FUNDAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL

Campus de Três Lagoas – CPTL

ENSINANDO E APRENDENDO ATRAVÉS DE EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM MEDIADA, MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM ÊNFASE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR.

José Bertoloto Júnior

2014

FUNDAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL

Campus de Três Lagoas – CPTL

ENSINANDO E APRENDENDO ATRAVÉS DE EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM MEDIADA, MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM ÊNFASE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR.

Trabalho apresentado como exigência para a conclusão do curso de Mestrado Profissional em Matemática, UFMS/SBM, sob orientação do Prof. Dr. Renato César da Silva

José Bertoloto Júnior

2014

BERTOLOTO Jr., José

“Ensinando e aprendendo através de Experiências de Aprendizagem Mediada, Modelagem e Resolução de Problemas com ênfase em Programação Linear.”

José Bertoloto Júnior – Três Lagoas/MS

Orientador: Renato César da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Mestrado Profissional em Matemática UFMS/SBM.

Palavras/Temas Chaves: Ensino e Aprendizagem Mediada; Programação Linear; Modelagem Matemática; Aprendizagem Significativa; Aplicação de Equações e Inequações; Aplicação de Funções; Aplicação de Matrizes; Aplicação de Sistemas Lineares; Otimização.

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

UFMS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

ENSINANDO E APRENDENDO ATRAVÉS DE EXPERIÊNCIAS DE APRENDIZAGEM MEDIADA, MODELAGEM E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM ÊNFASE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR

por

José Bertoloto Júnior

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Renato César da Silva (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Vitor Moretto Fernandes da Silva
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
FCT/UNESP

Outubro de 2014

Dedico este trabalho, em primeiro lugar a minha família em especial, esposa Adriana e filha Isabela, ao meu irmão Murilo Santos Matos (*in memoriam desde dezembro de 2013*) e meu avô, que foi um pai, José Virgulino da Silva (*in memoriam desde janeiro de 2014*). Agradeço também, todas as pessoas que acreditaram no meu potencial, professores e amigos que, com companheirismo, cruzaram esta jornada ao meu lado.

É chegado o fim de mais esta etapa de um caminho que pretendo continuar seguindo durante minha vida. Caminhos que espero estarem certos, pois são seguidos pelo coração. Agradeço sinceramente todo o apoio que recebi da minha família, dos meus amigos dos meus professores em especial do meu orientador Prof. Dr. Renato César da Silva. Sou grato também pelos obstáculos que encontrei durante esta trajetória, pois exigiram de mim perseverança para ultrapassá-los preparando-me mais ainda para os novos desafios que estão por vir.

Assim pretendo continuar seguindo, procurando sempre mais conhecimento, com paixão e alegria.

Muito obrigado a todos! Especialmente a Deus.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo abordar o Ensino e a Aprendizagem Mediada, a Modelagem Matemática e elementos que influenciam no envolvimento e desenvolvimento do intelecto do aluno nas aulas de Matemática focando na resolução de problemas em especial problemas de Programação Linear.

Como consequência, fornecer ao professor do Ensino Médio um apoio pedagógico que vá ao encontro das ansiedades existentes nesse segmento da educação. Ansiedades que surgem frente ao desinteresse do aluno e o mau desempenho em virtude da abordagem tradicional que tem mostrado falhas no que diz respeito a um aprendizado que seja significativo e se consolide para toda a vida do educando.

Sumário

Figuras

Tabelas

1. Introdução

O processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática aponta para grandes mudanças de forma a estabelecer relações com as demais disciplinas e atividades da educação (interdisciplinaridade), com a futura atuação profissional do aluno e também com o exercício da cidadania. Algumas novas tendências e propostas surgem da necessidade do professor se adequar a esta nova prática, com atividades que envolvam circunstâncias do dia-a-dia do aluno ou a Matemática de situações reais, promovendo a resolução de situações problemas, tarefas de investigação e atividades de modelagem.

Em uma simples busca na web, pode-se perceber que a terminologia “resolução de problemas” não é específica da Matemática. Este é um tópico presente em campos de estudo como as engenharias, informática, administração, economia, física, química, biologia, medicina, dentre outros. Muitos dos problemas abordados nessas áreas de conhecimento podem ser readequados para uma abordagem no ensino médio, pois se tratam de problemas bem contextualizados e com origem em situações concretas. Essa abordagem pode ser utilizada para introduzir o estudo de novos tópicos despertando a curiosidade e o interesse pela matemática.

Motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a Matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de atividades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da Matemática são argumentos apresentados por BARBOSA (2003) e que devem fazer parte do currículo de Matemática.

Neste trabalho apresentamos uma coleção de métodos e conceitos que podem auxiliar o dia-a-dia do professor de matemática melhorando a comunicação e o envolvimento dos alunos nas aulas de Matemática. Apresentamos também uma proposta de abordagem de problemas de Programação Linear, utilizando os métodos já citados, para o Ensino Médio, visto que a Programação Linear tem como pré-requisito vários temas estudados no Ensino Médio, sendo uma boa opção de aplicação destes métodos e temas.

No capítulo 2, colocamos a disposição do leitor os métodos de ensino e alguns conceitos importantes para o desenvolvimento de um bom processo de aprendizagem, que estimule o aluno e eleve a participação e o interesse nas aulas de Matemática. Métodos e conceitos que, se bem aplicados, transformam uma aula maçante em uma aula dinâmica e formadora de seres pensantes, que questionam e buscam mais conhecimento.

No capítulo 3, introduzimos os pré-requisitos necessários para iniciarmos o estudo da resolução de problemas de Programação Linear, que no capítulo 4 é feito enfatizando os métodos tratados no capítulo 2.

A escolha pela Programação Linear ocorreu, pois, é um assunto rico em aplicações cotidianas, situações que estão próximas a realidade dos alunos e ainda apresenta uma estreita relação com vários conceitos estudados no Ensino Médio.

Nossa abordagem ainda sugestiona a inserção deste assunto no Ensino Médio, não com profundidade, mas em nível intermediário para fornecer ao aluno uma aplicação, fechamento e significado a determinados conteúdos a fim de consolidá-los. Conteúdos tais como: Funções, Matrizes, Sistemas Lineares, etc.

2. Métodos Didáticos

Para ensinar qualquer assunto não é suficiente apenas dominar o assunto, é importante saber abordá-lo de maneira conveniente evitando ser pedante, ou seja, é necessário ser claro, coerente, estabelecer um diálogo adequado com os interlocutores (alunos), um diálogo que esteja no nível intelectual destes interlocutores. Para tanto, abusamos de metáforas, analogias e métodos.

A seguir daremos destaque para dois métodos: Experiência de Aprendizagem Mediada e Modelagem Matemática, que aliados a prática de ensinar através da resolução de problemas estimula o intelecto dando significado ao conhecimento e despertando no aluno o desejo de buscar mais informação sobre o assunto abordado.

As grandes referências para os métodos de Modelagem Matemática e Experiência de Aprendizagem Mediada são, respectivamente, GEORGE PÓLYA, MARIA SALETT BIEMBENGUT e REUVEN FEUERSTEIN, com destaque para FEUERSTEIN.

PÓLYA, reconhecido por sua obra clássica, “A arte de resolver problemas”, um marco para o ensino de Matemática. BIEMBENGUT, dedica-se a pesquisa em Processos e Métodos de Ensino e Aprendizagem, em especial, Modelagem Matemática desde 1986. FEUERSTEIN, psicólogo, judeu e israelense, nascido em 21 de agosto de 1921 em Botosan (Romênia), criador das teorias: Experiência da Aprendizagem Mediada (EAM), e o Programa de Enriquecimento Instrumental (PEI). Já na infância mostrava suas qualidades: aos 3 anos já falava duas línguas e aos 8 ensinava o hebraico às crianças de sua comunidade. Em 1944 a Romênia foi ocupada e Feuerstein, que neste período ensinava em Bucareste numa escola para filhos de deportados, foi mandado para um campo de concentração.

Afortunadamente conseguiu escapar e imigrou para Israel, onde se dedicou à educação dos adolescentes sobreviventes ao Holocausto. Tratava-se, a maior parte, de órfãos, pertencentes a diversas culturas, provindos de numerosos países europeus e africanos, que, devido às terríveis experiências vividas, apresentavam carências cognitivas muito semelhantes aos indivíduos com deficiência mental.

Foi a partir dos estudos com estes adolescentes que Feuerstein e seus colaboradores desenvolveram a EAM (Experiência de Aprendizagem Mediada) com intuito de aperfeiçoar, corrigir e desenvolver as funções cognitivas deficientes que se tornou conhecida no mundo como Método Feuerstein.

Uma busca pelos textos destes autores pode ser uma ação enriquecedora para professores de todos os níveis de ensino.

2.1. Ensino e aprendizagem mediada através da resolução de problemas.

No início da infância, a criança usa os sentidos para observar e experimentar as sensações e consequências, explorar o ambiente é uma das maneiras mais poderosas que a criança tem (ou deveria ter) à disposição para aprender. Mas o contato com o meio não é o único modo de adquirir saberes. Na realidade, boa parte das relações entre o indivíduo e seu entorno não ocorre diretamente. Em todos os casos, um elo intermediário se interpõe entre o ser humano e o mundo.

Em sua obra, o bielorrusso Lev Vygotsky (1896-1934) dedicou espaço ao estudo desses filtros entre o ser e o ambiente. Com a noção de mediação, ou aprendizagem mediada, o pesquisador mostrou a importância deles para o desenvolvimento dos chamados processos mentais superiores:

- planejar ações;
- conceber consequências para uma decisão;
- imaginar objetos etc.

Tais mecanismos psicológicos é que distinguem o homem dos outros animais e são fundamentais na aquisição de conhecimentos. Isto foi demonstrado através de diversas experiências com animais. Um macaco consegue pegar uma banana no alto de uma jaula se houver um caixote no mesmo ambiente. No entanto, se não houvesse o caixote, o macaco nem sequer cogitaria buscar outro objeto que o aproximasse de seu objetivo. "Enquanto o macaco precisa ver o instrumento, o ser humano consegue imaginá-lo ou conceber outro com a mesma função", afirma Marta Kohl de Oliveira, professora da Universidade de São Paulo (USP).

2.1.1. Elementos mediadores: os instrumentos e os signos.

O exemplo anterior também é útil para distinguir os dois tipos de elementos mediadores propostos por Vygotsky: Os instrumentos e os Signos.

Os instrumentos

Ao estar entre o homem e o ambiente, eles ampliam as possibilidades de transformação da natureza, aumentam a precisão e facilitam o trabalho. Alguns animais, sobretudo primatas, até são capazes de utilizá-los eventualmente, mas só o homem pode conceber o uso mais sofisticado, o homem é capaz de criar e transferi-los para outros de sua geração e das gerações futuras.

O signo

Exclusivamente humano. Signo é "qualquer objeto, forma ou fenômeno que representa algo diferente de si mesmo"[1]. Um exemplo claro de signos é a linguagem, por exemplo, a palavra cadeira remete ao objeto concreto cadeira. Nesse momento quando o leitor leu “cadeira”, por mais que não haja uma cadeira no ambiente que o rodeia ele imagina ou se lembra de uma cadeira. Para o homem, a capacidade de construir representações mentais que substituam os objetos do mundo real é um traço evolutivo importante: "Ela possibilita libertar-se do espaço e do tempo presentes, fazer relações mentais na ausência das próprias coisas, fazer planos e ter intenções", escreve Marta Kohl de Oliveira no livro *Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento, um Processo Sócio Histórico*.

Esta característica é fundamental para a aquisição de conhecimentos, pois permite aprender por meio da experiência do outro. A criança, por exemplo, não precisa pôr a mão na chama de uma vela para saber que ela queima. Esse conhecimento pode ser adquirido, por exemplo, com o conselho da mãe. Quando o pequeno associa a representação mental

[1] dicionário *Houaiss*

da vela à possibilidade de queimadura, ocorre uma internalização do conhecimento - e ele já não precisa das advertências maternas para evitar acidentes.

2.1.2.A interação e a internalização.

Para Vygotsky, a interação realizada entre indivíduos, face a face, tem uma função central no processo de internalização. No livro *A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*, afirma que "o caminho do objeto até a criança e desta até o objeto passa por outra pessoa". Por isso, o professor tem papel privilegiado dentro do conceito de aprendizagem mediada.

Evidentemente não se adquire conhecimentos exclusivamente com os educadores. A aprendizagem é um processo que ocorre de forma conjunta, onde as relações colaborativas entre alunos podem e devem ter espaço. "Mas o professor é o grande orquestrador de todo o processo. Além de ser o sujeito mais experiente, sua interação tem planejamento e intencionalidade educativos", explica Maria Teresa de Assunção Freitas, docente da Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF).

É preciso atenção, por parte dos educadores para não cometer excessos a respeito da aplicação prática da ideia de mediação. A crença de que o aprendizado se dá apenas na relação entre indivíduos, alguns educadores abusam das aulas em que todas as atividades são realizadas em grupo. Não é porque a aquisição de conhecimentos ocorre, sobretudo, nas interações que estar sempre em contato com o outro é essencial às aulas. "Os momentos de internalização são essenciais para consolidar o aprendizado. Eles são individuais e reflexivos por definição e precisam ser considerados na rotina das aulas" [2], diz Maria Teresa.

[2] http://revistaescola.abril.com.br/formacao/vygotsky-conceito-aprendizagem-mediada-636187.shtml?page=2

Trecho de livro

> *"O aprendizado adequadamente organizado resulta em desenvolvimento mental e põe em movimento vários processos de desenvolvimento que, de outra forma, seriam impossíveis de acontecer."* [3].

O trecho acima destaca, que o aprendizado precisa ser organizado - pelo professor que é a figura dotada de conhecimento específico e capaz de mediar o conhecimento. Por outro lado, os estudantes devem construir suas próprias ideias baseados no que foi trabalhado em sala, com os colegas e o professor.

Feuerstein[4], diz que a aprendizagem mediada é um tipo especial de interação entre o mediador e o mediado - professor e aluno, respectivamente. Essa interação deve ser caracterizada por uma colocação intencional e planejada do professor que age entre os estímulos externos e o aluno. O professor tem a função de selecionar, dar forma, focalizar, intensificar os estímulos e levar o aluno a refletir sobre as relações possíveis com suas próprias experiências já vividas, a fim de alcançar uma aprendizagem significativa, intensificando as mudanças no sujeito.

Os resultados alcançados pela aprendizagem mediada dependem da qualidade da interação entre mediador/professor e mediado/aluno. Estabelecer com o aluno relações baseadas na colaboração mútua e na coordenação das ações dos indivíduos a fim de alcançar os objetivos é fundamental. O docente que tem sua ação pautada pela mediação, não pode ter um perfil de dominação e o autoritarismo, mas sim de a negociação, colaboração e diálogo. Enfim, posturas que facilitam a aprendizagem.

A mediação deve ser fundamentada na reflexão e no planejamento e, ao planejar sua mediação, o professor deve levar em conta que:

- ✓ Tem um papel de parceiro na aprendizagem;
- ✓ É uma testemunha privilegiada do embate entre o mediado e o ambiente;

---

3 Lev Vygotsky no livro *A Formação Social da Mente: O Desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores*.

4 FEUERSTEIN, Reuven. FALK, Louis. FEURSTEIN, Rafi. **Definitions of essential concepts and terms.A workingglossary.** Jerusalém: ICELP, 1998. Apud MEIER, Marcos; GARCIA, Sandra. **Mediação da Aprendizagem:** contribuições de Feuerstein e de Vygotsky. Curitiba, 2007.

- ✓ É um observador do comportamento do mediado, avaliando-o e favorecendo seu progresso, sua melhoria no pensar;
- ✓ Instaura uma relação de ajuda e não de sancionamento, de coerção;
- ✓ Tem uma tarefa essencial de organizar o contexto, imaginando e propondo situações-problema adequadas.
- ✓ Deve colocar-se no lugar do outro, perceber sua lógica e suas intenções.

Com o trabalho de mediação o aluno acaba adquirindo mais autonomia em relação ao seu aprendizado e a intervenção do professor torna-se menos frequente e necessária.

A seguir citamos as estratégias que fundamentam a Experiência de Aprendizagem Mediada. O texto que segue é baseado em um trabalho de Regilene Ribeiro Danesi Ron, especialista em Educação Profissional da Gerência de Educação do SENAI/SP. RON, tem como base de seus textos os trabalhos de Feuerstein e Vygotsky.

2.1.3.Experiência de Aprendizagem Mediada - EAM

A aprendizagem mediada possibilita que o indivíduo adquira os pré-requisitos cognitivos necessários para uma boa atividade mental, como dito anteriormente, o aluno torna-se mais autônomo e independente durante a resolução de problemas e aceitação de novos desafios. A mediação pode ser dividida em três fases:

- ✓ **Planejamento**: precede a ação, e o mediador deve refletir sobre seus objetivos e ter a capacidade de prever, de antecipar ações e reações.
- ✓ **Interação**: execução do que foi planejado com a simultânea reflexão sobre os objetivos e o que está sendo executado, sobre a própria interação. Aqui já se inicia a próxima fase, a avaliação.
- ✓ **Avaliação**: do que aconteceu, ou seja, se o que foi planejado realmente ocorreu de forma adequada e com resultados relevantes; se os objetivos foram alcançados.

2.1.3.1. Critérios de Mediação

Feuerstein, define critérios de mediação que podemos ter como referência para avaliar o perfil e a qualidade da mediação oferecida pelo professor. Alguns considerados universais, pois são fundamentais e devem estar sempre presentes na interação entre mediador mediado.

Intencionalidade e reciprocidade

A **intencionalidade** pressupõe que o professor esteja determinado a aproximar-se do aluno, a ajudá-lo e a compreender o que está sendo aprendido. O conceito de reciprocidade advém do fato de que o professor e o aluno compartilham dessa intenção, ou seja, o professor está preocupado em ensinar com qualidade e que o aluno realmente aprenda enquanto que o aluno ao perceber esta intenção responde aos estímulos tendo a partir daí um papel mais ativo e preocupado com sua própria aprendizagem. Para que isto ocorra, o professor deve estar aberto às respostas do aluno que demonstra reciprocidade ao cooperar, ao esforçar-se para mudar e envolver-se no processo de aprendizagem.

O aluno percebe a intenção do professor através da maneira como ele organiza os estímulos, como estabelece canais comunicativos para transmitir sua intenção e como cria vínculos para garantir e facilitar a aprendizagem.

Portanto, a **reciprocidade**, é uma resposta explícita do aluno a esta postura do professor de querer ensinar e preocupar-se com o resultado, ou seja, se realmente houve um aprendizado. Para obter essa reciprocidade o professor deve, por exemplo:

- ✓ **Provocar curiosidade**: apresentar uma tarefa, um problema de maneira desafiadora para gerar uma expectativa no mediado, uma motivação para resolver a atividade proposta.
- ✓ **Compartilhar intenções**: o mediador pode encontrar uma maneira de transmitir ao mediado os motivos pelos quais escolheu trabalhar, em determinado momento, certos conteúdos e atividades.

- ✓ **Criar desequilíbrios**: o mediador pode criar, intencionalmente, dissonâncias, apresentando absurdos e contradições, para atrair a atenção do mediado e ajudá-lo a criar a necessidade de aprender para resolver esse desequilíbrio.
- ✓ **Proporcionar exposição repetida aos estímulos (treinar)**: o mediador expõe o mediado ao mesmo estímulo de forma repetida, facilitando a formação de hábitos.

Transcendência

É o comportamento que o professor consegue estimular no aluno para que ele não se limite a resolver problemas imediatos da aula. O professor deve criar condições para que o aluno seja capaz de generalizar o que foi aprendido, ou seja, que o aluno consiga estender os exemplos para conceitos mais abrangentes, para as situações do dia-a-dia e do trabalho e que conecte a aprendizagem atual com as anteriores e com as prováveis situações futuras. O professor deve sempre estar conectando em seus discursos do presente com o que foi visto anteriormente e com o que ainda será visto, só o professor tem essa visão panorâmica do contexto e do processo de aprendizagem que ele está mediando. Para alcançar a transcendência o professor deve, por exemplo, ajudar o aluno a:

- ✓ Discernir elementos essenciais inerentes às atividades realizadas.
- ✓ Extrair e generalizar princípios, formular regras e reconhecer a utilidade de elementos comuns às várias atividades.
- ✓ Orientar-se para necessidades futuras, superando o momento presente.
- ✓ Enriquecer seu repertório de experiências por meio de orientações familiares e inovadoras.

Mediação do significado

Um dos problemas que os professores encontram nos dias de hoje é conquistar o interesse dos alunos para o assunto que pretende ensinar. Dar significado ou conectar o assunto a algo que seja significativo é uma das estratégias adotadas. Para tanto, é necessário que o aluno se aproprie da finalidade das propostas e de sua aplicabilidade. O significado aumenta envolvimento ativo e emocional no desenvolvimento dos estudos. O professor pode apresentar o significado mas também pode preferencialmente ajudar o indivíduo a buscar significado em tudo o que vive e experimenta. Claro que nem sempre haverá uma resposta imediata, mas o processo de busca já é um meio de desenvolvimento do conhecimento no contexto da pergunta. Qualquer questão ou fato pode ser questionado, “Por que vou fazer isso?” “Para que vou fazer isso?”. Para mediar o significado o professor pode, por exemplo:

- ✓ Atribuir significado afetivo e social sobre os vários aspectos das experiências compartilhadas, inclusive sentimentos e atitudes pessoais e valores socioculturais universais. Responda as perguntas: “Por que ... ? Para que ... ?”
- ✓ Encorajar a busca pelo significado, fazendo com que o mediado questione os propósitos de suas experiências de vida e atividades propostas.
- ✓ Ajudar o mediado a diferenciar entre significados pessoais e significados universais.

Há, ainda, outros critérios que não são considerados universais, mas complementam e enriquecem o processo de mediação.

Mediação do sentimento de competência

É o momento que o professor tem para motivar o aluno fazendo com que ele perceba sua capacidade. O aluno precisa saber que o sucesso em uma tarefa demonstra em parte sua própria competência. Cabe ao professor ser o agente que transmite ao aluno o valor de sua conquista mediante o esforço investido para isso. Para mediar o sentimento de competência, o professor pode, por exemplo:

- ✓ Propor tarefas desafiadoras, assegurando um equilíbrio entre a familiaridade e a novidade das atividades.
- ✓ Ajudar o mediado a entender seus próprios processos mentais, tanto no caso de um comportamento apropriado quanto deficiente.
- ✓ Atribuir valor ao desempenho eficiente, fazendo com que o mediado interprete seu progresso.
- ✓ Prevenir a frustração em caso de fracasso, enfatizando os pré-requisitos para a realização da atividade proposta e mostrando o nível de investimento empregado, mesmo que ainda sem o sucesso esperado.

Mediação do comportamento de compartilhar

É o estímulo que o professor pode provocar no sentido de desenvolver no aluno a capacidade de cooperar. O professor deve ensinar a importância do respeito mútuo e de considerar as necessidades e pontos de vista diferentes dos colegas. Apesar das diferenças que separam o aluno de seus colegas e até mesmo do professor, todos têm objetivos e interesses em comum e isso deve ficar claro para os alunos.

Para mediar o comportamento de compartilhar o professor pode, por exemplo, encorajar o aluno a compartilhar suas experiências de vida, abrindo um canal de comunicação para começar o dia contando algo pessoal.

Mediação do controle e regulação da conduta

Nesse momento o professor deve estimular o autocontrole do aluno. Ensiná-lo a lidar com a impulsividade e também com a passividade, ou seja, quando o aluno demora demais para iniciar ou não está disposto a realizar qualquer atividade. O professor deve mostrar para o aluno a importância de controlar suas emoções perante as diversas situações que enfrenta no dia-a-dia. Para mediar o controle e a regulação da conduta o professor pode, por exemplo:

- ✓ Fornecer os pré-requisitos necessários para a realização da atividade.
- ✓ Assegurar que o mediado esteja consciente do nível de complexidade da atividade proposta e de seus pré-requisitos antes de resolvê-la.
- ✓ Adiar a resposta do mediado quando este antecipa uma reação prematura e impulsiva.
- ✓ Encorajar a resposta do mediado quando percebe que este é capaz de responder adequadamente.

Mediação da Individuação e da diferenciação psicológica

Para MEIER (2007, p.150), é quando o sujeito irá constituir-se como indivíduo por meio de autorreflexões e autoconhecimento, porém, ela ocorre por meio dos relacionamentos com outros sujeitos. Para mediar esse critério, o professor pode, por exemplo:

- ✓ Estimular respostas divergentes e encorajar o pensamento independente e original do mediado. Aceitar o mediado como pessoa singular e entendê-lo como participante ativo da aprendizagem, capaz de pensar de forma diferente do seu companheiro e do professor.

Mediação da conduta de busca, de planejamento e de realização de objetivos

As crianças que não desenvolvem esse comportamento de busca, planejamento e realização de objetivos acaba sempre buscando a gratificação imediata, torna-se impulsiva, sempre buscando satisfação imediata. Portanto, a mediação deve direcionar o aluno para o hábito de estabelecer objetivos através de um planejamento e a busca destes objetivos. O aluno deve encarar os objetivos estabelecidos como um desafio que deve ser vencido.

Para mediar esse critério, o professor deve fazer com que o aluno planeje de forma adequada e realista as diferentes atividades que irá desenvolver.

Mediação do desafio: busca pelo novo e complexo

O ser humano, quando não busca o novo é pela necessidade de conforto, segurança e sobrevivência. Isso implica a falta de mudança. No entanto, há também uma necessidade de se transformar e, para isso, é necessário experimentar algo novo. Para mediar esse critério o professor pode, por exemplo:

- ✓ Fazer com que o aluno aprenda a lidar com mudanças, sabendo manter-se em situações que impliquem desequilíbrio.
- ✓ Promover situações em que os alunos se sintam desafiados na execução de suas tarefas.
- ✓ Mostrar ao aluno como medir e controlar riscos, criando um clima de segurança.

Mediação da consciência de modificabilidade humana

Mesmo não estando entre os critérios universais, é um critério fundamental. Neste momento vale lembrar os pressupostos da teoria de Feuerstein: “todos os seres humanos são modificáveis”; “meu mediado específico é modificável”; “eu, o mediador deste mediado, posso ajudá-lo a se modificar"; "eu, mediador, sou modificável"; "o sistema, o contexto, o ambiente dentro do qual eu, mediador, estou interagindo é modificável". Para mediar esse critério, o professor pode, por exemplo:

- ✓ Fazer com que o mediado tome consciência de que pode mudar seu próprio funcionamento cognitivo.
- ✓ Auxiliar o mediado a perceber que é capaz de produzir e processar informações e tomar conhecimento de seu potencial e de suas dificuldades, passando a ter consciência do que deve ser modificado.

Mediação da escolha da alternativa otimista

A reação do aluno frente a situações problemas onde pode-se ter sucesso ou fracasso determina sua postura otimista ou não. A maioria dos alunos que tem dificuldades com a matemática coloca-se no grupo dos pessimistas pensando ou dizendo: "isso é muito difícil", "não é pra mim", "não consigo", etc. Desta forma este aluno já está fadado ao fracasso. O professor deve fazer com que o aluno perceba que a reação otimista fará com que ele perceba melhor as alternativas, os caminhos possíveis, as estratégias que possibilitarão que ele alcance os objetivos e vença os desafios. Essa escolha está estreitamente ligada ao sentimento de competência desse indivíduo.

Para mediar a escolha da alternativa otimista o professor pode, por exemplo, levar o aluno a perceber que existem possibilidades de resolver situações complexas e vencer os obstáculos que se apresentam.

Mediação do sentimento de pertença

Sentimento de pertença é aquele que faz com que o aluno seja individualista, não aceite opiniões deferentes das suas. Se o sentimento de pertença não for trabalhado, o aluno acaba se isolando, comprometendo outras qualidades pessoais que devem ser desenvolvidas, como por exemplo, o trabalho em equipe, o compartilhar. Para mediar o sentimento de pertença o professor pode, por exemplo:

- ✓ Desenvolver no aluno o sentimento de coletividade, de não estar sozinho, de poder fazer parte da sociedade.

- ✓ Propiciar oportunidades para que o mediado conviva e aceite uma gama maior de opiniões.

Dessa forma, uma postura mediadora por parte do docente pode conduzir o aluno ao desenvolvimento de funções cognitivas e, consequentemente, operações mentais, não somente de fundamentos técnicos e científicos, capacidades técnicas, sociais, organizativas e metodológicas e conhecimentos.

Para uma mediação de qualidade, considerando os diversos critérios propostos por Feuerstein, RON (2011) coloca uma lista de ações que o professor deve desenvolver:

- ✓ Estabelecer o nível inicial de funcionamento do mediado, observando e coletando informações;
- ✓ Identificar, tratar e ou encaminhar para tratamento deficiências psicomotoras;
- ✓ Ajudar o mediado a tomar consciência e verbalizar processos mentais;
- ✓ Ajudar o mediado a adquirir estratégias cognitivas eficazes;
- ✓ Identificar fatores afetivo-emocionais que possam prejudicar a aprendizagem;
- ✓ Identificar habilidades sociais deficientes;
- ✓ Identificar funções cognitivas deficientes;
- ✓ Elaborar tarefas desafiadoras;
- ✓ Apresentar tarefas de modo motivador;
- ✓ Preparar tarefas alternativas;
- ✓ Privilegiar tarefas que conduzam à transcendência;
- ✓ Atribuir significado às tarefas;
- ✓ Disponibilizar recursos diferenciados;
- ✓ Encorajar a aprendizagem coletiva;
- ✓ Aplicar tarefas individualmente adaptadas;
- ✓ Criar situações de desequilíbrio;
- ✓ Transmitir ao mediado uma crença sincera na sua modificabilidade;
- ✓ Selecionar estímulos;
- ✓ Relacionar as tarefas atuais com as antigas;
- ✓ Relacionar as tarefas atuais com situações futuras;
- ✓ Regular a intensidade e a frequência da mediação;
- ✓ Estabelecer relações entre os conteúdos formativos de várias unidades curriculares (interdisciplinaridade);

- ✓ Regular e adaptar respostas e reações do mediado a várias situações de aprendizagem;
- ✓ Monitorar a interação, controlando a reciprocidade do mediado, a intensidade da mediação, a adequação do ambiente e a efetividade dos estímulos.

Para começar a trabalhar com uma postura mais mediadora, é possível mudar pequenos aspectos na atuação docente como, por exemplo:

- ✓ No início de uma aula ou atividade apresentar o que será feito, como será feito e porque será feito.
- ✓ Ao final de uma aula ou atividade perguntar o que foi aprendido ou realizado. Isso ajuda a trabalhar a memória do aluno e fazê-lo perceber que pode se modificar.
- ✓ Encorajar os alunos a resumir os acontecimentos do dia numa sequência para melhorar a capacidade do aluno de analisar e sintetizar.
- ✓ Fazer conexões entre fatos atuais, passados e futuros para ajudar o aluno a melhorar sua percepção global da realidade.
- ✓ Elaborar situações desafiadoras possíveis de serem realizadas, mas não fáceis demais, para trabalhar o sentimento de competência dos alunos.
- ✓ Pedir aos alunos, antes de resolverem um problema ou iniciar uma atividade, que coloquem no papel os principais passos que pretendem seguir.
- ✓ Propor tarefas variadas e repetidas para fazer com que o aluno internalize o que desenvolveu: conceitos, conhecimentos, habilidades, funções cognitivas etc., possibilitando a transcendência.
- ✓ Fazer com que o aluno entenda o processo que utilizou para solucionar problemas e realizar atividades, bem como o processo que seus colegas utilizaram.
- ✓ Pedir exemplos aos alunos durante as aulas e a realização de atividades, mostrando se o exemplo é válido ou não para possibilitar a transcendência.
- ✓ Compartilhar entre os professores suas experiências e as de seus alunos.

Todo o processo de mediação requer um objetivo, que se torna mais fácil de alcançar quando o tema abordado tem significado para o mediado. É importante que o tema abordado seja relevante para o mediado e que ele tenha consciência disso.

2.1.4. Aprendizado significativo.

Aprendizagem significativa é o conceito central da teoria a aprendizagem de David Ausubel. Segundo MOREIRA (1999) "a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual uma nova informação relaciona-se, de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária, a um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo". De maneira mais simples, os conhecimentos que são trazidos ao aluno pelo professor se conectam ao conhecimento prévio do aluno. AUSUBEL (1963) define este conhecimento prévio como “conceito subsunçor ou simplesmente "subsunçor". Subsunçor são estruturas que surgem no momento que a nova informação se conecta com a já existente. Sua abrangência vai depender da frequência com que o significado sobre o assunto específico é colocado.

Portanto, a aprendizagem significativa ocorre quando é estabelecido o link, entre a nova informação e os conceitos relevantes já existentes na estrutura cognitiva do aluno. A aprendizagem significativa implica no desenvolvimento do conceito subsunçor. Os novos assuntos só são absorvidos de maneira relevante para o aluno se houver real significado, e já se refiram a conceitos e proposições pré-disponíveis, que proporcionam as âncoras conceituais.

Nesse aspecto a resolução de problemas é uma ferramenta útil para dar significado aos diversos temas abordados no processo de aprendizagem.

2.2. A Resolução de problemas.

Ao analisarmos os Parâmetros Curriculares Nacionais, de 1998, e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, de 2006, encontramos alguns trechos que indicam a resolução de situações problemas como uma das metodologias a serem adotadas no Ensino Médio. No primeiro documento publicado em 1998, o MEC aponta como objetivos do Ensino Médio:

> "Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam as necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico." (BRASIL, 1998, p.6)

Apesar da recomendação grande parte dos professores são inseguros quanto ao seu uso por vários fatores, por exemplo, citamos dois:

- A falta de leitura sobre o tema, dificultando que ele torne a resolução de problemas uma prática frequente em suas aulas.
- A sensação que o professor pode ter de que está perdendo tempo. Pois facilmente pode-se ocupar o espaço de uma aula inteira apenas para a discussão e compreensão de um problema.

Quanto a questão do tempo em sala de aula deve-se considerar a afirmação de Pólya (2006, p. v):

> "Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo, então estará desenvolvendo seus alunos intelectualmente."

George Pólya, conhecido por sua obra clássica, "A arte de resolver problemas", é um marco para o ensino de Matemática, principalmente quando se fala em "resolução de problemas". No capítulo "Em aula", temos a descrição de estratégias e atitudes esperadas de um professor, de forma que ele consiga desenvolver no aluno operações mentais úteis ao seu aprendizado.

São sugeridas etapas que levarão a resolução do problema, tais como:

- ✓ Compreensão do problema;
- ✓ Estabelecimento de um plano;
- ✓ Execução do plano;
- ✓ Retrospecto.

PÓLYA destaca a importância em escolher corretamente os problemas para os seus alunos, tanto no que diz respeito ao nível quanto ao contexto. Não tão difíceis, nem muito fáceis, naturais e interessantes, que desafiem a curiosidade e que sejam adequados ao conhecimento do aluno. Reservar um tempo para a discussão do problema, apresentá-lo adequadamente, dentro do contexto correto. Então, o professor começa a ajudar o aluno com intervenções discretas, "não muito pouco" para não haver pouco progresso e "nem muito" para que o aluno tenha o que fazer. (PÓLYA, 1997, p.3)

A fim de escolher de forma adequada os problemas que vão colaborar na consolidação ou introdução de um conceito, podemos nos basear no que PEREIRA (2002) cita. Segundo PEREIRA (2002), as características de um bom problema são as que seguem:

- ✓ Ter enunciado acessível e de fácil compreensão;
- ✓ Exercitar o pensar matemático do aluno;
- ✓ Exigir criatividade na resolução;
- ✓ Ser útil para a introdução ou consolidação de ideias e/ou conceitos matemáticos;
- ✓ Não deve ser muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

Durante a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, o professor deve manter uma postura de interatividade com os alunos. Afinal a interatividade entre alunos e professor é a base desta metodologia. O professor não deve dar respostas, mas responder às perguntas com novas perguntas de tal forma que conduza o aluno à resolução do problema. As novas perguntas devem auxiliar "discretamente, apenas indicando a direção geral, deixando muito para o estudante fazer" (PÓLYA, 2006, p.3)

Oportunizar ao aluno descobertas matemáticas é um dos principais objetivos do processo de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática, conforme PÓLYA destaca em seu livro "A arte de resolver problemas":

> “Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter (PÓLYA, 2006, p.v)”

A Pesquisa Operacional é um dos ramos da Matemática que se ocupa da resolução de problemas de grande aplicabilidade em situações concretas. Nesse trabalho, nosso foco será a Programação Linear pois é uma das subáreas da Pesquisa Operacional mais utilizada e por ser possível seu estudo introdutório no Ensino Médio. A simplicidade dos conceitos básicos necessários é a maior vantagem em se utilizar problemas de Programação Linear. Assuntos como a solução de desigualdades do primeiro grau, matrizes e determinantes que já são tradicionalmente abordados no ensino médio são pré-requisitos para a resolução de problemas de Programação Linear.

Apesar do tema Programação Linear não fazer parte do currículo do ensino médio, a aplicabilidade e possibilidade de seu uso na introdução ou complementação de outros conceitos justifica a sua introdução nesse nível de ensino. Assim, estes problemas podem levar o aluno a perceber as interconexões existentes entre os diversos conceitos tratados pela matemática no Ensino Médio.

Os problemas de Programação Linear, são problemas onde queremos maximizar ou minimizar alguma variável, ou seja, queremos otimizá-la, e Problemas de otimização despertam a curiosidade e desafiam os alunos a buscar soluções para situações relevantes que muitas vezes fazem parte do dia-a-dia do aluno. Além disso, estimula o estudo e aprofundamento de conceitos matemáticos contribuindo significativamente para a formação do aluno, dando a ele uma postura mais crítica frente a muitas situações que ele enfrentará durante sua vida adulta.

O ensino de Matemática é habitualmente realizado seguindo o modelo:

- ✓ Definição de conceitos (axiomas, proposições, etc.)
- ✓ Exemplos

✓ Exercícios de fixação

Problemas de aplicação, quando muito, são utilizados no final dos capítulos, servindo apenas como uma maneira de apresentar algumas aplicações práticas dos conceitos abordados, o que é válido, porém não deveria ser a única prática. Também devem ser utilizados como disparador (fato desencadeador) da curiosidade, do interesse, da necessidade de se aprender matemática.

Os alunos costumam dar importância apenas aos conteúdos que ele julga possuírem aplicações reais para a sua realidade de vida, profissional ou futuro escolar. Daí, surge a necessidade, por parte dos professores, em relacionar de maneira mais clara a matemática escolar com suas aplicações.

Há vontade de muitos professores em mudar, porém se não houver apoio teórico e pedagógico de uma equipe comprometida, ele tende a voltar ao ensino tradicional, onde se sente mais seguro. Afinal, a grande maioria foi educada desta forma, desde a educação básica até o fim de sua graduação. É onde estão seus referenciais.

A escolha de problemas de otimização contribui com a perspectiva de promover um enfoque mais contextualizado das ideias matemáticas estudadas. Problemas dessa natureza possuem uma grande aplicabilidade em situações concretas, vivenciadas no cotidiano da sociedade em que vivemos. Reduzir custos, maximizar lucros, obter a melhor distribuição de rotas em uma empresa de transportes, distribuir adequadamente os alimentos em uma dieta alimentar com menor custo, são alguns exemplos de situações que podem ser utilizadas.

Qualquer que se aventure a resolver um problema precisa interpretá-lo, organizar os dados, identificar o objetivo e decidir qual seria o melhor modelo já existente, ou se não existir, criar um, para que se alcance a solução. Para enfrentar estes problemas precisamos conhecer a Modelagem Matemática.

2.3. Modelagem matemática

2.3.1. O que é Modelagem e o que é Modelo.

Como dizia Galileu Galilei (1626): “O universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes, ficamos às escuras, num labirinto escuro."

E é com esse objetivo que estamos numa incansável busca procurando sempre sistematizar os fenômenos e acontecimentos, estruturas e situações do dia-a-dia. E para iniciarmos nosso assunto, tomemos um exemplo bem cotidiano!

Vamos pensar em um cozinheiro. Ao elaborar uma receita, o cozinheiro tem vários objetivos. Os ingredientes que tem a sua disposição, os sabores que pretende obter, quantas pessoas quer servir, etc. Quando o cozinheiro está testando, acrescentando ou tirando ingredientes, está ocorrendo um processo criativo que equivale a modelagem. Já quando a receita está pronta e atende sua necessidade ele tem em mãos um modelo.

Esta analogia exemplifica bem a diferença que devemos ter clara quando falamos de modelagem matemática. Modelo Matemático é o produto final que se obtém após um processo denominado modelagem matemática.

Se outra pessoa ou ele mesmo utiliza essa receita em outro momento, ou até mesmo faz algumas alterações como quantidades de determinados ingredientes, temos um exemplo de uma aplicação do modelo.

Já no caso de outra pessoa ou o próprio cozinheiro realizar alguma alteração mais profunda, um novo processo de modelagem começa.

Enfim, em termos gerais o Modelo Matemático é o produto final do processo de sua criação, a Modelagem Matemática.

Se buscarmos entre as primeiras situações onde há Modelagem Matemática, nos encontraremos na primeira metade do século VI a.C. e o início do século V a.C., quando o matemático filósofo grego Pitágoras comprovou o famoso teorema que recebe seu nome. Teorema que até hoje serve de modelo para vários cálculos geométricos.

Segundo BASSANEZI (2006), um modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de forma simplificada, uma parte da realidade. Partindo desse ponto a Modelagem Matemática pode ser entendida como processo de criação do Modelo Matemático, como ficou evidente no exemplo do cozinheiro.

O papel dos Modelos Matemáticos é amplamente reconhecido na sociedade devido às aplicações bem sucedidas, que tem impactos diretos ou indiretos no desenvolvimento de tecnologias e no comportamento das pessoas. Eles servem de maneira satisfatória à tarefa de descrever e predizer fenômenos, físicos, naturais e sociais, cabendo ao modelador a tarefa de criá-los e conforme seus interesses e objetivos.

2.3.2. A modelagem Matemática no contexto da Educação Básica.

No contexto da Educação Matemática a Modelagem Matemática tem influências fortes da Matemática Aplicada como exemplificado no início, em que o ato de modelar é apresentado em termos de construção de um Modelo Matemático, traduzido em esquemas explicativos, podendo ser uma equação, um sistema de equações ou inequações algébricas, um gráfico, uma tabela, etc. Também e ao mesmo tempo na Educação Matemática pode ser compreendida no contexto das práticas escolares, como uma atividade em consonância com objetivos de uma educação matemática crítica. É no campo da transição de base da prática do matemático aplicado à prática docente no ensino e a aprendizagem de Matemática que surgem uma variedade de concepções de modelagem.

Segundo BASSANEZI, trabalhar com modelagem no ensino não é mera questão de ampliar conhecimento matemático, mas, sobretudo, de se estruturar a maneira de pensar e agir do aluno. Espera-se que, durante o processo de modelagem, alunos e professor adquiram e desenvolvam o senso crítico, ou seja, uma forma de cidadania baseada no entendimento comum.

Ainda, na visão de BASSANEZI, a Modelagem matemática pode ser utilizada como estratégia de ensino e aprendizagem, sendo um caminho para tornar a matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável.

Desta perspectiva a modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, onde "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (BASSANEZI, 2006, p. 38).

Diversos autores propõem intervenções em salas de aula por meio da inclusão da Modelagem Matemática nas propostas de ensino. Assim, esses professores poderão experimentar no contexto de sua própria sala de aula esta ação, desenvolvendo seus conhecimentos práticos sobre a modelagem. Podemos afirmar que uma das dificuldades, e ao mesmo tempo, vantagens, para fazer a modelagem é que existem concepções diferentes sobre os objetivos e sobre a forma de conduzir este trabalho, ou seja, existem concepções diferentes sobre a Modelagem Matemática. Entendemos que na diversidade de concepções de modelagem, o professor terá uma variedade de subsídios para desenvolver suas próprias práticas com modelagem coerentes com diversos contextos e objetivos educacionais.

Nota-se nas afirmações de diversos autores, algumas já mencionadas acima, sobre a questão do contexto da modelagem quando concebida como estratégia pedagógica, que ela oferece ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos úteis e com significados.

Quando concebem Modelagem Matemática como um método ou uma metodologia de ensino e aprendizagem, BIEMBENGUT e HEIN (2005) propõem que atividades devem partir de temas do cotidiano dos alunos. Afirmam que ao participarem de um trabalho com modelagem, no qual o conteúdo vincula-se à realidade, professores e alunos tornar-se-ão mais entusiastas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem da Matemática e perceberão mais facilmente o papel que lhes cabem na preparação do indivíduo para atuar no meio circundante. A menção de que um trabalho com Modelagem Matemática deve partir de temas que façam parte da vivência dos alunos é também defendida por outros estudiosos da comunidade brasileira de educadores matemáticos.

Mas quais são as etapas para elaborarmos um bom Modelo Matemático? Ao responder esta pergunta estaremos sistematizando algo que provavelmente já é rotina de muitos professores e alunos.

2.3.3. As etapas da Modelagem Matemática

Na visão de BASSANEZI (2006), “Modelagem é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual”.

Ele defende ainda que a modelagem de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas, descritas a seguir:

✓ **Experimentação:** É o momento onde se processa a obtenção de dados;

✓ **Abstração:** É o procedimento que deve levar à formulação dos Modelos Matemáticos. Nesta fase procura-se estabelecer: Seleção de variáveis, problematização, formulação de hipóteses e simplificação.

✓ **Resolução:** O Modelo Matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente – e como num dicionário, a linguagem matemática admite “sinônimos” que traduzem os diferentes graus de sofisticação da linguagem natural;

✓ **Validação:** É o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta etapa, os modelos, juntamente com as hipóteses que lhes são atribuídas, devem ser testados em confronto com os dados empíricos, comparando suas soluções e previsões com os valores obtidos no sistema real. O grau de aproximação desejado destas previsões será o fator preponderante para validação;

✓ **Modificação:** Alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação dos modelos. Quando os modelos são obtidos considerando simplificações e idealizações da realidade, suas soluções geralmente não conduzem às previsões corretas e definitivas, pois o aprofundamento da teoria implica na reformulação dos modelos. Como nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado, agora poderíamos dizer que um bom modelo é aquele que propicia a formulação de novos modelos, sendo esta reformulação de modelos uma das partes fundamentais do processo de modelagem.

Maria Salett Biembengut e Nelson Hein (2005) concluem que Matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos, e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.

No ponto de vista do aluno isso é um “fato”, porém todo matemático sabe que Matemática é uma linguagem utilizada para descrever o mundo através dos números e das formas, portando essa disjunção não descreve a real relação entre o mundo e a matemática.

Desta forma, a interação, que permite representar uma situação “real” com modelo matemático, quebra esse ponto de vista do aluno e envolve uma série de procedimentos descritos a seguir:

- ✓ **Interação:**
  - o Reconhecimento da situação problema;
  - o Familiarização com o assunto a ser modelado, referencial teórico.
- ✓ **Interpretação matemática do problema:**
  - o Formulação do problema, hipótese;
  - o Resolução do problema em termos matemáticos.
- ✓ **Modelo Matemático:**
  - o Interpretação da solução;
  - o Validação do modelo, avaliação.

Se o modelo não atender às necessidades que o geram, o processo deve ser retomado na segunda etapa – Interpretação matemática do problema – mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc.

Existe uma teoria intitulada TEORIA DOS QUATRO PASSOS, proposta por PÓLYA, que sistematiza a resolução de problemas. Vejamos a seguir mais detalhes.

2.3.3.1. Teoria dos Quatro Passos (Pólya)

George Pólya, referenciado em inúmeros trabalhos que tratam da resolução de problemas, é chamado de “pai da moderna teoria da resolução de problemas” por ter escrito alguns livros que tratavam deste tema. Em um deles, “A arte de resolver problemas”, no primeiro capítulo chamado “Em Aula”, ele define 4 etapas/passos que estruturam a resolução de um problema. A seguir, apresentamos estes passos:

1º Passo – Compreensão do Problema:

- ✓ Ler atentamente o problema, quantas vezes forem necessárias até ter certeza de total entendimento de todos os termos analisados.
- ✓ Reescrever o problema com as suas próprias palavras e se possível discutir com outras pessoas.
- ✓ Identificar as informações necessárias para a resolução do problema e verificar se todas elas podem ser encontradas no problema.

2º Passo – Dedução de um Modelo Matemático que descreva o problema:

- ✓ Dar nomes as variáveis do problema e classificá-las em dependentes e independentes.
- ✓ Traduzir o problema para uma linguagem matemática usando uma equação ou inequação.

3º Passo – Resolução do Modelo Matemático e verificação da solução encontrada:

- ✓ Resolver a equação utilizando métodos algébricos e verificar a veracidade do resultado encontrado ou:
- ✓ Com um computador, resolver graficamente o problema e se possível através de métodos algébricos verificar a veracidade do resultado, ou:
- ✓ Caso não haja outra forma de resolução, resolver o problema graficamente ou numericamente.

4º Passo – Fazendo a Interpretação da solução encontrada (Validação).

- ✓ Interprete o resultado encontrado e verifique se ele é possível dentro do problema proposto. Isso, no caso de os resultados não refletirem os dados correntes sobre o processo.

É importante observar que as etapas da modelagem matemática estão baseadas e podem ser encaixadas nos quatro passos de PÓLYA, ou seja, as etapas da modelagem são um detalhamento dos quatro passos de PÓLYA.

2.3.4. Exemplos de Modelagem Matemática

Maximizando a área.

Com a necessidade de avaliar uma infinidade de problemas onde é preciso determinar em que situações os valores são máximos ou mínimos surgiram modelos matemáticas que vem sendo modificados, adaptados e aprimorados para esta finalidade. Grande parte destes modelos envolve principalmente funções e como consequência a análise de pontos críticos, derivadas e integrais. No ensino médio temos certa limitação na exploração desses modelos, não podemos explorar, infelizmente, o cálculo diferencial e integral, porém temos definidas as funções de 1º e de 2º graus, onde temos ferramentas para determinar seus máximos e mínimos.

O problema

Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular. Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9m e 4m, Quais devem ser as dimensões do jardim para que ele tenha a maior área possível?[5]

Maximizando a área.

O primeiro passo é fazer uma leitura do problema abstraindo na forma de um esboço/desenho os dados fornecidos pelo enunciado. Veja a figura 1.

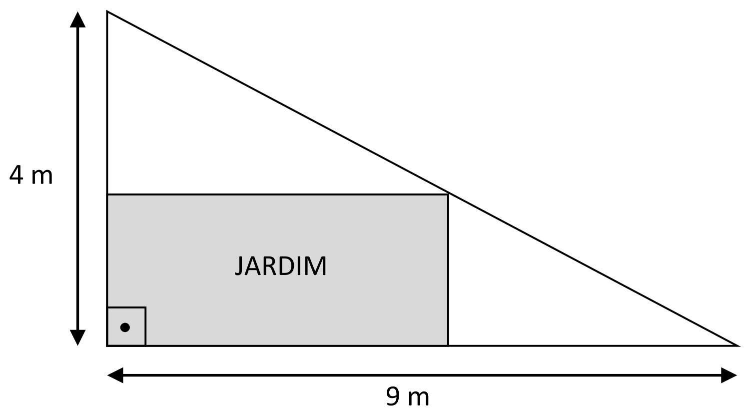

Figura 1: Jardim dentro de um terreno triangular.

[5] UEG 2012

Formulação e Resolução.

Com este exercício podemos explorar a relação de dependência entre as grandezas: Distâncias e Áreas; definir uma função como um caso particular de relação entre duas grandezas; trabalhar semelhança de triângulos; etc.

É importante que o aluno tenha familiaridade com esses assuntos, ou seja, este é um exercício para ser discutido depois de um contato prévio dos alunos com os pré-requisitos que o exercício pede.

Estabelecendo uma relação entre os lados do triângulo e os lados do retângulo.

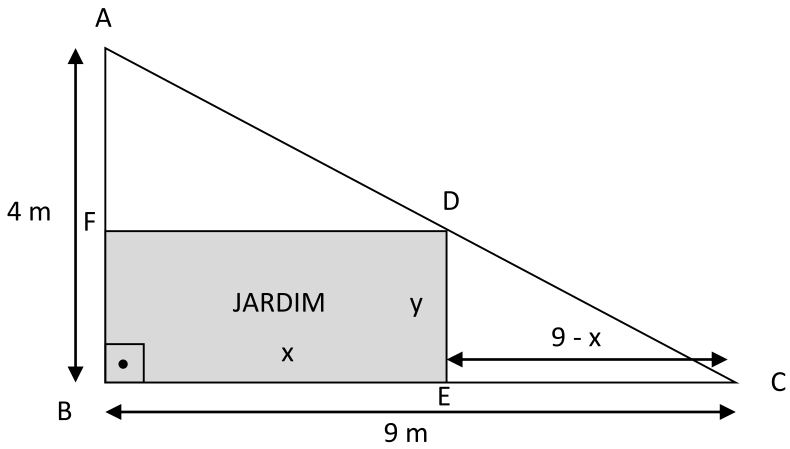

Figura 2: Dimensões do jardim dentro de um terreno triangular.

Depois de nomear os vértices, podemos estabelecer uma relação de semelhança entre os triângulos DEC e ABC. Note que o ângulo $\hat{C}$ é o mesmo para ambos os triângulos, além disso, o ângulo $\widehat{E} \equiv \hat{B} = 90°$, assim pelo caso de semelhança de triângulos, "ângulo ângulo" os referidos triângulos são semelhantes. Daí, podemos dizer que os lados correspondentes destes triângulos constituem a proporção:

$$\frac{9-x}{9} = \frac{y}{4}$$

que é equivalente a: $y = -\frac{4}{9}x + 4$. Nesse ponto o professor pode destacar a relação de dependência entre os lados do retângulo.

A área do retângulo é dada por $A = x \cdot y$, porém, $y = -\frac{4}{9}x + 4$, ou seja, a área depende de x, assim,

$$A(x) = x(-\frac{4}{9}x + 4)$$

$$A(x) = -\frac{4}{9}x^2 + 4x$$

Onde o vértice é dado por $-\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2\cdot(-\frac{4}{9})} = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

E este é ponto de máximo visto que o coeficiente de x^2 é negativo.

Portanto, o valor de x que torna a área máxima é $x = 4{,}5$; então,

$$y = -\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{2} + 4 = 2$$

Concluindo, assim, que o jardim terá a maior área se suas dimensões forem 2m e 4,5m.

Representação gráfica das funções envolvidas

É importante explorar as características dos gráficos destas funções já que o ponto crítico, o máximo, é justamente o que soluciona o problema.

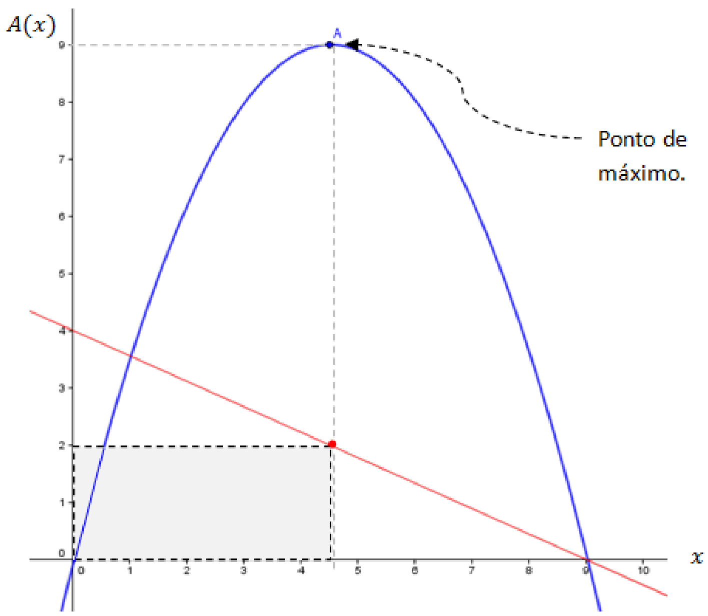

Figura 3: Gráfico das funções envolvidas no problema do Jardim, ponto de máximo.

Analisando formas e tipos de embalagens.

"Através da necessidade de transportar uma infinidade de mercadorias, foi necessário criar os primeiros recipientes e bolsas que podemos considerar como as primeiras embalagens, que muitas vezes eram confeccionadas com peles de animais.

Com o tempo foram surgindo novas formas de embalagens, devido a necessidade de adequação aos mais diversos tipos de produtos. Em uma embalagem convém destacar a aparência, o custo, eficiência e comunicação. Para criar uma embalagem é necessário sabermos para que fins ela será utilizada e como será seu transporte, só assim podemos adequar a melhor forma. A ideia da atividade proposta foi retirada de BIEMBENGUT e HEIN (2005) e a intenção é levar o aluno a desenvolver conceitos de geometria plana e espacial; sistemas de medidas: linear, superfície, volume, capacidade e massa e função de 2º grau, podendo ser adaptada para qualquer período escolar.[6]

Confeccionando uma caixa

A atividade atente qualquer faixa etária, para crianças serve como exercício de coordenação motora, e conforme a faixa etária aumenta podemos colocar mais conceitos, tais como, conceitos geométricos, noção de geometria espacial e se necessário, introdução de medidas lineares e de números racionais na forma decimal. No processo de desenvolvimento da atividade os alunos devem:

1. Fazer um desenho em perspectiva de uma caixa na forma retangular.
2. Tomar uma folha de papel na forma retangular, e fazer uma caixa com medidas previamente definidas.
3. Com o uso de régua e lápis, fazer as marcações adequadas em todas as bordas.
4. Fazer as dobraduras necessárias.

Quantidade de Material utilizado

A partir do 6º ano, podemos colocar o problema mais direcionado para a otimização. Podemos falar da preocupação em otimizar as embalagens de modo que elas atendam

---

[6] Retirado de (Araújo & Chuquipoma, 2013)

necessidades das indústrias e dos consumidores, como por exemplo, confeccionar embalagens funcionais, de baixo custo e onde se utilize a quantidade mínima de material.

Levar para a sala embalagens, desmontá-las mostrando a sua planificação e calculando as áreas das figuras planas que a compõem é um exercício que vai envolver o aluno e trazê-lo para o problema.

Ainda no 6º ano é conveniente o uso de quadrados de 1 cm de lado onde será oportuno cobrir toda a superfície planificada com quadrados sem sobreposição.

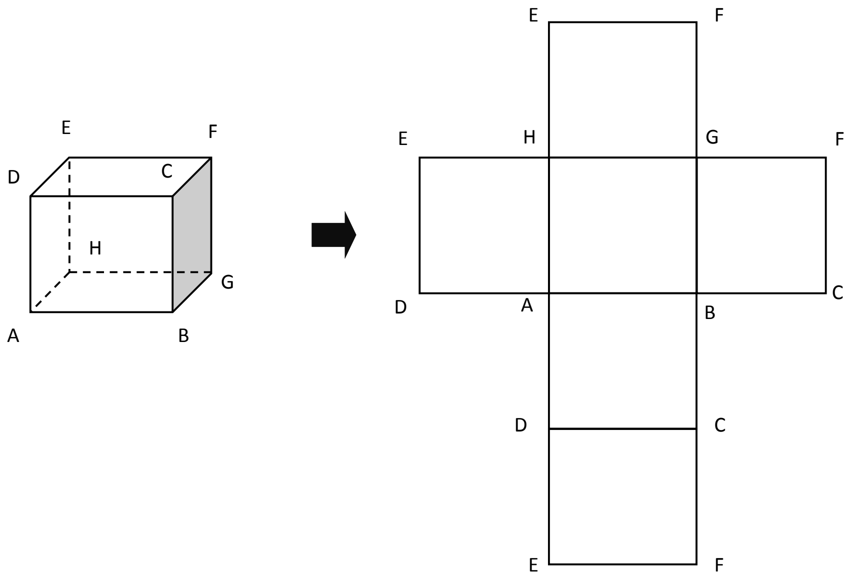

Figura 4: Planificação da caixa (Problema de quantidade de material)

Depois de toda a exploração da embalagem, nas séries seguintes, a preocupação é mostrar para os alunos que para confeccionar uma caixa podemos utilizar uma folha quadrada e com o objetivo de minimizar o desperdício de material, porém de tal forma que obtenha-se o Maior volume possível. A partir do 9º ano, é oportuno apresentar o **conceito** de função, função polinomial, pontos críticos e domínio. Já no curso superior podemos explorar a ideia de volume máximo com aplicação da derivada.

Formulação e Resolução

Utilizando uma folha de papel na forma quadrada com lado medindo 30 cm, precisamos determinar a altura máxima para que a caixa construída a partir desta planificação tenha volume máximo. Exploramos aí, o tipo de função e seu domínio de validade.

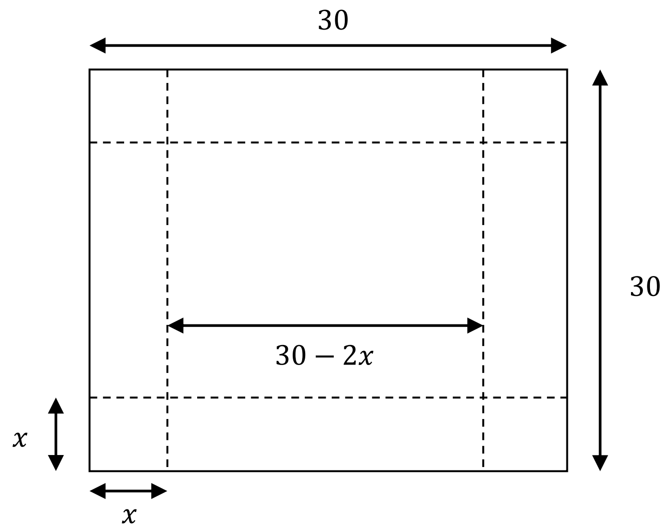

Figura 5: Dimensões da planificação (Problema de quantidade de material)

Primeiro devemos equacionar o volume da caixa em função da altura que até então é desconhecida. Nesse momento, a primeira etapa da modelagem, ou seja, o reconhecimento da atividade proposta e também a familiarização com o assunto a ser modelado, está sendo aplicada. Podemos atribuir valores para cada uma das dimensões, para que os alunos possam observar a variação do volume de acordo com os valores atribuídos. Aqui também é pertinente, explorar com os alunos o fato de que não podemos atribuir qualquer valores, ou seja, há um conjunto de valores que se encaixam, mas estes valores não são todos os números reais. Daí, o aluno perceberá o domínio da situação problema e da função que a descreve.

$$v(x) = A_b \cdot h$$

Onde A_b é a área da base e h é a altura da caixa.

Partindo então para a segunda etapa do processo de modelagem onde iniciamos com a formulação da atividade proposta e com a resolução da atividade em termos de modelo.

Logo, temos para o volume a função:

$$v(x) = (30 - x)^2 \cdot x \qquad 0 < x < 15$$

$$v(x) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

Representação gráfica da função.

Na figura , logo a seguir, podemos observar seus pontos críticos, ou seja, de máximo local e mínimo local, justificando que a derivada é igual a zero. Passamos aqui a executar a terceira etapa, interpretação da solução e validação do modelo.

Através da derivada de $v(x)$, calculamos a altura que permite encontrar um volume máximo da caixa a ser construída.

Sendo $v(x) = (30 - x)^2 \cdot x, 0 < x < 15$, ao calcular a derivada temos:

$$v'(x) = 12x^2 - 240x + 900$$

Sabemos que a função tem pontos críticos onde sua derivada possui as raízes, ou seja, onde $v'(x) = 0$, então encontramos $x_1 = 15$ e $x_2 = 5$ e como $0 < x < 15$ o valor de x_1 não atende o estabelecido **(validação da solução)**, portanto $x_2 = 5$ será o valor da altura procurada para que tenhamos o volume máximo.

Problemas reais ou que estão próximos da realidade do aluno, são os mais fáceis de serem modelados por eles. Uma classe de problemas que nos permite uma modelagem rica em conceitos e aplicações são os problemas de Programação Linear, a seguir daremos algumas definições básicas e veremos um exemplo deste tipo de problema.

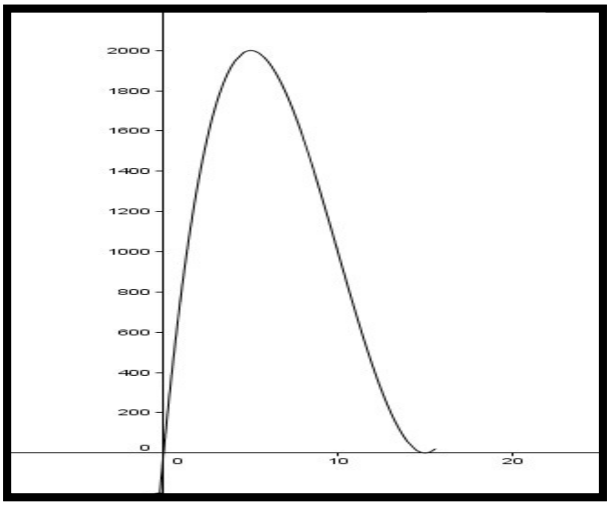

Figura 6: Representação Gráfica da função Volume, considerando seu domínio.

3. Programação Linear

3.1. Histórico

O desenvolvimento de técnicas para resolver sistemas de inequações lineares não é uma prática recente. Pesquisas surgiram desde antes da Segunda Grande Guerra, mas foi durante a Guerra que equipes interdisciplinares de cientistas promoveram um grande crescimento das pesquisas relacionadas a essas técnicas, para desenvolver o uso de materiais e sua logística. Essas pesquisas, voltadas para diferentes áreas do setor bélico, visavam principalmente dois resultados fundamentais: reduzir custos militares e maximizar as baixas inimigas. É nesse período que se considera o surgimento da Pesquisa Operacional, um método científico de tomada de decisões, da qual a Programação Linear é uma das subáreas com amplo espectro de aplicações.

A Programação Linear é um modelo matemático constituído de uma função linear (denominada função objetivo), de restrições técnicas e de não negatividade, representadas por um grupo de inequações ou equações lineares, que advém das restrições de recursos do problema estudado.

O problema onde queremos otimizar alguma grandeza linear é dito um Problema de Programação Linear, ou seja, maximizar ou minimizar, uma função linear com n variáveis, que devem satisfazer uma quantidade m de restrições técnicas, sendo todas as variáveis lineares e não negativas.

A função a ser otimizada é chamada de função objetivo e o conjunto de soluções é chamado de conjunto (ou região) viável ou factível. A não negatividade das variáveis se explica pelo fato delas representarem quantidades produzidas. As restrições podem estar na forma de igualdades ou desigualdades, mas como a igualdade $x = b$ equivale às desigualdades $x \leq b, -x \leq -b$ podemos assumir que todas as restrições estão na forma de desigualdades.

Pesquisadores foram contratados pelos governos da Inglaterra e dos EUA para buscar soluções para os problemas de otimização relacionados as operações militares. Porém, o ano de 1947 é considerado como o ano de início da Programação Linear. Então só em 1947, devido as questões de confidencialidade, houve a divulgação do “Método Simplex” para a resolução de problemas de Programação Linear, por Georg Dantzig[7], que liderava um grupo de pesquisadores da SCOOP *(Scientific Computation of Optimum Programs)*. A partir daí essa área de pesquisa da Matemática desenvolveu-se rapidamente, sendo utilizada para solucionar problemas de otimização nas mais diversas áreas do conhecimento.

As diversas áreas onde a Programação Linear é aplicada são: dosagem (mistura, receita ou *blending*) – alimentação, formulações de rações, fabricação de adubos, ligas metálicas, petróleo e minérios; transporte; investimentos; avaliação de recursos – fábricas, fazendas; localização industrial; designação; compras; fluxo de redes, entre outras. O maior destaque é para a aplicação da Programação Linear no setor industrial. Modelos de *transporte* e de *fluxo em redes* também são utilizados em logística com excelentes resultados.

Quando resolvemos um problema de otimização, percebemos que existem diversas maneiras para distribuir os recursos envolvidos de maneira a satisfazer as restrições. No entanto, precisamos determinar aquela que, satisfaz as restrições do problema e ainda consiga fazê-lo de forma otimizada. Segundo (SILVA, 2013) duas etapas são essenciais para a resolução de um Problema de Programação Linear:

- ✓ A modelagem do problema;
- ✓ O método de solução do problema.

No caso de um Problema de Programação Linear, é possível resolvê-lo pelo método conhecido como “Método Gráfico”, se o número de variáveis for menor ou igual a três, possibilitando sua visualização no plano ou no espaço. E ainda temos o método mais utilizado, computacionalmente, para obter soluções que é o Método Simplex, um algoritmo que leva rapidamente à solução quando utilizado, mesmo que o problema contenha várias variáveis. O Método Simplex ainda tem uma versão manual, conhecida como *Tableau* utilizada para fins didáticos.

[7] George Bernard Dantzig (Portland, 8 de Novembro de 1914 — Califórnia, 13 de maio de 2005) foi um matemático estadunidense, autor da declaração formal do problema de transporte , elaborou a teoria e a sua resolução computacional baseada no método simplex, em 1941. Por este feito também é considerado "pai da programação linear".

Segundo definição em GIORDANO (2008), um problema de otimização é dito de **Programação Linear** se ele satisfizer algumas propriedades:

- ✓ Quando tiver uma única função objetivo.
- ✓ Sempre que a variável de decisão aparecer tanto na função objetivo quanto nas funções de restrição, deve aparecer somente como potências de expoente 1 e, quando muito, multiplicada apenas por uma constante, ou seja, equações ou inequações do 1º grau.
- ✓ Nenhum termo da função objetivo ou de qualquer restrição pode conter produto de variáveis de decisão, que caracterizaria grau maior ou igual a 2.
- ✓ Os coeficientes das variáveis de decisão da função objetivo e de cada restrição são constantes.
- ✓ As variáveis de decisão podem assumir tanto valores reais como também valores inteiros.

Ainda temos, segundo (SILVA, 2013) "et. al.", que: Problemas com mais de uma função objetivo são chamados **multiobjetivos** ou **programas de meta**. Problemas que não satisfazem as propriedades 2 e 3 são chamados de **não-lineares**. Problemas em que os coeficientes dependem também do tempo são chamados de **programação dinâmica**[8]. Se os coeficientes não forem constantes, mas de natureza probabilística, os problemas são classificados como um **programa estocástico**. Se as variáveis de decisão forem restritas a valores inteiros, e o problema a valores inteiros, o problema é chamado de **programação inteira**, ou ainda, **programação inteira-mista** quando a restrição inteira se aplicar somente a um subconjuntos das variáveis de decisão.

3.2. Definições Básicas

Antes de apresentarmos os métodos mais utilizados para resolver problemas de Programação Linear, precisamos exibir alguns conceitos (ARAÚJO &CHUQUIPOMA, 2013):

Definição 1: (Conjunto Convexo) Um subconjunto $\boldsymbol{D}$ *do* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *é chamado de convexo se para quaisquer dois pontos* $\boldsymbol{A}$ *e* $\boldsymbol{B}$ *de* $\boldsymbol{D}$ *o segmento* $\boldsymbol{AB}$ *está inteiramente contido em* $\boldsymbol{D}$*.*

[8] A programação dinâmica é uma programação aplicável à otimização de eventos que sofrem uma sequência de estados, podendo ser aplicada a sistemas lineares ou não lineares.

A figura 7 é a visão geométrica de um conjunto convexo e de um conjunto não convexo no espaço $\mathbb{R}^2$:

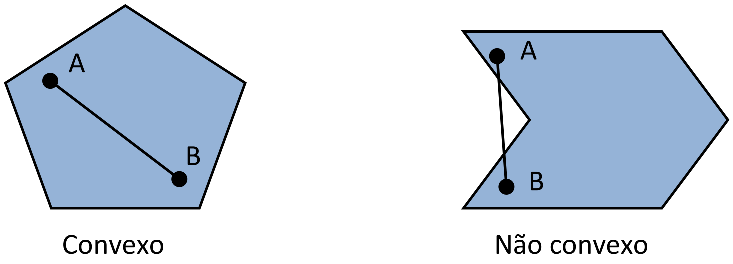

Figura 7: Visão geométrica de um conjunto convexo e de um conjunto não convexo no $\mathbb{R}^2$

Definição 2: (Semiplanos) *Dados uma reta $\boldsymbol{r}$ de equação $\boldsymbol{y = ax + b}$ em um plano $\boldsymbol{\pi}$, esta reta divide o plano $\boldsymbol{\pi}$ em dois semi-planos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$. As inequações $\boldsymbol{y \leq ax + b}$ e $\boldsymbol{y \geq ax + b}$ são chamadas de desigualdades lineares que definem os semi-planos $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$.*

Por exemplo, quando queremos encontrar os pontos $p = (x, y)$ que satisfazem a desigualdade $y < 2x + 4$ procedemos da seguinte maneira:

I. Analisamos a reta $y = 2x + 4$, e percebemos que a mesma corta o eixo das abscissas em $A = (-2,0)$ e o eixo das ordenadas em $B = (0,4)$, dividindo o plano π em dois semi-planos: α e β, conforme a figura 8:

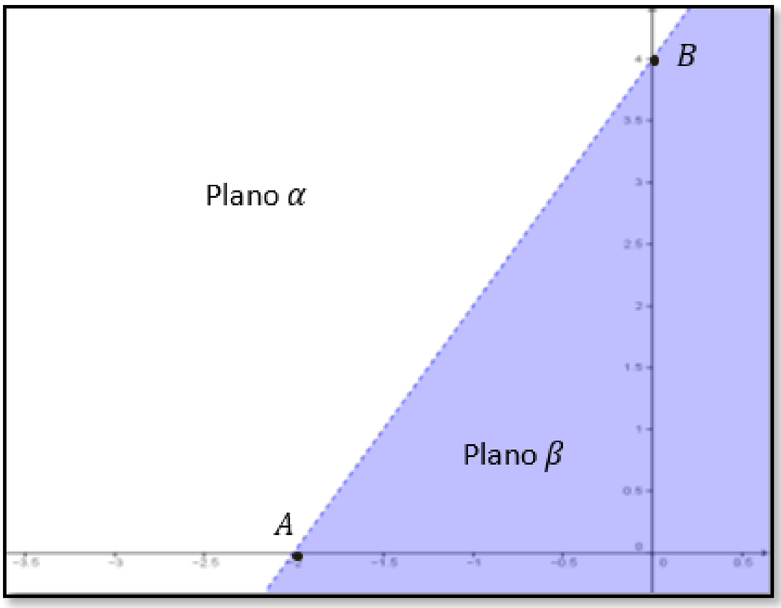

Figura 8: Semiplano beta.

II. Observamos na figura acima, que ao tomar um ponto arbitrário no plano β, por exemplo, $C = (1,1)$, vemos que ele satisfaz a desigualdade $y < 2x + 4$; pois:

$$y = 1 < 2x + 4 = 2 \cdot 1 + 4 = 6$$

Logo, como o ponto $C \in \beta$ foi arbitrário e verifica a desigualdade, o plano β será o conjunto de todos os pontos $p = (x, y)$ que satisfazem a desigualdade $y < 2x + 4$.

Uma demonstração mais detalhada pode ser encontrada em (Lima, 2006).

Teorema 1 (Conjunto convexo poliedral): *Um conjunto de interseções não vazias de inequações lineares em $\mathbb{R}^2$ sempre formam um conjunto convexo poliedral.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em BELGRADA (1988).

Definição 3 (Conjunto Viável): *Um conjunto convexo é dito conjunto viável na programação linear se ele é definido pelas interseções de um sistema de equações e inequações lineares. Cada ponto deste conjunto é denominado de ponto viável e cada desigualdade é uma restrição do problema de programação linear.*

Observação 1*: Dado algumas inequações e analisando suas interseções teremos um conjunto convexo de pontos que serão as soluções destas inequações. Caso duas desigualdades formem uma interseção vazia, então o problema não tem solução.*

Por exemplo, o conjunto de soluções do sistema:

$$\begin{cases} y \leq -x + 2; \\ y \leq x + 2; \\ y \geq 0 \end{cases}$$

é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$, limitados pela interseção dos semi-planos determinados por cada uma das desigualdades, conforme a figura 9:

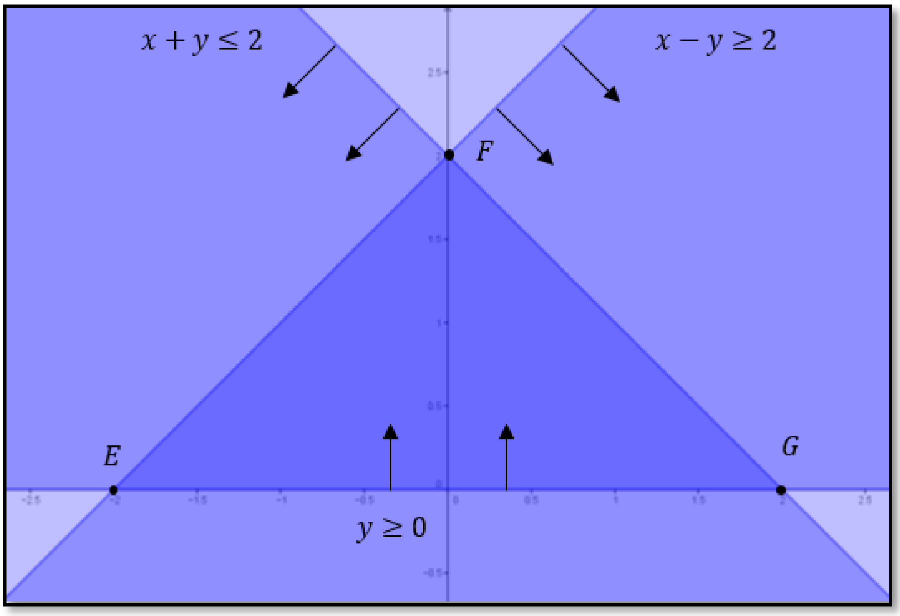

Figura 9: Intersecção dos semiplanos.

Definição 4 (Pontos extremos): *Dada uma região* $\boldsymbol{D}$ *poliedral convexa fechada do* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *(determinada por um sistema de equações e inequações lineares), os vértices desta região* $\boldsymbol{D}$ *são os pontos da região que satisfazem um dos possíveis sistemas de* $\boldsymbol{n}$ *equações lineares independentes, obtidas substituindo-se as desigualdades por igualdades. Estes vértices são pontos extremos da região* $\boldsymbol{D}$ *e, portanto possíveis soluções dos problemas de Programação Linear.*

Definição 5 (Função Objetivo): *Uma função* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ *para a qual procuramos o valor máximo ou mínimo no conjunto* $\boldsymbol{D} \in \boldsymbol{\Omega}$ *é chamada de função objetivo.*

Para problemas relacionados com a Programação Linear, o conjunto D representará um conjunto viável. Dado um problema de programação linear, estamos interessados na existência de soluções de tal problema, daí, o Teorema Fundamental da Programação Linear, que será apresentado a seguir, fornece as condições necessárias para a existência de um máximo ou mínimo de uma função em uma região poliedral convexa D (conjunto viável). Os seguintes lemas são importantes na demonstração do Teorema Fundamental da Programação Linear.

Lema 1: *Seja* $f: \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida por* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{a_1 x_1} + \boldsymbol{a_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n x_n} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ *e seja* $\boldsymbol{P}$ *um ponto interior ao segmento* $\boldsymbol{AB} \subset \boldsymbol{\Omega}$ *do* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$*, isto é,* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\lambda A} + (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{B} < \boldsymbol{\lambda} < \boldsymbol{1}$. *Então teremos* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{A}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{B})$ *ou* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{B}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{P}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{A})$.

Lema 2: *Seja* $f: \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ *uma função definida por* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \ldots, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{a_1 x_1} + \boldsymbol{a_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n x_n} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$*. Se dentre os valores que* $\boldsymbol{f}$ *assumir num segmento* $\boldsymbol{AB}$ *do* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto* $\boldsymbol{P}$ *interior deste segmento, então* $\boldsymbol{f}$ *será constante em* $\boldsymbol{AB}$.

A prova destes lemas podem ser encontradas em BOLDRINI (1980)

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Programação Linear): *Seja* $f: \boldsymbol{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$ *uma função definida na região poliedral convexa* $\boldsymbol{D}$ *do* $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ *por* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{a_1 x_1} + \boldsymbol{a_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{a_n x_n} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ *. Suponha que* $\boldsymbol{f}$ *assuma um valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se* $\boldsymbol{D}$ *possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

Demonstração: A demonstração será feita para $n = 2$.

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$. Suponha que o valor máximo (mínimo) de f seja assumido em um ponto P de D, considerando todas as regiões poliedrais convexas possíveis $\mathbb{R}^2$ podemos ter:

i. O ponto Pé um vértice. (Neste caso o teorema já está provado)
ii. O ponto Pestá numa aresta. Do *Lema 2,* $f$assumirá este valor máximo (mínimo) em toda aresta. Como a região D possui vértice(s) esta aresta conterá um vértice v obrigatoriamente, portanto, $f(P) = f(v)$.
iii. O ponto Pestá no interior de D. Neste caso, f será constante em toda região D. De fato, seja Qoutro ponto de interior de D. Como D é poliedral convexa, o segmento QP está contido em D; além disso, como P é interior podemos considerar um prolongamento QQ' que contém P deste ainda contido em D. Do *Lema 2* segue que f é constante em QQ' e portanto, $f(P) = f(Q)$.

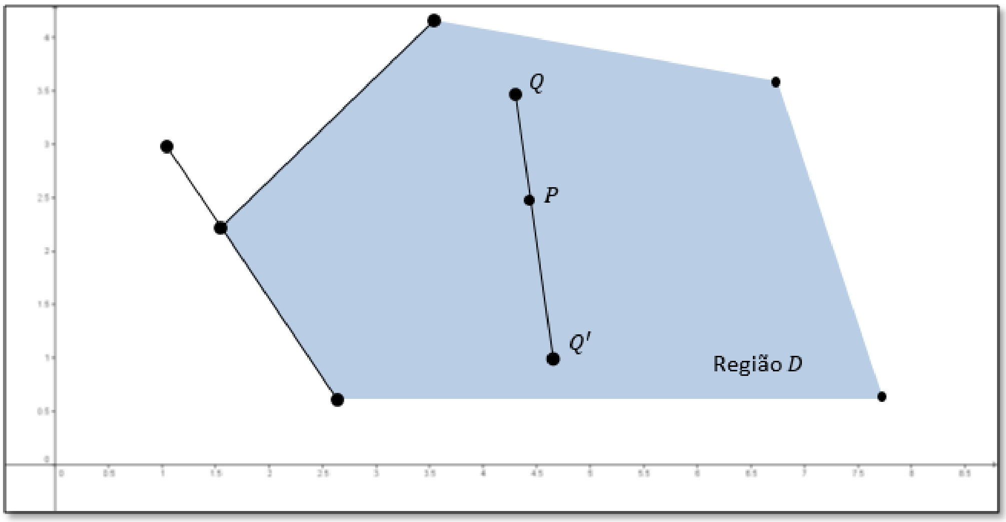

Figura 10: Teorema Fundamental da Programação Linear

A seguir, apresentamos os Métodos de resolução de problemas de Programação Linear e problemas sugeridos para serem aplicados em sala explorando os métodos de ensino: Experiência de Aprendizagem Mediada, e Modelagem Matemática.

4. A EAM e a Modelagem Matemática aplicadas a problemas de Programação Linear.

Para explorar melhor as ideias, vamos propor um problema ao qual será aplicado o método Geométrico e o Método Simplex. A escolha adequada do problema, como já foi discutida anteriormente é de suma importância para um bom desenvolvimento cognitivo do aluno. Problemas contextualizados, que estimulem a curiosidade, que não sejam nem muito fáceis nem muito difíceis, etc., não esquecendo que o comportamento do professor durante a mediação na discussão também é importante. Um problema bem interessante é o Problema da Merenda Escolar, pois está inserido no cotidiano escolar e irá estimular os alunos a pensarem na solução de forma natural. Claro que muitos tentarão resolvê-lo de imediato, e até pode acontecer de algum, encontrar a solução ótima, porém, os alunos ainda não conhecem os métodos de resolução de problemas de Programação Linear, então, usarão o processo de tentativa e erro que é muito bom, pois, no fim isto dará um maior valor nos métodos que serão apresentados.

4.1. Método Geométrico

O Método Geométrico é recomendado somente para modelos simples com apenas duas variáveis de decisão. Representar o modelo graficamente traz a vantagem de facilitar a visualização das principais características do processo de decisão. Considere o exemplo a seguir:

"Uma fábrica produz garrafas de licor e de aguardente. Uma máquina automatiza parte do processo de fabricação. Para produzir uma caixa de 12 garrafas de licor utiliza-se a máquina por 3 horas, mais 2 horas para que um operário faça o acabamento. A produção de uma caixa de 12 garrafas de aguardente necessita da máquina por apenas 1 hora, mas o seu acabamento por um operário demora 3 horas. No período de uma semana a fábrica dispõe de 58 horas de trabalho manual e de 45 horas de uso da máquina. O lucro na venda de uma caixa de licor é de R$ 50,00 e o lucro da caixa de aguardente é de R$ 40,00. Sabendo que toda produção já tem comprador, qual deve ser a produção semanal de cada tipo de caixa de modo que o lucro seja o máximo possível?"

Organizando o dados em uma tabela, obtemos:

Garrafas	Horas		Lucro por caixa (R$)
	Máquinas	Operários	
Licor (x)	3	2	50
Aguardente (y)	1	3	40
Tempo máximo por semana	45	58	$z = f(x, y)$

Neste problema temos duas restrições:

a. O uso da máquina está limitado a 45 horas semanais;

b. O tempo de trabalho de um operário está limitado a 58 horas semanais.

Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 3x + y \leq 45 \\ 2x + 3y \leq 58 \\ x > 0 \;\; e \;\; y > 0 \end{cases}$$

As desigualdades acima correspondem a semiplanos onde a interseção dos mesmos nos dá uma região poligonal convexa, chamada de região viável onde os vértices são os melhores candidatos a solução ótima.

As restrições $x, y \geq 0$, são chamadas de ***restrições de não-negatividade****, restringem as* soluções possíveis ao primeiro quadrante.

Por fim, a função objetivo $z = f(x, y)$, que pretendemos maximizar, dada por:

$$z = 5x + 4y$$

é tomada para $z = 0$, em seguida, são observadas suas curvas de nível na direção da região viável até que uma delas tenha apenas um ponto em comum com a região (ponto de tangência), que não seja a origem. Após este procedimento, percebemos o motivo pelo qual os vértices são os melhores candidatos a solução ótima.

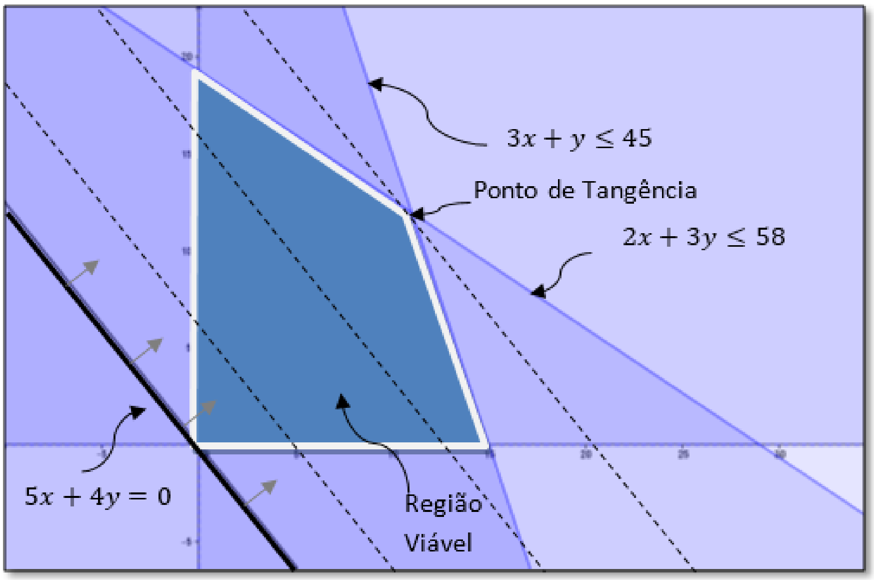

Figura 11: Região viável e região inviável.

Agora para ilustrar melhor a resolução de um Problema de Programação Linear pelo Método Geométrico, vamos considerar o Problema da Merenda:

Problema da Merenda Escolar:

"Uma empresa é contratada para fornecer alimentação a alunos da rede pública de ensino. Um dos pratos a ser servido é polenta com molho de carne moída. A empresa tem por objetivo obter o maior lucro possível, porém, cumprindo as exigências do contrato com a Secretaria de Educação. Segundo este contrato, cada porção servida aos alunos deve conter um mínimo de 400 kcal de energia, 65 gramas de carboidratos e 15 gramas de proteínas e não pode conter menos que 60 gramas de carne. Cada 100 gramas de farinha de milho ("fubá") fornece 350 kcal de energia, 80 gramas de carboidratos e 6 gramas de proteínas. A carne moída refogada fornece a cada 100 gramas, 170 kcal de energia, 9 gramas de carboidratos e 15g de proteínas. Considerando que 100 gramas de fubá custam R$ 0,20 e que 100 gramas de carne custam R$ 1,00, determinar a quantidade de cada alimento para que a empresa obtenha o menor custo sem descumprir o contrato." [9]

A mediação que o professor fará com os alunos em cima deste problema pode ser embasada pelas seguintes questões:

[9] Retirado do trabalho: "PLANO DE AULA PESQUISA OPERACIONAL PARA O ENSINO MÉDIO", escrito por Jorge Melo Paulo Flores, orientado por: Maria Paula Fachin, Porto Alegre – 2009 - UFRS

- ✓ “Qual é o objetivo da empresa?”
- ✓ “Quais são as exigências da Secretaria de Educação?”
- ✓ “Que produtos compõem o prato servido na merenda escolar?”
- ✓ “Qual a quantidade de nutrientes por 100 gramas de cada alimento que compõe o prato da merenda escolar?”
- ✓ “Quais são as grandezas que podem variar nesse problema?”

Ao tentar responder estas discussões o grupo de alunos concluirá que os macro nutrientes, a energia e o custo por porção são dependentes das quantidades de fubá e de carne. Portanto, estão identificadas as variáveis. Durante a mediação, é natural que os alunos tentem resolver o problema por tentativa e erro. Seguem algumas tentativas que podem surgir:

Primeira tentativa

Alimento	**Quantidade (Gramas)**	**Carboidratos (Gramas)**	**Proteínas (Gramas)**	**Energia (Kcal)**	**Custo (R$)**
Farinha de Milho (Fubá)	100	80	6	350	0,20
Carne	100	9	15	170	1,00
Total	**200**	**89**	**21**	**520**	**1,20**

Tabela 1: Problema da Merenda, primeira tentativa.

Segunda tentativa

Alimento	**Quantidade (Gramas)**	**Carboidratos (Gramas)**	**Proteínas (Gramas)**	**Energia (Kcal)**	**Custo (R$)**
Farinha de Milho (Fubá)	80	64	4,8	280	0,16
Carne	80	7,2	12	136	0,80
Total	**160**	**71,2**	**16,8**	**416**	**0,96**

Tabela 2: Problema da Merenda, segunda tentativa.

Terceira tentativa

Alimento	Quantidade (Gramas)	Carboidratos (Gramas)	Proteínas (Gramas)	Energia (Kcal)	Custo (R$)
Farinha de Milho (Fubá)	90	72	5,4	315	0,18
Carne	60	5,4	9	102	0,60
Total	**150**	**77,4**	**14,4**	**417**	**0,78**

Tabela 3: Problema da Merenda, terceira tentativa.

Somente após alguns resultados é que o grupo perceberá que qualquer resultado que fosse superior aos requisitos básicos seria uma solução possível. Perceberão, então, que o objetivo é buscar entre os resultados possíveis, aquele que mais se aproxima das condições mínimas e que gera o menor custo. Esse nível de compreensão, se alcançado pelos alunos, e provavelmente será, é bastante satisfatório e importante para a compreensão posterior dos métodos de solução através da Programação Linear.

É nesse momento, quando todos já estão ambientados com o problema de otimização, que deve ser iniciado a sistematização do conteúdo utilizando-se os quatro passos sugeridos por PÓLYA (2006), para a resolução de problemas:

1. Compreensão;
2. Elaboração de um plano;
3. Execução do plano;
4. Avaliação dos resultados obtidos.

Lembre-se que em cada passo a participação do professor é de grande importância, pois apesar de não dar as respostas finais para a solução do problema, ele deve formular perguntas que contribuam para que o aluno seja encaminhado a resolver o problema proposto.

A participação dos alunos durante a sistematização ocorre durante a explanação, através de questionamentos enunciados pelo professor.

Primeiro Passo (Compreensão do problema):

Através de questionamentos, já citados:

- ✓ "Qual é o objetivo da empresa?"
- ✓ "Quais são as exigências da Secretaria de Educação?"
- ✓ "Que produtos compõem o prato servido na merenda escolar?"
- ✓ "Qual a quantidade de nutrientes por 100 gramas de cada alimento que compõe o prato da merenda escolar?"
- ✓ "Quais são as grandezas que podem variar nesse problema?"

Buscou-se identificar as variáveis e as restrições apresentadas no enunciado do problema.

Variáveis:

$x =$ quantidade de fubá em hectogramas (100g)

$y =$ quantidade de carne moída em hectogramas (100g)

Custo da porção de merenda (minimizar):

$$z = 0{,}20x + 1{,}00y$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} 6x + 15y \geq 15 \textit{ (restrição de proteínas)} \\ 80x + 9y \geq 65 \textit{ (restrição de carboidratos)} \\ 350x + 170y \geq 400 \textit{ (restrição de energia)} \\ y \geq 0{,}6 \text{ (restrição de carne)} \\ x; y \geq 0 \textit{ (restrições de não negatividade)} \end{cases}$$

Segundo Passo (Elaboração de um plano):

Com o problema devidamente compreendido e equacionado, passa-se à elaboração de um plano para sua resolução. Este problema poderia ser resolvido de várias formas. Porém, como primeira forma de solução é recomendado o uso do Método Gráfico. Usando este método retomamos as ideias de desigualdades, função do primeiro grau, representação gráfica de funções e desigualdades, domínio e imagem de uma função. Todos estes assuntos já abordados no primeiro ano do ensino médio. Desta forma, podemos aplicar o Método Gráfico para uma solução de um Problema de Programação Linear, no segundo ano do ensino médio. Assim, os tópicos do primeiro ano serão retomados de forma contextualizada, significativa. O tratamento do problema em termos de equação da reta, posições relativas entre retas e a intersecção de retas, dão significado aos conhecimentos dos alunos. Ainda pode-se destacar a importância da análise do gráfico para a obtenção da melhor solução possível, de acordo com as condições impostas pelo problema.

Terceiro passo (Execução do plano):

Escolhido o método gráfico para a resolução do problema, passou-se à representação de cada uma das restrições representadas pelas inequações e posterior interpretação dos resultados obtidos.

Tomamos para cada desigualdade a equação da reta correspondente:

$$6x + 15y \geq 15 \rightarrow 6x + 15y = 15$$

$$80x + 9y \geq 65 \rightarrow 80x + 9y = 65$$

$$350x + 170y \geq 400 \rightarrow 350x + 170y = 400$$

$$y \geq 0{,}6 \rightarrow y = 0{,}6$$

A figura 12 mostra a representação gráfica da reta $6x + 15y = 15$:

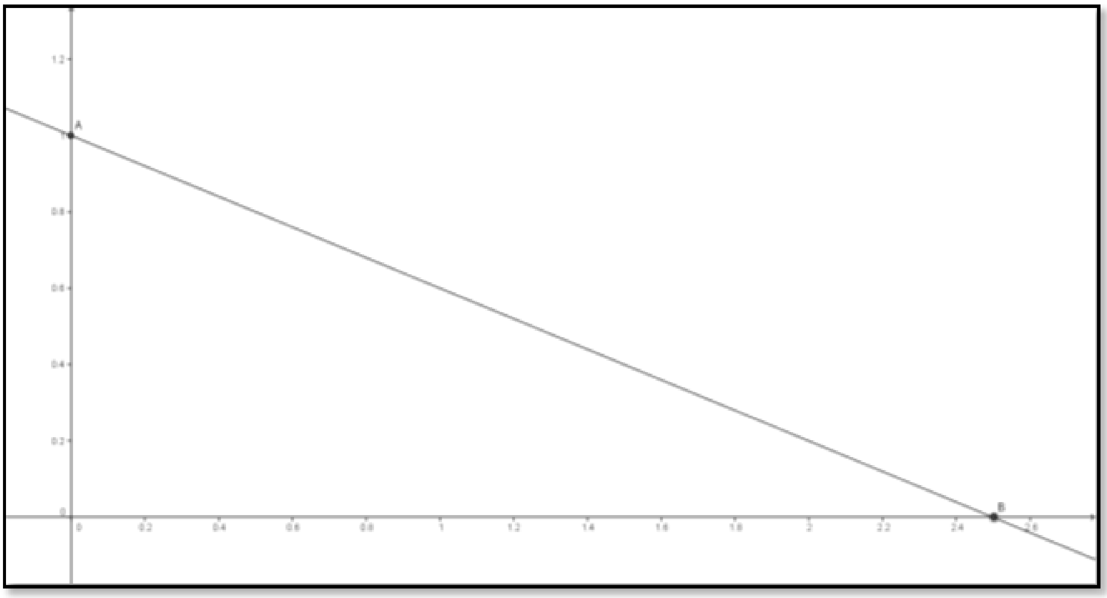

Figura 12: Representação gráfica da reta $\boldsymbol{6x + 15y = 15}$

Os resultados possíveis para a desigualdade $6x + 15y \geq 15$ é representada pelo semi-plano formado por todos os pontos da reta e dos pontos localizados acima da reta $6x + 15y = 15$. Sua representação fica como na figura 13:

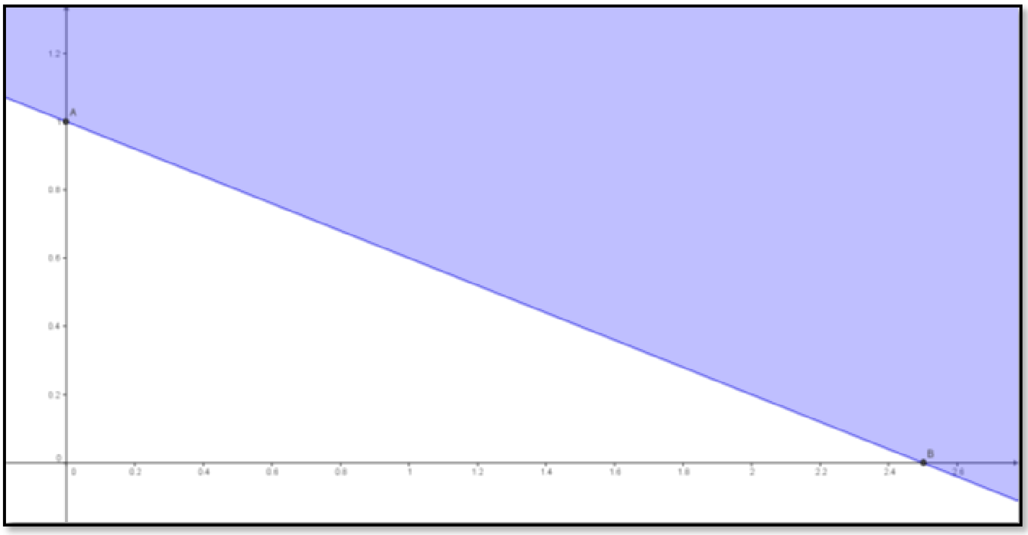

Figura 13: Representação do semiplano $\boldsymbol{6x + 15y \geq 15}$.

A seguir, na figura 14, temos os semiplanos que satisfazem as desigualdades referentes às restrições de carboidratos, energia e quantidade mínima de carne. Não esquecendo que somente são úteis os valores positivos para as variáveis x e y. Portanto somente foram considerados como soluções possíveis os valores pertencentes ao primeiro quadrante.

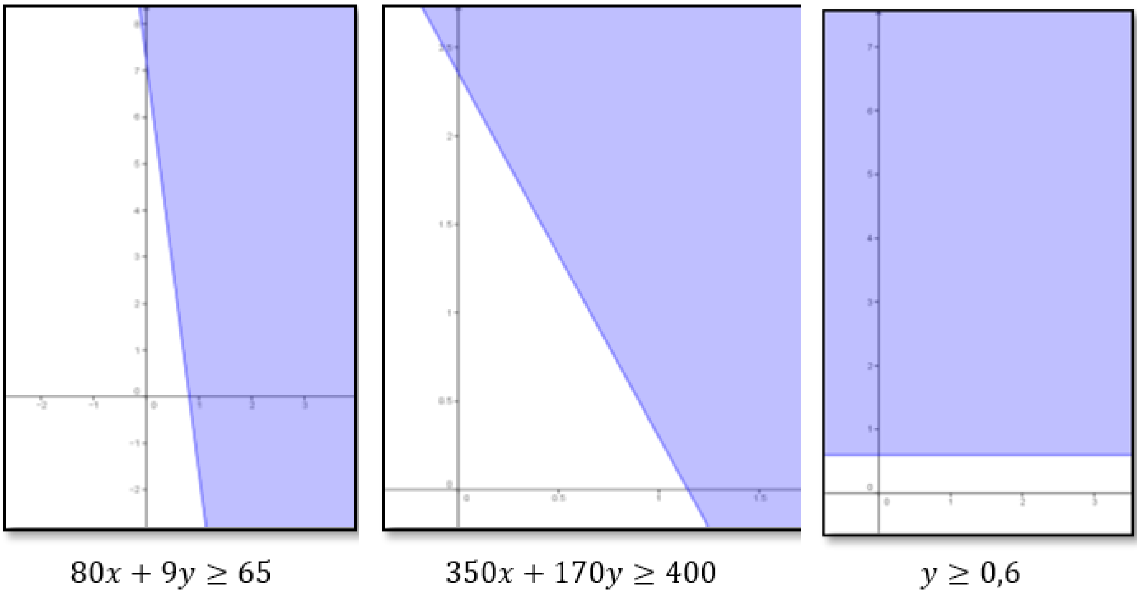

Figura 14: Semiplanos: $\mathbf{80x + 9y \geq 65; 350x + 170y \geq 400;\ y \geq 0,6}$

Representando os quatro semiplanos em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas (Figura 15) podemos identificar a região que contempla as soluções viáveis do problema.

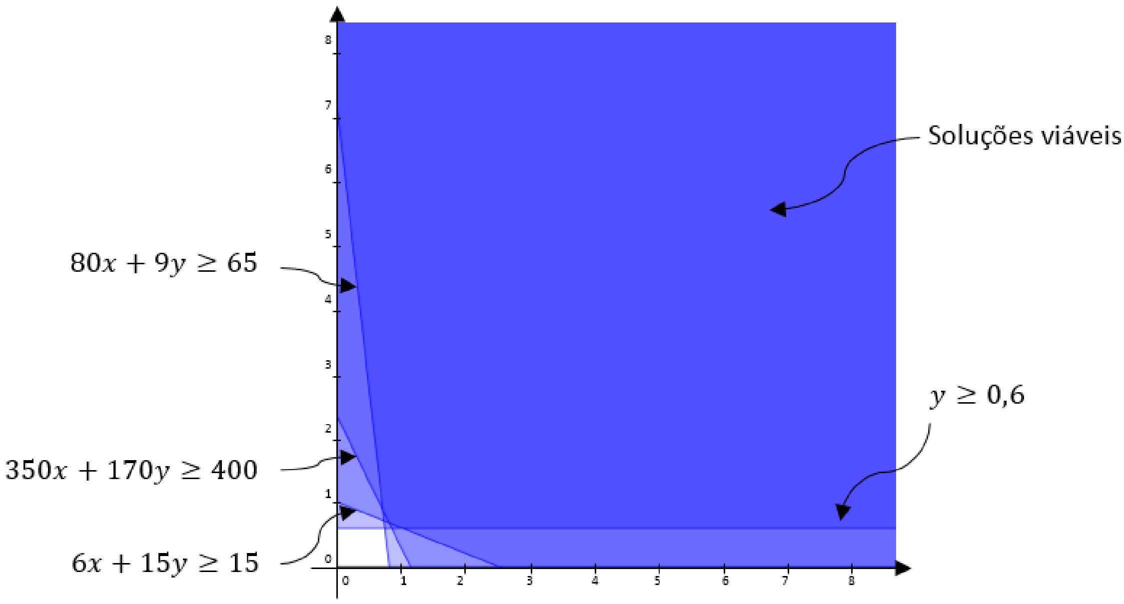

Figura 15: Intersecção dos semiplanos: $\mathbf{80x + 9y \geq 65; 350x + 170y \geq 400;\ y \geq 0,6}$

A área em azul mais escuro, (Figura 15) limitada pelas retas: $6x + 15y = 15;\ 80x + 9y = 65;\ 350x + 170y = 400;\ y = 0{,}6$ e o eixo Oy, representa a região que contém todas as soluções viáveis do problema. Porém, como se pode observar na figura, esse problema apresenta infinitas soluções.

A partir dessa figura devem ser realizados alguns questionamentos aos alunos sobre o método que seria usado para encontrar a melhor solução do problema:

- ✓ "Devemos usar novamente o método de tentativa e erro, como já foi feito anteriormente?
- ✓ "Caso essa fosse a escolha, então qual seria a utilidade do método gráfico?"
- ✓ "Serviria apenas para excluir os valores improváveis?"
- ✓ "Haveria algo ainda a representar graficamente?"

Ao questionar se ainda havia algo não representado na figura, sugira que os alunos voltem ao passo de compreensão do problema, eles devem verificar se ainda há alguma equação não utilizada. Logo algum deles perceberá que a equação do custo:

$$z = 0{,}20x + 1{,}00y$$

não fora utilizada em nenhum momento. Sugira, então, que se faça a representação gráfica (figura 16) para a reta que representa o custo igual a zero, $0{,}20x + 1{,}00y = 0$.

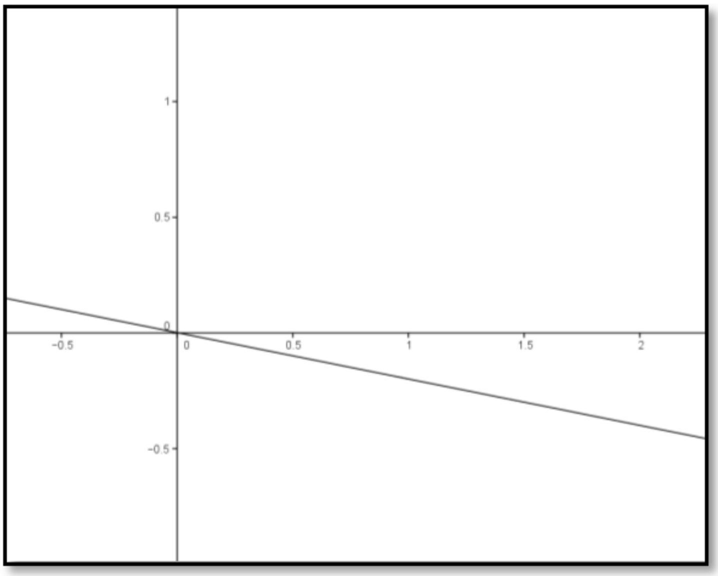

Figura 16: Reta representante do custo igual a zero, $\mathbf{0,20x + 1,00y = 0}$.

Neste ponto retomam-se os conceitos de coeficiente angular e de coeficiente linear de uma reta. Em seguida, a questão é:

- ✓ O que representa o custo z na equação $z = 0{,}20x + 1{,}00y$, caso isolássemos uma das variáveis?

O objetivo nesse ponto da mediação é fazer com que o aluno perceba que o valor de z dividido por um dos coeficientes representa o coeficiente linear da reta dada. Outra pergunta que deve ser feita é:

- ✓ O que ocorreria com o coeficiente linear, caso fosse alterado o valor de z?

Ora, substituindo alguns valores para z, facilmente o aluno perceberá que o coeficiente angular não sofre alterações quando o custo z é modificado.

Assim, conduzimos os alunos à conclusão de que o custo poderia ser representado por qualquer reta que estivesse acima da reta $0{,}20x + 1{,}00y = 0$.

Essa conclusão permite a proposição de que a melhor solução seria representada pelo primeiro ponto de tangência entre a reta $0{,}20x + 1{,}00y = 0$ e a região viável. Essa proposição deve ser sistematizada através do *Teorema 2*, que para o aluno, pode ser simplificado como segue:

"Se existir uma única solução que otimiza (maximiza ou minimiza) uma função objetiva linear, então esta solução deve corresponder a um vértice (ou ponto extremo) do polígono de soluções viáveis".

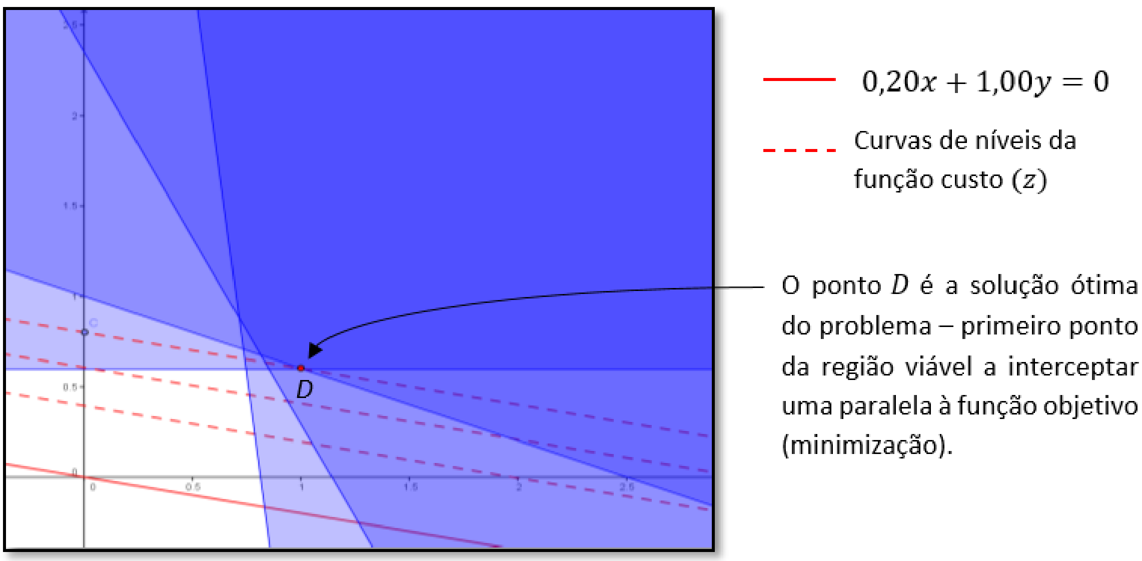

Figura 17: Representação geral do problema inclusive da solução ótima.

Como o objetivo era obter o menor custo possível, atendendo as restrições estabelecidas, então o primeiro vértice da região viável que interceptasse uma curva de nível representaria o custo mínimo, ou seja, a solução ótima para o problema. Neste caso essa solução será representada pela intersecção entre as retas:

$$6x + 15y = 15$$

e

$$y = 0{,}6.$$

Portanto, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 6x + 15y = 15 \\ y = 0{,}6 \end{cases}$$

Obtém-se como solução: $x = 1$ e $y = 0{,}6$

Portanto, o menor custo possível foi igual a:

$$z = 0{,}20 \cdot 1{,}0 + 1{,}00 \cdot 0{,}6$$

$$z = 0{,}80$$

O último passo consiste em avaliar os resultados obtidos. Sugira à turma que reflitam sobre o problema, buscando verificar a validade da solução. O resultado obtido deve ser comparado com o obtido substituindo-se os outros vértices da região viável na função objetivo, a conclusão deve ser que realmente para $x = 1$ e $y = 0{,}6$, a função custo z tem o menor valor possível, ou seja, solução ótima.

A seguir, veremos o Método Simplex, e uma sugestão de aplicação deste método utilizando a técnicas de mediação, modelagem e resolução de problemas.

4.2. Método Simplex

George Dantzig é conhecido como o “pai da programação linear” por ter viabilizado a solução de muitos problemas da programação linear através de um algoritmo chamado de Método Simplex que é bastante popular e com boa aceitação em áreas onde diversas necessidades e restrições influenciam um valor que precisa ser otimizado.

O algoritmo pode ser implementado de várias maneiras diferentes, mas o princípio é basicamente o mesmo.

A ideia é bem simples. Primeiro, atribui-se valor zero às variáveis, que tem pouca interferência na solução. Em seguida, aumentamos gradativamente a variável que tem maior influência positiva no resultado da função objetivo, ou seja, aquela que possui o maior coeficiente. Esta é chamada de ***"variável ativa"*** e sua importância inicial se deve ao fato de que é a mais *“lucrativa”* delas, ou seja, a que mais nos aproxima da otimização.

Ao passo que a variável ativa cresce, o algoritmo verifica todas as restrições, até que uma delas deixe de ser atendida. Esta restrição recebe o nome de ***"restrição ativa"***. Então, conhecemos o ***valor máximo da variável ativa***. Em seguida passamos para a próxima variável que nos aproxima da boa solução, sempre levando em consideração o maior valor que a primeira pôde atingir. A cada mudança destas, o Simplex converte todos os coeficientes (inclusive os da função objetivo) de acordo com os limites encontrados nas sucessivas restrições ativas.

O procedimento é repetido até que os coeficientes da função objetivo sejam negativos. Isso significa que o incremento das variáveis apresenta-se como um decréscimo do total atingido. No fim, os valores buscados são conhecidos por meio de um sistema de equações com origem no problema inicial.

A maioria dos exemplos são de maximização, porém o Simplex também soluciona casos em que se deseja encontrar o menor valor possível. Custos e gastos são alguns dos resultados comumente buscados nestas situações.

Para problemas de minimização basta adaptar o algoritmo. Na maioria das vezes o que se faz é simplesmente inverter todas as relações, multiplicando os coeficientes por -1 e fazendo com que o problema original seja encarado como uma maximização.

O Simplex é um método computacional, porém, para fins didáticos, o Simplex também pode ser aplicado manualmente no formato do método, conhecido como ***Tableau***. O ***Tableau*** consiste em se colocar todas as informações devidamente organizadas em um quadro, fazendo-se exatamente o que a máquina faria. O Simplex é muitas vezes ensinado desta forma para facilitar a compreensão do método e para que as pessoas tenham um bom domínio desta técnica de otimização.

A execução manual do algoritmo pode ser feita utilizando-se um produto de matrizes. Coloca-se os coeficientes devidamente dispostos em linhas e colunas, em seguida, multiplica-se esta matriz por uma versão modificada da chamada ***"Matriz Identidade"***, com tamanho igual ao número de variáveis.

O produto de matrizes faz com que sempre haja uma relação entre os coeficientes já modificados de acordo com as restrições e os melhores valores possíveis para as variáveis até o momento. Então, repete-se o processo até que se encontre o resultado ótimo, ou seja, até que não seja mais possível otimizar o total sem violar as restrições.

Ao analisar o Simplex sob a ótica geométrica, temos a construção de um polítopo[10] com um número de dimensões igual à quantidade de variáveis do problema onde a solução ótima sempre estará no conjunto de coordenadas dos vértices deste polítopo. O que ocorre é que a cada acréscimo nas variáveis, o Simplex percorre uma das arestas, buscando o vértice perfeito.

Formalmente, a complexidade do algoritmo Simplex é tida como exponencial. PAPADIMITRIOU (p. 233) mostra que, em uma implementação ingênua, cada iteração em busca da melhor solução tem, a princípio, sua complexidade, em termos de n variáveis e m restrições. Porém, com a abordagem de transformação linear onde a cada iteração todo o sistema é transformado de maneira que o vértice anterior seja a nova origem, a complexidade por iteração torna-se linear. Naturalmente, questiona-se quantas iterações são necessárias até se atingir o critério de parada. Um limite superior para este número

[10] Em geometria, um polítopo é uma região contida em $\mathbb{R}^n$ que é resultante da intersecção de um conjunto de semi-espaços. Este conceito representa a generalização, para um número arbitrário de dimensões (finitas), dos conceitos de polígono e poliedro.
Um polítopo convexo é o invólucro convexo de um número finito de pontos de um espaço euclidiano. Um polítopo genérico deve ser definido recursivamente: um polítopo de 0 dimensões é um ponto, e um polítopo de $n + 1$ dimensões tem, como faces, polítopos de n dimensões.

é $\binom{m+n}{m}$, o que leva a complexidade final à exponencial em n. Felizmente, na prática, são raros os problemas que tomam esta complexidade e, por isto, o algoritmo Simplex é altamente utilizado.

Algoritmo com um ***Tableau*[11] :**

Os seguintes passos valem para problemas de maximização (para problemas de minimização é necessário uma adaptação do problema, como já foi dito):

1. *Introduzir as variáveis de folga, uma para cada desigualdade;*
2. *Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada;*
3. *Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga;*
4. *Como próxima variável a entrar na base, escolha a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.*
5. *Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:*
    a. *Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. Caso não haja elemento nenhum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.*
    b. *O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.*
6. *Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá*

[11] Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Algoritmo_simplex (consultado em 21/09/2014)

se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 *aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.*

7. *Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.*

A primeira leitura estes sete passos são um tanto indigestos. Porém, após a aplicação de um exemplo podemos perceber que é um procedimento mecânico, como o escalonamento de uma matriz ou como a aplicação do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

O método Simplex possibilita uma abordagem, na sala de aula, significativa de alguns conceitos relativos a matrizes, determinantes e sistemas lineares a partir da contextualização do problema. O método simplifica bastante a solução de Problemas de Otimização, porém quando temos um número excessivo de variáveis, os cálculos podem tomar uma dimensão muito grande para ser realizada de forma manual. Neste caso, é recomendável introduzir o uso de uma planilha eletrônica para que o aluno efetue sua própria programação, operando com as linhas da matriz. Na sala de aula, não é recomendado usar problemas com mais de três variáveis. Seguir os passos propostos por PÓLYA (2006) é altamente recomendável e no exemplo que se segue faremos isso.

Primeiramente o problema[12]: *"Um fabricante deseja maximizar a receita bruta. A tabela ilustra as composições das ligas metálicas, seus preços e as limitações na disponibilidade de matéria-prima.*

	Liga A (x)	***Liga B(y)***	***Matéria – prima disponível***
Cobre	*2*	*1*	*16*
Zinco	*1*	*2*	*11*
Chumbo	*1*	*3*	*15*
Preço unitário de venda	*R$ 30,00*	*R$ 50,00*	

Tabela 4: Problema das ligas metálicas

Deseja-se saber qual quantidade é ideal produzir, da LIGA A e da LIGA B, de modo que a receita obtida seja máxima."

[12] Retirado de (RECH)

Primeiramente procedeu-se a compreensão do problema, com a respectiva apresentação matemática da função objetivo e das restrições, conforme segue:

Função objetivo:

Maximizar: $z = 30x + 50y$

Restrições:

Sujeito a:
$$\begin{cases} 2x + 1y \leq 16 \text{ (restrição de cobre)} \\ 1x + 2y \leq 11 \text{ (Restrição de zinco)} \\ 1x + 3y \leq 15 \text{ (Restrição de chumbo)} \\ x; y \geq 0 \text{ (restrição de não negatividade)} \end{cases}$$

A primeira sugestão que pode surgir, quando este problema é colocado para os alunos, é que devemos produzir apenas a liga metálica B, pois possui um maior preço unitário. O que é natural, mas diante desta hipótese, sugira aos alunos que verifiquem os extremos, ou seja, o caso de serem produzidas apenas uma das duas ligas. Quantas unidades de cada liga serão possíveis produzir com a matéria prima disponível?

Com alguns cálculos, os alunos perceberão que a liga A está limitada a oito unidades, resultando numa sobra de três unidades de zinco e sete de chumbo. No caso de produzir apenas a liga B, será possível produzir apenas cinco unidades, sobrando uma unidade de zinco e onze de cobre; ou seja, conclui-se que oito unidades da liga A resulta em uma receita de R$240,00 e que cinco unidades da liga B resulta em uma receita de R$ 250,00. Isso confirma a hipótese inicial, adquirida intuitivamente, apesar de não ser a solução ótima do problema.

Sugira, também, que testem outras possibilidades, como produzir as duas ligas, a fim de maximizar a receita e minimizar as sobras de matéria prima. Proponha o uso de tabelas para organizar os registros. A seguir algumas possibilidades que já superam a hipótese inicial:

Hipótese 1	Liga A (x)	Liga B(y)	Matéria – prima disponível	Matéria – prima utilizada	Sobra de Matéria – prima
Unidades produzidas	2	4			
Cobre	2	1	16	8	8
Zinco	1	2	11	10	1
Chumbo	1	3	15	14	1
Preço unitário de venda	R$ 30,00	R$ 50,00			
Preço total	R$ 60,00	R$ 200,00			
Receita	R$ 260,00				

Tabela 5: Problema das ligas metálicas – Hipótese 1

Hipótese 2	Liga A (x)	Liga B(y)	Matéria – prima disponível	Matéria – prima utilizada	Sobra de Matéria – prima
Unidades produzidas	3	4			
Cobre	2	1	16	10	6
Zinco	1	2	11	11	0
Chumbo	1	3	15	15	0
Preço unitário de venda	R$ 30,00	R$ 50,00			
Preço total	R$ 90,00	R$ 200,00			
Receita	R$ 290,00				

Tabela 6: Problema das ligas metálicas – Hipótese 2

Hipótese 3	Liga A (x)	Liga B(y)	Matéria – prima disponível	Matéria – prima utilizada	Sobra de Matéria – prima
Unidades produzidas	4	3			
Cobre	2	1	16	11	5
Zinco	1	2	11	10	1
Chumbo	1	3	15	13	2
Preço unitário de venda	R$ 30,00	R$ 50,00			
Preço total	R$ 120,00	R$ 150,00			
Receita	R$ 270,00				

Tabela 7: Problema das ligas metálicas – Hipótese 3

Note que a segunda é a melhor das três, tanto na maximização da receita, quanto na minimização da sobra. A terceira e a primeira empatam no quesito maximização da receita, porém a terceira ganha no quesito minimização de sobras, tornando-se mais interessante.

Até esse momento foi feita apenas uma investigação, sem nenhuma certeza de que realmente a **hipótese 2** é a solução ótima.

Diferente do método gráfico, em que toda a solução depende da solução gráfica e de sua correta interpretação, o método simplex não é visual e depende da inclusão de ***variáveis de folga.*** Retomando as hipóteses, fica fácil justificar a inclusão das variáveis de folga a formulação do problema, transformando o problema no que segue:

Função objetivo:

Maximizar: $z = 30x + 50y$

Restrições:

Sujeito a:
$$\begin{cases} 2x + 1y \leq 16 \text{ (restrição de cobre)} \\ 1x + 2y \leq 11 \text{ (Restrição de zinco)} \\ 1x + 3y \leq 15 \text{ (Restrição de chumbo)} \\ x; y; f_1; f_2; f_3 \geq 0 \text{ (restrição de não negatividade)} \end{cases}$$

Concluída a compreensão do problema, passa-se á elaboração de um plano de resolução, que neste caso consiste na escolha do Método Simplex. Neste momento, o professor pode fazer uma breve explanação sobre o histórico do Método e seu sucesso na resolução de problemas de Programação Linear.

Para os alunos, deve ficar claro que o Método consiste em testar os pontos extremos da região de valores viáveis, através de um algoritmo prático (*Tableau*).

Primeiramente construa uma tabela (tabela 8) com os coeficientes das equações referentes às restrições do problema. A última coluna corresponde aos termos independentes de cada equação. A última linha é formada pelos coeficientes da função objetivo transformada, ou seja, $z - 30x - 50y = 0$.

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b
f_1	2	1	1	0	0	16
f_2	1	2	0	1	0	11
f_3	1	3	0	0	1	15
z	-30	-50	0	0	0	0

Tabela 8: Método *Tableau* – Passo 0

Note que a tabela acima apresenta uma solução inicial que corresponde a considerar $x = 0; y = 0; f_1 = 16; f_2 = 11; f_3 = 15$. É evidente que essa não é a melhor solução, pois resulta na sobra de toda a matéria prima e receita igual a zero. Portanto, devem-se realizar operações entre as linhas da tabela de modo a encontrar uma solução melhor.

Nesse momento, recorde com o aluno o conteúdo de Matrizes, Produto de Matrizes, Escalonamento, Busca pela Matriz inversa, etc. Esta conexão entre o presente e o passado fará com que os conceitos adquiridos se consolidem com o significado do problema. Note que na tabela acima, abaixo das variáveis de folga, temos uma matriz identidade.

É importante enfatizar para o aluno que a variável y é a que mais contribui para a receita, pois, possui um valor unitário, em módulo, maior na última linha. Então essa deve ser a variável ativa, que entra na coluna base; para tanto, é necessário que outra saia da base. A variável a sair da base deve ser a que possuir o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável que irá entrar na base, ou seja:

$$f_1 \to \frac{16}{1} = 16$$

$$f_2 \to \frac{11}{2} = 5{,}5$$

$$f_3 \to \frac{15}{3} = 5$$

Destaque para o aluno que somente serão considerados para essa operação os valores em módulo da coluna da variável a entrar na base.

Desta forma, devemos realizar operações adequadas entre as linhas da tabela, de modo a obter para a variável ativa o vetor identidade referente a essa variável, ou seja, nesta coluna, devemos ter 1 para a posição de cruzamento entre a linha e coluna da variável y e 0 para as demais entradas desta coluna. Nesse caso y deve entrar na base e f_3 deve sair da base, pois para esta variável temos o menor quociente entre a última coluna e a coluna y, como foi visto acima, $f_3 \rightarrow \frac{15}{3} = 5{,}5$. Esse processo é possível utilizando operações matemáticas análogas as utilizadas para efetuar o escalonamento de uma matriz. Nesse momento o professor deve fazer a conexão como o conteúdo de Matrizes.

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b	
f_1	2	1	1	0	0	16	
f_2	1	2	0	1	0	11	
y	1/3	1	0	0	1/3	5	$L_3 \leftarrow \frac{L_3}{3}$
z	-30	-50	0	0	0	0	

Tabela 9: Método *Tableau* – Passo 1

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b	
f_1	5/3	0	1	0	-1/3	11	$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$
f_2	1/3	0	0	1	-2/3	1	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$
y	1/3	1	0	0	1/3	5	
z	-40/3	-50	0	0	50/3	250	$L_4 \leftarrow L_4 + 50L_3$

Tabela 10: Método *Tableau* – Passo 2

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b	
f_1	5/3	0	1	0	-1/3	11	
x	1	0	0	3	-2	3	$L_2 \leftarrow 3L_2$
y	1/3	1	0	0	1/3	5	
z	-40/3	0	0	0	50/3	250	

Tabela 11: Método *Tableau* – Passo 3

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b	
f_1	0	0	1	-5	3	6	$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{5}{3}L_2$
x	1	0	0	3	-2	3	
y	0	1	0	-1	1	4	$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{L_3}{3}$
z	0	0	0	40	-10	290	$L_4 \leftarrow L_4 - \frac{40}{3}L_2$

Tabela 12: Método *Tableau* – Passo 4

Enquanto existirem elementos negativos na última linha, significa que ainda não encontramos a solução ótima do problema. Portanto devem-se repetir os procedimentos já utilizados anteriormente. Agora a variável a entrar na base é a f_3 (valor negativo na última linha). A variável a sair da base é f_1, pois possui a menor razão entre o elemento da última coluna e o elemento da coluna f_3. Portanto, a última iteração fica:

Base	x	y	f_1	f_2	f_3	b	
f_1	0	0	1/3	-5/3	1	2	$L_1 \leftarrow \frac{L_1}{3}$
x	1	0	2/3	-1/3	0	7	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
y	0	1	-1/3	2/3	0	2	$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$
z	0	0	10/3	70/3	0	310	$L_4 \leftarrow L_4 - 10L_1$

Tabela 13: Método *Tableau* – Passo 5

Quando a última linha apresenta apenas valores iguais a zero ou positivos, significa que a solução ótima foi encontrada. Nesse caso a melhor solução para o problema é produzir 7 unidades da liga A e 2 unidades da liga B. Isso resultará em uma receita de R$310,00.

O processo de resolução do problema deve ser concluído através do Método Simplex seguindo para a análise dos resultados. Compare a solução ótima obtida através desse algoritmo com as hipóteses iniciais que devem ser sugeridas pelos alunos, através da mediação do professor. Na nossa simulação, usando o método de tentativa e erro, o melhor resultado seria a hipótese 2, com receita de R$290,00. Discuta a limitação do método de tentativa e erro, principalmente se o número de variáveis for grande.

Para melhorar a análise dos resultados e possibilitar uma melhor visualização do significado da aplicação do algoritmo Simplex, faça a construção da representação gráfica das restrições do problema delimitando a região viável, conforme ilustra a figura 18.

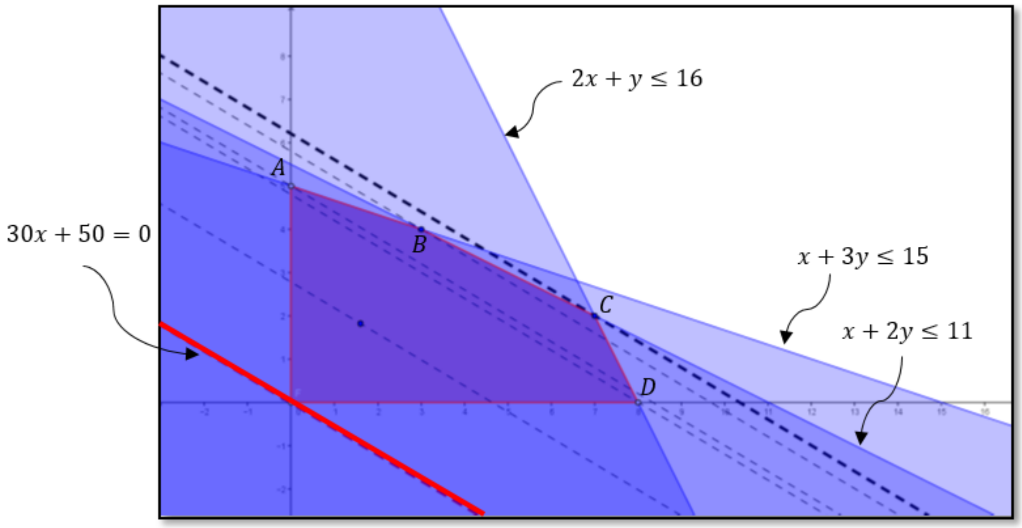

Figura 18: Representação gráfica do problema das ligas metálicas.

A interpretação dessa representação gráfica torna mais clara a relação entre o Método Simplex e o Método Gráfico. Observando a figura, o aluno pode perceber que a solução ótima deve ser um dos vértices da região viável, representados pelos pontos A, B, C e D.

Assim é possível mostrar que o Método Simplex consiste em um algoritmo que permite testar cada um destes pontos e verificar qual deles representa a solução ótima.

Observando as curvas de nível (linhas tracejadas) é possível perceber que a solução ótima é representada pelo ponto C. Esse ponto representa a maior receita porque é o último da região viável a interceptar uma curva de nível paralela à função objetivo (linha vermelha).

Também é conveniente discutir com a turma a diferença de interpretação entre os problemas discutidos, o da merenda como um problema de minimização, e o das ligas metálicas, como um problema de maximização.

Vamos, então, relacionar mais profundamente os Métodos Gráfico e Simplex.

4.3. Relacionando os Métodos: Gráfico e Simplex.

A introdução do Método Simplex após o Método Gráfico é bastante produtiva, pois possibilita justificar os passos do algoritmo a partir da representação gráfica do problema. Contudo, por ser um algoritmo, não oferece a possibilidade de visualização que o Método Gráfico proporciona. Desta forma, para o Ensino Médio, o Método Simplex não deve ser apresentado sem o suporte do Método Gráfico. A extrapolação para mais de duas variáveis, somente deve ser realizada após a compreensão da resolução de problemas com duas variáveis. Para problemas com três ou mais variáveis o Método Simplex passa a ser uma ferramenta fundamental, pois nesses casos a representação gráfica torna mais difícil a visualização do problema. Porém, para o trabalho com o Ensino Médio, problemas com apenas duas variáveis são suficientes para explorar uma gama bastante grande de conceitos matemáticos.

Por fim, é importante ressaltar que a participação e o compromisso da maioria dos alunos com atividades que estimulem a curiosidade e que estejam cobertas de significados, principalmente aqueles que envolvem o dia-a-dia do aluno, tornam o desafio de solucionar o problema convenientemente estimulante, logo, o aluno se torna parte ativa da aula, melhorando seu desempenho nas atividades propostas e desenvolvendo um raciocínio matemático bem fundamentado e consistente.

5. Considerações finais

Com este trabalho pretendemos oferecer ao professor da educação básica, em especial do Ensino Médio, uma sugestão de aplicação dos conteúdos abordados neste segmento da educação. Para sistematizar esta aplicação foram apresentados métodos didáticos que organizam e estimulam o aprendizado significativo através da resolução de problemas e mediação da aprendizagem. Ainda, como proposta, já explorada em outros textos, sugerimos também que para tal aplicação sejam utilizados problemas de otimização, especificamente, problemas de Programação Linear. Como vimos, a escolha destes problemas contribui com a perspectiva de promover um enfoque mais contextualizado das ideias matemáticas estudadas até então (funções, equações, inequações, sistemas, matrizes, etc). Problemas dessa natureza possuem grande aplicabilidade em situações concretas, vivenciadas no cotidiano da sociedade em que vivemos.

É importante concluir que a quantidade de conteúdos vencidos não é o principal objetivo a ser alcançado no ensino que tem por objetivo a qualidade. Se o aluno desenvolve a capacidade de refletir sobre o tema proposto, mesmo que este aluno não esgote o assunto, ele será capaz de se aprofundar quando for necessário, num futuro curso técnico ou superior. É ai que entra a mediação do professor estimulando esse momento criativo do aluno.

Motivar e facilitar a aprendizagem é o principal papel do professor, e esperamos que este trabalho o auxilie a assumir essa postura mais dinâmica frente a seus alunos. Todo processo de mediação requer objetivos claros que se tornam mais fáceis de serem atingidos quando o tema tem significado. Uma prática que vai tornar a elaboração de aulas com este perfil, mais fácil, é sempre se perguntar: Estou ensinando isto para quê ou com que finalidade?

Se ao escolher um tema, o professor não sabe responder esta pergunta com simplicidade e clareza é preciso pesquisar mais antes de abordá-lo. Tenho certeza que ser um bom professor é o objetivo de todos que ingressam nesta carreira, porém esse objetivo está no topo de uma longa escada que, infelizmente muitos desistem de subir, afinal, estes degraus nem sempre são fáceis de vencer e ainda é preciso estar disposto a aceitar novas ideias, ser criativo e inovador, chegar ao topo não deve ser o objetivo, pois o mais importante que é estar sempre subindo.

Ensinar não depende exclusivamente de conhecimento técnico, ensinar matemática é um desafio, dominar a matemática para ensinar é fundamental, mas é importante ter diplomacia, carisma e reciprocidade para que seja possível transcender o conteúdo, desenvolvendo no aluno o raciocínio matemático, e o mais importante, com significado.

Como disse Ruben Alves, grande educador, escritor e pensador da Educação no Brasil, em uma entrevista ao programa Revista Digital (em outras palavras): é preciso haver professores de espantos. Diz ainda que: "... O objetivo da educação não é ensinar coisas, porque as coisas já estão na internet, estão por todos os lugares, estão nos livros. É ensinar a pensar, criar na criança essa curiosidade. [...] Esse é o objetivo da educação: criar a alegria de pensar." [13] . Ou seja, o professor deve desencadear no aluno uma paixão pelo conhecimento, uma vontade de aprender cada vez mais.

Conhecer métodos e processos de aprendizagem é crucial. Mediar a aprendizagem através de problemas exige pesquisa para que se escolha adequadamente os problemas e as perguntas que serão usadas na mediação. Ter objetivos claros, conhecer seus alunos, desafiá-los a explorar possibilidades, modelos existentes ou até mesmo criar novos, ensiná-lo a buscar mais conhecimento; são características importantes para uma boa aula de matemática.

Estes são alguns dos degraus que um bom professor deve transpor para atingir seu principal objetivo: Ensinar com qualidade e eficiência. Ensinar a pensar. Ensinar a buscar o conhecimento.

[13] Entrevista disponível no link: http://www.youtube.com/watch?v=qjyNv42g2XU
Entrevista com o tema: A escola ideal - O papel do professor. (Vídeo com 9 minutos e 50 segundos)

Bibliografia

1. Araújo & Chuquipoma, S. J. (2013). *ASPECTOS DE MODELAGEM MATEMATICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EXTREMAIS.* São João Del Rei: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT - UFSJ.

2. Ausubel, D. (1963). *The psychology of meaningful verbal learning.* New York: Grune and Stratton.

3. Barbosa, J. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate.* Caxambu: ANPED, 2001. CD ROM.

4. Bassanezi, R. C. (2006). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia.* São Paulo: Contexto.

5. Belgrada, P. F., Oliveira, A. A., & Bortein, C. T. (1988). *Introdução à programação linear.* Rio de Janeiro: Campus.

6. Biembengut, M. S., & Hein, N. (2005). *Modelagem Matemática no Ensino 4ª Ed.* São Paulo: Contexto.

7. Boldrini, J. L. (1980). *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Campus.

8. BRASIL, M. d. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).* Brasília: MEC.

9. Bueno, V. C. (2011). *Modelagem Matemática: Quatro maneiras de compreendê-la (Dissertação de Mestrado).* Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto.

10. Dante, L. R. (1986). *Didática da resolução de problemas de matemática.* São Paulo: Ática.

11. Giordano, F. (2008). *A First Course in Mathematical Modelin.* M.D. Brooks Cole.

12. Herminio, M. H. (2009). *O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática. (Dissertação de Mestrado).* Rio Claro: UNESP.

13. Jacobini, O. R. (2004). *A Modelagem Matemática como instrumento de ação política na sala de aula.* Rio Claro: Universidade Estadual Paulista.

14. Klüber, T. E., & Burak, D. (2008). *Concepções de Modelagem Matemática: Contribuições teóricas.* São Paulo: Educ. Mat. Pesq.

15. Lima, E. L. (2006). *Geometria Analítica e Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: IMPA.

16. Malheiros, A. P. (2004). *A produção matemática dos alunos em ambiente de Modelagem. (Dissertação de Mestrado).* Rio Claro: Unesp.

17. Meier, M., & Garcia, S. (2007). *Mediação da Aprendizagem: Contribuições de Feuerstein e de Vygotsky.* Curitiba.

18. Moreira, M. A. (1999). *Aprendizagem Significativa.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

19. Oliveira, M. K. (s.d.). *Vygotsky: Aprendizado e Desenvolvimento, um Processo Sócio Histórico.* Scipione.

20. Papadimitriou, C. H. (2006). *Algorithms.*

21. Pereira, A. L. (2002). *Problemas Matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.* São Paulo: IME-USP.

22. Pólya, G. (1997). *A resolução de problemas na matemática escolar.* (H. H. Corbo, Trad.) São Paulo: Atual.

23. Pólya, G. (2006). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

24. Rech, R. (s.d.). *Resolvendo problemas de otimização no ensino médio.*

25. Ron, R. R. (2011). *Aprendizagem Mediada.* São Paulo: SENAI-SP.

26. Schoenfeld, A. (1996). *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* Lisboa: Coop. de Artes Gráficas.

27. Silva, K. (2013). *Modelagem Matemática com Programação Linear:Uma proposta de trabalho no Ensino Médio.* Vitória da Conquista: UESB.

28. Vygotsky, L. (s.d.). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores.* Ed. Martins Fontes.