab \in \mathbb{R}^*{}_+.$

iii) Se $x \in \mathbb{R},$ então $x \in \mathbb{R}^*{}_+,$ ou $x = 0,$ ou $-x \in \mathbb{R}^*{}_+,$ verificando-se uma única das três alternativas.

Os axiomas aceitos anteriormente são chamados axiomas da positividade. Sendo que os dois primeiros afirmam que a soma e o produto de números reais positivos são números positivos, o terceiro é chamado axioma da tricotomia.

Se indicarmos por $\mathbb{R}^*{}_-$ o conjunto dos elementos $-a$ com $a \in \mathbb{R}^*{}_+$, temos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^*{}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^*{}_-.$$

$\mathbb{R}^*{}_-$ chama-se conjunto dos números reais negativos.

4.4 Representação geométrica de $\mathbb{R}$

Seja P um ponto qualquer da reta r, temos duas alternativas: ou o segmento $\overline{OP}$ e o segmento unidade $OU = 1$ são comensuráveis, ou são incomensuráveis. No primeiro caso, a medida de $\overline{OP}$ é um número racional; no segundo, é um irracional. Em qualquer caso, o ponto P é a imagem de um número racional ou irracional.

Pelo exposto acima, conclui-se que os números reais se correspondem biunivocamente com os pontos da reta, isto é, a cada número real x corresponde a um ponto P da reta, e, vice-versa, a cada ponto P da reta corresponde um número real x. Então diremos que o número x é a coordenada do ponto P. Através da correspondência $P \longleftrightarrow x,$ costumamos identificar o número x com o ponto P que lhe corresponde $(P = x)$ e usar linguagem geométrica no tratamento de questões numéricas. Nessas condições, diremos *"o ponto x"*, em vez de *"o número x"* e também nos referimos ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como sendo *"a reta real"*.

A correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais é o fundamento da Geometria Analítica, a qual, graças à introdução das coordenadas, reduz os problemas geométicos a problemas numéricos. Para a resolução desta última, a Álgebra desempenha papel fundamental. E como visto, na História da Matemática, é considerado fundador da Geometria Analítica René Descartes.

Nas práticas pedagógicas desde o ensino fundamental, é posto que a passagem dos números racionais aos reais se faz por meio da introdução dos números dos irracionais. A representação dos números racionais por pontos da reta não utiliza todos os pontos desta reta; os pontos que não representam números racionais são utilizados para representar os irracionais. Assim, o conjunto $\mathbb{Q}$ apresenta lacunas; os números irracionais são introduzidos para preencher tais lacunas. O conjunto $\mathbb{R}$ é constituído a partir de $\mathbb{Q}$ por um processo de complemento, de modo que em $\mathbb{R}$ não existam lacunas. Dizemos que $\mathbb{R}$ é um conjunto contínuo, enquanto $\mathbb{Q}$ não tem esta propriedade. A justificativa desses fatos mencionados acima são postas a partir da **Proposição 4.1.5**.

4.5 Intervalos reais

Em nosso estudo, teremos que trabalhar frequentemente com subconjuntos do conjunto $\mathbb{R}$, que será, no caso, o nosso conjunto universo - $\mathcal{U}$. Entre tais subconjuntos, merecem especial referência os chamados intervalos reais.

Sejam a e b dois números reais distintos e suponhamos que $a < b$, passemos as definições.

Definição 4.5.1. O intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto de todos os números reais x compreendidos entre a e b, que será indicado pelo símbolo $]\, a\ ,\ b\, [$. Portanto:

$$]\, a\ ,\ b\, [= \{x \in \mathbb{R} \ \mid \ a < x < b\}.$$

Definição 4.5.2. O intervalo fechado de extremos a e b, que se indica por $[\, a\ ,\ b\,]$, é o conjunto determinado pelos números a e b e por todos os números reais x compreendidos entre eles:

$$[\, a\ ,\ b\,] = \{x \in \mathbb{R} \mid \ a \leq x \leq b\}.$$

As imagens geométricas dos intervalos acima descritos são segmentos de reta, com as extremidades no caso do intervalo fechado $[\, a\ ,\ b\,]$ e sem elas no caso do intervalo aberto $]\, a \,,\, b \,[$, como ilustra a Figura 4.2.

Figura 4.2: Intervalos fechado e aberto.

Podemos considerar intervalos que incluem apenas uma de suas extremidades. Trata-se dos intervalos semi-abertos (ou semi-fechados) apresentados na Figura 4.3.

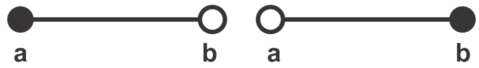

Figura 4.3: Intervalos semi-abertos (ou semi-fechados).

O da esquerda é o intervalo $[\, a \,,\, b \,[$, fechado em a e aberto em b; o da direita é o intervalo $]\, a \,,\, b \,]$, aberto em a e fechado em b; o da direita. Estes intervalos podem definir-se da seguinte forma:

$$[\, a \,,\, b \,[= \{x \in \mathbb{R} \mid \; a \leq x < b\}, \qquad]\, a \,,\, b \,] = \{x \in \mathbb{R} \mid \; a < x \leq b\}.$$

Além dos quatro tipos de intervalos que acima descritos, aos quais chamamos intervalos limitados, existem outros, ditos intervalos não limitados, em que as imagens geométricas são semi-retas ou a própria reta.

Dado um número real a, ficam determinados as duas semi-retas com origens fechadas $[\, a, \,+\infty \,[$ e $]\, -\infty \,,\, a \,]$ e as duas semi-retas com origens abertas $]\, a, \,+\infty \,[$ e $]\, -\infty \,,\, a \,[$, que são os subconjuntos de $\mathbb{R}$ definidos como:

$$[\, a \,,\, +\infty \,[= \; \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}, \qquad]-\infty \,,\, a \,] \; = \; \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\},$$

$$]\, a \,,\, +\infty \,[= \; \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, \qquad]-\infty \,,\, a \,[= \; \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

O símbolo, ∞ (infinito), que acima aparece, não é um número. A notação, por exemplo, $[\, a \,,\, +\infty \,[$ apenas sugere que no intervalo considerado existem números arbitrariamente “grandes”.

O conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais é também considerado um intervalo real; como tal, é indicado por $]-\infty \,, +\infty \,[$; trata-se da reta real.

O que caracteriza um intervalo real I qualquer é a seguinte

Propriedade 4.5.1. Se $x_1 \ , \ x_2 \in I$ e $x_1 < x < x_2$, então $x \in I$. Em outros termos: Se $x_1 \ , \ x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$, então $[\ x_1 \ , \ x_2 \ ] \subset I$.

Há situações problemas que teremos que considerar uniões, interseções e diferenças de subconjuntos de $\mathbb{R}$, em especial de intervalos. A representação geométrica desses subconjuntos, de forma usual, nos permite dar solução imediata a tais situações, como mostra o

Exemplo 4.5.1. Dados os intervalos $A = [-4 \ , \ 6\ ]$ e $B =]\ 1 \ , \ 9\ [$. Determinar:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - B$

d) $B - A$

e) $\mathcal{C}_A$

f) $\mathcal{C}_B$

g) $\mathcal{C}_{A \cup B}$

Representando os intervalos A e B na reta real, e destacando-os para melhor visualização, obtemos a Figura 4.4.

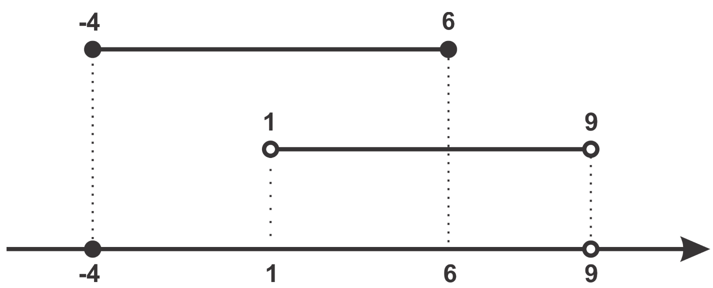

Figura 4.4: Operação com intervalos.

Podemos então concluir que:

$a)$ $A \cup B = [-4\ ,\ 9\ [$

$b)$ $A \cap B =]\ 1\ ,\ 6\ ]$

$c)$ $A - B = [-4\ ,\ 1\ ]$

$d)$ $B - A =]\ 6\ ,\ 9\ [$

$e)$ $\mathcal{C}_A\ =]-\infty\ ,\ -4\ [\ \cup\ ]\ 6\ ,\ +\infty\ [$

$f)$ $\mathcal{C}_B\ =]-\infty\ ,\ 1\ ]\ \cup\ [\ 9\ ,\ +\infty\ [$

$g)$ $\mathcal{C}_{A\cup B} =]-\infty\ ,\ -4\ [\ \cup\ [\ 9\ ,\ +\infty\ [$

4.6 Valor absoluto

De modo geral no tratamento de questões em nosso estudo, teremos que trabalhar com certa frequência com a noção de valor absoluto de um número real, assim segue a

Definição 4.6.1. O valor absoluto do número real x, que indicaremos por $\mid x \mid$, é o próprio número se ele é positivo ou zero, e é o simétrico do número se este é negativo. Em símbolos,

$$\mid x \mid = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Exemplos 4.6.1.

1.) $\mid 4 \mid = 4,$ **2.**) $\mid 0 \mid = 0,$ **3.**) $\mid -2 \mid = -(-2) = 2,$ **4.**) $\mid \sqrt{3} \mid = \sqrt{3},$

5.) $\mid \sqrt{2} - \pi \mid = -(\sqrt{2} - \pi) = \pi - \sqrt{2}.$

4.6.1 Propriedades do valor absoluto

Propriedade 4.6.1. $\mid x \mid \geq 0$, qualquer seja $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 4.6.2. $\mid x \mid = 0$, se, e somente se, $x = 0$.

Propriedade 4.6.3. $\mid x \mid = \mid -x \mid$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $x > 0$, então $\mid x \mid = x$; neste caso, $-x < 0$, em que

$$\mid -x \mid = -(-x) = x = \mid x \mid .$$

Se $x < 0$, então $\mid x \mid = -x$; neste caso, $-x > 0$, em que $\mid -x \mid = -x = \mid x \mid$.

Se $x = 0$, então $-x = 0$ e resulta $\mid -x \mid = 0 = \mid x \mid$.

$\blacksquare$

Propriedade 4.6.4. $- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. É fácil ver que se $x > 0$, então

$$- \mid x \mid < x = \mid x \mid;$$

se $x < 0$, então

$$- \mid x \mid < x = \mid x \mid;$$

por fim, se $x = 0$, então

$$- \mid x \mid = x = \mid x \mid .$$

Portanto, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid .$$

$\blacksquare$

Propriedade 4.6.5. $\mid x \mid^2 = x^2$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Se $x > 0$, então $\mid x \mid = x$; logo, $\mid x \mid^2 = x^2$.
Se $x < 0$, então $\mid x \mid = -x$; portanto, $\mid x \mid^2 = (-x)^2 = x^2$.
Se $x = 0$, $\mid x \mid = 0$ e é óbvio, então, que $\mid x \mid^2 = x^2 = 0$. $\blacksquare$

Propriedade 4.6.6. $\mid x \mid = \sqrt{x^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Vimos que se $a \geq 0$, então $\sqrt{a}$, é, por definição, o número $b \geq 0$, tal que $b^2 = a$. Assim, sabendo que $\mid x \mid \geq 0$ e que $\mid x \mid^2 = x^2$, segue-se que $\sqrt{x^2} = \mid x \mid$. $\blacksquare$

Propriedade 4.6.7. $| xy |=| x || y |$, para todo $x, \ y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. A prova é simples:

$$| xy |= \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} =| x || y | \ .$$

■

Propriedade 4.6.8. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{| x |}{| y |}$, para todo $x, \ y \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$.

A demonstração é análoga à da **Propriedade 4.6.7**.

Propriedade 4.6.9. $| x + y | \leq | x | + | y |$, para todo $x, \ y \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Para provar, partimos da igualdade

$$| x + y |^2 = (x + y)^2.$$

Desenvolvendo o segundo membro:

$$| x + y |^2 = x^2 + y^2 + 2xy = | x |^2 + | y |^2 + 2xy.$$

Lembrando que $xy \leq | xy |=| x || y |$, resulta:

$$| x + y |^2 = x^2 + y^2 + 2xy \ \leq \ | x |^2 + | y |^2 + 2 | x || y | \ .$$

ou seja:

$$| x + y |^2 \ \leq \ (| x | + | y |)^2.$$

Esta desigualdade equivale, como sabemos, a

$$| x + y | \ \leq | x | + | y | \ .$$

■

4.6.2 Distância na reta real

A noção de valor absoluto encontra aplicação no estudo da distância entre dois pontos da reta real. Sejam A e B dois pontos da reta, de coordenadas respectivas a e b, como mostra a Figura 4.5. A distância do ponto A ao ponto B, que designaremos por AB pode ser denifida como:

$$AB = \mid b - a \mid .$$

Figura 4.5: Distância entre dois pontos na reta.

Se P é o ponto de coordenada x, o valor absoluto do número x é a distância da origem ao ponto P:

$$\mid x \mid = \mid x - 0 \mid = OP.$$

4.6.3 Propriedades da distância na reta real

Se A, B, C são pontos quaisquer da reta, temos:

Propriedade 4.6.10. $AB \geq 0$ e $AB = 0$ se, e somente se, $A = B$.

Propriedade 4.6.11. $AB = BA$.

Esta propriedade nos dá a simetria da distância; ela nos permite falar na distância entre os pontos A e B, sem necessidade de referência à ordem desses pontos.

Propriedade 4.6.12. $AB + BC \geq AC$.

A interpretação do valor absoluto como distância pode, em alguns casos, trazer simplicidade e elegância à resolução de inequações. Os exercícios resolvidos que seguem vão ser enunciados e provados como propriedades.

Exercício resolvido 4.6.1. Provar que se $a > 0$, então

$$\mid x \mid < a \Longleftrightarrow -a < x < a.$$

Prova 1. Da desigualdade $\mid x \mid < a$ seguem a sequência de equivalências:

$$\Longleftrightarrow \mid x \mid < a \Longleftrightarrow \mid x \mid^2 < a^2 \Longleftrightarrow x^2 < a^2,$$

$$\Longleftrightarrow x^2 - a^2 < 0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a) < 0,$$

$$\Longleftrightarrow -a < x < a.$$

Do ponto vista geométrico, esse resultado é evidente, pois a desigualdade $\mid x \mid < a$ tem por solução todos os pontos P de coordenada x $(P \longleftrightarrow x)$ cuja distância à origem é menor que a, e tais pontos são evidentemente os que estão situados entre os pontos A' de coordenada $-a$ $(A' \longleftrightarrow -a)$ e o A de coordenada a $(A \longleftrightarrow a)$ como mostra a Figura 4.6.

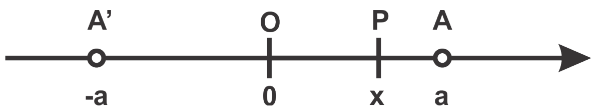

Figura 4.6: Desigualdade modular $\mid x \mid < a$.

Observação 4.6.1. De modo análogo, podemos demonstrar que se $a > 0$, então

$$\mid x \mid \leq a \quad \Longleftrightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

Exercício resolvido 4.6.2. Provar que se $a > 0$, então

$$\mid x \mid > a \quad \Longleftrightarrow \quad x < -a \quad \text{ou} \quad x > a.$$

Prova 2. A desigualdade $\mid x \mid > a$ equivale a $x^2 > a^2$ ou a $x^2 - a^2 > 0$, cuja solução é $x < -a$ ou $x > a$, como se verifica.

Geometricamente, como mostra a Figura 4.7, a desigualdade $\mid x \mid > a$ tem por soluções todos os pontos $P \longleftrightarrow x$ da reta, cuja distância à origem é maior que a, e esses pontos são evidentemente os que se situam à esquerda de $A \longleftrightarrow a$ ou a direita de $A' \longleftrightarrow -a$.

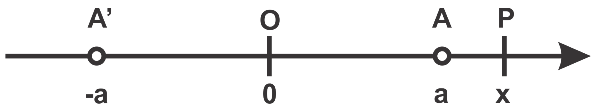

Figura 4.7: Desigualdade modular $\mid x \mid > a$.

Observação 4.6.2. Da mesma forma, prova-se que se $a > 0$, então

$$\mid x \mid \geq a \iff x \leq -a \qquad \text{ou} \qquad x \geq a.$$

Capítulo 5

Coordenadas cartesianas no plano

Preliminares

A ideia de associar a cada ponto da reta um número real, que é a coordenada (abscissa) do ponto, pode estender-se ao plano e a conjuntos ainda mais amplos. Essa ideia é de suma importância porque é o fundamento do método analítico para o estudo da geometria. No método analítico (ou cartesiano), as propriedades das figuras geométricas são estudadas por meio de relações entre os números que são as coordenadas dos pontos constitutivos de tais figuras.

5.1 O plano cartesiano

Consideremos no plano duas retas perpendiculares, uma horizontal $\overleftrightarrow{OX}$, outra vertical $\overleftrightarrow{OY}$, concorrentes no ponto O. Orientamos a horizontal $\overleftrightarrow{OX}$ positivamente da esquerda para a direita, e a vertical $\overleftrightarrow{OY}$ positivamente de baixo para cima, como mostra a Figura 5.1, os sentidos estão assinalados por setas. Adotemos a mesma unidade de comprimento $OU = 1$, nas duas retas, e tomemos o ponto O como origem comum. Está assim definido em cada uma das retas $\overleftrightarrow{OX}$, $\overleftrightarrow{OY}$.

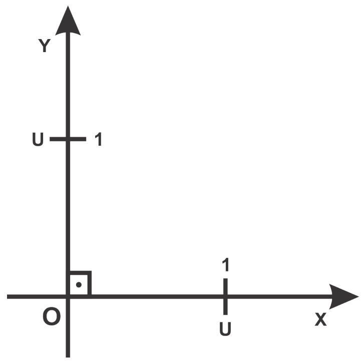

Figura 5.1: Plano Cartesiano.

Seja P um ponto qualquer do plano. As paralelas a $\overleftrightarrow{OY}$ e a $\overleftrightarrow{OX}$ conduzidas por P encontram $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$, respectivamente, nos pontos M e N. Seja x a abscissa de M em $\overleftrightarrow{OX}$, e seja y a ordenada de N em $\overleftrightarrow{OY}$. Podemos associar ao ponto P do plano o par ordenado $(x\ ,\ y)$ de números reais.

E vice-versa, dado um par ordenado $(x\ ,\ y)$ de números reais, seja M o ponto de abscissa x na reta $\overleftrightarrow{OX}$, e seja N o ponto de ordenada y da reta $\overleftrightarrow{OY}$. As paralelas a $\overleftrightarrow{OY}$ e a $\overleftrightarrow{OX}$, conduzimos respectivamente por M e N, cortam-se em um ponto P do plano, bem determinado. Ao par ordenado de números $(x\ ,\ y)$ façamos corresponder o ponto P, Figura 5.2.

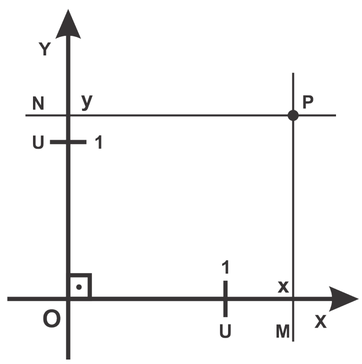

Figura 5.2: Um ponto no plano cartesiano.

Com a maneira descrita acima, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos P do plano e os pares ordenados $(x\ ,\ y)$ de números reais. Os números reais x e y dizem-se coordenadas (cartesianas) do ponto P. Para indicar que um ponto P tem coordenadas x e y escrevemos $P = (x\ ,\ y)$.

Observação 5.1.1. Se $x \neq y$ os pontos $P = (x\ ,\ y)$ e $Q = (y\ ,\ x)$ são distintos.

O ponto $O = (0\ ,\ 0)$, é a origem das coordenadas. A reta $\overleftrightarrow{OX}$ é o eixo das abscissas ou o eixo dos x, e todos os seus pontos têm ordenadas nula; a reta $\overleftrightarrow{OY}$ é o eixo das ordenadas ou eixo dos y, e todos os seus pontos têm abscissas nula. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, o ponto $X = (x\ ,\ 0)$ pertence ao eixo dos x, e qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, o ponto $Y = (0\ ,\ y)$ pertence ao eixo dos y.

Os eixos $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$, chamados eixos coordenados, dividem o plano em quatro ângulos retos aos quais chamamos 1º, 2º, 3º e 4º quadrantes, que estão assilados na Figura 5.3. Também estão indicados os sinais das coordenadas em cada quadrante.

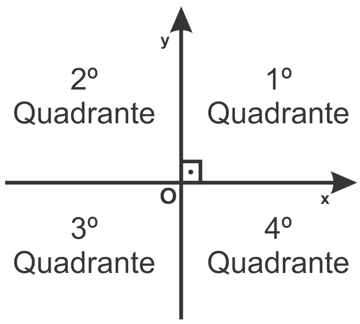

Figura 5.3: Regiões do plano cartesiano.

Observação 5.1.2. Faz-se necessário que familiarizemos com o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais no plano. Adquirimos prática não só em marcar na figura o ponto de coordenadas conhecidas, mas também em fazer o processo inverso, isto é; de uma figura dada, identificar as coordenadas de um ponto dado. Para isso, o emprego do papel quadriculado facilita muito esse trabalho.

5.1.1 Distância entre dois pontos do plano

No plano, referindo a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sejam $P = (x\ ,\ y)$ e $Q = (\bar{x}\ ,\ \bar{y})$ dois pontos quaisquer. Por esses pontos tracemos paralelas aos eixos coordenados e determinemos os pontos $P_1 = (x\ ,\ 0)$ e $Q_1 = (\bar{x}\ ,\ 0)$ no eixo dos x enquanto que $P_2 = (0\ ,\ y)$ e $Q_2 = (0\ ,\ \bar{y})$, no eixo dos y como mostra a Figura 5.4.

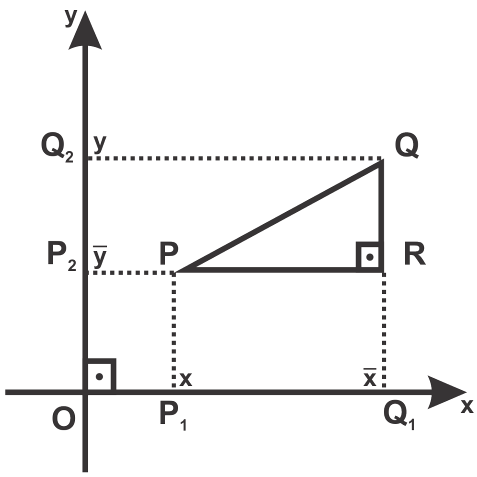

Figura 5.4: Distância entre dois pontos no plano cartesiano.

A distância ao ponto P ao ponto Q é a hipotenusa do triângulo retângulo PQR em que $R = (\bar{x}\ ,\ y)$ e, de acordo com o Teorema de Pitágoras, podemos escrever:

$$(PQ)^2 = (PR)^2 + (QR)^2.$$

Mas,

$$PR = P_1R_1 = \mid x - \bar{x} \mid\ , \quad QR = Q_2R_2 = \mid y - \bar{y} \mid\ .$$

Logo:

$$(PQ)^2 = \mid x - \bar{x} \mid^2 + \mid y - \bar{y} \mid^2$$

ou, de modo equivalente:

$$(PQ)^2 = (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2.$$

Portanto, a distância, do ponto P ao ponto Q é:

$$PQ = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}. \tag{5.1}$$

Em particular, a distância da origem $O = (0\ ,\ 0)$ ao ponto $P = (x\ ,\ y)$ é

$$OP = \sqrt{x^2\ +\ y^2}.$$

Exemplo 5.1.1. Se $P = (5\ , -4)$ e $Q = (-1\ ,\ 3)$, a distância PQ é

$$PQ = \sqrt{(5+1)^2 + (-4-3)^2}\ = \sqrt{85}.$$

5.1.2 Propriedades da distância entre dois pontos do plano

Vale ressalvar que a distância no plano possui as propriedades já estabelecidas para a distância na reta, a saber:

Se P, Q e R são os pontos de um plano, então:

Propriedades 5.1.1.

i) $PQ \geq 0 \quad \text{e} \quad PQ = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P = Q.$

ii) $PQ = QP.$

iii) $PQ + QR \geq PR.$ (Desigualdade triangular)

5.1.3 Simetria no plano

No plano, como se sabe, dois pontos P e P' dizem-se simétricos em relação à reta r quando esta reta é mediatriz do segmento $\overline{PP'}$, isto é, quando r é perpendicular a $\overline{PP'}$, conforme mostra a Figura 5.5. Nessas condições, também dizemos que cada um dos pontos P e P' é simétrico do outro relativamente à reta r.

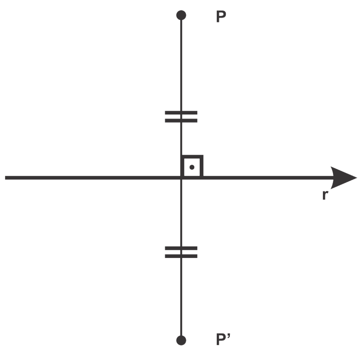

Figura 5.5: Simetria de um ponto relativa a uma reta.

Dois pontos Q e Q' são simétricos em relação ao ponto O quando esse é ponto médio do segmento $\overline{QQ'}$. Cada um dos pontos Q e Q' é simétrico do outro relativamente ao ponto O. Figura 5.6.

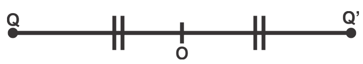

Figura 5.6: Simetria de um ponto relativo a outro ponto.

Consideremos um sistema cartesiano ortogonal de eixos $\overleftrightarrow{OX}$ e $\overleftrightarrow{OY}$ e seja $P = (x\ ,\ y)$ um ponto qualquer do plano. O simétrico de P em relação ao eixo dos y é o ponto $P_1 = (-x\ ,\ y)$. O simétrico de P relativamente ao eixo dos x é o ponto $P_2 = (x\ , -y)$. Enquanto que, o simétrico de P em relação à origem é $P_3 = (-x\ ,\ -y)$. Observa-se, conforme mostra a Figura 5.7, que P_3 é, ainda, o simétrico de P_2 relativamente ao eixo dos y, e é também o simétrico de P_1 em relação ao eixo dos x.

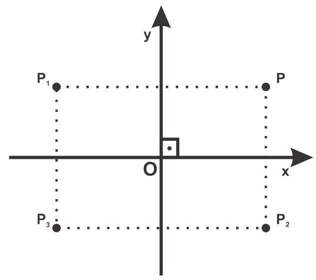

Figura 5.7: Simetria de um ponto relativo aos eixos x e y.

A Figura 5.7 mostra de forma clara que os quatro pontos P, P_1, P_2 e P_3 são os vétices de um retângulo de centro na origem do sistema cartesiano ortogonal e lados paralelos aos eixos coordenados.

Consideremos as bissetrizes dos quatro quadrantes de um sistema cartesiano ortogonal, como mostra a Figura 5.8. Elas determinam duas retas $\overleftrightarrow{OV}$ e $\overleftrightarrow{OW}$, perpendiculares entre si. A reta $\overleftrightarrow{OV}$ contém as bissetrizes dos 1º e 3º quadrantes, e $\overleftrightarrow{OW}$ contém as dos 2º e 4º quadrantes. Seja $Q = (x\ ,\ y)$ o ponto genérico do plano. Pode mostrar-se, por meio de considerações de geometria elementar, que o simétrico de Q em relação à reta $\overleftrightarrow{OV}$ é o ponto $R = (y\ ,\ x)$ e que o simétrico de Q relativamente à reta $\overleftrightarrow{OW}$ é o ponto $S = (-y\ ,\ -x)$.

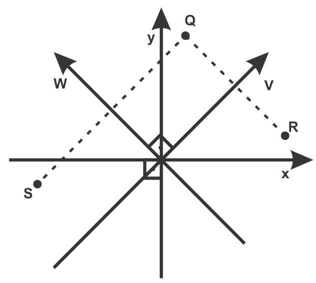

Figura 5.8: Simetria de um ponto relativo as bissetrizes dos eixos.

5.1.4 Razão e ponto médio de um segmento de reta

Consideremos um plano, munido de um sistema cartesiano ortogonal, uma reta r qualquer. Sejam $A = (x_1\ ,\ y_1)$ e $B = (x_2\ ,\ y_2)$ dois pontos distintos de r e seja M o ponto de r tal que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = k\ ,\ k \in \mathbb{R}.$$

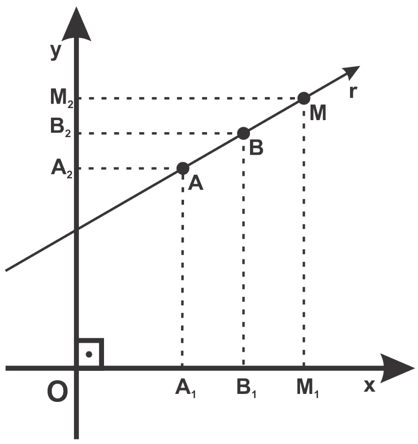

Figura 5.9: Ponto médio de um segmento de reta.

Determinemos as coordenadas x e y do ponto M. Sejam $A_1,\ B_1,\ M_1$ sobre o eixo dos x, como se vê na Figura 5.9. De acordo com o Teorema de Tales, temos:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{B_1M_1}}.$$

Portanto:

$$k = \frac{\overline{A_1M_1}}{\overline{B_1M_1}} = \frac{x - x_1}{x - x_2}\ .$$

Segue-se que

$$x - x_1\ =\ k(x - x_2) \qquad \text{donde} \qquad (1-k)x = x_1 - kx_2\ \cdot$$

Supondo que seja $k \neq 1$, podemos escrever:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1-k}\ \cdot$$

De modo análogo, projetando os pontos $A,\ B,\ M$ sobre o eixo dos y, podemos concluir que

$$y = \frac{y_1 - ky_2}{1-k}\ \cdot$$

Fazendo $k = -1$, M é o ponto médio do segmento AB e suas coordenadas são:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot$$

Capítulo 6

Funções e gráficos

Preliminares

O conceito de função é o fundamento em nosso estudo, e com ele já temos adquirido alguma familiaridade, mesmo de forma superficial, em nossos estudos no ensino fundamental e médio.

Quando buscamos na história da matemática, para Leibniz, o primeiro a utilizar a palavra função, e para os matemáticos de seu tempo, a ideia de uma relação funcional estava mais ou menos identificada com a existência de uma fórmula matemática simples expressando a natureza exata da relação. Este conceito, ao longo do tempo, provou ser excessivamente estreito para as exigências de outras ciências como por exemplo, a Física. E a ideia de função, juntamente com a noção relacionada de limite, foi submetido a um longo processo de generalização e esclarecimento.

6.1 Conceito de função

O conceito de função é da maior importância, não apenas na Matemática pura, mas também em aplicações práticas. Leis físicas nada mais são do que afirmações relativas à maneira como certas quantidades dependem de outras quando se permite que algumas destas variam. Recordemos tais ideias com alguns

Exemplos 6.1.1.

i) O tom da nota emitida por uma corda distendida de um instrumento musical depende, por exemplo, do comprimento da corda.

ii) A pressão da atmosfera depende da altitude.

iii) A energia de um projétil, mantendo sua massa constante, depende de sua velocidade.

iv) O comprimento de uma circunferência depende do raio; a cada valor do raio corresponde um comprimento da curva.

v) Um gás que é mantido em temperatura constante, o volume que ocupa depende da pressão sobre ele exercida; a cada valor da pressão corresponde um valor do volume.

vi) Se uma partícula em movimento está concentrada em um ponto do plano com coordenadas retangulares $(x\ ,\ y)$, e se t mede o tempo, então o movimento da partícula é completamente descrito dando-se suas coordenadas $(x\ ,\ y)$ como funções de t.

vii) A equação $y = x^2 + 4$, estabelece uma correspondência entre os valores das duas variáveis x e y; a cada valor valor real de x corresponde um valor real de y.

O aspecto comum que esses diversos exemplos apresentam é uma correspondência entre os valores de duas grandezas em que a cada valor que se pode admitir de uma dessas grandezas corresponde determinado valor da outra. Como os valores das diversas grandezas são expressas por números pertencentes a determinados conjuntos, a assinalada correspondência consiste em associar a cada número de um conjunto um número de outro conjunto. Dessa forma, chegamos ao moderno conceito de função, que se revelou fundamental para a Matemática como segue a

Definição 6.1.1. Dados A, $B \subseteq \mathcal{U}$, uma função com domínio A e campo de valores B é definida como sendo qualquer subconjunto f de $A \times B$ satisfazendo as condições:

i) todo $x \in A$ é a primeira coordenada de algum $(x\ ,\ y) \in f$;

ii) se $(x\ ,\ y_1)$ e $(x\ ,\ y_2)$ pertencem a f, então $y_1 = y_2$.

Observações 6.1.1.

O1) Admitiremos que uma função é um ente matemático que se compõe de três ingredientes, que são: dois conjuntos A e B (não necessariamente idênticos) e uma regra f que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$.

O2) Como dito na definição o conjunto A diz-se domínio da função e o conjunto B, campo de valores, também é conhecido como contradomínio. Indica-se a função por

$$f : A \longrightarrow B \qquad \text{ou} \qquad A \xrightarrow{f} B,$$

e é cômodo ilustrá-la por meio do seguinte diagrama da Figura 6.1.

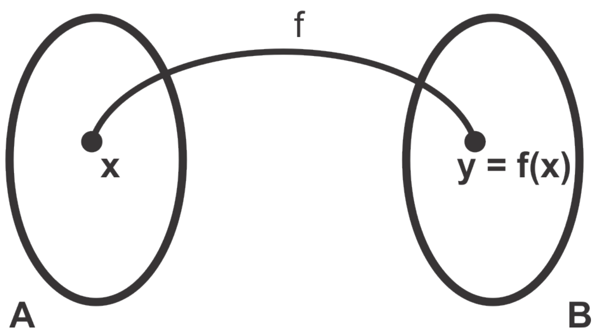

Figura 6.1: Função representada por diagrama.

O3) O elemento $y \in B$ que corresponde ao elemento $x \in A$ indica-se por $f(x)$ e se diz imagem de x pela função f, ou valor da função f no ponto x. O símbolo $f(x)$ lê-se: f de x.

O4) Todo $x \in A$ tem uma única imagem $y = f(x) \in B$, mas nem todo $z \in B$ é necessariamente imagem de algum $t \in A$. O subconjunto do contradomínio B formado pelos elementos que são imagens de elementos de A chama-se conjunto dos valores de f, ou imagem de f, e designa-se por $f(A)$.

Simbolicamente, podemos escrever:

$$f(A) = \{y \in B \mid y = f(x) \quad \text{para algum} \quad x \in C\}. \tag{6.1}$$

De modo mais geral, se $C \subset A$, a imagem de C pela função f é o conjunto

$$f(C) = \{y \in B \mid y = f(x) \quad \text{para algum} \quad x \in A\}. \tag{6.2}$$

A Figura 6.2 ilustra o conceito de imagem de um subconjunto do domínio de f.

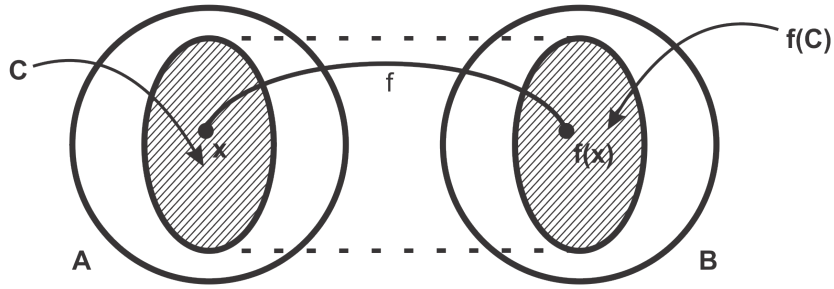

Figura 6.2: Imagem de um subconjunto do domínio de f.

Exemplo 6.1.1. Tomemos no plano uma circunferência e uma reta que passa pelo centro. Seja $\overline{PQ}$ o diâmetro que a reta determina, como ilustra a Figura 6.3.

Designemos por A o conjunto dos pontos da circunferência e por B o conjunto dos pontos da reta. A cada ponto $x \in A$ associamos a sua projeção ortogonal y sobre a reta $\overleftrightarrow{PQ}$. Obtemos, desse modo, uma função $g : A \longrightarrow B$. A imagem de g é obviamente o conjunto dos pontos do diâmetro $\overline{PQ}$. Observamos que cada ponto $t \in B$, situado entre P e Q, é imagem de dois pontos x_1 , $x_2 \in A$; por outro lado, cada ponto $z \in B$, situado fora do diâmetro $\overline{PQ}$, não é imagem de ponto algum de A.

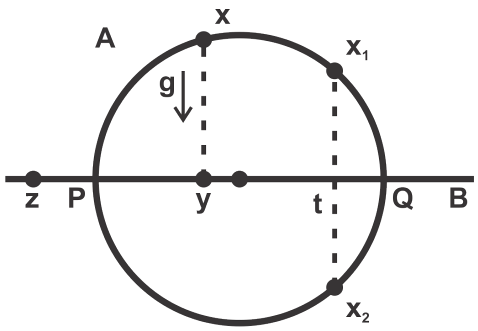

Figura 6.3: A circunferência A projetada sobre o diâmetro $\overline{PQ}$.

Exemplo 6.1.2. A cada número $x \in \mathbb{R}$ façamos corresponder o número real $y = x^2 \in \mathbb{R}$. Temos uma função

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{assim definida} \quad F(x) = x^2.$$

Observe-se que neste exemplo o domínio e o contradomínio de F coincidem. E ainda, verifica-se que a imagem ou o conjunto dos valores de F é $F(\mathbb{R}) = [\ 0,\ +\infty\ [$.

Observação 6.1.1. O que podemos verificar com os **Exemplos 6.1.1** e **6.1.2** apresentados é que se $f : A \longrightarrow B$ é uma função genérica, então:

i) todo $x \in A$ tem uma única imagem $y = f(x) \in B$;

ii) um elemento $y \in B$ pode ser imagem de um ou vários elementos de A, e também pode não ser imagem de elemento algum de A.

6.1.1 Funções sobrejetivas, injetivas e bijetivas

É comum empregarmos nomes especiais às funções cujos contradomínios coincidem com os seus valores, ou que associam valores distintos a elementos distintos do domínio, conforme mostra as seguintes definições.

Definição 6.1.2. Funções sobrejetivas - A função $f : A \longrightarrow B$ chama-se sobrejetiva se para todo $y \in B$ existe algum $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Segue-se daí que o conjunto dos valores de uma função sobrejetiva é o seu contradomínio: $f(A) = B$.

Definição 6.1.3. Funções injetivas - A função $f : A \longrightarrow B$ diz-se injetiva se a elementos distintos do domínio A associa elementos distintos do contradomínio B.

Portanto, se $f : A \longrightarrow B$ é injetiva, se $x_1,\ x_2 \in A$ e se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Definição 6.1.4. Funções bijetivas - A função $f : A \longrightarrow B$ é dita bijetiva quando é sobrejetiva e injetiva. Mais explicitamente, função $f : A \longrightarrow B$ é bijetiva se para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

6.1.2 Igualdade de funções e funções inversas

Definição 6.1.5. Duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$ são iguais se $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ qualquer que seja x no domínio comum.

Escrevemos então: $f = g$. Isso nos garante que, duas funções são iguais quando são a mesma função.

Definição 6.1.6. Funções inversas - Consideremos uma função bijetiva $f : A \longrightarrow B$. A cada elemento $y \in B$ associemos o único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Estamos definindo, desse modo, uma nova função $g : B \longrightarrow A$, a qual se diz função inversa de $f : A \longrightarrow B$. Se $y \in B$, então $g(y) = x$ se $f(x) = y$.

Observação 6.1.2. O domínio de g é contradomínio de f. Em vez de usar outra, tal como g, para indicar a inversa de uma função bijetora $f : A \longrightarrow B$, costumamos empregar o símbolo f^{-1}. Assim, para cada $y \in B$ temos f^{-1} se $f(x) = y$.

Observação 6.1.3. Se $f : A \longrightarrow B$ é bijetiva, a sua inversa é $f^{-1} : B \longrightarrow A$. É fácil ver que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemplo 6.1.3. Não é injetiva a função do **Exemplo 6.1.2**, a saber:

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = x^2.$$

Com efeito, ela assume o mesmo valor em pontos simétricos, pois $F(-x) = F(x)$. Por outro lado, os números reais negativos, que pertencem ao contradomínio de F não são valores da função, logo F não sobrejetiva.

Exemplo 6.1.4. Observemos que o conjunto dos valores (ou imagem) da função

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = x^2$$

é a semi-reta $[\ 0\ ,\ +\infty\ [$. Consideremos a função

$$G : \mathbb{R} \longrightarrow [\ 0\ ,\ +\infty\ [\ , \qquad G(x) = x^2.$$

É óbvio que G é sobrejetiva. Mas G não é injetiva; basta notar que

$$G(-x) = G(x) = x^2.$$

Exemplo 6.1.5. Tomemos a função

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = x^2$$

e imaginemos que a função F seja aplicada apenas aos elementos do subconjunto $]-\infty\ ,\ 0\ ]$ do seu domínio. Obtemos, assim, a função

$$H :]-\infty\ ,\ 0\ ] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad H(x) = x^2.$$

Dizemos que esta função H é a restrição de F ao subconjunto $]-\infty\ ,\ 0\ ]$ do seu domínio. Notemos que a função H é injetiva, pois temos:

$$x_1 < x_2 \leq 0 \Longrightarrow x_1^2 > x_2^2, \quad \text{donde} \quad H(x_1) \neq H(x_2).$$

É claro que a função H não é sobrejetiva, pois os números negativos pertencem ao seu contradomínio e não são valores da função.

Exemplo 6.1.6. Agora, consideremos a função

$$\Phi :]-\infty\ ,\ 0\ ] \longrightarrow [\ 0\ ,\ +\infty\ [\ , \qquad \Phi(x) = x^2,$$

obtida a partir da função H do **Exemplo 6.1.5**, tomando-se como contradomínio o conjunto dos valores da função. É evidente que Φ é uma função bijetiva. Para cada $y \geq 0$ existe um único $x \leq 0$ tal que $\Phi(x) = x^2 = y$. Por ser bijetiva, a Φ admite inversa. E sua inversa é a função

$$\Phi^{-1} : [\ 0\ ,\ +\infty\ [\ \longrightarrow\ ]-\infty\ ,\ 0\ ], \qquad \Phi^{-1}(y) = -\sqrt{y}.$$

6.1.3 Funções reais de variável real

Consideremos o conjunto universo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Sejam os conjuntos A e B tais que $A,\ B \subseteq \mathbb{R}$ e uma função $f : A \longrightarrow B$. A cada $x \in A$ corresponde determinado $y \in B$ e costumamos escrever: $y = f(x)$. Esta equação exprime a regra que define a função. O símbolo x, que representa qualquer elemento do domínio A, chama-se variável independente. O símbolo y é também uma variável, pois pode representar diversos elementos do conjunto B; como o valor de y depende do valor de x. Assim, o substantivo função encontra emprego também com caráter de adjetivo. É esse modo de dizer que usamos quando, por exemplo, afirmamos que "*a área de um disco é função do raio*", ou que "*o volume de um cubo é função da artesta*".

Podemos considerar as funções de maneira muito geral, pois o domínio e o contradomínio podem ser conjuntos quaisquer. As funções das quais trataremos mais especialmente neste trabalho são mais particulares -, são as chamadas funções reais de variável real. Tais funções são as do tipo $f : A \longrightarrow B$, onde A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Exemplo 6.1.7. Dada a função $f :]\ 0\ ,\ +\infty\ [\longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x + \dfrac{1}{x} \cdot$ A função f não é injetiva, pois temos

$$f(a) = f(\frac{1}{a})$$

qualquer que seja $a > 0$. Também não é sobrejetiva, pois o contradomínio $\mathbb{R}$ contém pontos que não são valores de f.

Exemplo 6.1.8. $g : [\ 0\ ,\ +\infty\ [\longrightarrow [-1\ ,\ +\infty\ [\ ,\quad g(x) = x^2 - 4x + 3$. A função g é de um tipo que temos nos deparado desde o ensino médio, é um polinômio de 2º grau. Mostremos que se $x \in [\ 0\ , +\infty\ [$ então

$$g(x) = x^2 - 4x + 3 \in [-1\ ,\ +\infty\ [\ .$$

De fato, a desigualdade

$$x^2 - 4x + 3 \geq -1$$

equivale a

$$x^2 - 4x + 4 \geq 0, \quad \text{ou ainda a} \quad (x-2)^2 \geq 0.$$

Esta última é verdadeira para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular para todo $x \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$.

Agora, examinemos se g é sobrejetiva e se é injetiva. Seja $y \geq -1$ um elemento qualquer do contradomínio de g. Escrevendo $g(x) = y$, resulta:

$$x^2 - 4x + 3 = y, \quad \text{donde} \quad x^2 - 4x + (3 - y) = 0.$$

Resolvendo em relação a x, encontramos:

$$x = 2 \pm \sqrt{y+1}.$$

Separando as raízes:

$$x_1 = 2 + \sqrt{y+1}, \qquad x_2 = 2 - \sqrt{y+1}.$$

Como $y+1 \geq 0$, teremos sempre $x_1 > 0$; lembrando que $g(x_1) = y$, concluímos que todo ponto do contradomínio. Em outros termos, g é sobrejetiva.

Por outro lado, se $-1 < y < 3$, então $0 < y+1 < 4$, donde $0 < \sqrt{y+1} < 2$; neste caso, teremos também $x_2 > 0$. Haverá então dois pontos x_1 e x_2 no domínio de g tais que $g(x_1) = g(x_2) = y$. Concluímos que a função g não é injetiva.

Exemplo 6.1.9. $h : [\,3\,,\,6\,[\ \longrightarrow\ ]-4\,,\,5\,], \qquad h(x) = 14 - 3x.$

Mostremos que, de fato, a função h definida pela regra

$$h(x) = 14 - 3x$$

aplicada aos pontos do intervalo $[\,3\,,\,6\,[$ em pontos do intervalo $]-4\,,\,5\,]$:

$$x \in [\,3\,,\,6\,[\iff 3 \leq x < 6 \iff -9 \geq -3x > -18$$

$$\iff -18 < -3x \leq -9 \iff -4 < 14 - 3x \leq 5$$

$$\iff -4 < h(x) \leq 5 \iff h(x) \in\ ]-4\,,\,5\,].$$

Vamos provar que h é função bijetiva. Seja $y \in\ ]-4\,,\,5\,]$. Escrevendo $h(x) = y$, resulta:

$$14 - 3x = y, \qquad \text{donde} \qquad x = \frac{1}{3} \cdot (14 - y).$$

É fácil ver que o ponto x assim encontrado pertence ao domínio de h. Com efeito:

$$y \in\ ]-4\,,\,5\,] \iff -4 < y \leq 5 \iff 4 > -y \geq -5$$

$$\iff -5 \leq -y \leq 4 \iff 9 \leq 14 - y < 18 \iff 3 \leq \frac{1}{3} \cdot (14 - y) < 6,$$

isto é: $3 \leq x < 6$, $\quad x \in [\,3\,,\,6\,[$. Demonstramos, assim, que todo ponto do contradomínio de h é a imagem de um e um só ponto do domínio. A função inversa de h é:

$$h^{-1} :]-4\,,\,5\,] \longrightarrow [\,3\,,\,6\,[\,, \qquad h^{-1}(y) = \frac{1}{3} \cdot (14 - y).$$

Exemplo 6.1.10. $F : \mathbb{R} \longrightarrow [\,0\,,\,+\infty\,[\,, \qquad F(x) = |\,x\,|\,.$

A cada número real essa função associa o seu valor absoluto. Recordando a definição do valor absoluto, podemos também escrever:

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Qualquer que seja $y \in [\ 0\ ,\ +\infty\ [$, temos

$$y = \mid y \mid = F(y),$$

portanto, F é sobrejetiva. Por outro lado, F não é injetiva, pois pode assumir o mesmo valor em pontos distintos do seu domínio; com efeito, se $x \neq 0$ temos $-x \neq x$, mas

$$F(-x) = \mid -x \mid = \mid x \mid = F(x).$$

Exemplo 6.1.11. $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela seguinte regra:

$$G(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

O conjunto dos valores de G é $\{-1,\ 0,\ 1\}$. É claro que G não é injetiva, nem sobrejetiva.

Exemplo 6.1.12. $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida:

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \quad \text{racional} \\ 0, & \text{se} \quad x \quad \text{irracional}. \end{cases}$$

O conjunto dos valores de α é $\{0,\ 1\}$. É claro que α não é injetiva, nem sobrejetiva.

Observação 6.1.4. Frequetemente, a regra que define uma função real de variável real se exprime em termos das conhecidas operações aritméticas, isto é, o valor de

$f(x)$ que a função assume em um número x do seu domínio é encontrado efetuando tais operações com o número x. Vejamos a função do

Exemplo 6.1.13.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 5}$$

O valor dessa função no ponto $x = -4$ é calculado da seguinte forma:

$$f(-4) = \sqrt[3]{(-4)^2 + 3(-4) - 5} = \sqrt[3]{16 - 12 - 5} = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Observação 6.1.5. Do **Exemplo 6.1.8** ao **Exemplo 6.1.13** é evidenciado que, esse não é o único modo definir funções, e que uma função pode definir-se por meio de regras completamente arbitrárias, como os **Exemplos 6.1.11** e **6.1.12**. O que é importante e essencial no conceito de função é que a regra que define não admite exceções, nem ambiguidade; não pode haver ponto do domínio que não tenha imagem, nem ponto do domínio que tenha mais de uma imagem; a cada x do domínio há de corresponder com um e um só $y = f(x)$ no contradomínio.

Observação 6.1.6. Há casos em que o domínio de uma função é determinado pelas condições inerentes ao problema que se quer estudar. Consideremos, por

Exemplo 6.1.14. A regra F que associa a cada $x \in \mathbb{R}$ ao número real $x - x^2$, isto é:

$$F(x) = x - x^2.$$

Posta nesses termos, a função F tem por domínio o conjunto $\mathbb{R}$ de todos os números reais.

Consideremos, agora, o conjunto dos retângulos de perímetro 2. Se x é a base e y a largura do retângulo genérico desse conjunto, devemos ter:

$$2x + 2y = 2, \qquad \text{donde} \qquad y = 1 - x.$$

A área desse retângulo é

$$xy = x(1 - y) = x - x^2.$$

Seja S a função que associa ao número x, medida da base do retângulo, o número $x - x^2$, medida da área do mesmo retângulo, isto é:

$$S(x) = x - x^2.$$

Para que x seja a medida da base de retângulo de perímetro 2, claro que deve ser $0 < x < 1$. Portanto, o domínio da função S é o intervalo aberto $]\,0\,,\,1\,[$.

Então, podemos observar que, as duas funções F e S citadas acima se exprimem pela mesma fórmula:

$$F(x) = x - x^2 \qquad \text{e} \qquad S(x) = x - x^2.$$

Tendo em vista a interpretação concreta dada a $S(x)$ como área de um retângulo de perímetro 2 e de base x, a função S só está definida para $0 < x < 1$, enquanto a F é definida para todo x real. É claro que as funções F e S não podem ser consideradas iguais. Como o domínio da S está contido no da F, costumamos dizer que a função S é a restrição da F ao intervalo $]\,0\,,\,1\,[$.

Observação 6.1.7. Ao lidar com as funções reais de variável real, muitas vezes definiremos uma função apresentando apenas o seu valor $f(x)$ no ponto genérico, sem mensão explícita deste. Em tal caso, o domínio que estaremos considerando será o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ nos pontos do qual o valor $f(x)$ seja um número real bem definido. Nessas condições, é possível procurar o domínio da função f a partir do conhecimento do seu valor genérico $f(x)$.

Exemplo 6.1.15. Qual é o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{2-x}} \cdot$$

Para que $f(x)$ seja um número real, devemos ter:

$$x + 1 \geq 0 \qquad \text{e} \qquad 2 - x > 0,$$

ou seja: $x \geq -1$ e $x < 2$. Assim, o mais amplo domínio possível para a função f é o conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\} = [-1\,,\,2\,[\,.$$

Exemplo 6.1.16. Quando nos referimos a função $x^2 - x + 4$, estamos tratando da função real F cujo valor no ponto genérico x é o número

$$F(x) = x^2 - x + 4.$$

O domínio de F é o conjunto $\mathbb{R}$, pois qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, a expressão $x^2 - x + 4$ nos dá um número real perfeitamente determinado.

6.1.4 Funções constantes

A função constante que definiremos a seguir explicita um tipo extremamente útil de função, bem como, as condições impostas na definição de função são plenamente satisfeitas. No caso geral vem a

Definição 6.1.7. Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se constante quando associa a todo elemento do domínio o mesmo elemento do contradomínio. Em símbolos,

$$f(x) = c, \quad c \in B, \quad \text{para todo } \ x \in A.$$

O conjunto dos valores de uma função constante reduz-se a um ponto: $f(A) = \{c\}$.

No caso em que $A = B = \mathbb{R}$ segue a

Definição 6.1.8. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se constante quando assume o mesmo valor em todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 6.1.17. É uma função constante a $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida: $f(x) = 3$. O conjunto dos valores dessa função se reduz a $\{3\}$.

Observação 6.1.8. Uma importante função constante é a função que assume o valor 0 em todo $x \in \mathbb{R}$. Essa função costuma ser chamada função identicamente nula, ou mais simplesmente função zero. Podemos indicá-la com o símbolo 0, de maneira que temos a

Definição 6.1.9. $0(x) = 0 \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$

É comum encontrarmos funções constantes definidas em determinados intervalos. Como seguem os exemplos.

Exemplo 6.1.18. $F :]\,1\;,\;4\,[\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F(x) = 5.$

Exemplo 6.1.19. Seja a função $G :]\,1\;,\;4\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$G(x) = \begin{cases} 2, & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ 4, & \text{se} \quad 2 \leq x < 4. \end{cases}$$

Essa função não é constante, pois o seu conjunto de valores é $\{2,\ 4\}$.

6.1.5 Gráfico de uma função

Podemos dar às funções reais de variável real uma representação gráfica que costuma ser útil no estudo das propriedades dessas funções.

Seja a função $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}$. Para cada $x \in A$, consideramos no plano, munido com um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, o ponto P de abscissa x e ordenada $y = f(x)$. O conjunto de todos os pontos P assim obtidos é o chamado gráfico da função f. Em linguagem de conjuntos, o gráfico da função f é o conjunto

$$G = \{(x\;,\;y) \in \mathbb{R}^2 \;\mid x \in A \;\text{ e }\; y = f(x)\}.$$

O gráfico de f permite-nos, de certo modo, visualizar a função, e perceber o seu comportamento. O gráfico pode sugerir, mesmo de forma intuitiva, propriedades da função.

No processo de construção do gráfico de uma função, podemos determinar os valores desta em vários pontos do domínio e, em seguida, marcar os pontos correspondentes. Para esse trabalho, um recurso didático muito cômodo é o emprego do papel quadriculado. Nos casos mais comuns que, lidamos desde o ensino fundamental e médio, o gráfico é uma curva do plano, a qual pode ser esboçada com certa perfeição tanto maior, quanto maior o número de pontos utilizados e quanto mais próximo estiverem entre si. Os valores de x e os correspondentes de $y = f(x)$ podem ser dispostos em forma de tabela, como veremos nos exemplos que se seguem.

Exemplo 6.1.20. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x + 2$.

Calculando os valores da função em alguns pontos do seu domínio, escolhidos de forma arbitrária, podemos organizar a seguinte tabela

x	-6	-3	0	3	6	9
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

Essa tabela indica que os pontos:

$A = (-6\ ,\ 0)$, $B = (-3,\ 1)$, $C = (\ 0\ ,\ 2)$, $D = (3\ ,\ 3)$, $E = (6\ ,\ 4)$ e $F = (9\ ,\ 5)$, etc.,

pertencem ao gráfico de f. Marcando no papel quadriculado, como podemos ver a Figura 6.4. Verificamos que tais pontos estão sensivelmente em linha reta. Esta reta, como mostraremos mais adiante, é o gráfico da função considerada.

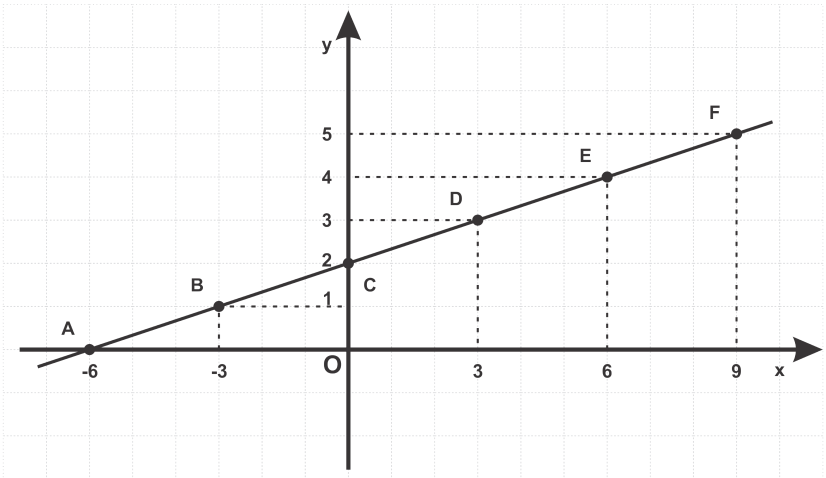

Figura 6.4: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x + 2$.

Exemplo 6.1.21. $g : [-4\ ,\ 4\ ] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\qquad g(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Atribuindo à variável x valores tais que $-4 \leq x \leq 4$, podemos obter a tabela

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	0	$\sqrt{7}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{15}$	0	$\sqrt{15}$	$\sqrt{12}$	$\sqrt{7}$	0

a qual indica que os pontos:

$A = (-4,\ 0)$, $B = (-3,\ \sqrt{7})$, $C = (-2,\ \sqrt{12})$, $D = (-1,\ \sqrt{15})$, $E = (0\ ,\ 4)$,

$$F = (\ 1\ ,\ \sqrt{15}), \quad G = (-2,\ \sqrt{12}), \quad H = (3\ ,\ \sqrt{7}) \quad \text{e} \quad I = (4\ ,\ 0), \qquad \text{etc.}$$

pertencem ao gráfico de g.

Marcando esses pontos, temos a "impressão" de que todos eles pertence a uma semi-circunferência de centro na origem. De fato, podemos verificar que todos estão à distância 4 da origem. Seja $P = (x\ ,\ g(x))$, onde $-4 \leq x \leq 4$, o ponto genérico do gráfico; a distância desse ponto à origem é:

$$OP = \sqrt{x^2 + [g(x)]^2} = \sqrt{x^2 + 16 - x^2} = 4.$$

Podemos concluir, sem dificuldade, que o gráfico de g é a semi-circunferência de centro O e raio 4 situado acima do eixo das abscissas, conforme a Figura 6.5.

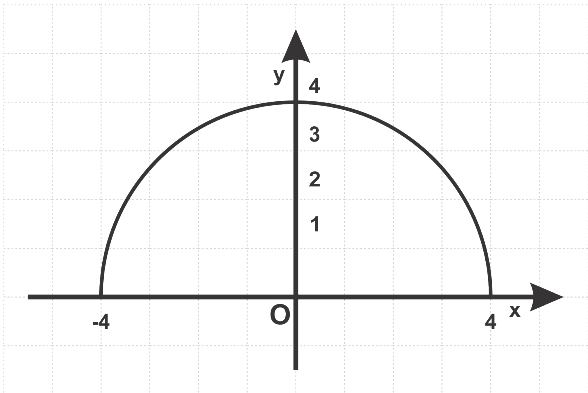

Figura 6.5: Gráfico da função $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Exemplo 6.1.22. $h : [-4\ ,\ 4\ ] \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad h(x) = -\sqrt{16 - x^2}.$

O gráfico é também uma semi-circunferência de centro na origem e raio 4, porém situada abaixo do eixo das abscissas.

Exemplo 6.1.23. $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad I(x) = x.$

Como veremos na **Definição 6.1.11** tratar-se-a da função idêntica. O seu gráfico é constrituído de todos os pontos $P = (x\ ,\ I(x)) = (x\ ,\ x)$. Tal gráfico é a reta suporte das bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes, como mostra a Figura 6.6.

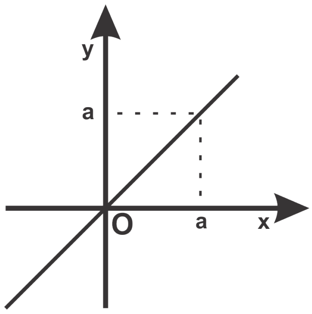

Figura 6.6: Gráfico da função $f(x) = x$.

Exemplo 6.1.24. $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad J(x) = -x.$

O gráfico dessa função é o conjunto dos pontos $P = (x\ , J(x)) = (x\ , -x)$; é a reta suporte das bissetrizes do 2º e do 4º quadrantes, mostrada na Figura 6.7.

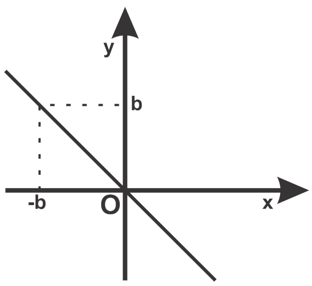

Figura 6.7: Gráfico da função $f(x) = -x$.

Exemplo 6.1.25. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = 3.$

É uma função constante. O seu gráfico, Figura 6.8, é o conjunto dos pontos $P = (x\ ,\ f(x)) = (x\ ,\ 3)$, os quais, tendo a mesma ordenada, estão situadas em uma reta paralela ao eixo dos x.

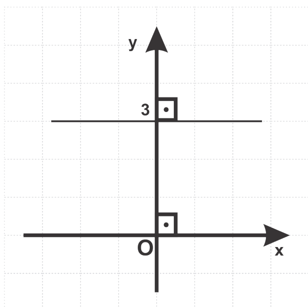

Figura 6.8: Gráfico da função $f(x) = 3$.

Exemplo 6.1.26. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = \mid x \mid .$

Seja $P = (\ x\ ,\ g(x))$ ponto um genérico do gráfico de g. De acordo com a definição do valor absoluto, se $x \geq 0$ tal ponto é $P = (x\ ,\ x)$, pertence à bissetriz do 1º quadrante, e se $x < 0$ o ponto é $P = (x\ , -x)$, pertencente à bissetriz do 2º quadrante. O gráfico da função $\mid x \mid$ é, pois, a linha formada pelas duas mencionadas bissetrizes, ilustrada na Figura 6.9.

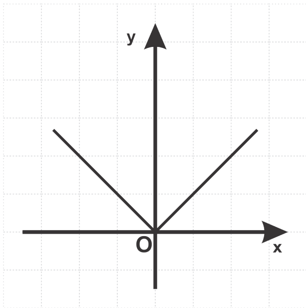

Figura 6.9: Gráfico da função $f(x) = \mid x \mid .$

Exemplo 6.1.27. $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida :

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ -1, & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

O gráfico da função s é formado pela origem $O = (0\ ,\ 0)$, pelos pontos $P = (x\ , 1)$, onde $x > 0$, e pelos pontos $Q = (x\ , -1)$, onde $x < 0$. Tal gráfico compõe de duas semi-retas horizontais abertas e do ponto isolado O. Veja o gráfico na Figura 6.10.

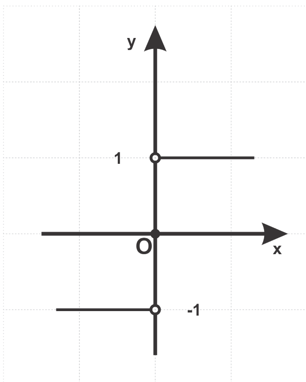

Figura 6.10: Gráfico da função $s(x) = 1, \quad \text{se } x > 0, s(x) = 0, \quad \text{se } x = 0, s(x) = -1, \quad \text{se } x < 0.$

Exemplo 6.1.28. $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida pela regra :

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Não é possível esboçar o gráfico da função α. Porém, a ideia dos pontos deste gráfico da função α é dos pontos $P = (x\ ,\ 1)$, onde $x \in \mathbb{Q}$ e todos os pontos $Q = (x\ ,\ 0)$, onde $x \in \mathcal{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Exemplo 6.1.29. $f : [\ 0\ ,\ 8\ ] \longrightarrow \mathbb{R}$, assim definida :

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{se} \quad 2 < x \leq 4 \\ x, & \text{se} \quad 4 < x \leq 6 \\ 2, & \text{se} \quad 6 < x \leq 8. \end{cases}$$

O gráfico de f está ilustrado na Figura 6.11. Observe-se que o conjunto dos valores de f, que se obtém projetando o gráfico sobre o eixo dos y, é o conjunto $[-2\ ,\ 0\ ]\ \cup\ \{\ 2\ \} \cup\ ]\ 4\ ,\ 6\ ]$.

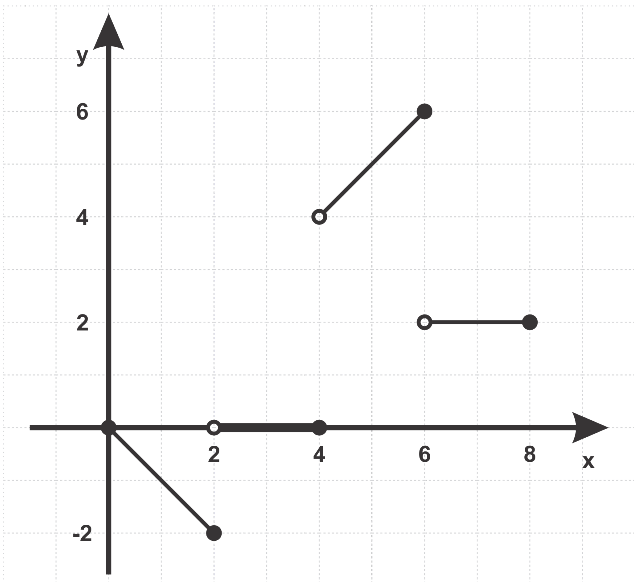

Figura 6.11: Gráfico da função $f(x) = -x,\ x \in [0\ ,\ 2],\ \ldots, f(x) = 2,\ x \in [6\ ,\ 8]$.

Exemplo 6.1.30. $\Phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Phi(x) = x^2$.

Calculando os valores da função em vários pontos, podemos formar a seguinte tabela:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\Phi(x)$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Marcando no papel quadriculado os pontos $O = (0\ ,\ 0)$, $A = (1\ ,\ 1)$, $B = (2\ ,\ 4)$, $C = (3\ ,\ 9)$, etc. e ligando-os por um traço contínuo, obtemos a curva da Figura 6.12. Tal curva se chama parábola, que será tratada na **Subseção 6.1.11**.

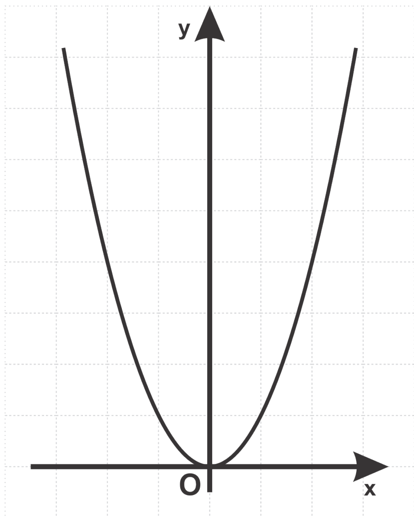

Figura 6.12: Gráfico da função $\Phi(x) = x^2$.

Exemplo 6.1.31. A função de proporcionalidade inversa é a função

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Para cada $x > 0$, o ponto $P = \left(x\ ,\ \dfrac{1}{x}\right)$ pertence ao gráfico de f. Marcando no papel quadriculado os pontos correspondentes a

$$x = 1,\ x = 2,\ x = 3,\ x = \frac{1}{2},\ \text{etc. },$$

e ligando-os por um traço contínuo, obtemos a parte do gráfico correspondente a $x > 0$.

Observamos que $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$. Portanto, se $(x\ ,\ y)$ é ponto do gráfico, então $(-x\ , -y)$ também é; quer isso dizer que a origem de coordenadas é centro de simetria do gráfico. Usando essa observação, podemos desenhar a parte do gráfico correspondente a $x < 0$. O gráfico completo, Figura 6.13, é uma curva chamada hipérbole.

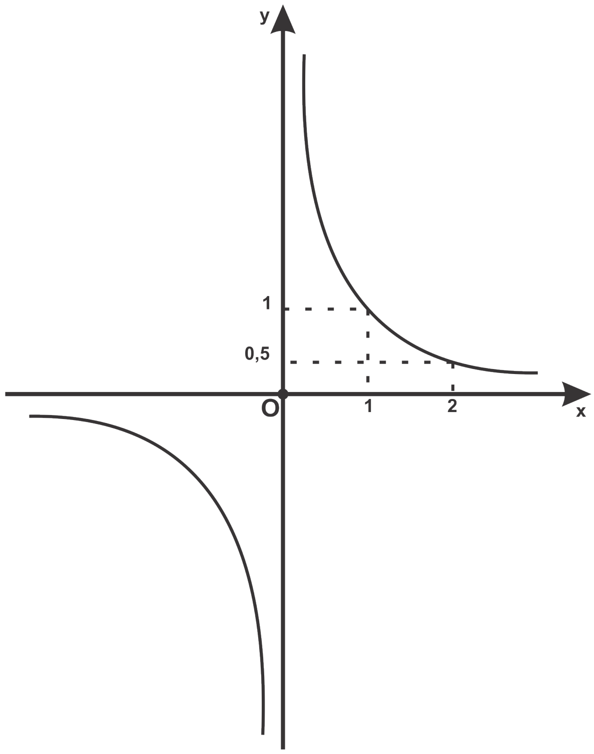

Figura 6.13: Gráfico da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

6.1.6 A função linear

Definição 6.1.10. Chamamos função linear a toda função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax,$$

onde a é uma constante real.

Exemplos 6.1.2. São funções lineares:

$$f(x) = 3x, \qquad g(x) = -4x, \qquad h(x) = \sqrt{2}x, \qquad 0(x) = 0.$$

Observação 6.1.9. Como podemos ver, a função zero é linear.

A função linear possui as seguintes

Propriedades 6.1.1. Se a função linear $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, então

i) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

ii) $f(kx) = k.f(x)$.

Demonstração. Sendo $f(x) = ax$, resulta:

i) $f(x_1 + x_2) = a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2 = f(x_1) + f(x_2)$.

ii) $f(kx) = a(kx) = (ak)x = k(ax) = k.f(x)$. ■

Observação 6.1.10. Empregamos na demonstração das **Propriedades 6.1.1** as propriedades; associatividade e a comutatividade da multiplicação de números reais, bem como a distribitividade da multiplicação relativamente à adição. Essas propriedades caracterizam a linearidade da função. De fato, se $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função que tem tais propriedades, podemos escrever:

$$f(x) = f(x.1) = x.f(1).$$

Se $f(1) = a$, segue-se que

$$f(x) = ax$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f é linear.

Propriedade 6.1.1. A função linear

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax, \qquad a \neq 0$$

é bijetiva.

Demonstração. Se $f(x_1) = f(x_2)$, isto é, se $ax_1 = ax_2$, onde $a \neq 0$, então $x_1 = x_2$; logo, f é injetiva. Por outro lado, dado $y \in \mathbb{R}$, seja $x = a^{-1}y$. Temos:

$$f(x) = f(a^{-1}y) = a(a^{-1}y) = (aa^{-1})y = 1y = y.$$

Logo, f é também sobrejetiva. ■

Observação 6.1.11. A **Propriedade 6.1.1** nos permite concluir que f admite inversa. A função inversa de f é

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = a^{-1}y,$$

e é fácil ver que f^{-1} é também linear.

Uma função interessante, é a chamada função idêntica, que é um caso particular da função linear, basta tomar $a = 1$ na **Definição 6.1.10**, agora segue a

Definição 6.1.11. $I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad I(x) = x.$

Essa função é evidentemente bijetiva, e a sua inversa é obviamente a mesma função: $I^{-1} = I$.

6.1.7 Proporcionalidade

É por meio da função linear que se exprime a ideia de proporcionalidade. Sejam X e Y duas grandezas e suponhamos que cada quantidade x da primeira corresponda a uma quantidade y a da segunda. Assim segue a

Definição 6.1.12. Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots$ quantidades quaisquer da grandeza X, e $y_1, y_2, y_3, \ldots$ as quantidades correspondentes respectivas da grandeza Y. Dizemos que as duas grandezas são diretamente proporcionais se temos:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3} = \cdots = \text{constante} = a.$$

Nessas condições: $y_1 = ax_1,\ y_2 = ax_2,\ y_3 = ax_3, \ldots$. A proporcionalidade entre as duas grandezas consideradas é, pois, traduzida pela função linear

$$y = ax.$$

6.1.8 Gráfico da função linear. Inclinação

Estudaremos o gráfico da função linear $y = f(x) = ax$. Por ser $f(1) = a$, podemos concluir que o ponto $A = (1\ ,\ a)$ pertence ao gráfico de f.

Seja $P = (x\ ,\ f(x)) = (x\ ,\ ax)$ o ponto genérico do gráfico. Indiquemos por A_1 e P_1 as projeções dos pontos A e P sobre o eixo dos x, isto é: $A_1 = (1\ ,\ 0)$, $P_1 = (x\ ,\ 0)$, conforme mostra a Figura 6.14. Consideremos os triângulos OP_1P e OA_1A, retângulos em P_1 e A_1, respectivamente. Temos: $\overline{P_1P} = a \cdot \overline{OP_1}$ e $\overline{A_1A} = a \cdot \overline{OA_1}$. Portanto:

$$\frac{\overline{P_1P}}{\overline{A_1A}} = \frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}} \tag{6.3}$$

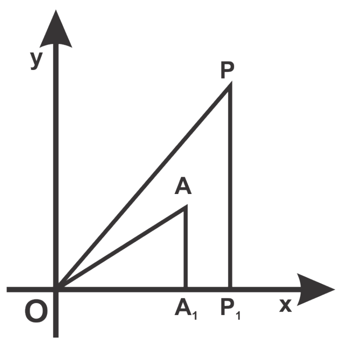

Figura 6.14: Gráfico da função $f(x) = ax$.

Segue-se da igualdade (6.3) que os triângulos retângulos OP_1P e OA_1A são semelhantes, em que resulta $P_1\hat{O}P = A_1\hat{O}A$. Portanto, os três pontos O, A e P estão situados em linha reta. Em outros termos, todos os pontos do gráfico da função linear f pertencem à reta $\overleftrightarrow{OA}$. E ainda, verifica-se que todo ponto da reta $\overleftrightarrow{OA}$ pertence ao gráfico de f. Concluímos que o gráfico de f é a reta $\overleftrightarrow{OA}$. Assim, toda função linear tem por gráfico uma reta r que passa pela origem.

Se $P = (x\ ,\ y)$ é um ponto da reta r, de acordo com a Figura 6.15, temos

$$y = f(x) = ax, \quad \text{donde} \quad \frac{y}{x} = a, \quad \text{ou seja} \quad \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP_1}} = a.$$

Sabemos que $\dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{OP_1}} = \text{tg}\ \alpha$, onde α é ângulo que a reta r forma com o eixo dos x. Portanto,

$$a = \text{tg}\ \alpha.$$

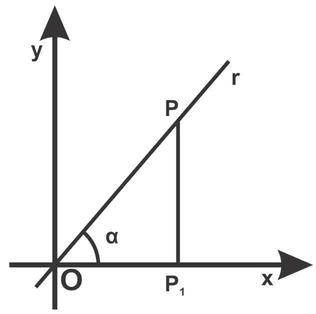

Figura 6.15: A inclinação: $a = \text{tg}\ \alpha$.

Essa constante a, que é a tangente trigonométrica do ângulo α, diz-se inclinação ou coeficiente angular da reta r.

A equação $y = ax$ diz-se equação da reta r. Quando $a = 0$, a reta r é o eixo dos x, cuja equação é $y = 0$. Quando $a > 0$, o ângulo α é agudo e r é uma reta ascendente. Quando $a < 0$, o ângulo α é obtuso e r é uma reta descendente. A Figura 6.16 ilustra os dois casos.

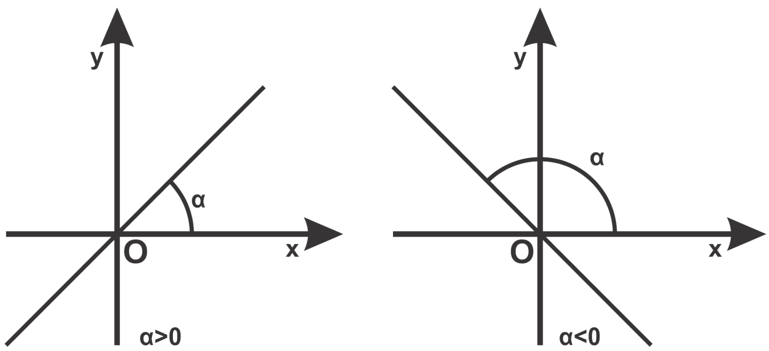

Figura 6.16: Inclinação da reta $r : y = f(x) = ax$.

6.1.9 A função afim (ou polinomial de 1º grau)

Definição 6.1.13. Consideremos a função

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = ax + b,$$

onde a e b são constantes reais, sendo $a \neq 0$. Diremos que g é uma função afim.

Se $b = 0$, a função afim é linear, pois resulta $g(x) = ax$. Mas, se $b \neq 0$, a função g não tem as propriedades da linearidade. Para mostrar isso, consideremos o

Exemplo 6.1.32. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = x + 3.$

Se $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$g(kx) = kx + 3$$

$$k.g(x) = k(x + 3) = kx + 3k.$$

Portanto, $$g(kx) \neq k.g(x).$$

Verifica-se também que

$$g(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) + 3 = (x_1 + 3) + x_2 \neq g(x_1) + g(x_2).$$

6.1.10 Gráfico da função afim

Examinemos o gráfico da função da afim

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g(x) = ax + b.$$

Comecemos pela construção do gráfico da função linear $f(x) = ax$, que é uma reta r passando pela origem.

Para cada $x \in \mathbb{R}$ temos um ponto $P = (x\ ,\ ax)$ pertencente à reta r. O ponto genérico do gráfico g é

$$Q = (x\ ,\ ax + b).$$

Esse ponto Q é o ponto da vertical que passa por P tal que $\overline{PQ} = b$, Figura 6.17. É evidente então que o lugar do ponto Q, que é o gráfico de g, é a reta s, paralela a r, conduzida pelo ponto $B = (0\ ,\ b)$.

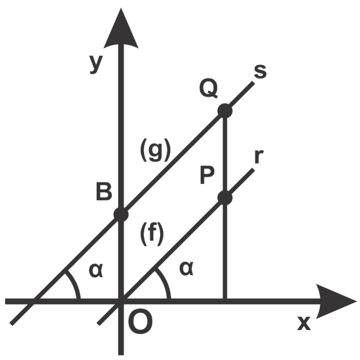

Figura 6.17: Gráficos das funções $f(x) = ax$ e $g(x) = ax + b$.

O número a, inclinação da reta $r = \overleftrightarrow{OP}$, é também a inclinação da reta $s = \overleftrightarrow{BQ}$, e já sabemos que $a = \text{tg}\ \alpha$, α é o ângulo indicado.

Sejam $A = (x_1\ ,\ y_1)$ e $B = (x_2\ ,\ y_2)$ dois pontos do plano não situados na mesma vertical, isto é, $x_1 \neq x_2$. A reta $r = \overleftrightarrow{AB}$ é então o gráfico de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se tivermos $y_1 = y_2$, a reta r será horizontal e f será a função constante $y = f(x) = y_1$; neste caso, diremos que $y = y_1$ é a equação da reta r.

Se tivermos $y_1 \neq y_2$, a reta r será oblíqua em relação ao eixo dos x, e a função f, da qual r é o gráfico, será da função afim, da forma $y = f(x) = ax + b$. Diremos que $y = ax + b$ é a equação da reta r. Para determinar os valores dos coeficientes a e b, basta resolver o sistema equações

$$S : \begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$$

As equações de S exprimem que os pontos A e B pertencem à reta r. Subtraindo uma equação da outra, obtemos:

$$ax_2 - ax_1 = y_2 - y_1, \qquad \text{donde} \qquad a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot$$

Esta última igualdade é muito útil para a determinação da inclinação da reta $r = \overleftrightarrow{AB}$.

Exemplo 6.1.33. Se $A = (-2,\ 3)$ e $B = (4\ , -1)$, a inclinação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é

$$a = \frac{-1 - 3}{4 - (-2)} = \frac{-4}{6} = -\ \frac{2}{3} \cdot$$

Como a reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa por A, podemos escrever a sua equação assim:

$$y - 3 = -\ \frac{2}{3} \cdot [x - (-2)], \qquad \text{ou} \qquad y = -\ \frac{2}{3} \cdot x + \frac{5}{3} \cdot$$

Essa última equação pode ser posta na forma

$$2x + 3y - 5 = 0.$$

6.1.11 A função quadrádica (ou polinomial de 2º grau)

Definição 6.1.14. Chamamos função quadrática ou função polinomial de 2º grau a função

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0.$$

Os números reais $a,\ b,\ c$ dizem-se coeficientes.

6.1.12 Raízes reais das equações polinomiais de 2º grau

Para estudar a função quadrática, podemos proceder à seguinte transformação da expressão que nos dá

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, resulta:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Procuremos os pontos $x \in \mathbb{R}$ nos quais se tem $f(x) = 0$. Tais pontos dizem-se raízes da equação

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Temos três casos a considerar, conforme seja: $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$.

Primeiro caso: $\Delta > 0$ - Podemos escrever:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right].$$

Ou após fatorização:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right),$$

expressão que podemos escrever assim:

$$f(x) = a\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right].$$

Admitamos que, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot$ É óbvio que $f(x)=0$ se, e somente se, $x = x_1$ ou $x = x_2$. Portanto, se $\Delta > 0$ a equação $f(x)=0$ tem duas raízes x_1 e x_2. O valor $f(x)$ escreve-se então:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Segundo caso: $\Delta = 0$ - Neste caso, temos:

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

É claro, então, que $f(x)=0$ se, e só se, $x = -\dfrac{b}{2a}$, existindo, desse modo, uma única raiz real.

Terceiro caso: $\Delta < 0$ - Podemos escrever a expressão que dá $f(x)$ assim:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\right].$$

Considerando que $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$ e $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, $f(x) \neq 0$ qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$; a equação $f(x)=0$ não tem raiz real.

6.1.13 Raízes complexas das equações polinomiais de 2º grau

Como acabamos de mostar na **Subseção 6.1.12** que uma equação polinomial de 2º grau, $ax^2+bx+c=0$, onde a, b, c são reais, sendo $a \neq 0$, pode não ter nenhuma raiz real, conforme seja $\Delta < 0$.

Do ponto vista da Álgebra, tornou-se possível atribuir sempre duas raízes à equação polinomial de 2º grau, mas, para isso, foi preciso ampliar o campo numérico, com a criação dos números complexos. Já temos o símbolo 1 para representar a unidade real. Introduzamos o símbolo i para indicar a unidade imaginária; é um símbolo que, por definição, satisfaz à condição $i^2 = -1$ (portanto, $i = \sqrt{-1}$). Os números complexos são da forma

$$z = \alpha.1 + \beta.i = \alpha + \beta i,$$

onde α e β são reais. Dizemos que α é a parte real de z e β é parte imaginária de z. Podemos operar sobre os complexos com as mesmas regras de cálculo válidas no campo real, lembrando que $i^2 = -1$.

Vimos que as raízes reais das equações polinomiais de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a \neq 0)$$

escreve-se-ão sempre da forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \text{ ou ainda, } x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

nos casos em que seja $\Delta > 0$, ou $\Delta = 0$.

Retornemos a discussão o caso em que $\Delta < 0$. Neste caso, as duas raízes são complexas. Podemos escrevê-las da seguinte forma:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{(-\Delta)(-1)}}{2a}$$

ou ainda

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{-\Delta}.i}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}.i}{2a}.$$

Fazendo $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ e $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, resulta $x = \alpha \pm \beta i$, donde as duas raízes complexas:

$$x_1 = \alpha + \beta i \qquad \text{e} \qquad x_2 = \alpha - \beta i.$$

Essas raízes tem a mesma parte real e partes imaginárias simétricas, por isso costumamos dizer que $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$ são complexos conjugados.

6.1.14 Relações entre coeficientes e raízes

Seja a equação polinomial de 2º grau $ax^2+bx+c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ e as suas raízes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

A soma dessas raízes é:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\ \frac{2b}{2a} = -\ \frac{b}{a}\cdot$$

Efetuando o produto das raízes, encontramos:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\cdot$$

A discussão acima é a demonstração pela

Propriedade 6.1.2. Considere a equação polinomial de 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{onde} \quad a,\ b,\ c \in \mathbb{R} \ \text{ com } \ a \neq 0$$

cujas raízes são

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

então:

i) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\cdot$

ii) $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}\cdot$

Essas são as relações de Girard para uma equação polinomial de 2º grau.

6.1.15 Sinal da função quadrática

Consideremos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = ax^2 + bx + c$, $\quad a \neq 0$. E seja, como sempre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Primeiro caso: $\Delta > 0$ - Já vimos que neste caso

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$$

onde x_1 e x_2 são as raízes reais distintas da equação $f(x) = 0$. Suponhamos, para fixar as ideias, que seja $x_1 < x_2$. Se $x \in \,]-\infty\ ,\ x_1\ [\ \cup\ ]\ x_2\ ,+\infty\ [$, então $f(x)$ tem o sinal de a. E se, $x \in\ ]\ x_1\ ,\ x_2\ [$, então tem $f(x)$ e o sinal contrário ao de a.

Segundo caso: $\Delta = 0$ - Neste caso, temos duas raízes reais e iguais $x_1 = x_2$, e já vimos que

$$f(x) = a(x - x_1)^2.$$

Segue-se daí que $f(x)$ tem o sinal de a para todo $x \neq x_1$.

Terceiro caso: $\Delta < 0$ - As raízes são complexas conjugadas

$$x_1 = \alpha + \beta i \qquad \text{e} \qquad x_2 = \alpha - \beta i.$$

Temos então:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) = a[x - (\alpha + \beta i)][x + (\alpha - \beta i)],$$

ou

$$f(x) = a[(x - \alpha)^2 - \beta^2 i^2] = a[(x - \alpha)^2 + \beta^2].$$

Como $(x - \alpha)^2 + \beta^2 > 0$, uma vez que $(x - \alpha)^2 \geq 0$, para todo x, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta^2 > 0$ para todo $\beta \in \mathbb{R}$. Logo, $f(x)$ terá sempre o sinal de a.

6.1.16 Conjunto imagem da função quadrática

O problema da determinação da imagem de uma função quadrática é suficientemente importante que será tratado na seguinte

Propriedade 6.1.3. Em relação a função quadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

temos que:

i) Se $a > 0$, então $f(\mathbb{R}) = \left[-\dfrac{\Delta}{4a}\ ,\ +\infty\right[\cdot$

ii) Se $a < 0$, então $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty\ ,\ -\dfrac{\Delta}{4a}\right]\cdot$

Ademais, em qualquer um dos itens, temos

$$f(x) = -\frac{\Delta}{4a} \Longleftrightarrow x = -\frac{b}{2a}\cdot$$

Demonstração.

Para que $y \in \mathbb{R}$ seja valor da função

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0,$$

é necessário e suficiente que exista $y \in \mathbb{R}$ tal que

$$ax^2 + bx + c = y \qquad \text{ou} \qquad ax^2 + bx + c - y = 0.$$

Resolvendo esta última equação, encontramos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4ay}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta + 4ay}}{2a}.$$

É evidente que x será real se, e só se, for

$$\Delta + 4ay \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad 4ay \geq -\Delta.$$

Temos dois casos a considerar: $a > 0$ e $a < 0$.

Primeiro caso: $a > 0$ - A desigualdade $4ay \geq -\Delta$ equivale a

$$y \geq -\frac{\Delta}{4a}.$$

Neste caso, o conjunto dos valores de f é

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\Delta}{4a}\ ,\ +\infty \right[.$$

O número $-\dfrac{\Delta}{4a} = f(-\dfrac{b}{2a})$ é, então, o menor valor que f assume no seu domínio, sendo assim costumamos dizer que esse valor é o mínimo da função.

Segundo caso: $a < 0$ - A desigualdade $4ay \geq -\Delta$ equivale a

$$y \leq -\frac{\Delta}{4a}.$$

O conjunto dos valores de f é, neste caso,

$$f(\mathbb{R}) = \left] -\infty \ \ -\frac{\Delta}{4a} \right[.$$

O número $-\dfrac{\Delta}{4a} = f(-\dfrac{b}{2a})$ é, agora, o maior valor que f assume no seu domínio; dizemos que esse valor é o máximo da função. ∎

Exemplo 6.1.34. Temos uma semi-circunferência de diâmetro $\overline{AB}$, centro O raio 1 como mostra a Figura 6.18 O retângulo $PQRS$ tem lado $\overline{PQ}$ situado sobre o diâmetro da semi-circunferência e os vértices R e S situados sobre a mesma. Calcule o maior valor possível para a sua área.

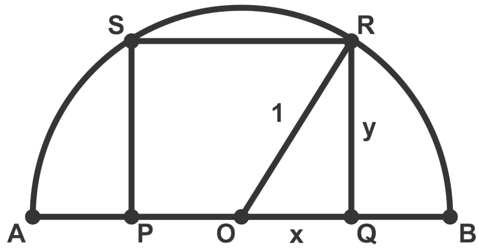

Figura 6.18: Maximizando a área de $PQRS$.

Resolução. Sendo $OQ = x$ e $QR = y$, temos que a área de $PQRS$ é igual a $2xy$. Por outro lado, aplicando do teorema de Pitágoras no triângulo OQR retângulo em Q, temos que $x^2 + y^2 = 1$ que implica em $y = \sqrt{1 - x^2}$ e, daí,

$$2xy = 2x\sqrt{1 - x^2} = 2\sqrt{x^2(1 - x^2)} = 2\sqrt{x^2 - x^4}. \tag{6.4}$$

Fazendo a substituição $z = x^2$, segue da expressão (6.4) a função quadrática $f(z) = z - z^2$, com a condição de que $0 < z < 1$. Para encontar a área máxima, basta maximizar $f(z)$. Pela **Propriedade 6.1.4**, tal função admite $z = \dfrac{1}{2}$ como seu único máximo. Segue que o valor máximo desejado é $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{4}\cdot$ Portanto, o valor máximo para a área é $2\sqrt{\dfrac{1}{4}} = 1.$

6.1.17 Gráfico da função quadrática

Para a discussão do gráfico da função quadrática faremos uma revisão da Geometria Analítica do conceito de parábola. Sejam r uma reta e F um ponto fora dela, no plano determinado por r e F, então segue a

Definição 6.1.15. Chama-se parábola de foco F e diretriz r ao conjunto dos pontos do plano por r e F, equidistantes de r e F, como mostra a Figura 6.19.

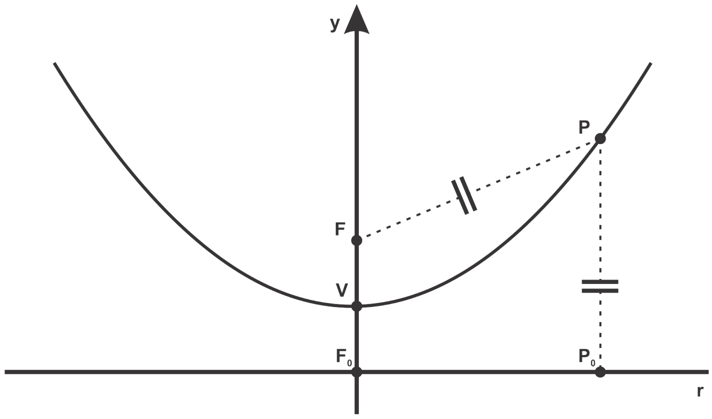

Figura 6.19: Parábola de foco F e diretriz r .

Observação 6.1.12.

O1) Seja P um ponto qualquer da parábola. A distância do ponto P à reta r é a distância de P ao ponto P_0, que, é o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz r.

O2) Sendo F_0 o pé da perpendicular baixada de F sobre a diretriz r, reta $\overleftrightarrow{F_0F}$ é um eixo de simetria da parábola.

O3) O ponto V, que é o intercepto da parábola com o seu eixo de simetria $\overleftrightarrow{F_0F}$ é chamado vértice. Logo, $\overline{FV} = \overline{VF_0}$.

Tomando-se a **Definição 6.1.15** e as **Observações 6.1.12** vejamos os exemplos que se seguem.

Exemplo 6.1.35. Em um sistema cartesiano ortogonal é dado o ponto $F = (0\ ,\ \dfrac{1}{4})$. Considerando F como foco de uma parábola - $\mathcal{P}$, então a origem O do sistema cartesiano é o seu vértice, o eixo dos y é o seu eixo de simetria e, enquanto que a reta r de equação $y = -\dfrac{1}{4}$ paralela ao eixo dos x é sua diretriz, como mostra a Figura 6.20.

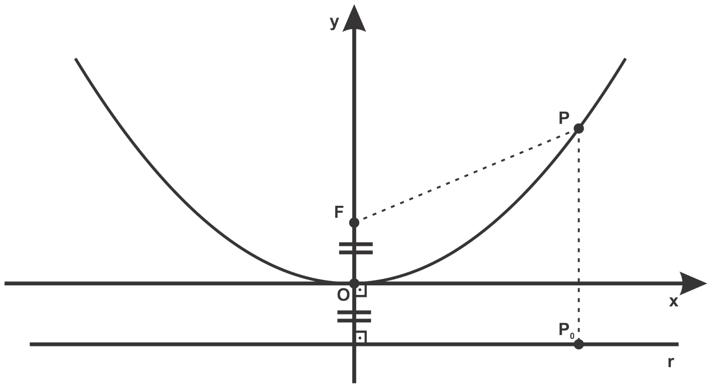

Figura 6.20: Deduzindo a equação da parábola $y = x^2$.

Portanto, pela **Definição 6.1.15** temos que, um ponto $P = (x\ ,\ y)$ pertence a parábola se $\overline{PF} = \overline{PP_0}$, onde $P_0 = (x\ , -\frac{1}{4})$ é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta $r : y = -\frac{1}{4}$. Daí

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{1}{4})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y + \frac{1}{4})^2}.$$

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado e desenvolvendo os binômios ao quadrado, temos

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}.$$

Pela lei do cancelamento da adição e agrupando os termos semelhantes, concluímos

$$y = x^2 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2.$$

Como vimos no **Exemplo 6.1.30** já tínhamos esboçado esse gráfico que é o caso mais simples da função quadrádica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

Exemplo 6.1.36. Se no **Exemplo 6.1.35** tomarmos o ponto $F = (0\ , -\frac{1}{4})$ para foco, a nova parábola - $\mathcal{P}'$ terá como vértice a origem O, o eixo dos y é o eixo de simetria e, a reta r de equação $y = \frac{1}{4}$ paralela ao eixo dos x é a diretriz.

Seguindo os mesmos argumentos e realizando as mesmas contas, teremos para $\mathcal{P}'$ a equação $y = -x^2$ ou $g(x) = -x^2$. Fato esse, que nos dará a parábola - $\mathcal{P}'$ de concavidade voltada para "baixo". Enquanto que, a parábola - $\mathcal{P}$ de equação $y = x^2$ tem, como visto, concavidade voltada para "cima".

Em virtude disso, as parábolas - $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ uma é a reflexão da outra em relação ao eixo dos x, isto é, cada ponto $(x\ ,\ y)$ do gráfico de $f(x) = x^2$ corresponde ao ponto $(x\ , -y)$ do gráfico de $g(x) = -x^2$.

De modo geral, a função quadrática

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ dada por } \ f(x) = ax^2$$

terá concavidade voltada para cima se $a > 0$, e voltada para baixo se $a < 0$, como mostra a Figura 6.21.

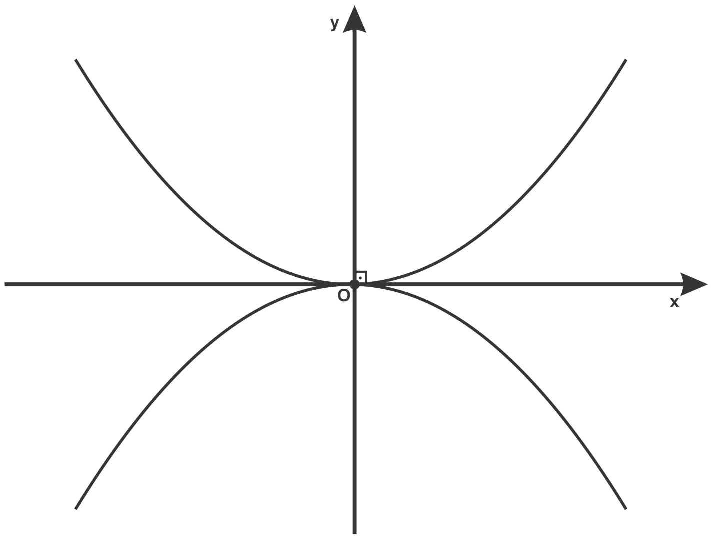

Figura 6.21: Reflexão de parábolas em relação ao eixo dos x.

Deduziremos a equação da parábola de foco $F = (0\ ,\ k)$, com $k > 0$ e diretriz r, como ilustra a Figura 6.22

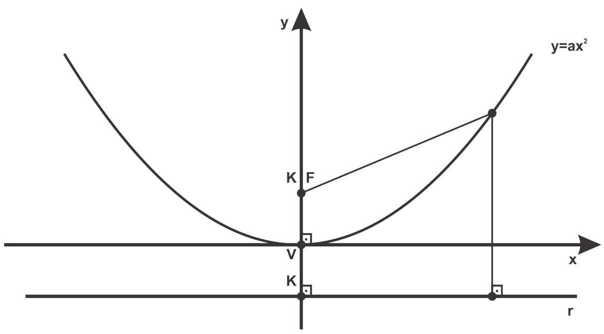

Figura 6.22: Deduzindo a equação da parábola $y = ax^2$.

Tomemos um sistema cartesiano ortogonal, cuja origem O é o vértice da parábola e cujo eixo dos y é a reta $\overleftrightarrow{F_0F}$, que é o eixo de simetria da parábola. Neste sistema cartesiano a equação da diretriz r é $y = -k$. Se P é um ponto qualquer de coordenadas $(x\ ,\ y)$ pertence à parábola, para P distinto de O temos $y > 0$.

Sendo $P = (x\ ,\ y)$ um ponto da parábola. A distância de P à diretriz r é igual a $y+k$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y-k)^2}$. Como P é ponto da parábola, devemos ter

$$y + k = \sqrt{x^2 + (y-k)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$(y+k)^2 = x^2 + (y-k)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado dos binômios e simplificando, vem

$$4ky = x^2, \quad \text{logo} \quad y = \frac{1}{4k}x^2\cdot \tag{6.5}$$

Fazendo $a = \dfrac{1}{4k}$ temos então $y = ax^2$.

Por outro lado, se as coordenadas $(x\ ,\ y)$ do ponto P satisfazendo a igualdade (6.5), com $k > 0$ logo $y + k \geq 0$ e todos os passos da dedução acima podem ser revertidos, o que mostra que P é ponto da parábola de foco $F = (0\ ,\ k)$ e diretriz r de equação $y = -k$.

O gráfico de qualquer função quadrática do tipo $g(x) = ax^2$ é obtido pela multiplicação das ordenadas do gráfico da função $f(x) = x^2$ pela contante a. O gráfico é tanto mais “fechado” quanto maior o valor em módulo de a; e tanto mais aberto mais “aberto” quanto menor o valor em módulo da constante a, como mostra a Figura 6.23

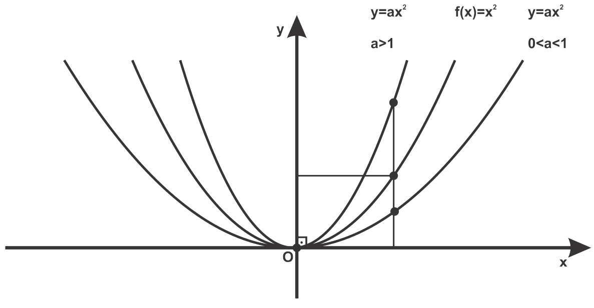

Figura 6.23: “Abertura” da parábola.

6.1.18 Translações horizontal e vertical da função quadrática

Com o objetivo de mostrar efetivamente que o gráfico da função quadrádica

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

é uma parábola, vamos nesse primeiro momento usar das translações horizontal e vertical no plano cartesiano ortogonal a fim de cumprir, mesmo de forma intuitiva, com tais ideias.

Exemplo 6.1.37. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2$.

Para o esboço de seu gráfico temos, por exemplo, os pontos $A = (-1\ ,\ 1)$, $B = (0\ ,\ 0)$ e $C = (1\ ,\ 1)$. Ao transladarmos horizontalmente toda a parábola em 1 unidade para à direita o ponto A passa coincidir com o ponto $A' = (0\ ,\ 1)$. Do mesmo modo B corresponde ao ponto $B' = (1\ ,\ 0)$ e C ao $C' = (2\ ,\ 1)$.

Observe-se que as abscissas dos pontos A', B' e C' transladados são respectivamente: $-1 + 1 = 0$, $0 + 1 = 1$ e $1 + 1 = 2$. Seguindo esse raciocínio para um ponto P da parábola $y = f(x) = x^2$ de abscissa p e a de seu correspondente P' será $p + 1 = p'$, logo a parábola transladada horizontalmente para à direita terá como equação $y = g(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, onde $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$.

Essa parábola na nova posição será representativa da função quadrática $g(x) = x^2 - 2x + 1$, em que o vértice é o ponto $B' = (1\ ,\ 0)$, foco é o $F' = (1\ ,\ \frac{1}{4})$, e o eixo de simetria é paralelo ao eixo dos y passando por $x = 1$ e a diretriz r tem equação $y = -\frac{1}{4}\cdot$

A discussão imediatamente acima pode ser comprovada quando utilizamos da **Definição 6.1.15**. De fato, sendo o ponto $F' = (1\ ,\ \frac{1}{4})$ o foco e a reta r de equação $y = -\frac{1}{4}$ a diretriz. Seja $P = (x\ ,\ y)$ um ponto qualquer da parábola da qual queremos a sua equação. Então, $P_0 = (x\ ,\ y + \frac{1}{4})$ é o pé da perpendicular do ponto de P baixado sobre r, por definição temos

$$\overline{PP_0} = \overline{PF'} \quad \text{se, e só se} \quad \sqrt{(y + \frac{1}{4})^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y - \frac{1}{4})^2}. \tag{6.6}$$

Elevando ambos os membros da igualdade (6.6) ao quadrado:

$$(y + \frac{1}{4})^2 = (x - 1)^2 + (y - \frac{1}{4})^2 \cdot$$

Desenvolvendo os binômios ao quadrado:

$$y^2 + 2 \cdot \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}y + \frac{1}{16} \cdot$$

Pela lei do cancelamento da adição e agrupando os termos semelhantes, temos:

$$y = x^2 - 2x + 1, \quad \text{logo} \quad y = g(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Exemplo 6.1.38. Tomaremos os mesmos dados do **Exemplo 6.1.15** mas faremos a translação na vertical.

O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ que é a parábola de vértice $B = (0\ ,\ 0)$, foco $F = (0\ ,\ \frac{1}{4})$, eixo de simetria coincidente com o eixo dos y e diretriz r de equação $y = -\frac{1}{4} \cdot$ Ao transladarmos todo o conjunto de pontos da parábola de equação $y = x^2$ verticalmente para cima 1 unidade, podemos observar que o vértice passa para o ponto B_1 de coordenadas $(0\ ,\ 1)$, o foco F passa para o $F_1 = (0\ ,\ \frac{5}{4})$ enquanto a diretriz r passa ser a reta r_1 de equação $y = \frac{3}{4} \cdot$

Seja $P = (x\ ,\ y)$ um ponto da parábola na nova posição, então pela **Definição 6.1.15** temos que $\overline{PF_1} = \overline{PP_0}$, onde P_0 é o pé da perpendicular de P baixada sobre a diretriz r_1. Portanto,

$$\sqrt{x^2 + (y - \frac{5}{4})^2} = \sqrt{(y - \frac{3}{4})^2}\ . \tag{6.7}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (6.7) ao quadrado:

$$x^2 + (y - \frac{5}{4})^2 = (y - \frac{3}{4})^2.$$

Desenvolvendo os binômios ao quadrado e pela lei do cancelamento da adição:

$$y = x^2 + 1, \quad \text{ou ainda} \quad y = g(x) = x^2 + 1, \quad \text{com} \quad a = 1,\ b = 0 \ \text{ e } \ c = 1.$$

Podemos observar que o gráfico da parábola representativa da função quadrática $g(x) = x^2 + 1$ é o gráfico de $f(x) = x^2$ deslocado verticalmente para cima 1 unidade.

Exemplo 6.1.39. Agora trataremos para os mesmos dados dos **Exemplos 6.1.37** e **6.1.38** de duas translações simultâneas, uma horizontal para à direita e, a outra vertical para cima, ambas em 1 unidade.

Assim, a nova posição do vértice B será o ponto $\overline{B} = (1\ ,\ 1)$, e a do foco será $\overline{F} = (1\ ,\ \dfrac{5}{4})$, enquanto a equação da diretriz r passa ser a reta $\overline{r}$ de equação $y = \dfrac{3}{4}\cdot$

Pela **Definição 6.1.15** temos que $P = (x\ , y)$ é ponto parábola na nova posição se, e só se $\overline{P\overline{F}} = \overline{PP_0}$, onde P_0 é o pé da perpendicular baixada de P sobre a reta $\overline{r} : y = \dfrac{3}{4}\cdot$ Daí,

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y - \frac{5}{4})^2} = \sqrt{(y - \frac{3}{4})^2}. \tag{6.8}$$

Em (6.8) elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade e desenvolvendo os binômios ao quadrado:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2\cdot\frac{5}{4}y + \frac{25}{16} = y^2 - 2\cdot\frac{3}{4}y + \frac{9}{16}\ \cdot$$

Pela lei do cancelamento da adição e agrupando os termos semelhantes:

$$y = x^2 - 2x + 2, \quad \text{onde } \ a = 1,\ b = -2 \ \text{ e } \ c = 2.$$

Podemos reescrever $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$ como $f(x) = (x-1)^2 + 1$, nesse formato, comparando com os resultados obtidos nos **Exemplos 6.1.37** e **6.1.38** vemos os efeitos das translações horizontal (direita) e vertical (cima) nas parcelas $(x-1)^2$ e 1 respectivamente, ambas em 1 unidade.

Observação 6.1.13. Os procedimentos das translações horinzontal e vertical e reflexão de gráficos usados no estudo da parábola vistos nos **Exemplos 6.1.37**, **6.1.38** e **6.1.39**, são de caráter geral, isto é, valem para qualquer função. Então, se conhecemos o gráfico de uma função $y = f(x)$, obtemos o gráfico de $g(x) = f(x-k)$, com $k > 0$ transladando o gráfico original de k unidades para à direita; e obtemos também o gráfico de $h(x) = f(x+k)$ transladando o gráfico original de k unidades para à esquerda. Figura 6.24.

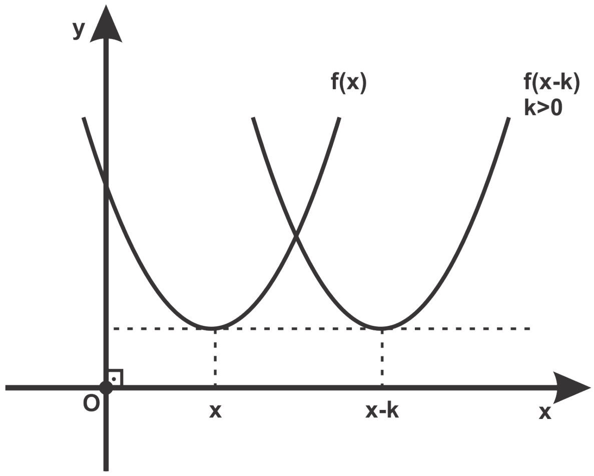

Figura 6.24: Translação horizontal de uma função $y = f(x)$.

Já as translações na vertical do gráfico de uma função $y = f(x)$ em $k > 0$ unidades, como mostra a Figura 6.25, são resultantes da adição dessa constante k a cada valor funcional, isto é, o gráfico de $y = f(x) + k$ é a translação vertical para cima do gráfico de $y = f(x)$ em k unidades. Enquanto $y = f(x) - k$ é a translação vertical para baixo k unidades de $y = f(x)$.

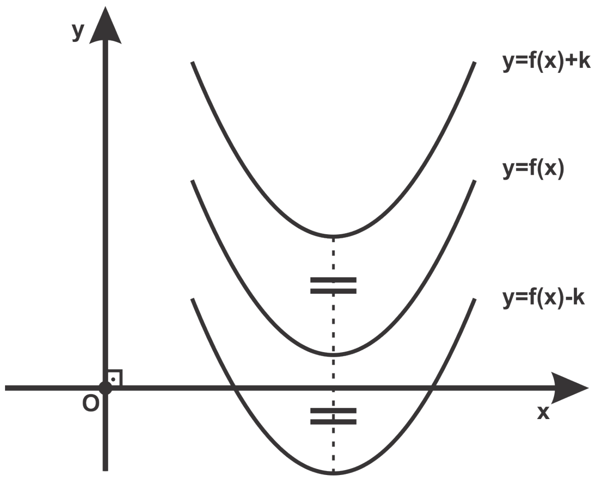

Figura 6.25: Translação vertical de uma função $y = f(x)$.

Retomando o item *2)* da **Observação 6.1.12** para discussão. Se um ponto P está sobre a parábola e P' é seu simétrico em relação ao eixo de simetria $\overleftrightarrow{FF_0}$ também pertence à parábola.

No caso geral da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ a reta vertical $\overleftrightarrow{FF_0}$ de equação $x = -\dfrac{b}{2a}$ é o eixo de simetria do gráfico.

De fato, se $P = \left(-\dfrac{b}{2a}\ ,\ -\dfrac{b}{2a} + h\right)$ um ponto da parábola, vamos mostrar que o ponto P' de coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{b}{2a} - h\right)$$

também o é. Logo,

$$f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = a\left(-\frac{b}{2a} + h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + c,$$

desenvolvendo o binômio, efetuando as multiplicações:

$$f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = \frac{b^2}{4a^2} - bh + ah^2 - \frac{b^2}{2a} + bh + c,$$

ou, após simplificações:

$$f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = -\frac{\Delta}{4a^2} + ah^2.$$

Esse valor independe do sinal de h; portanto

$$f\left(-\frac{b}{2a} + h\right) = f\left(-\frac{b}{2a} - h\right),$$

o que prova que os pontos P e P' pertencem a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ e são simétricos em relação à reta $x = -\dfrac{b}{2a}\cdot$

Do item *3)* da **Observação 6.1.12** podemos determinar que ponto

$$V = \left(-\frac{b}{2a}\ ,\ -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

é o vértive da parábola (interseção da curva com o eixo de simetria).

As condições discutidas da **Subseção 6.1.11.** a **6.1.18.** foram necessárias e suficientes que demonstraram o seguinte teorema.

Teorema 6.1.1. O gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

é uma parábola de eixo de simetria de equação $x = -\dfrac{b}{2a}$ paralelo ao eixo dos y, foco F de coordenadas $\left(-\dfrac{b}{2a}\,,\ \dfrac{1-\Delta}{4a}\right)$ e diretriz r de equação $y = -\dfrac{\Delta+1}{4a}\cdot$

De modo geral para a função quadrática podemos considerar:

Quando $a > 0$, o vértice V é o ponto mais baixo da curva, pois a sua ordenada é, então, o valor mínimo da função. Conforme seja $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, a parábola poderá apresentar-se nas posições seguintes. Figura 6.26.

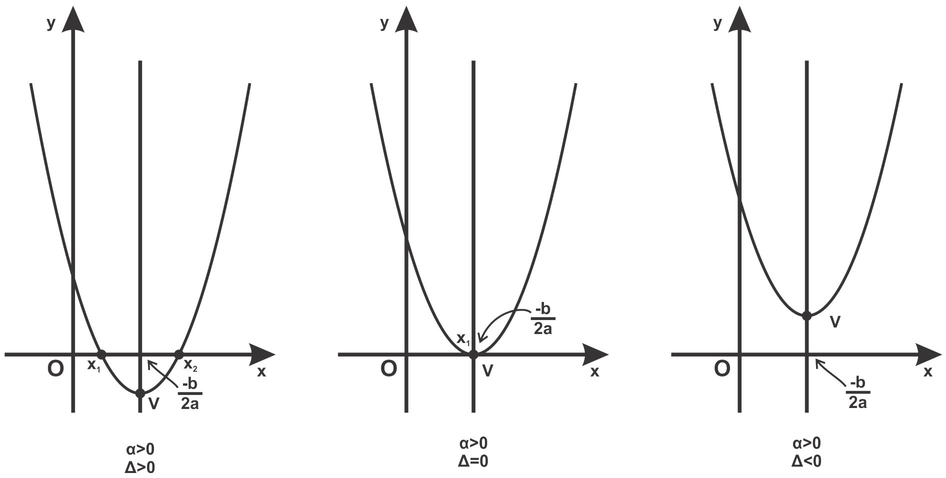

Figura 6.26: Valores da função quadrática, quando $a > 0$.

No caso $\Delta > 0$, o vértice V está abaixo do eixo dos x e a curva corta este em pontos que são as raízes x_1 e x_2 da equação $f(x)$. No caso $\Delta = 0$, o vértice está no eixo dos x e a curva tangencia este eixo no ponto V, cuja abscissa é raiz dupla x_1 da equação $f(x) = 0$. No caso $\Delta < 0$, o vértice V está acima do eixo dos x e a curva não encontra este eixo em que são complexas as raízes da equação $f(x) = 0$.

Quando $a < 0$, o vértice V é o ponto mais alto da parábola, pois a sua ordenada é, neste caso, o valor máximo da função. Conforme seja $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, a curva poderá apresentar-se nas posições a seguir ilustradas na Figura 6.27.

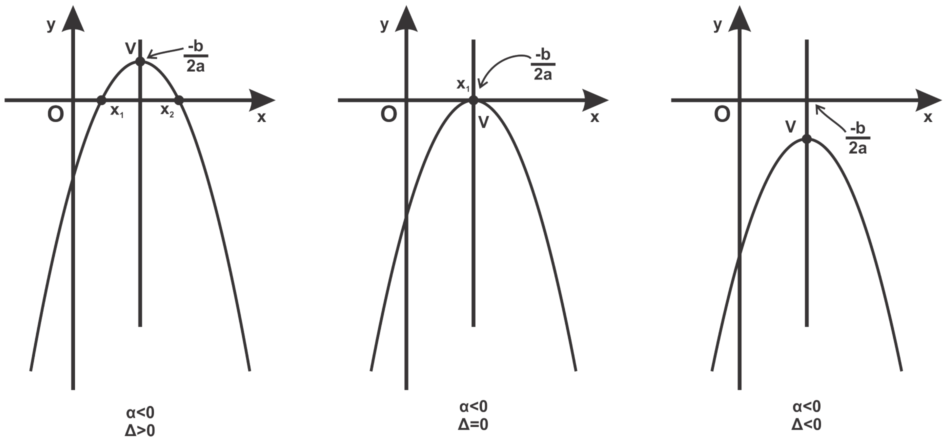

Figura 6.27: Valores da função quadrática, quando $a < 0$.

Exemplo 6.1.40. Do **Exemplo 6.1.35** ao **6.1.39** tratamos de parábolas que tiveram suas equações determinadas pela definição dados, os seus focos e suas diretrizes com eixos de simetrias paralelos aos dos y. Nesse exemplo faremos ao contrário, ou seja, dada uma função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, vamos determinar o seu foco, vértice, eixo de simetria e sua diretriz.

Seja a função quadrática definida por $y = f(x) = -2x^2 + 12x - 19$. Usaremos aqui a técnica de completar o quadrado, portanto, segue a sequência de equivalências:

$$y = -2x^2 + 12x - 19 = -2(x^2 - 6x + \frac{19}{2}) \Longleftrightarrow y = -2(x^2 - 2.3.x + 3^2 - 3^2 + \frac{19}{2})$$

$$\Longleftrightarrow y = -2\left[\left(x^2 - 2.3.x + 3^2\right) - 9 + \frac{19}{2}\right] \Longleftrightarrow y = -2\left[(x-3)^2 + \frac{-18+19}{2}\right]$$

$$\Longleftrightarrow y = -2\left[(x-3)^2 + \frac{1}{2}\right] \Longleftrightarrow y = -2\,(x-3)^2 - 1.$$

Portanto, $f(x) = -2x^2 + 12x - 19 = -2\,(x-3)^2 - 1$.

Agora, vamos analisar quais as transformações que a parábola dada pela equação $g(x) = x^2$ passa a fim de representar a função quadrática $f(x) = -2x^2 + 12x - 19$. Pois bem, a concavidade de $f(x)$ é valtada para baixo, pois $a = -2 < 0$. A parábola de $f(x)$ é mais "fechada" que a $g(x)$, pois $\mid -2 \mid > 1$. O vértice V tem coordenadas $(3\ , -1)$, pois $g(x)$ translada 3 unidades horizontamente para à direita e verticalmente para baixo 1 unidade. O foco F de $f(x)$ é ponto $(1\ ,-\frac{25}{8})$, pelo "fechamento", pela inversão de concavidade e pelas translações que ocorrem em $g(x)$. A diretriz de $f(x)$ é reta r de equação $y=-\frac{23}{8}$, pois V está a igual distância de F e r.

Capítulo 7

Considerações finais

Certos conceitos tratados nesse trabalho em um primeiro momento, parece ser específico dos conteúdos apresentados, outros foram introduzidos de forma intuitiva, como por exemplo, o de par ordenado que pode ser definido de forma cuidadosa como:

Dados um conjunto não vazio A *e* $a,\ b \in A$. *Definimos o par ordenado* $(a\ ,\ b)$ *sendo o conjunto* $\{\{a\},\ \{a\ ,\ b\}\}$.

Tal definição tem por objetivo tornar preciso matematicamente o conceito de par ordenado.

Em várias ocasiões falamos nas operações de adição e multiplicação em todos os sistemas numéricos os quais abordamos, também são conceitos que vem da definição geral como segue.

Uma operação em um conjunto não vazio A *é uma função* $\star : A \times A \longrightarrow A$. *A imagem* $\star((x\ ,\ y))$ *de um par ordenado* $(x\ ,\ y)$ *pela função* $\star$ *é usualmente denotada por* $x \star y$.

Já para as definições dos conceitos de relação de equivalência, classes de equivalência e conjunto quociente foram dados de modo geral.

O que fizemos foi a construção de forma rigorosa os números reais, tendo como ponto de partida o conjunto dos números racionais com suas propriedades algébricas e aritméticas, de modo análogo às construções anteriores. Por conseguinte, definimos a noção de cortes devida a Dedekind. Considerando o conjunto constituído de todos os cortes e nele definimos as operações de adição e multiplicação, e uma relação de ordem. Mostramos que tal conjunto possui as propriedades aritméticas de $\mathbb{Q}$ e mais uma importante propriedade que $\mathbb{Q}$ não possui: a de ser completo.

A este conjunto de cortes chamamos de conjunto dos números reais, que foi denotado por $\mathbb{R}$ e, como nos demais casos estudados, vimos que $\mathbb{R}$ contém uma cópia algébrica de $\mathbb{Q}$.

Ao afirmarmos que o gráfico da função quadrática $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ é uma parábola, com o eixo de simetria paralelo ao eixo dos y estamos considerando essa curva uma situação particular da equação geral do segundo grau em x e y

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad a, b \text{ ou } c \neq 0 \tag{7.1}$$

A equação (7.1) pode ser: uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, um par de retas, uma única reta, um ponto ou o conjunto vazio. Para identificar que (7.1) é um destes subconjuntos, um procedimento é inicialmente efetuarmos uma rotação de eixos de um ângulo θ, onde

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{1}{2} arctg \left(\dfrac{b}{a-c} \right), & \text{se } \ a \neq c, \\ \dfrac{\pi}{4}, \quad \text{se} & a = c. \end{cases}$$

Após esta rotação a equação dada se transforma numa equação da forma

$$A\overline{x}^2 + B\overline{y}^2 + C\overline{x} + D\overline{y} + E = 0,$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$.

Se $A \neq 0$, $B = 0$ e $D \neq 0$, temos

$$A\overline{x}^2 + C\overline{x} + D\overline{y} + E = 0,$$

que é a parábola representativa da função quadrática.

Referências Bibliográficas

ABE, Jair M. & **PAPAVERO**, Nelson. *Teoria intuitiva dos conjuntos.* São Paulo - SP. Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1991.

ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das funções de uma variável.* Rio de Janeiro - RJ. 7ª Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 2003.

BARBOSA, João Lucas M. *Geometria euclidiana plana.* Rio de Janeiro - RJ: 7ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção do Professor de Matemática), 2004.

BOYER, Carl B. *História da Matemática.* São Paulo - SP: 2ª Edição - Tradução Elza F. Gomide. Editora Edgard Blücher Ltda, 2002.

CARAÇA, Bento de J. *Conceitos Fundamentais de Matemática.* Lisboa, 1945.

COURANT, Richard & **ROBBINS**, Herbert. *O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos.* Rio de Janeiro - RJ: Tradução: Adalberto da Silva Brito. Editora Ciência Moderna, 2000.

DE MORAIS FILHO, Daniel C. *Um convite à Matemática.* Rio de Janeiro - RJ: 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Professor de Matemática), 2013.

DOMINGUES, Hygino H. & **IEZZI**, Gelson. *Álgebra Moderna.* São Paulo - SP: 2ª Edição. Atual Editora Ltda, 1982.

DOMINGUES, Hygino H. *Fundamentos de Aritmética.* São Paulo - SP: Atual Editora Ltda, 1991.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* São Paulo - SP: Tradução: Higyno H. Domingues. Editora Unicamp, 2004.

FERREIRA, Jamil. *A construção dos números.* Rio de Janeiro - RJ: 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitários), 2011.

GONÇALVES, Adilson. *Intodução à Álgebra.* Rio de Janeiro - RJ: 4ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Projeto Euclides), 1999.

GUIDORIZZI, Hamilton L. *Um curso de Cáculo.* Rio de Janeiro - RJ. 3ª Edição, Vol. 1. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1997.

LIMA, Elon L. *Curso de Análise.* Rio de Janeiro - RJ: 6ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Projeto Euclides, Vol. 1), 1976.

LIMA, Elon L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro - RJ. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Matemática Universitária), 2001.

LOVÁSZ, L.,**PELIKÁN**, J. & **VESZTERGOMBI**, K. *Matemática discreta.* Rio de Janeiro - RJ: 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitários), 2013.

MONTEIRO, L.H. Jacy. *Elementos de Álgebra.* Rio de Janeiro - RJ. 2ª Edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, 1978.

MORIN, Edgar. *Os sete saberes necessários à Educação do Futuro.* São Paulo - SP. 12ª Editora Cortez, 2007.

NETO, Antonio Caminha M. *Introdução à Análise.* Vol. 3. Rio de Janeiro - RJ: 2ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Tópicos de Matemática Elementar), 2013.

NOBRE, Sérgio. *Alguns "porquês" na história da matemática e suas contribuições para a Educação Matemática.* In: Cadernos CEDES. Campinas - SP: 1ª Edição, Editora Papirus, 1996.

RIBENBOIM, Paulo. *Funções, limites e continuidade.* Rio de Janeiro - RJ: 1ª Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitários), 2012.

ROQUE, Tatiane & **CARVALHO**, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática.* Rio de Janeiro - RJ: Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção PROFMAT), 2012.