PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

TÓPICOS DE ARITMÉTICA: A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

por

Allisson Cordeiro

Preprint PROFMAT 1 (2014) 12 de novembro, 2014

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Tópicos de Aritmética: a sequênica de Fibonacci

Allisson Cordeiro
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: allicord@htomail.com

8 de Dezembro de 2014

Resumo

O presente trabalho é parte de uma coleção de atividades resolvidas, comentadas e complementares envolvendo conceitos de aritmética. Apresentamos uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, cujo objetivo é potencializar o interesse pelo estudo da Matemática. Por este motivo, buscamos atividades que despertem a motivação dos alunos e as descrevemos de maneira a auxiliar os professores em sua aplicação, com respostas, comentários e sugestões. A abordagem dos temas se faz com o uso recorrente de aspectos históricos, resolução de problemas, jogos e atividades recreativas.
Palavras-Chave: Aritmética - Resolução de problemas - Jogos

1 Introdução

O material a seguir é uma proposta de projeto para um curso de matemática extracurricular para alunos do Ensino Médio. Surgiu da percepção da necessidade de um atendimento diferenciado a alunos com algum interesse na disciplina, pois em nossas experiências podemos perceber que no dia a dia de uma sala de aula não é sempre possível dar atenção aos alunos com um maior interesse e habilidades em matemática. A consequência disso é um desperdício de possíveis talentos que são deixados a margem, em um sistema de ensino que geralmente oferece projetos extraclasse apenas de reforço escolar para sanar dificuldades, já que dificilmente temos algo no sentido de potencializar habilidades. Cabe ressaltar que a ideia não é selecionar apenas os melhores alunos para participar. O ideal é que seja aberto a todo aluno simpatizante da disciplina e que voluntariamente se inscreva no curso.

Os tópicos abordados são: sequência de Fibonacci e número de ouro. Os temas são desenvolvidos inicialmente com um pouco de história sobre o protagonista principal do assunto. Em seguida são propostas atividades, que remetem à resolução de problemas, nos quais o aluno vai gradativamente chegando às conclusões. No texto, as atividades estão com respostas e comentários. A versão do aluno, sem respostas, é encontrada no anexo. Buscamos abordar os assuntos de maneira curiosa e lúdica com a intenção de despertar uma motivação para os tópicos mais delicados do trabalho e principalmente causar uma inquietação no sentido de buscar conhecimento matemático que vá além do que a escola oferece às turmas regulares.

Em vários momentos no texto, o professor encontrará sugestões de como organizar a aplicação das atividades em sala. Porém, é importante que haja uma preparação inicial no sentido de mesclar a proposta do texto com a habilidade e experiência do aplicador. Igualmente importante é a realização de uma leitura inicial do nível de conhecimento matemático da turma. Neste sentido e caso seja necessário, deve ser pensado um pré-curso no qual serão trabalhadas as arestas identificadas.

2 Metodologia

Procuramos uma apresentação da matemática de forma a valorizar a construção do conhecimento, diferente da forma clássica na qual se define novos conteúdos com auxílio dos assuntos anteriores, completando com exemplos e problemas que utilizam esses saberes, segundo Brousseau (1996, pg 36) sobre a maneira de ensino clássica

> "apaga completamente a história destes saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e das questões que provocaram o aparecimento dos conceitos fundamentais, a sua utilização para a colocação de novos problemas, a intrusão de técnicas e de questões resultantes dos progressos dos outros sectores, a rejeição de determinados pontos de vista, considerando falsos ou desadequados, e as numerosas querelas a seu respeito."

Buscamos coletar problemas e jogos que desenvolvessem o aspecto científico nos alunos, situações que envolvem habilidades de levantar hipóteses, conjecturar, intuir, testar e validar resultados, como Brousseau (1996, pg 38) descreve

> "uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos,

> teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc."

A respeito da escolha da aritmética, acreditamos que há conteúdo que não estão evidenciados nos parâmetros curriculares, porém podem ser abordados e relacionados com os que lá estão. A aritmética também é importante, pois segundo Gomes, (2008, pg 160)

> "A aritmética é invocada como o primeiro exemplo sensível da necessidade dos signos: conforme Condillac, não poderíamos fazer progressos algum no conhecimento dos números, se não imaginássemos nomes para todas as idéias que formamos pela multiplicação da idéia de unidade, que ele supõe já ter recenido um nome."

Escolhemos utilizar de alguns jogos, pois estes auxiliam no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, desperta um maior interesse, pode-se analisar os erros e elaborar estratégias para vencer, de acordo com Emerique (1999, pg 188)

> "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas"

Também de acordo com o aspecto cognitivo do jogo Paulo (1999, pg 190) diz

> "necessidade e possibilidade de construção de novos conhecimentos e procedimentos, de descobrir erros e de imaginar formas de superá-los, dentre outros desafios."

Utilizamos também a resolução de problemas, uma vez que propicia um ambiente em que o aluno é ser ativo no processo de ensino-aprendizagem e segundo Onuchic (1999, pg 204)

> "a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simuntanea de vários níveis de atividade."

3 Fibonacci e o número de ouro

3.1 Um pouco de história: A sequência de Fibonacci e o número de ouro

Fibonacci (filho de Bonaccio) foi um dos matemáticos mais importantes da Idade Média. Nasceu por volta de 1170 em Pisa, uma das primeiras cidades comerciais italianas e que manteve um comércio florescente com o mundo árabe. Desde cedo, Fibonacci foi iniciado nos negócios e nos cálculos, o que despertou o seu interesse pela matemática. Em 1202, Fibonacci escreveu sua obra mais célebre, "Liber Abaci", que foi também um meio, através do qual, a numeração hindu-árabe foi introduzida na Europa Ocidental. O nome de Fibonacci tornou-se conhecido devido a um problema que existia no seu livro "Liber Abaci", chamado de o problema dos coelhos. A solução desse problema é uma sequência numérica famosa e que, curiosamente, relaciona-se ao número de ouro e a diversos fenômenos da natureza.

1. Um cavalheiro adquiriu um casal de coelhos recém nascidos;
2. este casal de coelhos demora um mês exato para atingir a maturidade, tornando-se fértil e podendo reproduzir a partir do segundo mês;
3. cada casal de coelhos fértil gera um casal de filhos a cada mês, aceitando-se cruzamentos consanguineos;
4. o cavalheiro jamais se desfaz de seus coelhos que, por sua vez, nunca morrem;

Pergunta-se: ao final de doze meses, quantos casais de coelhos o cavalheiro possuirá? E quantos possuía a cada mês?

Mês	Casais adultos	Casais jovens	Total de casais
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89
12	89	55	144

Note que cada termo a partir do terceiro é obtido pela soma dos dois anteriores:

$$\begin{aligned}
2 &= 1+1\\
3 &= 2+1\\
5 &= 3+2\\
8 &= 5+3\\
&\vdots\\
144 &= 89+55\\
&\vdots\\
F_{n+2} &= F_n + F_{n+1}
\end{aligned}$$

Essa sequência numérica é conhecida como sequência de Fibonacci.

3.2 Um pouco de história: O número de ouro

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cujo valor aproximado é $1,618033988749$, é conhecido historicamente por proporção áurea ou número de ouro. Dizemos que um ponto X divide o segmento $\bar{AB}$ na razão áurea (também conhecida como razão de ouro, divina proporção, proporção em extrema razão ou divisão de extrema razão) se X pertence ao segmento $\bar{AB}$ e $\frac{\bar{AX}}{\bar{XB}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots$. Este número (tradicionalmente representado pela letra grega fi maiúsculo:Φ) tem muitas aplicações surpreendentes em vários ramos da matemática. Não são poucos os que defendem a teoria sobre a presença do número de ouro em muitos objetos do universo, como, a natureza, artes, arquitetura e anatomia. Por outro lado, há estudos que apontam que essa teoria não passa de um mito. De qualquer forma este é um assunto muito interessante e enigmático que vale a pena ser pesquisado, porém não é o objetivo deste trabalho. Sendo assim deixamos como sugestão para aqueles que desejam um maior aprofundamento, há as referências [13], [14].

3.3 Atividades

Atividade 3.1 *Propriedades da sequência de Fibonacci.*

O objetivo desta atividade é concluir intuitivamente a validade das seguintes propriedades da sequência de Fibonacci:

Propriedade 1 As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.

Propriedade 2 Fixado um termo $m \geq 1$ da sequência de Fibonacci temos que para n múltiplo de m, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.

Propriedade 3 A soma de n termos da sequência de Fibonacci pode ser calculada por: $Sn = F(n+2) - 1$;

Propriedade 4 O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado por:
$F(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

De fato é possível demonstrar a validade das propriedades mas não faremos, pois foge da proposta do curso. A demonstração pode ser encontrada na referência [15]

Propriedade 1 As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.

Entregue aos alunos a folha de atividades da página 19 e peça para que preencham a tabela com os números da sequência de Fibonacci, sendo:
n: ordem do termo.
F_n: termo de ordem n.
$F_n - 1$: termo de ordem $n-1$.
$\frac{Fn}{(Fn-1)}$: Razão entre o termo de ordem n e o anterior a ele, ou seja $n-1$.

Faremos o preenchimento até o 15° termo, isso já é o bastante para o convencimento informal do que desejamos concluir. A última coluna deve ser preenchida com o auxílio de uma calculadora.

n	F_n	F_{n-1}	$\frac{F_n}{F_{n-1}}$
1	1	-	
2	1	1	1
3	2	1	2
4	3	2	1,5
5	5	3	1,666666666 ...
6	8	5	1,6
7	13	8	1,625
8	21	13	1,615384615 ...
9	34	21	1,61904761 ...
10	55	34	1,617647058 ...
11	89	55	1,6181818181 ...
12	144	89	1,617977528 ...
13	233	144	1,618055555 ...
14	377	233	1,618025751 ...
15	610	377	1,6180371

Questão 3.1.1 *O que acontece com a razão de um termo pelo seu anterior a medida que o n aumenta?*

Resposta: O valor aproxima-se cada vez mais do número de ouro.

Questão 3.1.2 *A que conclusão podemos chegar?*

Resposta: As sucessivas razões entre um número e o que o antecede convergem para o número de ouro.

Propriedade 2: Fixado um termo $m \geq 1$ da sequência de Fibonacci temos que para n múltiplo de m, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.

Peça aos alunos que façam o preenchimento da tabela:

n: ordem do termo .

F_n: termo de ordem n.

n	F_n
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765
21	10946

Consulte a tabela acima e preencha as seguintes tabelas relacionando os termos $F(n)$ para n múltiplo de 3 e também múltiplos de 5.

n	3	6	9	12	15	18	21
F(n)	2	8	34	144	610	2584	10946

n	5	10	15	20
F(n)	5	55	610	6765

Questão 3.1.3 *Qual a relação entre* $F(3)$ *e* $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$*? E entre* $F(5)$ *e* $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$*?*

Resposta: $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$ são todos múltiplos de $F(3)$. Da mesma forma $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$ são múltiplos de $F(5)$.

Questão 3.1.4 *A que conclusão podemos chegar?*

Resposta: Para todo número n múltiplo de m, com $m \geq 1$, $F(n)$ é múltiplo de $F(m)$.
Propriedade 3: Soma de n termos da sequência de Fibonacci pode ser calculada por: $Sn = F(n+2) - 1$;

Questão 3.1.5 *Calcule as seguintes somas:*

a. S_5, do termo $F(1)$ ao $F(5)$. **Resposta:**

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(5) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12$$

b. S_8, do termo $F(1)$ ao $F(8)$. **Resposta:**

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(8) = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54$$

c. S_{14}, do termo $F(1)$ ao $F(14)$. **Resposta:**

$$F(1)+F(2)+\ldots+F(14) = 1+1+2+3+5+8+13+21+34+55+89+144+233+377 = 986$$

Questão 3.1.6 *Qual a relação entre $F(7)$ e S_5, $F(10)$ e S_8, $F(16)$ e S_{16}?*

Resposta comentada: $F(7) = 13$ e $S_5 = 12$; $F(10) = 55$ e $S_8 = 54$; $F(6) = 987$ e $S_{16} = 986$. As somas são uma unidade menor do que o segundo termo subsequente.

Questão 3.1.7 *Generalize o resultado anterior.*

Resposta comentada: A fórmula para o cálculo dos n termos de uma sequência de Fibonacci é:

$$Sn = F(n+2) - 1.$$

Questão 3.1.8 *Calcule a soma S_{21}, do termo $S(1)$ ao $S(21)$.*

Resposta comentada: $S_{21} = F(21+2) - 1$, assim $S_{21} = F(23) - 1$, em nossa tabela temos somente até o termo de ordem 21, porém temos condições de calcular rapidamente $F(23)$ pois ele é $F(22) + F(21)$ e temos $F(22) = F(21) + F(20)$, ou seja, $F(22) = 10946 + 6765$, donde $F(22) = 17711$. Portanto $F(23) = 17711 + 10946 = 28657$. Logo, $S_{21} = 28657 - 1, S_{21} = 28656$.

Questão 3.1.9 *Calcule a soma S_{30}, do termo $S(1)$ ao $S(30)$.*

A soma pedida é $S_{30} = F(30+2) - 1$, ou seja, $S_{30} = F(32) - 1$. Podemos repetir o processo da questão anterior e com algum trabalho calcular $F(32)$ e assim a soma, porém não faremos assim.

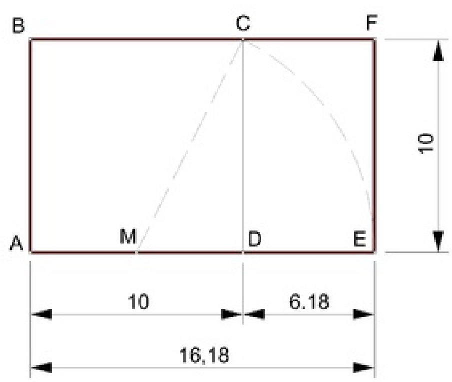
Resposta comentada: A intenção da questão é perceber que na maioria das vezes o trabalho de encontrar manualmente os termos da sequência de Fibonacci é demorado. Uma maneira mais rápida de executar isso é através da P4:
Propriedade 4 O n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pode ser calculado por:

$$F(n) = \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

Assim, $F(32) = \frac{1{,}618034^{32}}{\sqrt{5}}$, portanto, $F(32) \cong 2178309,485$, donde concluímos que $F(32) = 2178309$. Voltando à questão 4.1.9, temos: $S_{30} = 2178309 - 1 = 2178308$

Atividade 3.2 *O retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci.*

O retângulo de ouro surge do processo de divisão em média e extrema razão. Ele é assim chamado porque ao dividir-se a base desse retângulo pela altura, obtém-se aproximadamente o valor do número de ouro. Por exemplo:

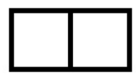


Os retângulos AEFB e CDEF são retângulos de ouro. Nesta atividade nosso objetivo é construir o retângulo de ouro a partir da sequência de Fibonacci. Para a atividade vamos precisar de papel quadriculado.

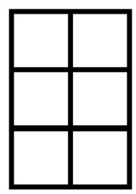
Descrição da atividade: Entregar aos alunos as folhas de papel quadriculado. Orientá-los a desenhar retângulos usando os quadrados da folha de acordo com o seguinte procedimento: Os retângulos serão montados a partir de quadrados cuja medida correspondem aos termos da sequência de Fibonacci. Por exemplo:

- no primeiro retângulo pode ser usado apenas um quadrado de lado um.

- no segundo retângulo podem ser usados um quadrado de lado um do passo anterior e um novo quadrado de lado um.



- no terceiro retângulo podem ser usados os dois quadrados de lado um do passo anterior e um novo de lado dois. E assim por diante.



Note que os quadrados devem ser posicionados de forma que encaixem na figura gerando um novo retângulo. Agora os alunos devem desenhar os próximos quatro retângulos. Para auxiliá-los faça as seguintes perguntas:

Questão 3.2.1 *Quais as medidas dos retângulos desenhados?*

Resposta: Quarto retângulo: 5 u.m de comprimento e 3 u.m de altura.
Quinto retângulo: 5 u.m de comprimento e 8 u.m de altura.
Sexto retângulo: 13 u.m de comprimento e 8 u.m de altura.

Questão 3.2.2 *Você conseguiria, sem desenhar, responder quais são as medidas dos próximos retângulos? Se a resposta for afirmativa, indique as medidas dos próximos três retângulos.*

Resposta Sim, pois são os sucessivos termos da sequência de Fibonacci. Assim a medida dos três próximos retângulos serão:
Sétimo retângulo: 13 u.m de comprimento e 21 u.m de altura.
Oitavo retângulo: 34 u.m de comprimento e 21 u.m de altura.
Nono retângulo: 34 u.m de comprimento e 55 u.m de altura.

Questão 3.2.3 *Indique a seguir a razão entre a medida maior e a medida menor de cada um dos retângulos:*

Resposta: Primeiro retângulo: $1/1 = 1$
Segundo retângulo: $2/1 = 2$
Terceiro retângulo: $3/2 = 1,5$
Quarto retângulo: $53 = 1,666\dots$
Quinto retângulo: $8/5 = 1,6$
Sexto retângulo: $13/8 = 1,625$
Sétimo retângulo: $21/13 = 1,615384615\dots$
Oitavo retângulo: $34/21 = 1,61904761\dots$
Nono retângulo: $65/44 = 1,617647058\dots$

Questão 3.2.4 *O que podemos concluir a respeito da razão entre as medidas dos lados dos retângulos?*

Resposta: podemos concluir que à razão entre a medida dos lados é igual a razão entre um termo da sequência de Fibonacci e o seu anterior, o qual já vimos que se aproxima cada vez mais do número de ouro.

Questão 3.2.5 *Qual é um método eficiente para construir um retângulo de ouro?*

Resposta: Podemos construir um retângulo de ouro a partir da união de quadrados cujas medidas correspondem, em ordem, aos termos da sequência de Fibonacci.

Atividade 3.3 *A mágica de Fibonacci*

A atividade a seguir é uma interessante brincadeira com o propósito de instigar a curiosidade do aluno e a partir disso abordar temas como da teoria de números e propriedades da sequência de Fibonacci. Para a atividade vamos precisar de uma folha, por aluno, com dez linhas numeradas de 1 a 10.

Descrição da atividade: Peça aos alunos que escolham um representante e entregue a este um envelope fechado contendo o número $1,61$ anotado. Dê aos alunos uma folha com dez linhas numeradas de 1 a 10. Peça a eles que escolham, em secreto, dois números inteiros e os coloquem um na primeira linha e um na segunda. Solicite aos alunos que completem as demais linhas (3^a e 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores, formando assim uma sequência de Fibonacci.

Por exemplo:

1^a	5
2^a	12
3^a	17
4^a	29
5^a	46
6^a	75
7^a	121
8^a	196
9^a	317
10^a	513

Professor, temos dois resultados curiosos a respeito de qualquer sequência obtida seguindo as instruções anteriores. Estes resultados não devem ainda ser revelados aos alunos.

- A soma dos dez termos é igual ao produto do elemento da sétima linha por 11.
- O quociente da décima linha pela nona, com duas casas decimais, é igual a $1,61$.

Note a validade dos resultados no exemplo: a soma dos dez elementos é 1331 que por sua vez é igual ao produto do elemento da sétima linha, 121 por 11. O quociente do elemento da décima linha, 513, pelo elemento da nona linha, 317, com duas casas decimais é $1,61$. Use esses resultados para despertar a curiosidade dos alunos. Depois dos truques iremos demonstrar porque funciona.

O truque

Peça aos alunos para somar os números obtidos nas dez linhas e que não revelem o resultado. Pergunte a alguns alunos apenas o número da sétima linha e faça as adivinhações. O ideal é que o professor esteja hábil na multiplicação por 11 a fim de dar resultados mentalmente, pois isto cria um mistério maior. Nesta altura dos acontecimentos é esperado que a turma esteja bastante curiosa de como o professor fez para "adivinhar". Solicite ainda que um dos alunos divida o número da décima linha pelo número da nona linha e que revele o resultado aproximado até a segunda casa decimal. O aluno terá encontrado o número $1,61$. Escreva esse número no quadro. Este é o momento do aluno que está com o envelope abri-lo e surpreendemente lá estará o número $1,61$.

Desvendando o mistério:

Como está evidenciado na regra, podemos escolher quaisquer números iniciais, sendo assim chame de x o primeiro e de y o segundo. A seguir complete as demais linhas da tabela (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores.

1^a	x
2^a	y
3^a	x + y
4^a	x + 2y
5^a	2x+3y
6^a	3x+5y
7^a	5x+8y
8^a	8x+13y
9^a	13x+21y
10^a	21x+34y

Questão 3.3.1 *Some os termos da 1^a a 10^a linha.*

Resposta:

$$x+y+x+y+x+2y+2x+3y+3x+5y+5x+8y+8x+13y+13x+21y+21x+34y$$

$$= 55x + 88y$$

Questão 3.3.2 *Note que 55 e 88 são múltiplos de 11, sendo assim, podemos escrever, $55x + 88y = 11(5x + 8y)$. Quem é $5x + 8y$? Qual a conclusão a que podemos chegar?*

Resposta comentada: $5x + 8y$ é o elemento da sétima linha. Podemos calcular a soma dos dez termos da sequência conhecendo apenas o sétimo termo, basta calcular o produto do termo que está na sétima linha por 11.

A segunda parte do truque é um pouco mais delicada de ser demonstrada, porém é razoável esperar que haja um bom entendimento por parte dos alunos.

Teorema 3.1 *Dada uma sequência de dez termos em que cada um a partir do terceiro é obtido somando os dois termos anteriores, temos que o quociente do elemento da décima linha pelo elemento da nona linha é, com duas casa decimais, igual a $1,61$.*

Faremos uso de uma propriedade de desigualdades bastante conhecida:
Se a, b, c e d são números positivos tais que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, então $\frac{a+c}{b+d}$ está entre $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$.
Vamos demonstrar essa propriedade:

Demonstração 3.1

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \tag{3.3.1}$$

obtemos $ad < bc$*, implicando* $ab + ad < ab + bc$*, que, após fatoração, fornece-nos* $a(b + d) < b(a + c)$*.*
Dividindo ambos os membros por $b(b + d)$*, chegamos à desigualdade*

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}.$$

Por outro lado,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

obtemos $ad < bc$*, implicando* $ad + cd < bc + cd$*, após fatoração, fornece-nos* $d(a + c) < c(b + d)$*.*

Dividindo ambos os membros por $d(b + d)$*, chegamos à desigualdade*

$$\frac{a+c}{b+d} \quad < \quad \frac{c}{d}. \tag{3.3.2}$$

De 3.3.1 e 3.3.2 concluimos:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Voltemos à demonstração da segunda parte do truque. O quociente a ser analisado é

$$\frac{21x + 34y}{13x + 34y}$$

Note que

$$\frac{21}{13} = 1,615384\cdots$$
$$\frac{34}{21} = 1619047\cdots$$

assim,

$$\frac{21}{13} < \frac{34}{21} \text{ , ou ainda , } \frac{21x}{13x} < \frac{34y}{21y}.$$

Logo, pela propriedade de desigualdades demonstrada anteriormente temos

$$\frac{21x}{13x} < \frac{21x + 34y}{13x + 21y} < \frac{34y}{21y}$$

donde concluimos,

$$\begin{aligned} 1,615384\cdots &= \frac{21}{13} \\ &= \frac{21x}{13x} < \frac{21x+34y}{13x+21y} \\ &< \frac{34y}{21y} = \frac{34}{21} = 1,619047\cdots \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ou seja, o quociente está entre $1,615384\cdots$ *e* $1,619047$*, se considerarmos apenas duas casas decimais ele é igual a* $1,61$*.*

4 Problemas complementares

4.1 Problemas de sequência de Fibonacci e o número de ouro

1. Uma árvore cresce de acordo com a seguinte regra:
   Na primeira semana a árvore começa a crescer com apenas um galho. Após crescer por duas semanas, esse galho da origem a um novo galho por semana. Cada novo galho gerado continua a crescer, e após crescer por duas semanas dá origem a um novo galho por semana.

   a. Faça um desenho indicando o crescimento da árvore após cinco semanas passadas do início de seu crescimento.

   b. Responda quantos galhos teremos após seis, sete e treze semanas.

2. Os termos de uma sequência, a partir do terceiro, são obtidos somando os dois termos imediatamente anteriores. Sabe-se que a soma dos dez primeiros termos dessa sequência é 4411, e que o sexto termo da sequência é 248. Qual é o terceiro termo da sequência?

3. A base de um retângulo de ouro mede 55 cm. Qual a medida de sua altura?

4. Calce a soma dos 40 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

5. A abelha que aparece na figura deseja percorrer algumas células na sua colmeia. Ela pode começar ou pela célula 1 ou pela célula 2 e move-se apenas para a célula cujo número seja superior ao seu. Sendo assim há apenas um caminho para chegar à célula 1; duas maneiras de chegar à célula 2: diretamente ou via a célula 1. Para a célula 3, pode ir de 1 para 2 e depois para 3, ou de 1 para 3, ou ainda de 2 para 3, isto é, há três caminhos diferentes. Quantos caminhos há desde o princípio até à célula n?

5 Referências Bibliográficas

Referências

[1] BROUSSEAU,Guy. In: *Didática Matemáticas, direção de Jean Brun. Tradução: Maria José Figueiredo.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 35-113.

[2] EMERIQUE, Paulo S..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 185-198.

[3] ONUCHIC, Lourdes de la R..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo*. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

[4] GOMES, Maria Laura Magalhães.: *Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[5] Pitombeira, J. B.: *O jogo de Euclides*. Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1989.

[6] HEFEZ, Abramo.: *Elementos de Aritmética*. 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] BOYER, Carl B..: *História da matemática* 2. ed. Editora Edgard Blucher, LTDA.

[8] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Tradução: Valéria de Magalhães Iório*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] Roque ROQUE, Tatiana.: *História da Matemática*. Editora Zahar, 2012.

[10] STEWART, Ian.: *Almanaque das Curiosidades Matemáticas*. Editora Zahar, 2008.

[11] STEWART, Ian.: *Incríveis Passatempos Matemáticos*. Editora Zahar, 2010.

[12] GARDNER, Martin.: *Divertimentos matemáticos*/ tradução de Bruno Mazza. 3.ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

[13] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[14] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/515/2011_00411. _PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[15] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[16] Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm. Acesso em: 25/10/2014.

[17] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-paintings-br.html. Acesso em: 25/10/2014.

[18] Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[19] Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=373. Acesso em: 25/10/2014.

[20] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/558/2011._00462_GISELI_DUARDO_MACIANO_CAMPOS.pdf?sequence=1. Acesso em: 25/10/2014.

[21] Disponível em: http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[22] Disponível em: http://legauss.blogspot.com.br/2009/06/o-general-e-o-teorema-chines-dos-restos.html. Acesso em: 25/10/2014.

[23] Disponível em: http://illuminations.nctm.org/lesson.aspx?id=655. Acesso em: 25/10/2014.

[24] Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/mt2012-08-34a.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[25] Disponível em: http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=19900. Acesso em: 25/10/2014.

Anexo

Atividade: Propriedades da sequência de Fibonacci.

Na tabela a seguir temos os seguintes elementos referentes a sequência de Fibonacci:

n: ordem do termo.

F_n: termo de ordem n.

F_{n-1}: termo de rdem $n-1$.

$\dfrac{F_n}{F_{n-1}}$: Razão entre o termo de ordem n e o anterior a ele, ou seja $n-1$.

Com o auxílio de uma calculadora, para a última coluna, preencha a tabela.

n	F_n	$F_n - 1$	$\frac{F_n}{F_n-1}$

Questão 1: O que acontece com a razão de um termo pelo seu anterior à medida que o n aumenta?

Questão 2: Qual a conclusão a que podemos chegar?

Faça o preenchimento da tabela a seguir:

n: ordem do termo .

F_n: termo de ordem n.

N	F(n)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	

Consulte a tabela acima e preencha as tabelas abaixo a seguir relacionando os termos $F(n)$ para n múltiplo de 3 e também múltiplos de 5.

N							
F(n)							

N							
F(n)							

Questão 3: Qual a relação entre $F(3)$ e $F(6)$, $F(9)$, $F(12)$, $F(15)$, $F(18)$, $F(21)$? E entre $F(5)$ e $F(10)$, $F(15)$, $F(20)$?

Questão 4: A que conclusão podemos chegar?

Questão 5: Calcule as seguintes somas:

a. S_5, do termo $F(1)$ ao $F(5)$.

b. S_8, do termo $F(1)$ ao $F(8)$.

c. S_{14}, do termo $F(1)$ ao $F(14)$.

Questão 6: Qual a relação entre $F(7)$ e S_5, $F(10)$ e S_8, $F(16)$ e S_{16}?

Questão 7: Generalize o resultado anterior.

Questão 8: Calcule a soma S_{21}, do termo $S(1)$ ao $S(21)$.

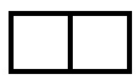
Questão 9: Calcule a soma S_{30}, do termo $S(1)$ ao $S(30)$.

Atividade: O retângulo de ouro e a sequência de Fibonacci

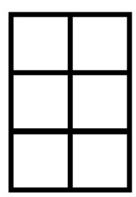
Os retângulos a seguir estão sendo desenhados a partir de quadrados cuja medida correspondem aos termos da sequência de Fibonacci.

- No primeiro retângulo pode ser usado apenas 1 quadrado de lado 1.

- No segundo retângulo podem ser usados um quadrado de lado 1 do passo anterior e um novo quadrado de lado 1.



- No terceiro retângulo podem ser usados os dois quadrados de lado 1 do passo anterior e um novo de lado 2. E assim por diante.



Note que os quadrados devem ser posicionados de forma que encaixem na figura gerando um novo retângulo. Na folha quadriculada desenhe os próximos quatro retângulos.

Questão 1: Quais as medidas dos retângulos desenhados?

Questão 2: Você conseguiria, sem desenhar, responder quais são as medidas dos próximos retângulos? Se a resposta for afirmativa, indique as medidas dos próximos três retângulos.

Questão 3: Indique a seguir a razão entre a medida maior e a medida menor de cada um dos retângulos:
Primeiro retângulo:
Segundo retângulo:

Terceiro retângulo:
Quarto retângulo:
Quinto retângulo:
Sexto retângulo:
Sétimo retângulo:
Oitavo retângulo:
Nono retângulo:

Questão 4: O que podemos concluir a respeito da razão entre as medidas dos lados dos retângulos?

Questão 5: Qual é um método eficiente para construir um retângulo de ouro?

Atividade: A Mágica de Fibonacci

Escolha em secreto dois números inteiros e o coloquem um na primeira linha e um na segunda da tabela a seguir. Complete as demais linhas (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores, formando assim uma sequência semelhante a de Fibonacci.

1°	
2°	
3°	
4°	
5°	
6°	
7°	
8°	
9°	
10°	

Perguntas: (Só revele a resposta quando for autorizado pelo professor)

a. Qual o termo da sétima linha?

b. Qual a soma dos termos que surgiram da 1^a até a 10^a linha?

c. Qual a razão entre o termo da décima linha pelo nono?

Desvendando o mistério

Como está evidenciado na regra, podemos escolher quaisquer números iniciais, sendo assim chame de x o primeiro número e de y o segundo. A seguir complete as demais linhas da tabela (3^a a 10^a) fazendo a soma das duas linhas anteriores.

1°	x
2°	y
3°	
4°	
5°	
6°	
7°	
8°	
9°	
10°	

1. Some os termos da 1^a a 10^a linha.

2. Note que 55 e 88 são múltiplos de 11, sendo assim, podemos escrever, $55x + 88y = 11(5x+8y)$. Quem é $5x+8y$? Qual a conclusão que podemos chegar.