UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

JEFFERSON CARMO DA COSTA

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM COM ÊNFASE EM APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E EM OUTRAS ÁREAS

São Luís
2016

JEFFERSON CARMO DA COSTA

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM COM ÊNFASE EM APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E EM OUTRAS ÁREAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Maranhão para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão

São Luís
2016

Elaborada pela Biblioteca da Universidade Federal do Maranhão

da Costa, Jefferson Carmo
Números Complexos: uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas
/ Jefferson Carmo da Costa . 2016. 70f.

Impresso por Computador (Fotocópia)
Orientador: Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Maranhão, Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, 2016.

1. Números complexos 2. Rotação. 3. Aplicações .
I. Título.

CDU: 511.11

UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Ata de Defesa Pública de Trabalho de Conclusão de Curso

No dia 18 de janeiro de 2016, às 09h00min, no auditório 02 do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da UFMA, reuniram-se os membros da banca examinadora composta pelo (as) professores (as): Dr. JOSÉ ANTONIO PIRES FERREIRA MARÃO (Orientador), Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA e Dr. FELIX SILVA COSTA, designados pela Coordenação do Programa de Pós-Graduação PROFMAT, da Universidade Federal do Maranhão, a fim de arguirem o mestrando, com o título: "**NUMEROS COMPLEXOS: UMA ABORDAGEM COM ÊNFASE EM APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA E EM OUTRAS AREAS**". Aberta sessão pelo presidente da mesma, coube ao candidato, na forma regimental, expor o tema de sua dissertação, dentro do tempo regulamentar, sendo em seguida questionado pelos membros da banca examinadora, tendo dado as explicações que foram necessárias. Sendo o resultado final: "APROVADO".

Recomendações da Banca:
SUGESTÕES DA BANCA ENTREGUES AO ALUNO.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. JOSÉ ANTONIO PIRES FERREIRA MARÃO (Orientador)

Prof. Dr. JOÃO DE DEUS MENDES DA SILVA

Prof. Dr. FELIX SILVA COSTA

Candidato:
Jefferson Carmo da Costa

São Luís, 18 de janeiro de 2016.

JEFFERSON CARMO DA COSTA

A presente Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da UFMA/PROFMAT, e elaborada por Jefferson Carmo da Costa, sob o título: *"Números Complexos: uma abordagem com ênfase em aplicações na matemática e em outras áreas"*, foi aprovada em 18 de janeiro de 2016

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof^o Dr. José Antônio Pires Ferreira Marão
Orientador

Prof^o Dr. João de Deus Mendes da Silva

Prof^o Dr. Félix Silva Costa

São Luís
2016

DEDICATÓRIA

Dedico a conclusão deste trabalho aos meus pais, minha esposa e filho, meus irmãos, amigos e a toda e qualquer pessoa que tenha contribuído para este momento.

AGRADECIMENTOS

Como não poderia deixar de ser agradeço, ao criador dos céus e da terra, Deus, pela sua infinita misericórdia e amor para comigo que se refletem em tudo aquilo que tem ocorrido em minha vida. Muito obrigado, senhor meu Deus, pelas oportunidades e sonhos realizados. Agradeço a conclusão deste trabalho e vitória alcançados aos meus pais, Geraldino Pereira da Costa e Maria da Graça Carmo da Costa, pelos esforços, dedicação e ensinamento que fizeram durante toda minha vida propiciando, assim, este momento único e pessoal em minha vida. A minha esposa Erenice da Costa por ser companheira, nos bons e difíceis momentos, pelo incentivo e amor dispensados a mim. Ao nosso filho Jefferson Emanuel, pois mesmo sem entender os momentos que eu estava ausente foi meu oxigênio para eu viajasse aos fins de semana de Mojú até São Luís, distantes, aproximadamente, 1000 quilômetros. Aos meus irmãos José Miguel, Cleidiani e Antônio Geraldo por em algum momento, e da sua forma, me motivarem a continuar. Aos meus amigos, todos eles, que no dia do resultado do exame de acesso estavam comigo em Salinas e se alegraram e festejaram minha aprovação. A todas as pessoas que de alguma forma me ajudaram a chegar até aqui com palavras de incentivo e motivação (ou não!). Ao amigo maranhanse, com jeito de paraense, Venâncio, e esposa, que sempre nos estenderam a mão e nos ajudaram, obrigado amigo. Aos meus amigos e parceiros de turma. Em especial aos meus amigos e companheiros do Pará: Antônio, Edinaldo e Rodinely. O convívio com vocês foi muito especial, as viagens, as lembranças do churrasco do Maninho, o escabeche, as confusões, as histórias de família e, sem dúvidas, as conquistas. Valeu pessoal, tudo valeu à pena. Ao meu orientador José Marão pela paciência, educação e, simplesmente, pela pessoa que é. Muito obrigado professor.

EPÍGRAFE

*Honra a teu pai e a tua mãe, para que se prolonguem os teus dias na terra que o Senhor teu **DEUS** te dá.*

Êxodo: 20. 12.

RESUMO

Neste trabalho de dissertação temos por objetivo destacar a importância do estudo dos Números Complexos como teoria, a sua aplicabilidade e interdisciplinaridade. O contexto histórico fará uma abordagem com o objetivo de orientar a origem do estudo dos Números Complexos, até então apresentada nas escolas apenas como uma extensão dos Números Reais, esquecendo do relevante papel desempenhado pelos matemáticos no estudo das equações cúbicas. Além disso, buscamos saber o que os PCN's dizem e orientam sobre ensino dos Números Complexos e, também, a proposta do novo currículo elaborada e apresentada pela SBM (Sociedade Brasileira de Matemática). Nesta dissertação serão apresentadas várias aplicações envolvendo a rotação de um complexo na forma trigonométrica (com aplicações na Matemática e nas Artes), aplicações na Física (como a reflexão de um espelho plano e as correntes e ddp's alternadas em circuitos elétricos), e também, por exemplo, as aplicações envolvendo os Números Complexos e a Geometria Plana. Por fim, apresentamos a resolução das aplicações propostas.

Palavras-chave: Números complexos. Rotação. Aplicações.

ABSTRACT

In this dissertation we aim to highlight the importance of the study of Complex Numbers as theory, its applicability and interdisciplinarity. The historical context will make an approach with the aim of guiding the origin of the study of Complex Numbers, previously presented in schools only as an extension of the Real Numbers, forgetting the important role played by mathematicians in the study of cubic equations. In addition, we seek to know what the NCP's claim and advise on teaching of Complex Numbers and also the proposed new curriculum prepared and submitted by SBM (Brazilian Society of Mathematics). This dissertation will be submitted several applications involving rotation of a complex in the trigonometric form (with applications in Mathematics and the Arts), applications in physics (such as the reflection of a plane mirror and the currents and ddp's alternating electrical circuits), and also, for example, applications involving Complex Numbers and plane geometry. Finally, we present the resolution of proposed applications.

Key - words: complex numbers, rotation, applications

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo abordaremos alguns fatos históricos que contribuíram para o surgimento dos Números Complexos. Geralmente as abordagens, pedagógica e histórica, feitas em sala de aula consideram como ponto fundamental para o surgimento dos Números Complexos as equações do 2º grau. Não mencionando o estudo das equações cúbicas como parte integrante, e essencial, dessa construção histórica.

1.1 Contexto histórico

Normalmente, o estudo dos Números Complexos no Ensino Médio é justificado, por professores, como uma histórica necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos. Neste caso, o Conjunto dos Números Reais. Desta forma, encontrar soluções das equações do 2º sem solução real, como $x^2+1=0$, era necessário. Assim, $x=\sqrt{-1}$ seria uma possível solução não real. Contudo, historicamente sabemos que os acontecimentos não ocorreram sob essa perspectiva e ordem. Na verdade equações como $x^2+1=0$ eram, simplesmente, ditas sem solução.

Muito do avanço algébrico se deu entre os séculos XV e XVI, devido aos esforços empregados para as resoluções de equações cúbicas. Atualmente, as equações cúbicas são pensadas como sendo todas de um mesmo tipo, ou forma, e podendo serem resolvidas de uma mesma maneira. Contudo, neste período o estudo dessas equações não era assim: existiam vários tipos de equações cúbicas. Entre elas a equação $x^3+mx^2=n$. No início do século XVI o matemático Scipione Del Ferro obtém uma fórmula para a resolução de equações cúbicas de um determinado tipo de equação. O que para época era uma novidade. Mas como de costume para o período, a fórmula foi mantida em segredo. É o italiano Niccolo Fontana, também conhecido por Tartaglia(que significa corcunda), que alguns anos depois consegue resolver diversas equações cúbicas do tipo $x^3+mx^2=n$.

Registra a história que um outro matemático italiano, Girolamo Cardano (1501-1576), que aparentemente obteve a fórmula de Tartaglia e a devia manter em segredo, a publicou em 1545 em sua obra *Ars Magna* (A Grande Arte), na qual o autor faz menção a um novo tipo de número. Chamado por ele de "quantidade fictícia" ou "raízes menos puras". Hoje esses números, chamados por Cardano de "fictícios", são denominados de Números Complexos ou imaginários.

Sobre esse processo histórico do surgimento dos Números Complexos [6] registra que:

> "Se um algebrista desejava negar a existência de números irracionais ou negativos, dizia simplesmente, como os gregos antigos, que as equações $x^2 = 2$ e $x + 2 = 0$ não são resolúveis. Semelhantemente os algebristas tinham podido evitar os imaginários, simplesmente dizendo que uma equação como $x^2 + 1 = 0$ não é resolúvel. Não havia necessidade de considerar raízes quadradas de números negativos. Porém, com a solução da equação cúbica, a situação mudou radicalmente. Sempre que as raízes de uma equação cúbica são reais e diferente de zero, a fórmula de Tartaglia-Cardano leva inevitavelmente a raízes quadradas de números negativos. Sabia-se que o alvo era um número real, mas podia ser atingido sem que se compreendesse alguma coisa sobre números imaginários. Era agora necessário levar em conta os imaginários mesmo que se concordasse em só aceitar raízes reais."

Em 1572 o matemático italiano Rafael Bombelli publicou *Álgebra*, uma obra que tratava dos mesmos assuntos que o livro de Cardano, *Ars Magna*. Durante seus estudos Bombelli realizou operações com os "números fictícios", afim de obter os resultados desejados, que eram as raízes reais das equações. Uma das equações que Bombelli resolveu, e aplicou a fórmula de Tartaglia-Cardano, foi $x^3 = 15x + 4$ e encontrou como resposta $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Bombelli percebeu que $x = 4$ era uma solução da equação e, assim, mesmo existindo raízes "imaginárias" no processo de resolução da equação o resultado era um número real. Vale ressaltar que Bombelli reconhece a existência das raízes negativas e faz uso delas em seu cálculos, contudo segue afirmando que tais expressões são mais sofísticas que reais. Em [5], a reprodução a seguir foi retirada da obra de Bombelli *L'algebra*. Vejamos:

> " Encontrei um tipo de raiz cúbica composta muito diferente das outras, que nasce no capítulo do "cubo igual a tanto e número", quando o cubo da terça parte do tanto é maior que o quadrado da metade do número, como nesse capítulo se demostrará, (...) porque quando o cubo do terço do tanto é maior que o quadrado da metade do número, o excesso não se pode chamar nem mais nem menos, pelo que lhe chamarei de più di meno, quando se adicionar e meno di meno quando se subtrair. (...) E esta operação é necessária (...) pois são muitos os casos de adicionar onde surge esta raiz, (...) que poderá parecer a muitos mais sofística que real, tendo eu também essa opinião, até ter encontrado a sua demonstração (...) mais primeiro tratarei de os multiplicar, escrevendo a regra de mais e de menos."

Bourbaki, historiador da Matemática, é um, entre outros, que afirma que *più, meno, meno di meno* e *più di meno* são respectivamente $1, -1$, $-i$ e i. Muito em razão do axioma que Bombelli escreveu no capítulo *Summare di p.di m. et m.di m.* Neste axioma Bombelli revela que não se pode somar *più com più.di.meno.* Ou seja, existe uma independência linear entre as partes real e imaginária.

Muitos outros matemáticos se dedicaram ao estudo desse "novo" conjunto numérico, dentre eles pode-se citar Caspar Wessel (1745-1818), Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855). À eles é dado o crédito de associação dos números complexos a pontos do plano real. Em 1799 Wessel publicou um artigo sobre os números complexos e os pontos do plano, contudo, em razão da demora do reconhecimento de seu trabalho é frequente creditarem e denominar de plano de Argand-Gauss. Posteriormente, William Rowan Hamilton (1805-1865) representou um número complexo como um par ordenado de números reais, podendo assim definir operações algébricas com esses números de maneira mais simples do que a utilizada inicialmente.

Hoje, os Números Complexos são bem definidos e tem seus estudos aplicados em vários ramos do conhecimento científico.

É com base nesse contexto histórico, e de informações, que o conjunto dos Números Complexos será apresentado neste trabalho.

No segundo capítulo trataremos do que recomendam os PCN's e uma possível abordagem feita no Ensino Médio. No capítulo III faremos a construção algébrica dos complexos onde as operações de adição e multiplicação ficam bem definidas. O capítulo IV é um dos mais relevantes, pois é nele que trataremos da rotação de um número complexo e de suas consequências. Logo em seguida, no capítulo V, teremos algumas aplicações envolvendo números complexos associados a contextos, ou mesmo, com assuntos de outra disciplina como é o caso da Física.

Atualmente, os Números Complexos vão muito além das fronteiras das raízes quadradas de um número negativo. É graças a este conjunto que problemas como o do tesouro perdido, que será enunciado e solucionado nos capítulos posteriores, podem ser propostos e ter sentido teórico-prático. Além disso, podemos associar os complexos, por exemplo, a reflexão em espelhos planos ou a circuitos elétricos em que a corrente e a diferença de potencial são alternados, trabalhar conceitos geométricos no plano complexo como a equação da reta, retas paralelas e perpendiculares, semelhança de triângulos. Os números complexos tem aplicação, até mesmo, na aerodinâmica de um avião.

Contudo, os Números Complexos nos dias atuais são estudados de forma bem diferente daquela que levou ao surgimento das raízes "fictícias" (é dado o crédito as raízes de equações do 2º grau que não tinham solução real). Até pouco tempo atrás eles (Números Complexos) apareciam nas grades curriculares. Todavia, é um assunto que vem perdendo espaço na grades curriculares e, há casos, em que nem se exige mais tal conhecimento. Um bom exemplo disto é o do ENEM (exame nacional do ensino médio) que não cobra em suas provas. Nos livros didáticos pouco se explora sobre suas aplicações nos exercícios, não passando apenas (na grande maioria das vezes) de exercícios de fixação de conceitos.

A intenção deste trabalho é chamar a atenção para a falta do ensino dos Números Complexos, que é uma ferramenta pouco utilizada no Ensino Médio, e , principalmente, para o seu valor inestimável em razão das aplicações existentes em outros segmentos de estudos.

Capítulo 2

Os números complexos numa abordagem dos Pcn's

Neste capítulo faremos uma breve explanação dos Números Complexos segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's). Afinal, estes são as referências elaboradas pelo Governo Federal para orientarem o ensino no Brasil.

2.1 Os PCN's

É com o texto a seguir que começa a apresentação de [8], no que diz respeito às Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias.

> "O Ensino Médio deve, sem ser profissionalizante, propiciar um aprendizado útil à vida e ao trabalho, desenvolvendo instrumentos reais de julgamento, atuação e aprendizado."

O ensino atual no Brasil, de uma forma geral, se pauta no que os conceitos, definições, teoremas, teses e outros podem de fato contribuir, de forma direta, na vida do aluno em nossa sociedade. Levando em conta, pricipalmente, a sua aplicabilidade. O currículo da educação básica no Brasil é escolhido, geralmente, com o propósito de responder a seguinte pergunta: para que isto servirá na vida do aluno?

O conceito de currículo é um tanto quanto novo. Em [9], seu conceito está escrito assim:

> "O currículo é um conceito de uso relativamente recente entre nós, se considerarmos a significação que tem em outros contextos culturais e pedagógicos nos quais conta com uma maior tradição."

Mais adiante [9] faz outro registro:

> "...Ele começa a ser utilizado em nível de linguagem especializada, mas também não é sequer de uso corrente entre o professorado. Nossa cultura pedagógica tratou o problema dos programas escolares, o trabalho escolar, etc. como capítulos didáticos, mas sem a amplitude nem a ordenação de significados que quer sistematizar o tratamento sobre currículos."

Assim, definir qual currículo de Matemática deve ser adotado no Ensino Médio, por exemplo, não é tarefa fácil. E nesse contexto entra o estudo do Conjunto Números Complexos.

No ano de 1998, quando ainda fazíamos 3º ano do 2º grau,tivemos contato pela primeira vez com o Conjunto dos Números Complexos. O nome do assunto a ser estudado já era para se assustar. Contudo, as aulas transcorreram de uma forma melhor tranquila. Os professores diziam que os Números Complexos teriam surgido a partir das equações do 2º que apresentavam, como solução, raízes quadradas negativas. Fato este que sabemos não ser assim, como já foi dito. Todavia, estudar os números complexos era no mínimo duvidoso. Pois como entender o que seria a unidade imaginária e como aplicar em nosso cotidiano?

É com a ideia da raiz quadrada negativa de uma equação do 2º grau, que os PCN's vêem os Números Complexos. O trecho a seguir foi retirado de [8]. Leiamos:

> "Os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$."

E isso é tudo que os PCN's recomendam quanto a abordagem que se deve fazer sobre o assunto.

Além de uma apresentação simples e breve, os PCN's tratam os Números Complexos apenas como uma "histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação", como se seu estudo tivesse sempre sido aceito no meio dos matemáticos da época quando as raízes quadradas negativas começaram a aparecer. Sem contar que esta recomendação dos PCN's nos leva a pensar que os Números Complexos surgem em razão das equações do 2º grau. O que não é fato. Assim, nos dias atuais a cronologia pedagógica de ensino dos Números Complexos (equações do 2º grau implicam em Números Complexos) não é a mesma como historicamente aconteceu (estudo de equações cúbicas implicaram no surgimento dos Complexos). E, ao nosso ver, isto é prejudicial no processo de ensino.

A experiência que temos em sala de aula ao longo de, aproximadamente, 16 anos nos leva a acreditar que alguns professores evitam ensinar Números Complexos. Qual a razão disso? Não podemos precisar. Mas uma possível deficiência no processo de ensino, desde o Ensino Médio até o Superior, pode ter contribuído para isto.

Para muitos alunos do Ensino Básico não é motivante o estudo dos Números Reais. Estes tem aplicações em diversas áreas do conhecimento além de situações, diretas, que envolvem a vida desses alunos. Desta forma, como motivar o aluno do Ensino Médio a estudar Números Complexos, cujas aplicações, não são tão presentes e vivenciadas por esse aluno? Talvez uma abordagem diferente daquela que vem sendo feita seja uma opção.

Com o objetivo de melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática, no Ensino Básico, a SBM(Sociedade Brasileira de Matemática) lançou um proposta curricular. Em sua apresentação, o presidente da SBM em [12] escreve:

> "A presente proposta é resultado de uma discussão ao longo de um pouco mais de três meses, com base na experiência em sala de aula, na análise de currículos em vigor no país e no exterior e no nosso ponto de vista sobre os conteúdos apresentados nos principais livros didáticos usados pelas escolas brasileiras. Desta forma, foi construída uma grade com os principais conteúdos de Matemática, visando contemplar habilidades a serem alcançadas pelos alunos concludentes do Ensino Médio. Pretendemos que este trabalho contribua com discussão sobre a elaboração de um Currículo Nacional de Matemática para essa última etapa da educação básica.(...) Por isso, buscamos equilibrar teoria e prática, a partir dos principais referenciais de conteúdo de Matemática para a formação continuada do professor que leciona Matemática do Ensino Médio, mantendo atenção para a prática possível em sala de aula. Consideramos quatro grandes áreas de trabalho, que permeiam as três séries do Ensino Médio, através de conteúdos chaves que conduzirão à aquisição das habilidades esperadas. Dentro de cada área, acrescentamos um bloco chamado "temas suplementares", a fim de provocar uma discussão ao optar por uma proposta relativamente ousada sobre o tipo de ensino que se pretende oferecer (Científico, Humanístico ou Geral). Iniciamos com a organização das áreas e seus conteúdos e das metas suplementares em cada série. Depois, procuramos detalhar os tópicos de conteúdos, enfatizando as habilidades ligadas a cada tópico.'"

A tabela a seguir foi copiada do site [12]. Nela consta a proposta da SBM para o ensino médio.

TABELA DESCRITIVA DE ÁREAS POR SÉRIE

Séries	Números e Funções	Geometria	Matemática Discreta	Tratamento da Informação
1º	• Conjuntos e noções de lógica. • Conjuntos Numéricos. • Proporcionalidade. • Funções: aspectos gerais. • Funções Afim e Quadrática.	• Geometria Plana: congruência, semelhança e áreas. • Trigonometria do triângulo.	• Conjuntos e Contagem. • Aritmética.	• Noções de amostragem. • Organização de dados: distribuições de frequências e gráficos.
2º	• Sequências. • Outras funções reais. • Funções Exponenciais e Logarítmicas. • Equações e Sistemas Lineares.	• Perímetro e área de figuras semelhantes. • Círculo. • Geometria Espacial de Posição.	• Matemática Financeira. • Técnicas de Contagem.	• Medidas resumo e distribuição de dados.
3º	• Funções Trigonométricas. • Desigualdades e médias.	• Poliedros. • Áreas e Volumes. • Geometria Analítica.	• Probabilidade.	• Noções de Estatística bivariada.
Temas Suplementares	• Taxas de variação. • Outras funções trigonométricas. • Números Complexos. • Noções sobre matrizes e transformações elementares no plano e no espaço.	• Áreas de figuras planas: outras abordagens. • Vetores no plano. • Transformações geométricas e simetria.	• Grafos. • Aritmética. • Outros métodos de contagem.	

Fonte da figura: SBM

Esta tabela mostra a divisão dos conteúdos para o 1º ano, 2º ano, 3º ano e, o que a SBM chama, os temas suplementares. Nela vemos que os Números Complexos estão classificados no grupo dos *temas suplementares* e *números e funções*, juntamente com outros assuntos.

É bem claro na proposta da SBM, que os Números Complexos são organizados e pensados da mesma forma com o que vem ocorrendo. Não existem propostas evidentes de um fazer diferente no ensino dos Números Complexos.

Acreditamos que está seria uma ótima oportunidade para se propor algo novo. Fazer uma construção histórica dos fatos, em sala de aula, levando em conta as equações cúbicas; olhar o estudo das raízes de equações do 2º grau como uma consequência e não como a razão para o estudo dos Números Complexos e enfatizar a sua aplicabilidade, como na Física por exemplo.

Assim, os parâmetros curriculares nacionais miniminizam um assunto relevante. Procurar a melhor forma de abordá-lo é o nosso desafio.

2.2 Os Números Complexos no Ensino Médio

Geralmente ao iniciar o estudo de matemática no Ensino Médio o professor consegue fazer exemplificações que, até certo ponto, fazem sentido na vida do estudante. Agora o que dizer da primeira aula de Números Complexos? O aluno passa uma boa parte da vida estudantil aprendendo que não existe a raiz quadrada de um número negativo e, de um ano para o outro isso muda.

Em razão disso surgem algumas perguntas como: Qual a razão de ensinarmos e estudarmos certos conteúdos matemáticos? Esse conteúdo é relevante na vida do aluno?

Contudo, essas perguntas não são muito simples de serem respondidas.

O estudo dos Números Complexos no Ensino Médio e na graduação parece apresentar possíveis falhas. Esta nossa observação foi alvo de estudo da professora Juliana Santos.

A professora Juliana Santos Barcellos Chagas, em sua dissertação de mestrado, no ano de 2013, preparou um questionário, com muitos quesitos, que tinha por objetivo analisar o ensino dos Números Complexos. Este questionário ficou disponível durante 22 dias na internet e foi respondido por 151 professores. Estes eram de vários estados do Brasil e atuavam no ensino médio. As respostas obtidas levaram a vários resultados, dentre esses destacamos os seguintes:

1º- A formação do professor e os números complexos em sua formação.

Nesse quesito a professora Juliana detectou que 22 dos professores entrevistados possuem apenas a graduação, 57 são especialistas, 19 são mestres e somente 2 eram doutores. Entre os 151 professores que responderam o questionário, 104 responderam que estudaram números complexos no ensino médio, 38 disseram que não estudaram e 9 não lembravam. Dos que estudaram no ensino médio, 12 disseram não terem visto o assunto na graduação ficando condicionados ao que viram no ensino médio ou estudos realizados por conta própria.

2º- A relevância do estudo dos números complexos no ensino Médio.

Daqueles que responderam ao questionário verificou-se que 48 dos professores acham o estudo dos complexos relevante, 20 acreditam ser indispensável, 3 consideram irrelevante e 29 acham pouco relevante o estudo desse assunto.

Assim, é possível questionar que em algum momento no processo de ensino dos Números Complexos ocorreram falhas?

Não é possível afirmarmos categoricamente. Afinal, o espaço amostral da pesquisa da professora Juliana é muito pequeno em relação ao universo de professores do Brasil. Além disso, sabemos que existem muitas variáveis no processo de ensino que podem se alterar, de acordo com a região, e que são relevantes para serem ignoradas.

Contudo, alguns fatos são importantes a serem questionados. Dentre eles destacamos alguns:

$\Longrightarrow$ Todos professores de Matemática conhecem a íntima relação que existe entre a álgebra e a geometria, além de saber como isso pode ser abordado?

$\Longrightarrow$ Os professores fazem uma contextualização histórica do processo que levou a criação do conjunto dos Números Complexos, levando em conta o estudo das equações cúbicas?

$\Longrightarrow$ Fazem alguma referência ao fato dos matemáticos da época usarem esses números, mesmo sem aceitá-los como tais, e até mesmo negando a sua existência?

Estas indagações também não podemos responder. Todavia, acreditamos que essas lacunas, caso existam, não devam ser imputadas ao professor.

Deve-se ressaltar que o futuro professor, quando ainda aluno do Ensino Básico, vê alguns conteúdos (na maioria das vezes não em totalidade) e que, em razão disso, deixam algumas incertezas. Por outro lado, quando ele chega no curso de licenciatura, onde deveria aprender como ensinar matemática, o foco é desviado do alvo e, assim, as coisas não acontecem como deveriam ocorrer.

Em razão do exposto anteriormente, é bem possível muitos dos colegas professores de matemática ao iniciarem as aulas de Números Complexos comecem, por exemplo, com uma expressão do tipo:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1.4} = \sqrt{-1}.\sqrt{4} = 2\sqrt{-1}.$$

E o roteiro das explicações seja, mais ou menos, o que vemos a seguir. Isto é:

Não sendo uma raiz real o número $\sqrt{-1}$ e tendo por objetivo encontrar raízes para este número, então convencionou-se a chamar $\sqrt{-1} = i$. O que implicaria que $i^2 = -1$. E, por consequência, seria possível operar com esse tipo de número sem problemas.

Todavia, isto se torna muito vago para o aluno. Pois, na verdade isso não faz muito sentido para ele. E o que dizer quando escrevemos um número complexo na forma de uma expressão algébrica? Que é o caso da forma algébrica de um complexo. Com sentido análogo, de entendimento e conhecimento, ao da forma algébrica nos conduzimos a sua forma trigonométrica. A partir de então, o ensino de Números Complexos se resumirá a em encontrar o módulo, fazer a transformação da forma algébrica para a trigonométrica e operações. Não muito mais que isso.

Possivelmente, alguns fazem isso com medo. Medo de falar o que não é muito claro ou faz sentido, ou, ainda, por não ter o domínio necessário para explorar o assunto.

Nosso primeiro contato com os Números Complexos se resumiu a saber que $i^2 = -1$ e a operar esses números nas formas algébrica e trigonométrica. Contudo, sem que houvesse uma abordagem mais significativa e contextualizada. E isso teve consequências em nosso aprendizado.

Certa vez, quando estudavamos em um livro de matemática do Ensino Médio e lemos o problema do *tesouro perdido*, logo depois da abordagem dos Números Complexos, não conseguiamos fazer relação com o assunto abordado. Lemos várias vezes mas não conseguiamos relacionar o conteúdo com o problema.

Mas qual a razão de não conseguir?

Talvez em razão do conteúdo ser apresentado de forma muito objetiva e não fazer menção a algum tipo de contexto da vida ou histórico. Além da nossa formação, no Ensino Médio e Superior, não termos vistos aplicações envolvendo os complexos.

Capítulo 3

A construção algébrica dos Números Complexos

Como vimos, historicamente, o estudo dos complexos surge a partir da resolução de equações cúbicas que passavam por "números" não definidos mas que o resultado final era um número real.

O matemático italiano Cardano obteve a fórmula

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{(q)^2}{4} + \frac{(p)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{(q)^2}{4} + \frac{(p)^3}{27}}}$$

para o cálculo das raízes cúbicas de equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$. Esta fórmula era utilizada por outros matemáticos da época. Bombelli, outro matemático italiano, resolveu a seguinte equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ utilizando a fórmula de Cardano. E em sua resolução, para a surpresa de Bombelli, surgiu um elemento numérico desconhecido que hoje é chamado de número complexo. Vejamos essa resolução usando a fórmula de Cardano.

Solução: Na equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ temos que $p = -15$ e $q = -4$. Aplicando na fórmula de Cardano temos que

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-4)}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-4))}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27}}} \Longrightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-3375)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{(-3375)}{27}}} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A solução encontrada por Bombelli é a última igualdade anterior. Contudo, o aparecimento de $\sqrt{-121}$ intrigava Bombelli. Pois, além de $\sqrt{-121}$ não ser um número conhecido, o processo de resolução levava a uma raiz real. Neste caso $x = 4$.

Assim, trilhando caminhos como o que Bombelli fez é que surge o estudo de um novo conjunto chamado *Conjunto dos Números Complexos*.

Neste capítulo apresentaremos a construção algébrica dos Números Complexos pautada no que registram [2] e [3].

Aqui veremos que o conjunto dos números complexos é mais que uma extensão dos números reais e, sim, um conjunto com as operações bem definidas e no qual faz sentindo extrair raízes quadradas de números negativos além de sua representação como um par ordenado de números reais.

Como vimos na introdução deste trabalho, o estudo dos Números Complexos tem seu início nas equações cúbicas. Equações estas que tinham em seu processo de resolução raízes quadradas de números negativos, mas apresentava uma solução real.

Assim, para uma melhor fundamentação teórica vamos relembrar as operações de soma(+) e produto(.) de números reais e suas propriedades fundamentais.

1) A adição e multiplicação são comutativas, isto é, se a e b são reais, então:

$$a + b = b + a$$

$$e$$

$$a.b = b.a$$

2) A adição e a multiplicação são associativas, isto é, se a , b e c são números reais tem-se que:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$e$$

$$(a.b).c = a.(b.c)$$

3) A multiplicação é distributiva relativamente à adição, isto é,se a , b e c são números reais tem-se que:

$$a(b + c) = a.b + a.c$$

4) Existem e são únicos os números 0 e 1 satisfazendo às condições:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

$$e$$

$$a.1 = 1.a = a$$

para todo número real a.

5) A todo número real a corresponde um único real $(-a)$, e se $a \neq 0$, um único número real $\frac{1}{a}$ tal que:

$$a + (-a) = (-a) + a = 0)$$

$$e$$

$$a.\frac{1}{a} = 1$$

A partir das cinco propriedades anteriores apresentadas é possível determinar todas as demais operações artiméticas sobre os números reais. Por exemplo, da propriedade 4 podemos escrever

$$(-1).1 = -1$$

e de (3) e (4) temos que

$$a + a.0 = a(1 + 0) = a.1 = a$$

, ou seja, $a.0 = 0$.

Vejamos um outro importante exemplo: a "regra dos sinais". Sabemos que $(-1)(-1) = 1$ e isso se comprova por: $(-1)(-1) + (-1) = (-1)((-1) + 1) = (-1).0 = 0$. Assim, como $(1)+(-1) = 0$ e $(-1)(-1)+(-1) = 0$, então devemos ter que $(-1)(-1) = 1$.

É daí que concluímos que o quadrado, $a^2 = a.a$, de um número real a nunca é negativo. Ou seja, no conjunto dos números reais não é possível calcular a raiz quadrada de um número negativo.

3.1 Definição de Números Complexos

Definição 3.1. Os números complexos constituem um conjunto $\mathbb{C}$, onde estão definidas as operações de adição (indicado pelo sinal +) e de multiplicação (indicado pela simples justaposição de letras) com as propriedades (1), (2), (3), (4) e (5). Além disso, os números reais estão incluídos em $\mathbb{C}$ e:

a) Existe um número complexo i com $i^2 = -1$.

b) Todo número real complexo pode ser escrito de uma maneira única na forma $a + bi$, onde a e b são reais (a é chamado parte real e b é chamado parte *imaginária* do complexo $a + bi$). Usa-se a notação $Re(a + bi) = a$ e $Im(a + bi) = b$.

Agora, levando em conta as propriedades de (1) à (5) e que $i^2 = -1$, podemos operar o conjunto dos complexos de forma semelhante ao conjunto dos reais.

Exemplos:

a) $(8+2i)+(3+7i) = 8+3+2i+7i = 11+(2+7)i = 11+9i$

b)$(-3+5i)(1-i) = (-3).1+(-3).(-i)+5i.1+5i.i = -3+3i+5i+5i^2 = -3+8i-5 = -8-8i$

Desta forma, torna-se conveniente representar um número complexo por $z = a+bi$. E, sendo a um número real podemos escrever $a+0i = a$, ou seja, todo e qualquer número real também é um complexo.

3.1.1 Igualdade de Números Complexos

Consideremos a função $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(a+bi) \longmapsto (a,b)$. Note que φ é uma bijeção. Utilizaremos essa aplicação para definir em $\mathbb{R}^2$ as operações de adição e multiplicação como segue:

$$(a,b)+(c,d) := \varphi((a+bi)+(c+di)) = \varphi((a+c)+i(b+d)) = (a+c, b+d)$$

e

$$(a,b)\cdot(c,d) := \varphi((a+bi).(c+di)) = \varphi(ac+adi+bci+bdi^2) = (ac-bd)+i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc).$$

O plano cartesiano munido das operações anteriores é chamado de plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Neste contexto a estrutura algébrica introduzida em $\mathbb{R}^2$ é compatível a estrutura algébrica de $\mathbb{C}$, assim valendo as mesmas propriedades para as duas estruturas. Em suma isso significa que $a+bi$ e (a,b) representam o mesmo objeto.

Tendo em vista a igualdade de pares ordenados diremos que dois complexos são iguais se, e somente se, eles possuem as mesmas partes reais e imaginárias.

Sejam o complexo $z = a+bi$ e o par ordenado (a,b) formado pelas partes real e imaginária do complexo z. Desta forma, dados os complexos $z_1 = (a,b)$ e $z_2 = (c,d)$ temos que $z_1 = z_2$ quando $a = c$ e $b = d$. Ou seja, dois complexos são iguais quando tem as partes reais iguais e as partes imaginárias iguais.

Exemplo

Dados os complexos $z_1 = (x-1)+i$ e $z_2 = 3+(2y-3)i$ temos que $z_1 = z_2$ se, e somente se, tivermos:

$$x-1 = 3 \Rightarrow x = 4$$

$$e$$

$$2y-3 = 1 \Rightarrow y = 2.$$

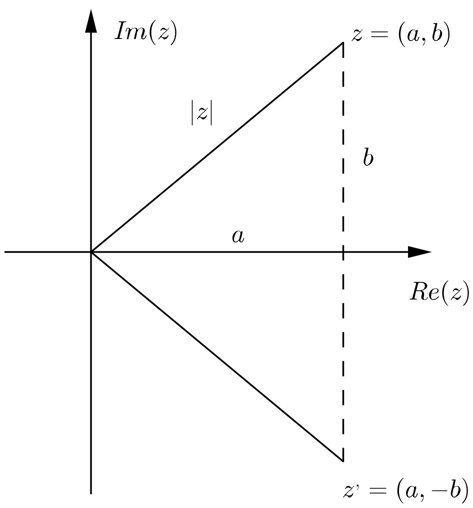
3.1.2 Módulos e conjugados

Pela propriedade fundamental (5), temos que dado um complexo $z = a + bi$ e sendo este diferente de zero, então deve existir um complexo da forma $\frac{1}{z}$ tal que $z\frac{1}{z} = 1$. Assim, é conveniente determinarmos a forma algébrica de $\frac{1}{z}$ na forma $c + di$.

Para tanto, definamos o conjugado de um número complexo $z = a + bi$ como sendo o complexo $\overline{z} = a - bi$. A representação geométrica do conjugado de z é o seu simétrico em relação ao eixo Ox.

Uma outra importante definição dentro dos complexos é de módulo. Chama-se módulo de um complexo z o número real não negativo $= \sqrt{a^2 + b^2}$. É possível verificar que, geometricamente, $|z|$ é a distância de O a z, isto é, mede o comprimento do vetor que representa o complexo z.

Notemos que $z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$. Desta forma, o produto de um número complexo z por seu conjugado é igual ao quadrado do módulo de z.



Fonte da figura: Autor

Dito estas coisas , podemos determinar a forma algébrica do conjugado do complexo z. Como $z\frac{1}{z} = 1$, então podemos escrever:

$z\frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, ou seja,

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Não é interessante memorizar está última relação, mas entender que para dividir dois complexos basta multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

3.1.3 Adição e subtração de complexos

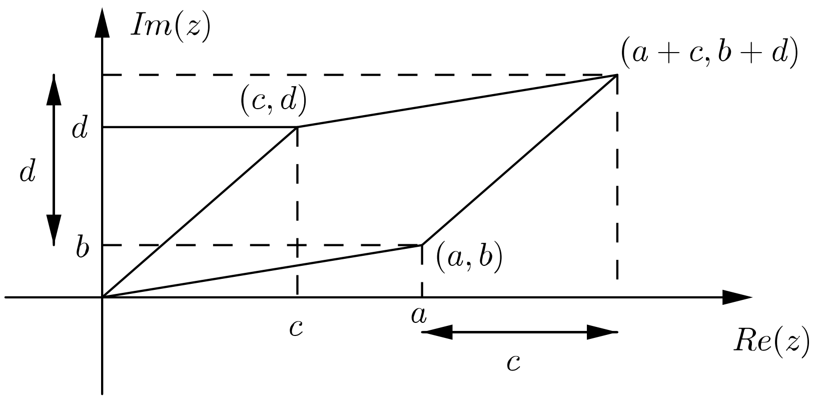
Levando em conta que um complexo $z = a + bi$ pode ser representado pelo par ordenado (a, b) e, também, as operações de adição e subtração de pares ordenados temos que: dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ define-se adição e a subtração, respectivamente, como sendo

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

$$e$$

$$(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d) \Rightarrow z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

A soma de dois complexos tem a sua representação geométrica. Isto é, dados dois números complexos, $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, tem-se como representação no plano um vetor cujas as componentes são as somas dos componentes de cada vetor. Geometricamente, como vemos na figura a seguir, somar dois complexos equivale a somar dois vetores, cujo o resultado é a diagonal do paralelogramo construído a partir dos vetores dados.



Fonte da figura: Autor

3.1.4 Multiplicação e divisão de complexos

Efetuamos a multiplicação de dois complexos aplicando a propriedade distributiva e lembrando que $i^2 = -1$. Assim, dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ tem-se que:

$$z_1.z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

. Para efetuarmos a divisão basta lembrar que $\frac{z_1}{z_2} = z_1(\frac{1}{z_2})$ e fazer $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z}_2}{z_2\,\overline{z}_2}$.

Outro sim, é que para quaisquer complexos z e w temos que são válidas as seguintes propriedades:

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

ii) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

iii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

iv) Se $w \neq 0$, $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

v) Se z é real, $z = \overline{z}$.

vi) $\overline{\overline{z}} = z$.

vii) Se z é um inteiro positivo, $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.

As demosntrações dessas propriedades estão no apêndice A.

3.1.5 As potências de i

Por definição vimos que $i^2 = -1$. A partir dessa informação, é possível verificar que as potências de i tem um comportamento interessante de tal forma que os possíveis resultados se repetem em ciclos de 4. Vejamos:

$i^0 = 1$;

$i^1 = i$;

$i^2 = -1$;

$i^3 = -i$;

$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$;

$i^5 = i^2.i^2.i = (-1).(-1).i = i$;

$i^6 = i^2.i^2.i^2 = (-1).(-1).(-1) = 1.(-1) = -1$;

$i^7 = i^3.i^4 = (-i).1 = -i$.

Para estes primeiros exemplos, vemos que os resultados para as potências de i são: 1, i, -1 e $-i$. De fato,

$$i^{n+4} = i^n.i^4 = i^n.1 = i^n.$$

Assim, podemos estabelecer uma regra para o cálculo das potências de i. Isto é, para calcular i^n basta dividir n por 4 e notar que $i^n = i^r$. Com efeito, se q é o quociente da divisão, $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q.i^r = 1^q.i^r = i^r$.

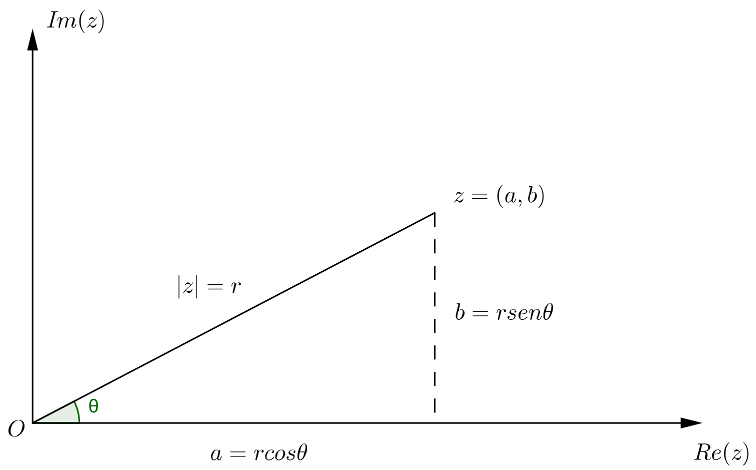
Exemplo: Calcular i^{538}.

Neste caso calcular i^{538} é equivalente a calcular i^r, onde r é o resto da divisão de 538 por 4. Como 538 deixa o mesmo resto que 38, quando dividido por 4, então temos que $i^{538} = i^2 = -1$.

3.2 Forma trigonométrica ou polar

Sabemos que todo complexo é da forma $z = a + bi$, com a e b reais. Assim, z pode ser pensado como sendo um ponto do plano cujas as coordenadas são (a, b) ou, ainda, como o vetor $\overrightarrow{Oz}$ de origem O e extremidade (a, b), ou seja, pode ser representado no plano cartesiano, que também é conhecido como plano de Argand-Gauss em homenagem aos matemáticos Jean Robert Argand (1768-1822) e Carl Friedrich Gauss(1777-1855).

Vejamos abaixo uma possível representação para o complexo $z = a + bi$ no plano cartesiano, onde r é a norma do vetor $\overrightarrow{Oz}$, também chamado de módulo de z, e θ é o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$ e o eixo real.



Fonte da figura: Autor

Do gráfico anterior podemos estabelecer as seguintes relações trigonométricas:

$$z = a + bi = r \cdot cos\theta + r \cdot sen\theta = r \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

onde z se destaca pelos elementos geométricos r e θ do vetor $\overrightarrow{Oz}$. Assim, chamamos de forma trigonométrica ou polar do complexo z a relação $z = r(cos\theta + i \cdot sen\theta)$.

Observação 3.1. A interpretação da multiplicação de dois números complexos trataremos no capítulo sobre rotação.

Capítulo 4

Rotação

Este capítulo dará ênfase a interpretação geométrica da multiplicação de dois números complexos e suas consequências. É nele que entenderemos o que é a rotação de um complexo e como isso pode ser interpretado geometricamente. Com a definição de rotação de um complexo é possível interpretar e solucionar problemas como o famoso problema do *tesouro perdido*. Além disso, serão apresentadas: *a fórmula de De Moivre, as raízes da unidade e o teorema fundamental da trigonometria.*

4.1 A interpretação geométrica da multiplicação de dois complexos

Muitos dos conceitos matemáticos podem melhor ser compreendidos quando, efetivamente, se enxerga o que está acontecendo. A multiplicação de dois números complexos na forma trigonométrica é uma dessas situações.

Aqui daremos ênfase ao que ensina [2] sobre o assunto.

Sendo x um número qualquer, consideremos que:

$$cos(x + \frac{\pi}{2}) = -senx$$

e

$$sen(x + \frac{\pi}{2}) = cosx$$

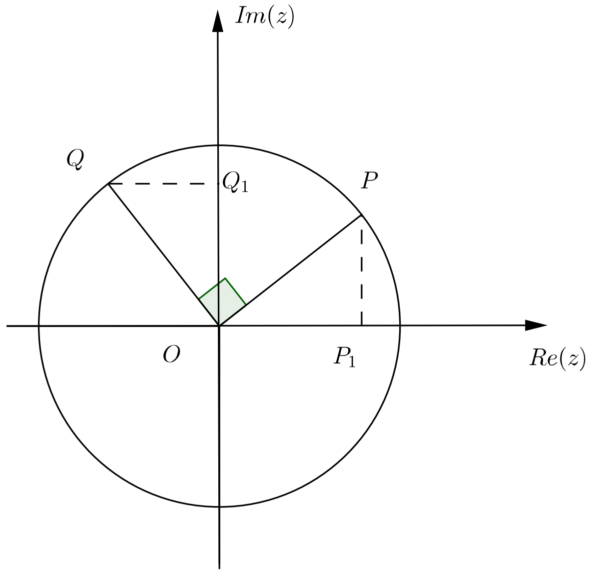
.

De fato, os triângulos OPP_1 e OQQ_1 da figura abaixo são congruentes por terem ângulos iguais e os lados $|OP| = |OQ|$. Portanto, em valor absoluto, tem-se que:

$$|cos(x + \frac{\pi}{2})| = |QQ_1| = |PP_1| = |senx|$$

e

$$|sen(x + \frac{\pi}{2})| = |OQ_1| = |OP_1| = |cosx|.$$



Fonte da figura: Autor

Logo, as relações estão demonstradas em valores absolutos. Notemos que x e $x + \frac{\pi}{2}$ estão sempre em quadrantes adjacentes, o que nos garante a obtenção dos sinais indicados. Além disso, a figura dos triângulos poderia ser feita em qualquer quadrante e a demonstração também seria válida.

Antes de generalizarmos a multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica, façamos dois casos em que os complexos são unitários. Assim, seja $w_1 = cos\theta_1 + isen\theta_1$ um número complexo de módulo 1 e que é ponto do círculo unitário S^1. Multiplicando w_1 por i temos:

$$iw_1 = i(cos\theta_1 + isen\theta_1) = icos\theta_1 + i^2sen\theta_1$$

$$iw_1 = -sen\theta_1 + icos\theta_1$$

$$iw_1 = cos(\theta 1 + \frac{\pi}{2}) + isen(\theta 1 + \frac{\pi}{2}),$$

daí concluímos que multiplicar w_1 por i equivale a efetuar no ponto w_1 uma rotação positiva de $\frac{\pi}{2}$, que é o argumento do complexo i. Consideremos agora um outro ponto $w_2 = cos\theta_2 + isen\theta_2$ do círculo unitário e façamos:

$$w_1w_2 = (w_2 = cos\theta_2 + isen\theta_2)w_1 = cos\theta_2 w_1 + isen\theta_2 w_1,$$

ou seja, o vetor que representa w_1w_2 é a soma dos vetores perpendiculares $cos\theta_2 w_1$ e $sen\theta_2 w_1$. Agora tomando um sistema de eixos de coordenadas xOy cujo o eixo Ox coincide com Ow_1, como mostra a figura a seguir, teremos que o ângulo entre w_1 e w_1w_2 é o ângulo θ_2.

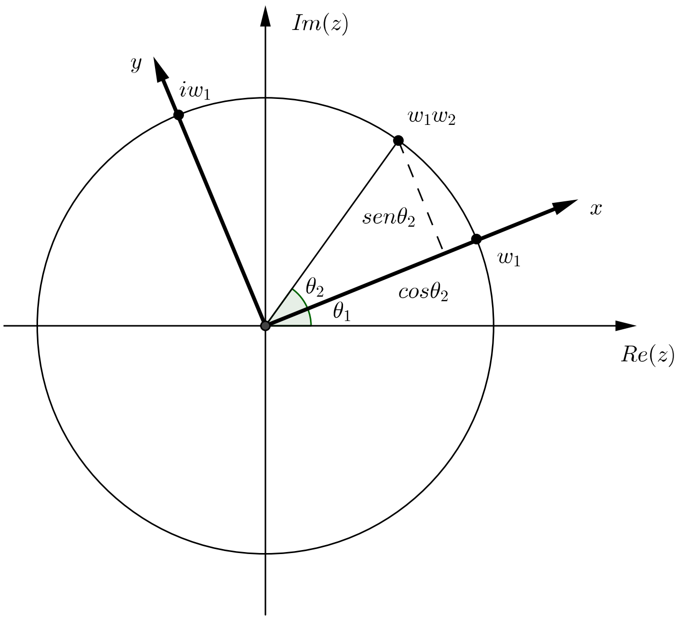
Desta forma é possível concluir que multiplicar dois complexos unitários, w_1 e w_2, significa, geometricamente, dar a um deles uma rotação positiva de ângulo igual ao ângulo do outro.

Agora escrevamos $z_1 = r_1w_1$ e $z_2 = r_2w_2$ tal que $|w_1| = |w_2| = 1$ e, teremos que:

$$z_1z_2 = r_1w_1r_2w_2$$

$$z_1z_2 = r_1r_2w_1w_2.$$

Isto é, a multiplicação de dois complexos não unitários é igual ao produto dos complexos unitários multiplicado pelo número r_1r_2.



Fonte da figura: Autor

Assim, sejam $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$. Fazendo $z_1.z_2$ temos que:

$$z_1.z_2 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1).r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2) \Rightarrow$$

$$z_1.z_2 = r_1r_2(cos\theta_1cos\theta_2 + icos\theta_1sen\theta_2 + isen\theta_1cos\theta_2 + i^2sen\theta_1sen\theta_2).$$

Agrupando, convenientemente, os termos da última igualdade vem:

$$z_1.z_2 = r_1r_2[(cos\theta_1cos\theta_2 - sen\theta_1sen\theta_2) + i(cos\theta_1sen\theta_2 + sen\theta_1cos\theta_2)] \Rightarrow$$

$$z_1.z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i(sen\theta_1 + \theta_2)].$$

A divisão de complexos na forma trigonométrica é um caso particular da multiplicação e, nos garante que:

Dados $z_1 = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1)$ e $z_2 = r_2(cos\theta_2 + isen\theta_2)$, com $z_2 \neq 0$, temos que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]$.

Para tanto, basta mostrarmos que $\dfrac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)]$ multiplicado por z_2 é igual a z_1. Assim, temos que:

$$z_2\frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)] = r_2.\frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2 + \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2 + \theta_2),$$

esta última igualdade é uma consequência direta da multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica. Daí, segue que:

$$z_2\frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)] = r_1(cos\theta_1 + isen\theta_1 = z_1,$$

como queríamos demonstrar. Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)].$$

4.1.1 Os desdobramentos da forma trigonométrica

A forma trigonométrica dos números complexos nos permite demonstrar algumas relações como a fórmula de De Moivre,as fórmulas $cos(x + y)$ e $sen(x + y)$ e a lei dos cossenos por exemplo. Demonstraremos estas afirmações a seguir.

4.1.2 Fórmula de De Moivre

Esta fórmula, para o cálculo de potências de um complexo, é conhecida com o nome de Fórmula de De Moivre, em homenagem à Abraham de Moivre que viveu entre 1667 a 1754.

A fundamentação teórica adotada neste caso é a de [1].

Fórmula de Moivre: Se n é inteiro,

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n.[cos(n\theta) + isen(n\theta)]$$

Prova: Notemos que para $n = 0$ ou $n = 1$ a fórmula é válida. E, sendo n um número inteiro maior que 1, a fórmula é verificada para reiteradas aplicações da fórmula da multiplicação.

Consideremos o caso em que n é um inteiro negativo.

Seja $n = -m$, com m inteiro e positivo. Temos que:

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = [r.(cos\theta + isen\theta)]^{-m}$$

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = \frac{1}{[r.(cos\theta + isen\theta)]^m}$$

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = \frac{1.cos0 + isen0}{r^m[cos(m\theta) + isen(m\theta)]}$$

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = \frac{1}{r^m}cos(0 - m\theta) + isen(0 - m\theta)$$

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = r^{-m}[cos(-m\theta) + isen(-m\theta)]$$

$$[r.(cos\theta + isen\theta)]^n = r^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)],$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo: Calcule $(1 + i\sqrt{3})^{20}$.

Solução: o número complexo $(1 + i\sqrt{3})^{20}$ tem módulo igual a

$$r = \sqrt{(1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

e θ é tal que $cos\theta = \frac{1}{2}$ e $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$ e, daí temos que:

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = (2.[cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}])^{20}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{20}.[cos\frac{20\pi}{3} + isen\frac{20\pi}{3}]$$

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{20}.[cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}]$$

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{20}(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Portanto,

$$(1 + i\sqrt{3})^{20} = 2^{19}(-1 + i\sqrt{3}).$$

Ora, já que é possível calcular z^n então também podemos calcular $\sqrt[n]{z}$. Logo, calcular $\sqrt[n]{r.(cos\theta + isen\theta)}$ é determinar os complexos z tais que $z^n = r(cos\theta + isen\theta)$. Fazendo $z = \rho(cos\alpha + isen\alpha)$, temos que

$$\rho(cos\alpha + isen\alpha)^n = r.(cos\theta + isen\theta).$$

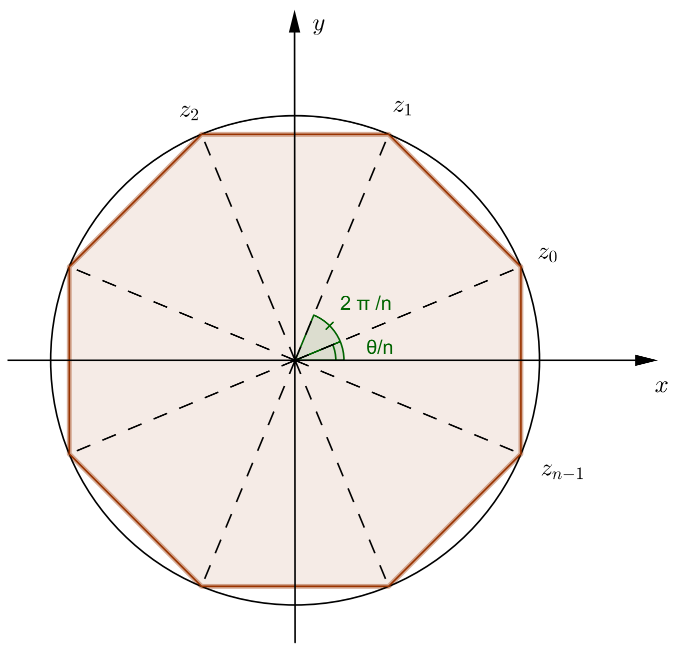
Aplicando a fórmula De Moivre obtemos,

$$\rho^n.[cos(n\alpha) + isen(n\alpha)] = r.(cos\theta + isen\theta).$$

Sendo válida a equação acima se tivermos $\rho^n = r$ e $n\alpha = \theta + 2k\pi$, com k inteiro. Daí segue que $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$. Por fim, temos que

$$\sqrt[n]{r.(cos\theta + isen\theta)} = \sqrt[n]{r}[cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}].$$

Notemos que as raízes têm todas o mesmo módulo que é $\sqrt[n]{r}$. Sendo $r \neq 0$ tem-se que as imagens dessas raízes são pontos de uma circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{r}$. Além disso, se atribuirmos valores inteiros a k, os argumentos crescem em PA de razão $\dfrac{2\pi}{n}$, o que garante que as raízes estão distribuídas uniformemente na circunferência. Assim, se $r \neq 0$, as imagens dessas raízes são vértices de um polígono regular de n lados inscrito nessa circunferência. E, sendo $r = 0$, então todas as raízes são nulas.



Fonte da figura: Autor

4.1.3 Raízes da Unidade

No conjunto dos números reais sabemos, por exemplo, que $\sqrt[3]{1} = 1$. Por outro lado, quando estendemos o conceito de raíz n-ésima ao conjunto dos números complexos obtemos resultados diferentes.

Para um melhor entendimento do exposto acima faremos uma abordagem sobre o assunto, com teoremas, propriedades, corolário e exemplos. Vejamos:

Uma estrutura interessante é dada, para cada n fixo, pelas raízes n-ésimas da unidade. Existem n raízes n-ésimas da unidade e,cujas imagens no plano complexo, são vértices de um polígono regular de n lados centrado na origem.

No conjunto dos números complexos temos que

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1[cos0 + isen0]} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1}\sqrt[n]{cos0 + isen0} \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1}[cos\frac{0 + 2k\pi}{n} + isen\frac{0 + 2k\pi}{n}] \Rightarrow$$

$$\sqrt[n]{1} = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n},$$

com k inteiro tal que $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$. Sendo n fixo, as raízes n-ésimas da unidade serão representadas por ε_k, tal que

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, ..., n - 1.$$

Como exemplo, calculemos as raízes cúbicas da unidade.

Solução: As raízes cúbicas da unidade são da forma

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{3} + isen\frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Assim, fazendo k assumir os valores $0, 1$ e 2 temos:

$$\varepsilon_0 = cos\frac{2.0\pi}{3} + isen\frac{2.0\pi}{3} = cos0 + isen0 = 1,$$

$$\varepsilon_1 = cos\frac{2.1\pi}{3} + isen\frac{2.1\pi}{3} = cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\varepsilon_2 = cos\frac{2.2\pi}{3} + isen\frac{2.2\pi}{3} = cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, os complexos $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ e ε_2, quando elevados ao cubo tem como resultado 1.

Vejamos agora algumas propriedades das raízes n-ésimas da unidade com n fixo.

Propriedade 1: *O produto de duas raízes n-ésimas da unidade é também raiz uma e-nésima da unidade.*

Prova: Como $z^n = 1$ e $w^n = 1$, então

$$(zw)^n = z^n w^n = 1.1 = 1.$$

Propriedade 2: *O inverso de uma raiz e-nésima da unidade é também uma raiz e-nésima da unidade.*

Prova: Seja $z^n = 1$, assim podemos escrever

$$(\frac{1}{z})^n = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Corolário

O quociente de duas raízes e-nésimas da unidade é também uma raiz e-nésima da unidade.

Por falarmos em quociente é bom mencionarmos a *aritmética módulo n*. Como sabemos, na aritmética módulo n trabalha-se com os números inteiros $0, 1, 2, ..., n-1$ e as operações são feitas tomando-se o resto da divisão por n do resultado da operação na aritmética usual. Por exemplo, as horas do dia nos fazem pensar e agir, não de forma objetiva e consciente, na aritmética módulo n. Afinal, em alguns momentos pensamos as horas do dia como em dois blocos de 12 horas ou em um de 24 horas. Assim, quando se diz que são 17 horas, concluímos que são 5 horas da tarde, pois $12 + 5 = 17$ e 17 quando dividido por 12 deixa resto 5. Da mesma forma que 8 horas após 23 horas são 7 horas da manhã, pois $8 + 23 = 31$ e 31 deixa resto 7 na divisão por 24. Na aritmética módulo n, a adição e a multiplicação são comutativas e a multiplicação é distributiva em relação à adição. O 0 é o elemento neutro da adição, ou seja, $0 + x = x + 0 = x$ para todo número x. Já o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, pois $1.x = x.1 = x$ para todo x. Além disso, todo número possui um simétrico, ou seja, o simétrico de um número x é $n - x$ pois $x + n - x = n$ é igual a 0 módulo n.

Desta forma, as propriedades apresentadas anteriormente são as mesmas da aritmética dos números reais. Com uma ressalva. Na aritmética módulo n isso nem sempre é verdade. O teorema a seguir nos diz quando isto acontece.

Teorema

Se n é primo, todos os números diferentes de zero são invertíveis na aritmética módulo n.

Prova: Na aritmética módulo n, os números são $0, 1, ..., n-1$. Seja $x \neq 0$ um desses números. Mostraremos que x é invertível.

Consideremos, módulo n, os $n-1$ produtos $x.1, x.2, ..., x.(n-1)$. Nenhum deles é 0, pois se $x.j = 0$ módulo n, com $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $x.j$ seria múltiplo de n; como n é primo, isso só seria possível com x múltiplo de n, o que é absurdo pois $x \in \{1, 2, ..., n-1\}$, ou com j múltiplo de n, o que também é absurdo pois $j \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Logo, o conjunto $\{x.1, x.2, ..., x.(n-1)\}$ está contido no conjunto $\{1, 2, ..., n-1\}$.

Mostraremos agora que o conjunto $\{x.1, x.2, ..., x.(n-1)\}$ possui $n-1$ elementos, o que implicará

$$\{x.1, x.2, ..., x.(n-1)\} = \{1, 2, ..., n-1\}.$$

Isso não é óbvio pois poderia haver dois produtos $x.j$ e $x.k(j < k)$ que fossem iguais, o que faria o conjunto ter menos do que $n-1$ elementos.

Se fosse $x.j = x.k$ módulo n, com $j, k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ e $j < k$, $xk - xj = x(k-j)$ seria múltiplo de n. Como n é primo, isso seria possível com x múltiplo de n, o que é absurdo pois $x \in \{1, 2, ..., n-1\}$, ou $k - j$ múltiplo de n, o que também é absurdo pois $k - j \in \{1, 2, ..., n-2\}$. Logo,

$$\{x.1, x.2, ..., x(n-1)\},$$

e existe no conjunto do lado esquerdo da igualdade algum elemento, digamos $x.p$ que é igual a 1 módulo n. Mas então p é o inverso de n.

Teorema

Sejam

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}$$

e

$$\varepsilon_j = cos\frac{2j\pi}{n} + isen\frac{2j\pi}{n}, k, j \in \{1, 2, ..., n-1\},$$

duas raízes n-ésimas da unidade. Então, $\varepsilon_k.\varepsilon_j = \varepsilon_{k+j}$ *onde a adição é módulo n.*

Prova:

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = [cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}].[cos\frac{2j\pi}{n} + isen\frac{2j\pi}{n}]$$

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2k\pi}{n}.cos\frac{2j\pi}{n} + icos\frac{2k\pi}{n}.sen\frac{2j\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}.cos\frac{2j\pi}{n} - sen\frac{2k\pi}{n}.sen\frac{2j\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2k\pi}{n}.cos\frac{2j\pi}{n} - sen\frac{2k\pi}{n}.sen\frac{2j\pi}{n} + i(sen\frac{2k\pi}{n}.cos\frac{2j\pi}{n} + sen\frac{2j\pi}{n}.cos\frac{2k\pi}{n})$$

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2k\pi + 2j\pi}{n} + isen\frac{2k\pi + 2j\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2(k+j)\pi}{n} + isen\frac{2(k+j)\pi}{n}.$$

Se $k + j = r$ módulo n, isso significa que r é o resto da divisão de $k + j$ por n, ou seja, existe um inteiro q tal que $k + j = qn + r$ e $r \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$. Então,

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2(k+j)\pi}{n} + isen\frac{2(k+j)\pi}{n}$$

$$\varepsilon_k.\varepsilon_j = cos\frac{2(qn+r)\pi}{n} + isen\frac{2(qn+r)\pi}{n} = \varepsilon_r.$$

Exemplo 1: Consideremos as raízes centésimas da unidade,

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{100} + isen\frac{2k\pi}{100}, k \in \{0, 1, ..., 100\}.$$

Notemos que $\varepsilon_{47}.\varepsilon_{68} = \varepsilon_{15}$, pois $47+68 = 15$ módulo 100. Além disso, $(\varepsilon_7)^{18} = \varepsilon_{26}$, pois temos um produto com 18 fatores $\varepsilon_7.\varepsilon_7...\varepsilon_7$ o que pelo teorema anterior nos garante que o resultado é $7.18 = 26$ módulo 100.

Exemplo 2: Como vimos, potências de raízes n-ésimas da unidade são também raízes n-ésimas da unidade. Por exemplo, as raízes quartas da unidade são

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{4} + isen\frac{2k\pi}{4},$$

com $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Assim, as raízes quartas da unidade são $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1$ e $\varepsilon_3 = -i$.

É fácil observar que as potências de $\varepsilon_1 = i$ e $\varepsilon_2 = -1$ são todas iguais a $i, -1, -i$ ou 1, e 1 ou -1, respectivamente.

Nos dois casos vemos, como já sabemos, que potências n-ésimas da unidade também são potências n-ésimas da unidade, com uma diferença. No caso, as potências de $\varepsilon_2 = -1$ geram apenas algumas raízes quartas da unidade. Já as potências $\varepsilon_1 = i$, geram todas as raízes quartas da unidade.

Assim, uma raiz n-ésima da unidade é dita primitiva quando suas potências gerarem todas as raízes n-ésimas da unidade.

Logo, são raízes n-ésimas da unidade $\varepsilon_1 = i$ e $\varepsilon_3 = -i$.

O teorema a seguir vem garantir em que casos teremos raízes n-ésimas da unidade primitivas.

Teorema *A raiz n-ésima da unidade*

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, ..., n-1\}$$

é primitiva se, e somente se, k e n são relativamente primos.

Prova: Se k é primo com n, a fração $\frac{k}{n}$ pode ser reduzida e termos $\frac{k}{n} = \frac{p}{q}$, com $q < n$. Então a raiz n-ésima da unidade

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{q} + isen\frac{2k\pi}{q}$$

também é uma raiz q-ésima da unidade (é a raiz q-ésima da unidade ε_p). Mas então suas potências, por serem raízes q-ésimas da unidade, poderão ter no máximo q valores distintos e não poderão dar origem a todas as n raízes n-ésimas da unidade pois $q < n$.

Se k é primo com n, considere as n potências

$$\varepsilon_k, (\varepsilon_k)^2, ..., (\varepsilon_k)^n.$$

Essas n potências são raízes n-ésimas da unidade. Como existem precisamente n raízes n-ésimas da unidade, se essas potências forem distintas, elas serão todas as n raízes n-ésimas da unidade. Portanto, devemos provar apenas que essas potências são todas diferentes.

Consideremos duas dessas potências, $(\varepsilon_k)^s$ e $(\varepsilon_k)^t$, com $s < t$. Se fosse

$$(\varepsilon_k)^s = (\varepsilon_k)^t,$$

teríamos

$$(\varepsilon_k)^s = (\varepsilon_k)^s \Rightarrow (\varepsilon_k)^{s-t} = 1$$

$$(cos\frac{2k\pi}{n} + isen\frac{2k\pi}{n})^{s-t} = 1 \Rightarrow cos\frac{2k(t-s)\pi}{n} + isen\frac{2k(t-s)\pi}{n} = 1.$$

O que acarreta que $\frac{2k(t-s)\pi}{n}$ é múltiplo de 2π, ou seja, $\frac{2k(t-s)\pi}{n}$ é um número inteiro. Como k é primo com $n, t-s$ deve ser múltiplo de n. Isso é absurdo pois como $t, s \in \{1, 2, ..., n\}$ e $s < t, t - s \in \{1, 2, ..., n-1\}$.

Exemplo: As raízes de índice 12 da unidade são

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{12} + isen\frac{2k\pi}{12}, k \in \{1, 2, 3, ..., 11\}.$$

Dentre elas, são primitivas as raízes $\varepsilon_1, \varepsilon_5, \varepsilon_7, \varepsilon_{11}$.

4.1.4 Teorema fundamental da trigonometria

O teorema fundamental da trigonometria é o resultado mais importante da interpretação geométrica da multiplicação de complexos. O teorema nos garante que se x e y são números reais quaisquer, então tem-se que:

$$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny$$

e

$$sen(x+y) = senxcosy + senycosx.$$

A abordagem sobre a demonstração é pautada no que registra [2].

Demonstração:

Sejam x e y números reais tais que

$0 \leqslant x < 2\pi$ e $0 \leqslant y < 2\pi$, e escrevemos $w_1 = cosx + isenx$ e $w_2 = cosy + iseny$.

Então,pela interpretação geométrica da multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica, $w_1w_2 = cos(x+y) + isen(x+y)$ (i). Além disso, temos que

$w_1w_2 = (cosx + isenx)(cosy + iseny)$

$w_1w_2 = cosxcosy + icosxseny + isenxcosy - senxseny$

$w_1w_2 = (cosxcosy - senxseny) + i(cosxseny + senxcosy)$ (ii).

Como $(i) = (ii)$ temos que:

$cos(x+y)+isen(x+y) = (cosxcosy-senxseny)+i(cosxseny+senxcosy)$, sendo a igualdade acima verdadeira se, e somente se, tivermos

$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny$ e $sen(x+y) = senxcosy + cosxseny$. Ficando demonstrado sua validade para este caso.

Suponhamos agora que x e y são números quaisquer, então achamos inteiros k e l tais que

$0 \leqslant x + 2k\pi = x_1$ e $0 \leqslant y + 2l\pi = y_1$.

Logo, levando em consideração a igualdade acima temos que $cosx = cosx_1$, $senx = senx_1$, $cosy = cosy_1$ e $seny = seny_1$ e, consequentemente, teremos $cos(x+y) = cos(x_1+y_1)$ e $sen(x+y) = sen(x_1+y_1)$. Assim, sendo válidas as relações para x_1 e y_1 segue que também são válidas para x e y. Portanto, o teorema fundamental da trigonometria é verdadeiro para todos números reais x e y.

Capítulo 5

Aplicações

Neste capítulo serão vistas algumas aplicações dos números complexos associadas a rotação de um complexo, a reflexão em um espelho plano, a corrente e diferença de potencial alternadas em um circuito elétrico e exercícios gerais sobre o tema abordado neste trabalho.

5.1 Exercícios diversos

1) Calcular $cos3x$ sem o uso de fórmulas da adição.

2) Determinar as raízes cúbicas do complexo $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

3) $ABCD$ é um quadrado. Dados $A = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$, determine C e D.

4)Dois vértices consecutivos de um octógono regular convexo são $(1, 2)$ e $(3, -2)$. Determine o centro do octógono.

5) Determine o complexo z sabendo que as imagens de z, i e iz são vértices de um triângulo equilátero.

6) Seja v o volume de um cubo de aresta x e $v^{'}$ o volume de um paralelepipedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual a x. Determinar x de modo que $v = v^{'} + 1$.

7) Considere as raízes de índice 34 da unidade,

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{34} + isen\frac{2k\pi}{34}, k = 0, 1, 2, ..., 33.$$

Calcule:

a)$\varepsilon_{21}.\varepsilon_{19}$

b)$(\varepsilon_{12})^{13}$

c)$(\varepsilon_{12})^{-11}$

d)$\varepsilon_4 \div \varepsilon_{25}$.

8) Quais das raízes de índice 15 da unidade,

$$\varepsilon_k = cos\frac{2k\pi}{15} + isen\frac{2k\pi}{15}, k = 0, 1, 2, ..., 14,$$

são primitivas?

5.1.1 O problema do tesouro perdido

Este é um problema clássico da Matemática. Ele faz alusão aos números complexos sem citá-lo. Para a pessoa que desconhece os conceitos e fundamentos dos números complexos, certamente terá um grande problema ao tentar resolver este problema. Existem várias versões do seu texto, uma delas é a que segue abaixo:

Um antigo mapa dava as seguintes instruções para localizar um tesouro enterrado em certa ilha...

"Ande da palmeira até a entrada da caverna. Lá chegando, vire 90° à direita e caminhe o mesmo número de passos. No fim desse trajeto, coloque uma marca e retorne à palmeira. Agora, caminhe em direção à pedra. Lá chegando, vire 90° à esquerda e caminhe o mesmo número de passos que foram dados da palmeira à pedra. Coloque uma marca no fim desse trajeto. O tesouro está no ponto médio dessas marcas."

Quando chegamos à ilha, a palmeira não existia mais. Como fazer para achar o tesouro?

5.1.2 Uma aplicação à eletricidade

Esta aplicação à eletricidade fornece uma ideia do uso dos complexos nesse processo. Veremos que o uso dos complexos serão muito importantes nos cálculos que envolvem os conceitos de corrente alternada e diferença de potencial (ddp). Sendo em alguns casos indispensável.

O texto a seguir é de [4]. Vejamos:

No processo de geração de energia, desde à hidrilétrica até nossas residências, muitos cálculos matemáticos são feitos.

Dentre os elementos envolvidos nesse processo, podemos destacar a corrente elétrica (fluxo de elétrons que passa por um fio, medido em ampère) e a tensão (energia potencial por unidade de carga elétrica, medida em volt), que podem assumir valores contínuos ou alternados. No caso da corrente elétrica, por exemplo, ela é chamada de contínua quando os elétrons se movimentam em um único sentido, e alternada quando estes alternam o sentido do movimento constantemente, fazendo com que os valores da corrente oscilem entre um valor máximo e um mínimo.

No sistema de transmissão, por serem alternadas, a tensão e a corrente, podem ser representadas por sinais senoidais com valores instantâneos da tensão(v) e da corrente(i), dados por $v(t) = V.sen(w.t + \alpha_0)$ e $i(t) = I.sen(w.t + \beta_0)$, ou seja, senoides dependentes do tempo t, com amplitudes V e I, respectivamente, também chamadas de valores de pico. A frequência angular w representa a velocidade de oscilação da senoide, dada em radianos por segundo(rad/s). Os valores α_0 e β_0 representam a fase inicial da função.

Essas expressões matemáticas para tensões e correntes elétricas não permitem métodos práticos para a análise de circuitos elétricos, pois não são fáceis de serem algebricamente operadas. Na prática, para facilitar as operações algébricas costuma-se utilizar um vetor radial girante denominado fasor, o qual, em cada instante, representa um ponto da senoide, possunido, assim, a mesma frequência. O módulo do fasor corresponde à amplitude de oscilação da senoide.

Como são vetores de módulos constantes, os fasores podem ser representados por números complexos na forma trigonométrica, o que facilita as operações algébricas dos sinais senoidais. Em relação à tensão alternada no instante inicial ($t = 0$), por exemplo temos o fasor $v(t) = V.(cos\alpha_0 + sen\alpha_0)$.

5.1.3 Uma aplicação à arte

Certamente, para quem não entende do assunto sobre obras artísticas, pode acreditar que pintar um quadro ou elaborar um projeto de arte passe apenas pelo processo da inspiração. Mas pelo que parece não é só isso. Muitas obras artísticas feitas pelo homem tem conceitos matemáticos embutidos em seu processo de construção. Um caso particular dessa situação é a rotação de um complexo, cujo os conceitos estão presentes em obras artísticas.

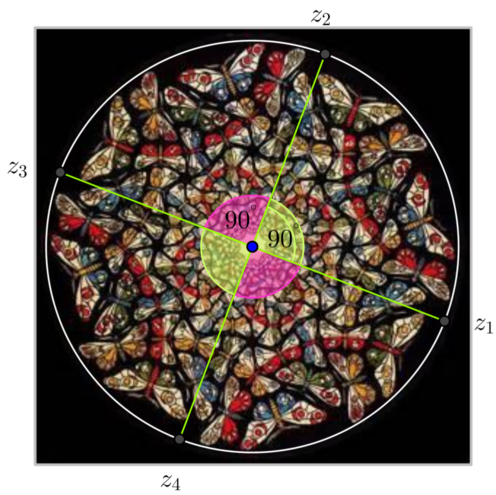
É com o uso da rotação de imagens que o artista Maurits Cornelis Escher (Leeuwarden, Países Baixos, 17 de junho de 1898 - Hilversum, Países Baixos, 27 de março de 1972) fez muitas de suas obras. Nas figuras a seguir(que são obras artísticas de Maurits Cornelis retiradas da internet e que foram adaptadas com uso do geogebra para obter o resultado mostrado), vemos que a imagem como um todo pode ser obtida a partir da rotação de uma imagem pré definida.

Nesta primeira figura vemos que as duas tartaguras e o peixe formam a imagem que é rotacionada num ângulo de 120°, obtendo assim o resultado desejado pelo artista. Já na segunda figura é possível notar que são feitas quatro rotações, de 90°, de um grupo de borboletas que resulta na bela obra do artista.

Imagem1

Fonteda figura: Autor

Imagem2

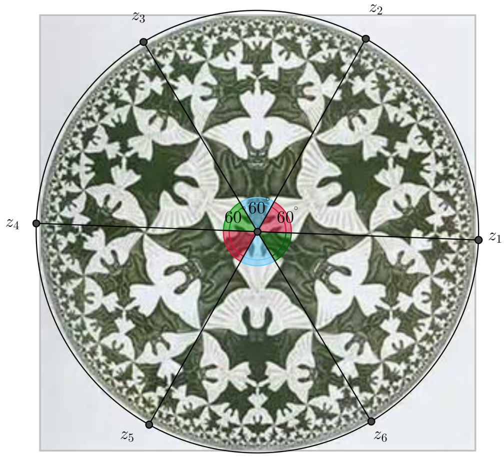


Fonte da figura: Autor

Muitas das obras do artista citado anteriormente, são visivelmente resultados da rotação de um conjunto de figuras. Não posso afirmar que o artista usou esse conceito matemático de forma intencional. Contudo, é possível notar a construção de polígonos regulares em ca imagem. Na primeira imagem existe um polígono regular inscrito, no caso um triângulo equilátero, e na segunda imagem é possível obter um quadrado. Em outras obras de Maurits estão presentes, de forma implícita, outros polígonos regulares. A próxima imagem, que é de 1960 e é intitulada de **Limite circular IV(céu e inferno)**, é um exemplo disto.

Neste caso, a obra artística tem "escondido"um hexágono regular que é obtido a partir da rotação dos seis anjos, que cercam os quatro demônios, que estão no centro do polígono.

Imagem3



Fonte da figura: Autor

5.1.4 Aplicações à aerodinâmica

Como pode uma máquina tão grande e pesada, como o avião, voar? Ou, o que fazer para melhorar o seu desempenho?

Certamente, essas podem ter sido perguntas feitas pelos norte-americanos ao criar o NACA *(National Advisory Committee for Aeronautics - Comitê Consultivo Nacional sobre Aeronáutica)* em 1915. Foi o NACA que antecedeu a NASA *((National Aeronautics and Space Administration - Administração Aeronáutica e Espacial Nacional).* Entre 1920 e 1930 o NACA realizou vários testes em aviões, com uma variedade de aerofólios possibilitando, assim, um aperfeiçoamento nesse equipamento tão vital ao avião.

O russo *Nikolai Joukowski* $(1847 - 1921)$ desenvolveu um trabalho que ficou conhecido como Transformação Joukowski. Esse trabalho possibilitou aos engenheiros aeronáuticos a realizar pesquisas sobre aerofólios e suas influências na força de sustentação de um avião.

Nikolai Joukowski utilizou os conceitos sobre números complexos para a realização de seu trabalho. Os cálculos realizados pelos engenheiros requerem conhecimento acima do que estamos propostos a enfatizar nessa dissertação. Contudo, é essencial o comentário para que saibamos que os números complexos são fundamentais nesse ramo da engenharia.

5.1.5 Aplicações à geometria

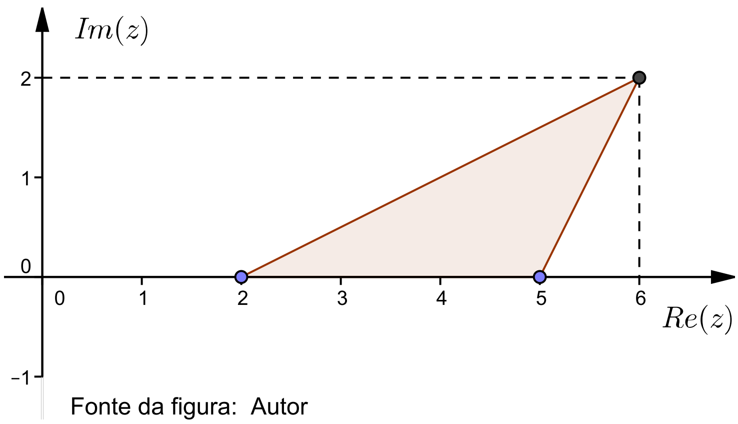
Os números complexos e a geometria tem uma forte ligação como veremos. Nas aplicações a seguir faremos uso dos resultados, sem demostrá-los, obtidos pela professora Fernanda Caon em sua dissertação de mestrado em 2013 pela Universidade Estadual de Ponta Grossa. Algumas dessas relações serão apresentadas no plano complexo. Vejamos algumas delas:

Movimento no plano

Neste exemplo é possível verificar que o triângulo resultante é obtido através do movimento dos complexos z_1, z_2 e z_3 por operações, ou seja, o movimento no plano pode ser estudado através de operações com complexos.

Enunciado 1

Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$.



Fonte da figura: Autor

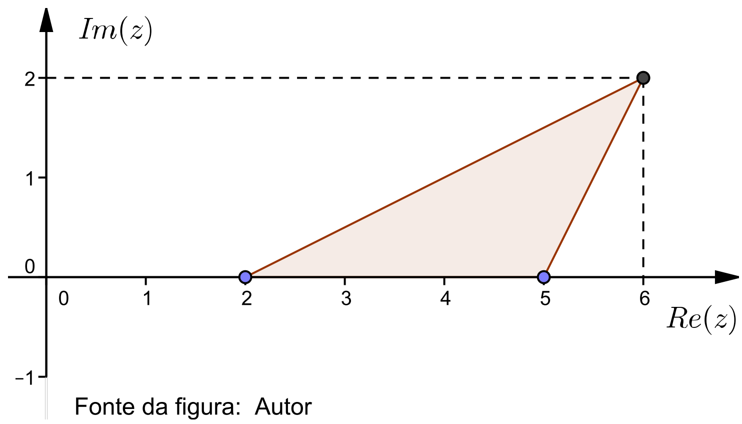
A área do trângulo de vértices $w_1 = iz_1$, $w_2 = iz_2$ e $w_3 = 2iz_3$ é?

Translação

Dada uma figura no plano é possível movimentá-la de tal forma que sejam mantidos forma, ângulos, medidas e orientação. Isso é possível através de uma translação. Para que isso ocorra basta adicionar um complexo z a seus pontos, como os vértices por exemplo.

Enunciado 2

Considere, no plano complexo, conforme a figura, o triângulo de vértices $z_1 = 2$, $z_2 = 5$ e $z_3 = 6 + 2i$.



Fonte da figura: Autor

Fazer as translações dessa figura, em cada caso a seguir, somando o complexo:

a) $z = (-2, 0)$;

b) $z = (0, 3)$;

c) $z = (-2, 3)$.

Dilatação e contração

As figuras no plano complexo podem sofrer dilatação ou contração através da operação com complexos. Assim, dada uma figura no plano complexo é possível obter uma dilatação, por exemplo, multiplicando os pontos dessa figura por um um número real $k > 0$. Se o objetivo for uma contração, então multiplicamos os pontos da figura por um real $0 < k < 1$.

Enunciado 3

Os vértices do triângulo do enunciado da questão anterior foram multiplicados por $k = 2$ e $k = \frac{1}{2}$. Qual o resultado algébrico e geométrico disso?

A equação da reta

Consideremos os pontos $A = (a, c)$ e $B = (b, d)$ no plano complexo e $P = (x, y)$ um ponto qualquer da reta r que passa por A e B. Assim, a equação da reta que passa por esses três pontos é dada por $z = r(k) = z_1 + k.(z_2 - z_1)$, onde k é real e indica a razão de proporcionalidade da colinearidade entre AP e AB, $z_1 = OA$, $z_2 = OB$, $z = OP$ e $z_2 - z_1$ indica a direção da reta r.

Enunciado 4

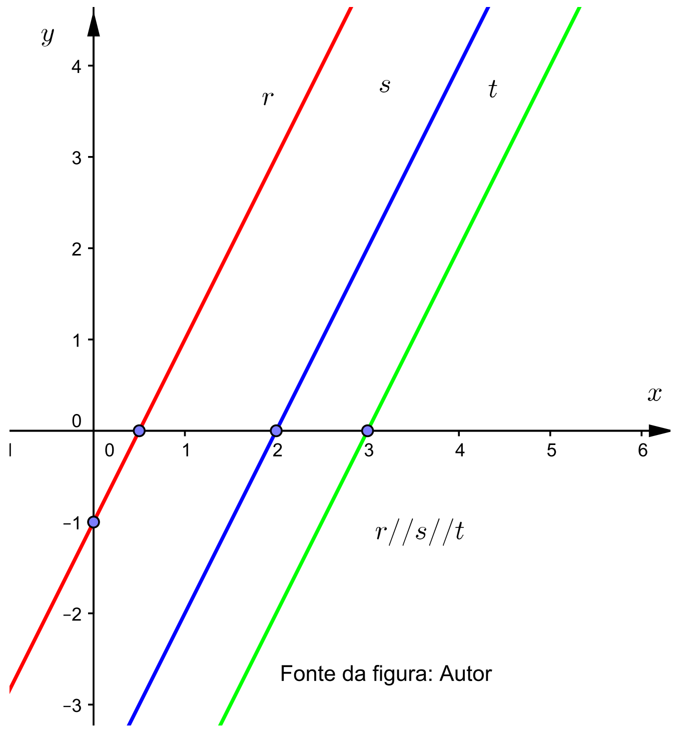
Dados os pontos $A = (3, 5)$ e $B = (8, -2)$, determinar a equação da reta r que passa por esses pontos.

Retas paralelas e retas perpendiculares

Dadas as retas no plano complexo $r(k) = z_1 + k.(z_2 - z_1)$ e $s(k) = z_3 + k.(z_4 - z_3)$, que passam pelos pontos A e B, e C e D, respectivamente, dizemos que elas são paralelas se $\dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ é um número real. Caso $\dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ seja imaginário puro, então as retas $r(k)$ e $s(k)$ são perpendiculares.

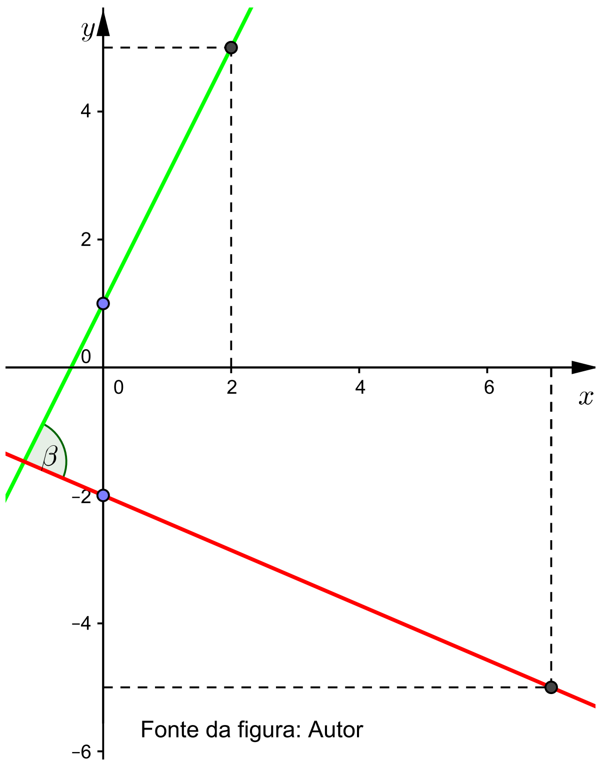
Enunciado 5

Observe o plano cartesiano e determine a equação das retas s e t.



Enunciado 6

As retas representadas no plano cartesiano são perpendiculares?



Alinhamento de três pontos

Dados os pontos A, B e C, dizemos que os mesmos estão alinhados se existir um número real k tal que $z_3 = r(k)$, ou seja, $z_3 = r(k) = z_1 + k.(z_2 - z_1)$. O que implica que $z_3 = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

Enunciado 7

Dados $z_1 = (6, 2)$ e $z_2 = (9, 5)$, determinar a equação da reta que passa esses pontos e verificar se o complexo $z_3 = (-1, 4)$ está alinhado com z_1 e z_2.

Mediatriz

Sejam z_1 e z_2 dois números no plano complexo. A equação da mediatriz determinada por z_1 e z_2 é dada por $m(t) = z + t(z_2 - z_1).i$, onde $z = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Enunciado 8

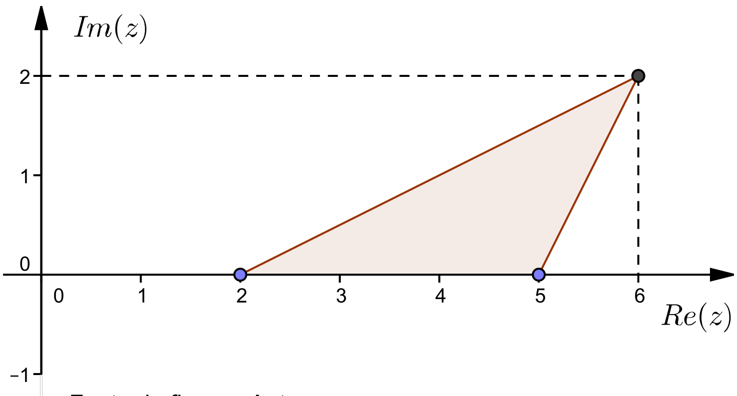
Dados os complexos $z_1 = (3, 5)$ e $z_2 = (1, -4)$, determinar a equação da mediatriz determinada por esses complexos.

Reflexão

Neste caso, veremos a aplicação da relexão em torno de uma reta que passa pela origem. Resultado este que está associado a multiplicação de complexos. Assim, dado um complexo z e uma reta r que forma um ângulo β com a origem, então o simétrico de z em relação a r é obtido pela multiplicação do conjugado $\overline{z}$ pelo complexo $w = cos2\beta + isen2\beta$.

Enunciado 9

Considere a figura a seguir.



Fonte da figura: Autor

Fazer as reflexões da figura, em relação a reta r que passa pela origem, quando r tem equação $x = 0$, $y = 0$ e $y = x$.

Considerações Finais

Neste trabalho foram apresentados fatos históricos que contribuiram no surgimento do Conjunto dos Números Complexos e algumas aplicações vinculadas à Matemática e a outras áreas do conhecimento.

Ao fazer o comentário anterior pode-se passar uma falsa sensação de que escrever este trabalho tenha sido fácil ou simples. Contudo, não foi bem assim. Escrever sobre os Números Complexos torna-se difícil à medida que a maioria dos livros do Ensino Médio não trazem nada muito novo, ou diferente, do que publicações anteriores não tenham feito. São exercícios parecidos e sem aplicações.

A coleta de informações como fatos históricos, conceitos e exercícios (como geralmente são apresentados nos livros didáticos) foi a parte mais acessível. Todavia, como um dos propósitos desse trabalho era a aplicabilidade dos Números Complexos. E encontrar exercícios em que os mesmos não fossem apenas para fixar conceitos foi difícil. Na verdade são poucas as aplicações com Números Complexos nos livros de matemática do Ensino Médio. Talvez essa seja uma boa razão para que o ensino dos complexos tenha diminuído na educação básica. Algumas aplicações exigem um conhecimento acima do que o aluno do Ensino Médio esteja preparado, como é o caso do estudo do vetor fasor. Por outro lado devo confessar que ficamos entusiasmados quando vimos aplicações na arte, aerodinâmica e a relação entre Números Complexos e geometria plana.

No que se refere aos PCN's e a SBM ficamos surpresos com relação as suas propostas sobre o tema.

Antes de lermos o que os PCN's orientavam sobre os Números Complexos, tínhamos uma concepção de orientação diferente daquela dada nos PCN's. Imaginávamos que seria algo que valorizasse o assunto tanto pelo caráter histórico quanto por suas aplicabilidades. O que não ocorre. Os PCN's veem na contramão dos fatos históricos que levaram ao surgimento dos complexos e não enfatiza nenhuma possível abordagem sobre suas aplicações. O que implica, na atualidade, fazer essa abordagem em sala de aula exatamente como sempre ocorreu: referir-se aos complexos apenas como uma extensão dos Números Reais.

No caso da SBM, imaginamos que ela apontaria para as lacunas deixadas pelos PCN's. O que também não ocorreu. Sabemos que existem saberes matemáticos essenciais como a Matemática Financeira e a Geometria. Talvez, a princípio, os Números Complexos não sejam vistos como essenciais. Mas acreditamos serem importantes, principalmente para o aluno que chega na universidade. Assim, colocar o estudo dos complexos como um tema suplementar (opcional) no Ensino Médio nos parece passível de possíveis indagações.

Acreditamos que o estudo dos Números Complexos no Ensino Médio deva, a princípio, se pautar no fato de ser conhecimento exigido em cursos de nível superior. Uma outra razão é a de intensificar as suas aplicações na forma de exercícios contextualizados.

Certamente, esta não é uma tarefa das mais fáceis. Mas se nos propormos a trilharmos este caminho, que provavelmente é espinhoso, chegaremos a um ”oásis”de satisfação profissional. Propiciando, assim, aos alunos um deleite sobre o estudo dos Números Complexos.

Referências Bibliográficas

[1] IEZZI, Gelson. Matemática Ciências e Aplicações, 3ª série. Volume 3: Ensino Médio/ Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida. 2 ed. São Paulo: Saraiva, 2004.

[2] CARMO, Manfredo Perdigão do. Trigonometria/Números Complexos - Manfredo Perdigão do Carmo, Augusto César Morgado, Eduardo Wagner. - 3.ed.- Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[3] LIMA, Elon Lages. A matemática do Ensino Médio - Volume 3/Elon Lages Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto Cezar Morgado, 6ª Ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] SOUZA, Joamir Roberto de. Novo Olhar Matemática - Joamir Roberto de Souza.– 1.ed.– São Paulo: FTD 2010.

[5] ROQUE, Tatiana. Tópicos de História da Matemática - Tatiana Roque e João Bosco Pitombeira Carvalho. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[6] BOYER, Carl Benjamin, 1906. História da Matemática; tradução: Elza F. Gomide, Edgard Blucher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[7] ROLKOUSKI, Emerson. Matemática: 3º ano - 1. semestre/Emerson Rouskouki.- Curitiba: Editora Opet, 2011.

[8] Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio./Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. - Brasília: Ministério da Eduacação, 1999.

[9] Sacristán, J. Gimeno. O currículo: uma reflexão sobre a prática/J. Gimeno Sacristán; trad. Ernani F. da F. Rosa - 3. Ed. - Porto Alegre: ArtMed, 2000.

[10] CHAGAS, Juliana Santos Barcellos. A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática. Dissertação de Mestrado/UENF. 2013.

[11] http://www.infoescola.com/biografias/m-c-escher/acessado dia 25/10/2015.

[12] http://www.sbm.org.br/pt/acessado dia 05/11/2015

Apêndice A

Demonstração das propriedades do conjugado de um complexo

Aqui estão demonstradas as propriedades do conjugado de um complexo. A saber que:

i) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

ii) $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

iii) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

iv) Se $w \neq 0$, $\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

v) Se z é real, $z = \overline{z}$.

vi) $\overline{\overline{z}} = z$.

vii) Se z é um inteiro positivo, $\overline{z}^n = \overline{z^n}$.

Demonstrações

Para estas demonstrações vamos considerar que $z = a + bi$ e $w = c + di$, com a, b, c e d números reais.

Assim, para a propriedade i), temos que

$$\overline{z+w} = (a+c) - (b+d)i = (a-bi) + (c-di) = \overline{z} + \overline{w}.$$

Para ii) escrevemos $z - w = (a-c) + (b-d)i$, o que acarreta $\overline{z-w} = (a-c) + (d-b)i = a - bi - c + di = a - bi - (c - di) = \overline{z} - \overline{w} =$. Já no caso de iii) tem-se que

$$\overline{z.w} = (ac-bd)-(ad+bc)i = (ac-bci)-(adi+bidi) = (a-bi)c-(a-bi)di = (a-bi)(c-di) = \overline{z}.\overline{w}.$$

Em iv) tem-se que $\frac{z}{w} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$ o que tem por consequência

$$\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{(ac+bd)-(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(ad-bc)i}{c^2+d^2} = \frac{ac-bci+bd+adi}{c^2+d^2},$$

daí segue

$$\overline{(\frac{z}{w})} = \frac{(a-bi)c+(a-bi)di}{c^2+d^2} = \frac{(a-bi)(c+di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{a-bi}{c-di} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

Para v), sendo z real, ou seja, $z = a + 0i = a - 0i = \overline{z}$. E por fim $\overline{z}^n = \overline{z}.\overline{z}...\overline{z}$, com n fatores iguais a $\overline{z}$ e por iii) escrevemos $\overline{z}^n = \overline{z.z...z} = \overline{z^n}$ como queríamos demostrar.

Apêndice B

Respostas e soluções das aplicações e exercícios

Solução da questão 1: Notemos que pela fórmula de De Moivre podemos escrever

$cos3x + isen3x = (cosx + isenx)^3 \Rightarrow$

$cos3x + isen3x = cosx^3 + 3cosxi^2senx^2 + 3cosx^2isenx + i^3senx^3 \Rightarrow$

$cos3x + isen3x = cosx^3 - 3cosxsenx^2 + i(3cosx^2senx - senx^3)$.

Da igualdade acima temos que a parte real do 1º membro é igual a parte real do 2º membro. O mesmo ocorrendo para as partes imaginárias. Assim, escrevemos:

$cos3x = cosx^3 - 3cosxsenx^2$ e $senx = 3cosx^2senx - senx^3$.

Portanto, $cos3x = cosx^3 - 3cosxsenx^2$.

Solução da questão 2: Encontrar as raízes cúbicas de z, equivale a encontrar um complexo w tal que $w^3 = z$. A representação de z na forma trigonométrica é $z = cos30^\circ + isen30^\circ$, mas como existem outras determinações para o argumento de z então escrevemos $z = cos(30^\circ + k360^\circ) + isen(30^\circ + k360^\circ)$, onde k representa um número inteiro. Logo, pela fórmula de De Moivre, os complexos da forma

$$w_k = cos(\frac{30^\circ + k360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + k360^\circ}{3})$$

são raízes de z. Fazendo k variar no conjunto $0, 1, 2, 3, 4, 5$ temos que:

$w_0 = cos(\frac{30^\circ + 0.360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + 0.360^\circ}{3}) = cos10^\circ + isen10^\circ$;

$w_1 = cos(\frac{30^\circ + 1.360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + 1.360^\circ}{3}) = cos130^\circ + isen130^\circ$;

$w_2 = cos(\frac{30^\circ + 2.360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + 2.360^\circ}{3}) = cos250^\circ + isen250^\circ$;

$w_3 = cos(\frac{30^\circ + 3.360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + 3.360^\circ}{3}) = cos10^\circ + isen10^\circ$;

$w_4 = cos(\frac{30^\circ + 4.360^\circ}{3}) + isen(\frac{30^\circ + 4.360^\circ}{3}) = cos130^\circ + isen130^\circ$;

$w_5 = cos(\dfrac{30^{\circ} + 5.360^{\circ}}{3}) + isen(\dfrac{30^{\circ} + 5.360^{\circ}}{3}) = cos250^{\circ} + isen250^{\circ}$.

Como vemos, a partir de $k \geq 3$ as raízes de z começam a se repetir.

Fazendo k variar entre os inteiros negativos temos que:

$w_{(-1)} = cos(\dfrac{30^{\circ} + (-1).360^{\circ}}{3}) + isen(\dfrac{30^{\circ} + (-1).360^{\circ}}{3}) = cos(-110^{\circ}) + isen(-110^{\circ}) = cos250^{\circ} + isen250^{\circ}$;

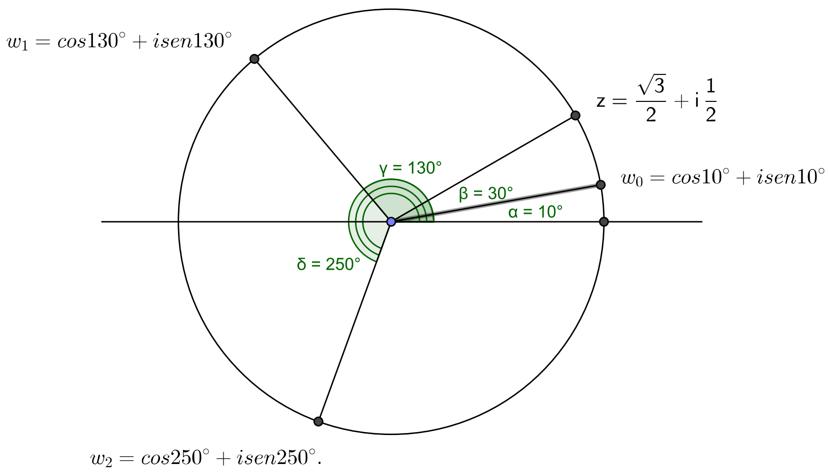
$w_{(-2)} = cos(\dfrac{30^{\circ} + (-2).360^{\circ}}{3}) + isen(\dfrac{30^{\circ} + (-2).360^{\circ}}{3}) = cos(-230^{\circ}) + isen(-230^{\circ}) = cos130^{\circ} + isen130^{\circ}$;

$w_{(-3)} = cos(\dfrac{30^{\circ} + (-3).360^{\circ}}{3}) + isen(\dfrac{30^{\circ} + (-3).360^{\circ}}{3}) = cos(-350^{\circ}) + isen(-350^{\circ}) = cos10^{\circ} + isen10^{\circ}$.

Daí, as raízes de z começam a se repetir. Portanto, existem exatamente três raízes cúbicas de z que são:

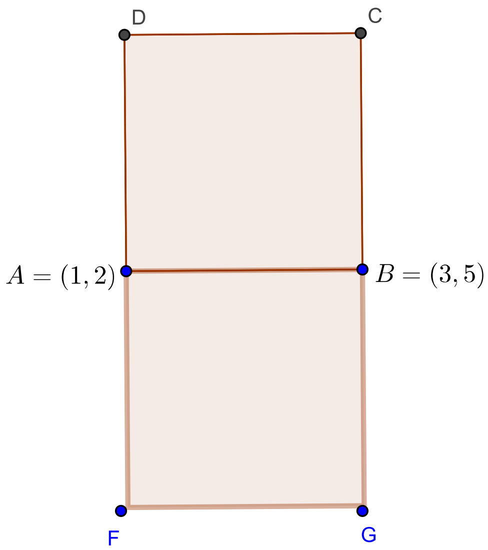
$w_0 = cos10^{\circ} + isen10^{\circ}$, $w_1 = cos130^{\circ} + isen130^{\circ}$ e $w_2 = cos250^{\circ} + isen250^{\circ}$.

A figura a seguir mostra como as raízes de z se comportam ao longo do círculo trigonométrico.



Fonte da figura: Autor

Solução da questão 3: Neste problema são dados dois pontos que são os vértices de quadrado e pede-se para encontrar os outros dois vértices. Assim, o problema nos leva a duas possíveis soluções conforme mostra a figura abaixo.



Fonte da figura: Autor

Da figura acima podemos escrever:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 3) = 2 + 3i$ e que o vetor $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.i$. Desta última igualdade temos que:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.i \Rightarrow D - A = (B - A)i$$

$$D - (1 + 2i) = (2 + 3i)i \Rightarrow D = 2i + 3i^2 + 1 + 2i$$

$$D = -2 + 4i = (-2, 4).$$

Como $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, então

$$-2 + 4i - 1 - 2i = C - 3 - 5i \Rightarrow -3 + 2i = C - 3 - 5i \Rightarrow C = 7i = (0, 7).$$

Por outro lado temos que A é ponto médio DD', ou seja,

$$\frac{x_D + x_{D'}}{2} = 1 \Rightarrow -2 + x_{D'} = 2 \Rightarrow x_{D'} = 4$$

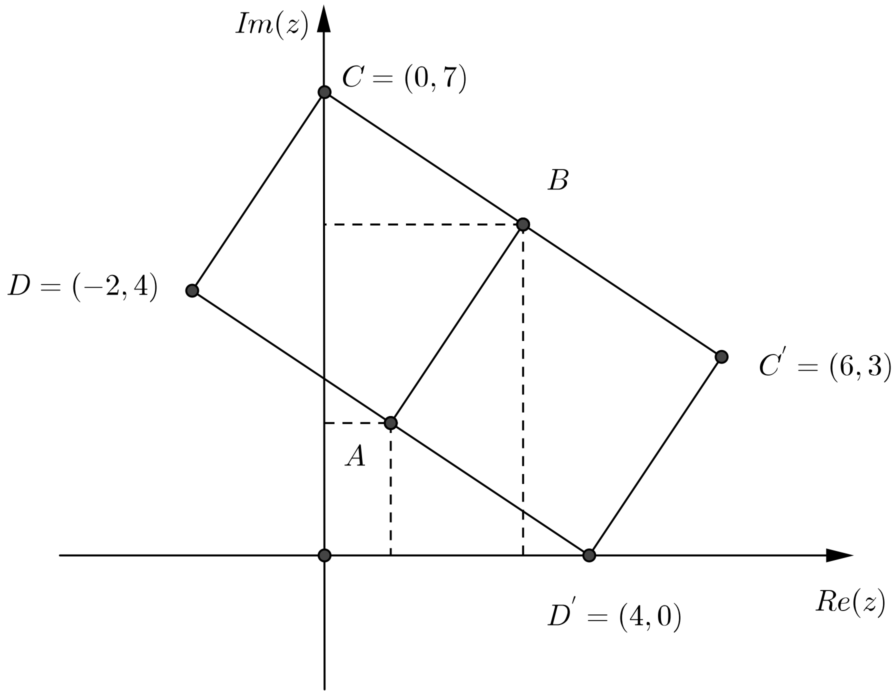
e

$$\frac{y_D + y_{D'}}{2} = 2 \Rightarrow 4 + y_{D'} = 4 \Rightarrow y_{D'} = 0.$$

Portanto, $D = (4, 0)$.

De forma análoga encontramos $C' = (6, 3)$.

A representação geométrica da solução é a que segue abaixo.



Fonte da figura: Autor

Solução da questão 5: Do problema sabemos que $z = a + bi = (a, b)$, $z_1 = i = (0, 1)$ e $z_2 = iz = -b + ai = (-b, a)$ e que os módulos z e z_1 são iguais, ou seja,

$$|z| = |z_1| = a^2 + b^2.$$

Daí temos:

$$d(z, i) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + (b-1)^2},$$

$$d(z, iz) = \sqrt{(a+b)^2 + (b-a)^2}$$

e

$$d(i, iz) = \sqrt{(0+b)^2 + (1-a)^2} = \sqrt{b^2 + (1-a)^2}.$$

Como $d(z, i) = d(i, iz)$ então:

$$\sqrt{a^2 + (b-1)^2} = \sqrt{b^2 + (1-a)^2} \Rightarrow a^2 + (b-1)^2 = b^2 + (1-a)^2 \Rightarrow a = b.$$

Sendo $a = b$ segue que $d(i, iz) = \sqrt{(2a)^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$ e,

$$(a+b)^2 + (b-a)^2 = b^2 + (1-a)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 - 2a \Rightarrow 2a^2 + 2a - 1 = 0.$$

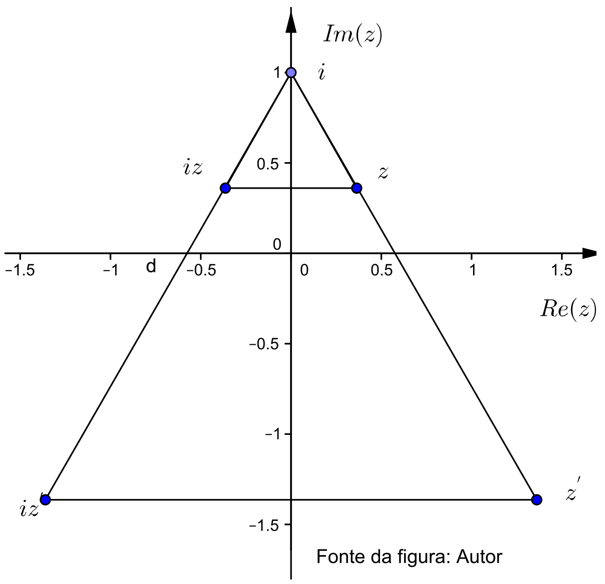
As raízes da equação do 2º grau são: $a = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $a = \dfrac{-1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Portanto, o número z assume os seguintes valores que são soluções do problema:

$$z = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i$$

ou

$$z = \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

O gráfico abaixo representa a solução do problema.



Fonte da figura: Autor

Solução da questão 6: De acordo com os dados do problema temos que o volume do cubo é dado por $V = x^3$ e do paralelepipedo por $V' = 3x$. Além disso , sabe-se que $V = V' + 1$. Substituindo os valores de V e V' nesta última equação vem:

$$x^3 = 3x + 1 \Rightarrow x^3 - 3x - 1 = 0.$$

Usando a fórmula de Cardano, onde $a = -3$ e $b = -1$ temos que:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{-3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{-3}{4}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}}.$$

Desta última igualdade podemos escrever os complexos z_1 e z_2, tais que $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ e $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$. O que nos sugere calcular as raízes cúbicas de z_1 e z_2

Assim , temos que $|z_1| = |z_2| = 1$.

Para z_1 temos que $cos\theta_1 = \frac{1}{2}$ e $sen\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, o que implica que $\theta_1 = 60^{\circ}$. Logo, $z_1 = cos60^{\circ} + isen60^{\circ}$ e as congruências são da forma $z_1 = cos(60^{\circ} + k.360^{\circ}) + isen(60^{\circ} + k.360^{\circ})$, com k inteiro. Desta forma as raízes cúbicas de z_1 são da forma $x_k = cos(\frac{60^{\circ} + k.360^{\circ}}{3}) + isen(\frac{60^{\circ} + k.360^{\circ}}{3})$. Fazendo k variar de 0 a 2 tem-se:

$$x_0 = cos20^{\circ} + isen20^{\circ}; x_1 = cos140^{\circ} + isen140^{\circ}; x_2 = cos260^{\circ} + isen260^{\circ}.$$

Como x representa uma medida positiva, então devemos considerar como parte da solução $cos20^{\circ}$.

Usando raciocínio análogo ao de z_1, podemos escrever que $z_2 = cos(300^{\circ} + k.360^{\circ}) + isen(300^{\circ} + k.360^{\circ})$ e as soluções da forma $x_k = cos(\frac{300^{\circ} + k.360^{\circ}}{3}) + isen(\frac{300^{\circ} + k.360^{\circ}}{3})$. Com k variando de 0 a 2 vem:

$$x_0 = cos100^{\circ} + isen100^{\circ}; x_1 = cos220^{\circ} + isen220^{\circ}; x_2 = cos340^{\circ} + isen340^{\circ}.$$

Pela mesma razão de z_1, consideramos passa nossa solução apenas $cos20^{\circ} = cos340^{\circ}$.

Como a solução geral é dada por $x = cos20^{\circ} + cos20^{\circ} = 2cos20^{\circ} = 1,879$ u.c.

Solução da questão 7:

a) Aplicando o teorema das raízes *n-ésimas da unidade*, temos que:

$\varepsilon_{21}.\varepsilon_{19} = \varepsilon_{21+19} = \varepsilon_{40} = \varepsilon_6$.

$$\varepsilon_6 = cos\frac{2.6\pi}{34} + sen\frac{2.6\pi}{34} \Rightarrow \varepsilon_6 = cos\frac{6\pi}{17} + sen\frac{6\pi}{17}.$$

b) Temos que $(\varepsilon_{12})^{13} = \varepsilon_{12}.\varepsilon_{12}...\varepsilon_{12}$, com 13 fatores iguais ε_{12}. Aplicando a mesma propriedade do item anterior, podemos escrever:

$$(\varepsilon_{12})^{13} = \varepsilon_{12.13} = \varepsilon_{136} = \varepsilon_0.$$

Daí segue que:

$$\varepsilon_0 = cos\frac{2.0.\pi}{34} + sen\frac{2.0.\pi}{34} = cos0 + isen0 = 1.$$

c) Neste caso podemos escrever:

$$(\varepsilon_{12})^{-11} = \frac{1}{(\varepsilon_{12})^{11}} = \frac{1}{\dfrac{cos30\pi}{17} + \dfrac{sen30\pi}{17}},$$

pois $(\varepsilon_{12})^{11} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{30}$.

Por outro lado,

$$(\varepsilon_{12})^{-11} = \frac{1}{\dfrac{cos30\pi}{17} + \dfrac{sen30\pi}{17}} = \frac{cos0 + isen0}{\dfrac{cos30\pi}{17} + \dfrac{sen30\pi}{17}}$$

$$(\varepsilon_{12})^{-11} = cos(0 - \frac{30\pi}{17}) + isen(0 - \frac{30\pi}{17}) = cos(-\frac{30\pi}{17}) + isen(-\frac{30\pi}{17})$$

portanto, $(\varepsilon_{12})^{-11} = cos(\dfrac{30\pi}{17}) - isen(\dfrac{30\pi}{17})$.

d) Como $\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_{25}} = \dfrac{\varepsilon_4}{\varepsilon_{25}}$, então podemos escrever:

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_{25}} = \frac{cos(\dfrac{8\pi}{34}) + isen(\dfrac{8\pi}{34})}{(cos\dfrac{50\pi}{34}) + isen(\dfrac{50\pi}{34})}$$

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_{25}} = cos(\frac{-21\pi}{17}) + isen(\frac{-21\pi}{17})$$

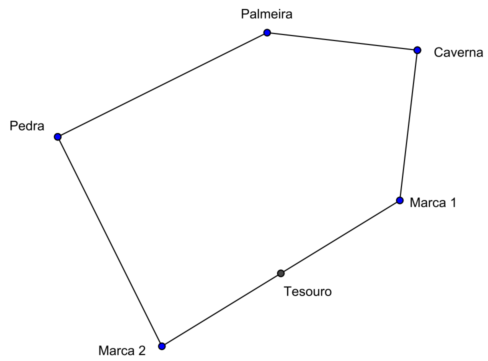
portanto,

$$\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_{25}} = cos\frac{21\pi}{17} - isen\frac{21\pi}{17}.$$

Solução da questão 8:

As raízes de índice 15 da unidade são da forma $\varepsilon_k = cos\dfrac{2k\pi}{15} + isen\dfrac{2k\pi}{15}$, com $k = 1, 2, 3, ..., 14$. Pelo teorema da raíz n-ésima da unidade, são primitivas aquelas que são primas relativas com 15. Portanto, são $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$.

Solução do problema do tesouro: Este problema, a princípio parece não ter ligação com os números complexos. Todavia, quando fala-se em "...girar 90°..."nos remete a rotação de números complexos. Por outro lado é importante notar que, de acordo com as informações deixadas no mapa, não precisamos identificar a palmeira. Isso será mostrado a seguir. Para tanto, consideremos a figura a abaixo. Nela estão representadas as informações do problema.



Fonte da figura: autor

Para encontrarmos o tesouro precisamos encontrar os pontos A e B. Assim, consideremos os vetores $\overrightarrow{PC}$, que tem origem na palmeira e extremidade na caverna, e $\overrightarrow{PK}$ de origem na palmeira e extremidade na pedra.

O ponto A é obtido a partir de uma rotação de 90°, no sentindo anti-horário, do vetor $\overrightarrow{PC}$. Mas rotacionar 90° no sentindo anti-horário é equivalente a multiplicar o vetor $\overrightarrow{PC}$ por $-i$, isto é:

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{PC}.(-i) \Rightarrow A - C = (C - P)(-i) \Rightarrow A = C(1 - i) + iP.$$

De maneira análoga ao ponto A, podemos encontrar o ponto B levando em conta que o vetor $\overrightarrow{KB}$ é obtido a partir de uma rotação de 90°, no sentindo horário, do vetor $\overrightarrow{PK}$ por i, ou seja:

$$\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{PK}.(i) \Rightarrow B - K = (K - P).i \Rightarrow B = K(1 + i) - iP.$$

Somando membro a membro as duas igualdades obtidas, dos pontos A e B, temos:

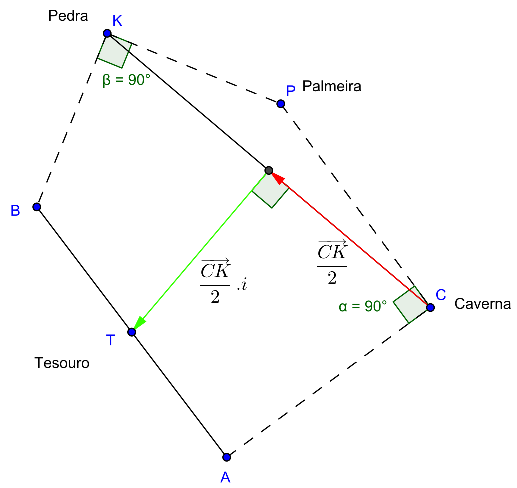
$$A + B = iP - iP + C - Ci + K + Ki = (C + K) + (K - C)i.$$

Como o tesouro T está no ponto médio de AB, então segue que:

$$T = \frac{A + B}{2} = \frac{(C + K) + (K - C)i}{2} = \frac{C + K}{2} + \frac{(K - C)i}{2}.$$

Geometricamente o tesouro T se encontra na semi-soma dos pontos C e K com o vetor

$\overrightarrow{CK}$ rotacionado 90° no sentido anti-horário. A figura a seguir ilustra esse fato.



Fonte da figura: Autor

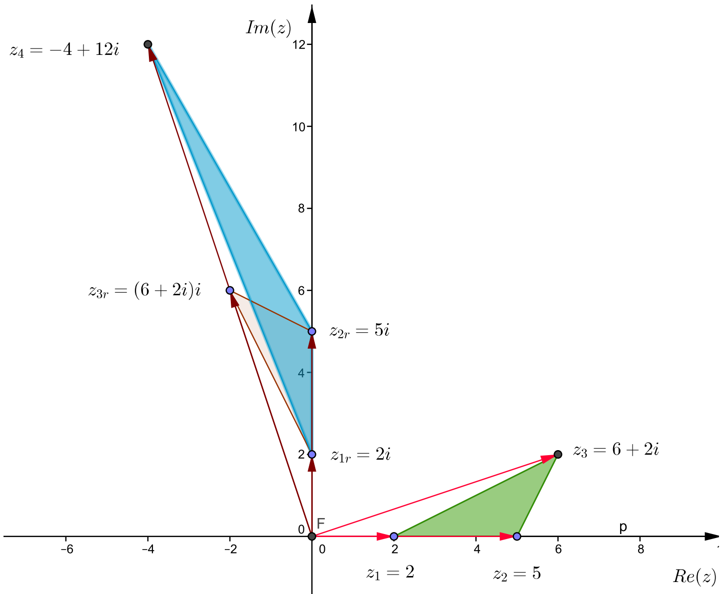
Solução das aplicações de geometria

Solução do enunciado 1

A figura abaixo reprsenta o resultado obtido a partir das operações com os complexos z_1, z_2 e z_3. Nela vemos $w_1 = iz_1$, geometricamente, equivale a uma rotação no sentido anti-horário de 90°. O mesmo ocorrendo com o complexo $w_2 = iz_2$. Já o complexo $w_3 = 2iz_3$ tem uma rotação de 90°, no mesmo sentido de w_1 e w_2, e um aumento em seu módulo, pois foi multiplicado por 2.

Assim, pela figura, a área do triângulo de vértices $w_2 = iz$, $w_2 = iz_2$ e $w_3 = 2iz_3$

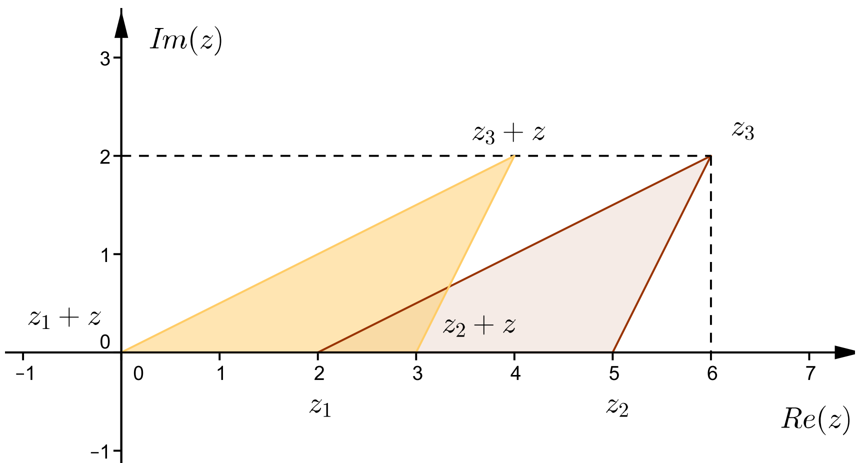
é $\dfrac{5.4}{2} = 10u.a.$



Fonte da figura: Autor

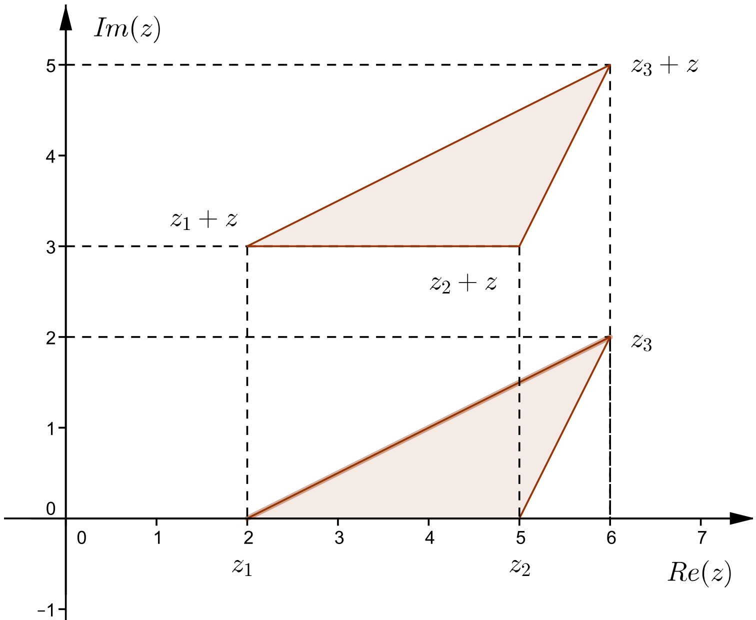
Solução do enunciado 2

a) Como $z_1 = (2,0)$, $z_2 = (5,0)$ e $z_3 = (6,2)$ então a soma destes complexos com $z = (-2,0)$ resulta na translação mostrada na figura a seguir.



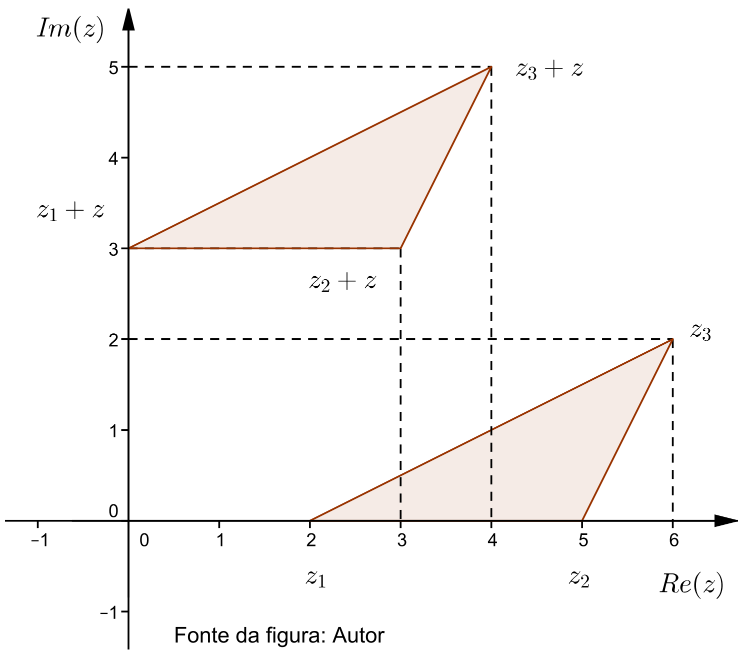
Fonte da figura: Autor

b) De forma análoga ao item a), temos como solução a figura a seguir.



Fonte da figura: Autor

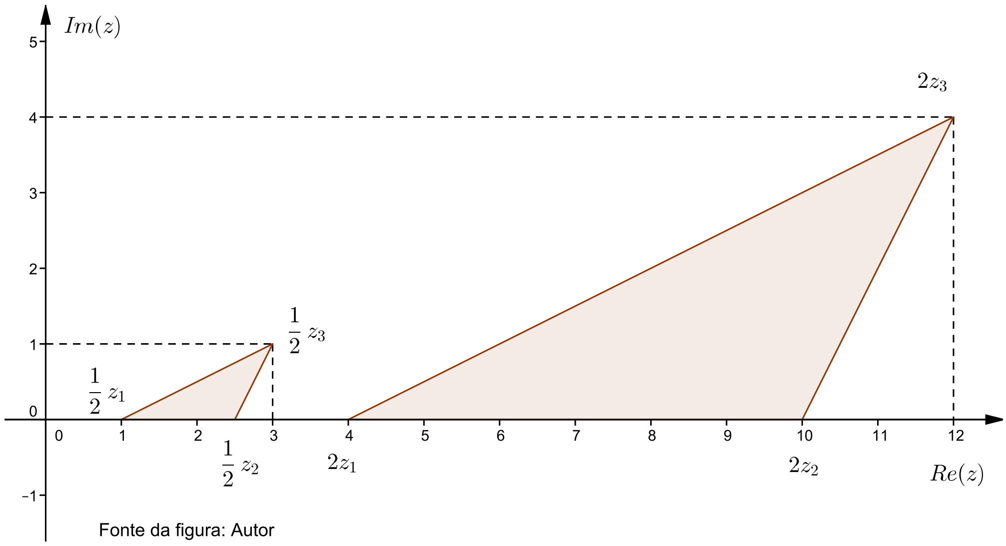
c) O resultado obtido neste item é uma junção dos itens a) e b).



Fonte da figura: Autor

Solução do enunciado 3

A multiplicação dos complexos z_1, z_2 e z_3 por 2 e $\frac{1}{2}$ resulta, respectivamente, em: $2z_1 = (4,0)$, $2z_2 = (10,0)$, $2z_3 = (12,4)$, $\frac{1}{2}z_1 = (1,0)$, $\frac{1}{2}z_2 = (\frac{5}{2},0)$ e $\frac{1}{2}z_1 = (3,1)$. A figura a seguir é o resultado geométrico da dilatação e da contração.



Solução do enunciado 4

Podemos associar as pontos $A = (3,5)$ e $B = (8,2)$ os complexos z_1 e z_2 respectivamente. Assim, a equação da reta no plano complexo que passa por A e B é dada por $z = r(k) = z_1 + k(z_2 - z_1)$. Como $z_2 - z_1 = (5,-7)$, segue que a reta r tem equação $z = r(k) = (3,5) + k(5,-7)$, com k real.

Solução do enunciado 5

Ao plano cartesiano associemos o eixo real de tal forma que coincida como eixo das abscissas e, da mesma forma, o eixo imaginário ao eixo das ordenadas.

Desta forma podemos escrever $z_1 = (\frac{1}{2},0)$ e $z_2 = (0,-1)$, que são pontos que pertencem a reta r. Por outro lado temos $z_3 = (2,0)$ que pertence a reta s e $z_4 = (a,b)$ um ponto genérico de s. Como $z_2 - z_1 = (\frac{-1}{2},-1)$, $z_4 - z_3 = (a-2,b)$ e as retas r e s são paralelas, então o número $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ é real, ou seja,

$$\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \frac{(\frac{-1}{2},-1)}{(a-2,b)} = \frac{-a-2b+2-2ai+bi+4i}{2a^2+2b^2-4a+8} = (\frac{-a-2b+2}{2a^2+2b^2-4a+8}, \frac{-2a+b+4}{2a^2+2b^2-4a+8}).$$

Ora, para que o número $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ seja real então devemos ter $\frac{-2a+b+4}{2a^2+2b^2-4a+8} = 0$, o que implica que $b = 2a - 4$. Assim, fazendo $b = 2$, por exemplo, temos que $a = 3$ e a equação da reta s é $s(k) = (2, 0) + K(1, 2)$.

Com raciocínio análogo ao empregado a reta s, encontramos a equação da reta t que é dada por $t(k) = (3, 0) + K(3, 6)$.

Solução do enunciado 6

Para sabermos se as retas do problema são perpendiculares basta aplicar a relação $z = \dfrac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} = \dfrac{-2 - 4i}{7 - 3i} = (\dfrac{-1}{29}, \dfrac{-17}{29})$. Como z não é imaginário puro, então as retas não são perpendiculares.

Solução do enunciado 7

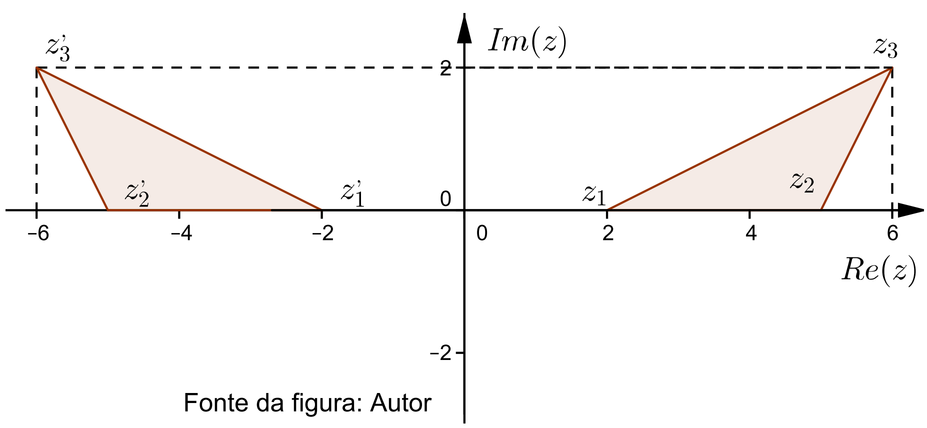
A equação da reta que passa pelos complexos $z_1 = (6, 2)$ e $z_2 = (9, 5)$ é $r(k) = (6, 2) + k(3, 3)$. Se z_1, z_2 e $z_3 = (-1, 4)$ estão alinhados, então existe um número real k tal que $(-1, 4) = (6, 2) + k(3, 3)$. Assim, $k = \dfrac{-7 + 2i}{3 + 3i} = (\dfrac{-5}{6}, \dfrac{9}{6})$. Como o número k não é real, então z_1, z_2 e z_3 não estão alinhados.

Solução do enunciado 8

Sabemos que a equação da mediatriz determinada por dois complexos, z_1 e z_2, é dada por $m(t) = z + t(z_2 - z_1)i$ com $z = \dfrac{z_2 + z_1}{2}$. Nesse caso, como $z_1 = (3, 5)$ e $z_2 = (1, -4)$ segue que $z = (\dfrac{3+1}{2}, \dfrac{5-4}{2}) = (2, \dfrac{1}{2})$. Portanto, a equação da mediatriz é $m(t) = (2, \dfrac{1}{2}) + t(9, -2)$.

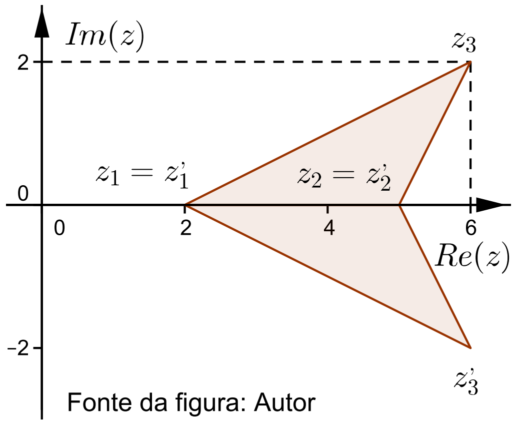
Solução do enunciado 9

Primeiramente, façamos o caso em que $x = 0$, ou seja, a figura sofre uma reflexão em torno do eixo imáginário. Assim, o ângulo $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ e, por consequência, basta multiplicar os complexos associados aos vértices do triângulo pelo complexo $w = cos\pi + isen\pi$. O resultado dessa reflexão é mostrado na figura a seguir.



Fonte da figura: Autor

Quando $y = 0$ a figura reflete em torno do eixo real, ou seja, $\beta = \pi$. Assim, basta multiplicar os conjugados de z_1, z_2 e z_3 pelo complexo $w = cos2\pi + isen2\pi = 1$. O resultado dessa reflexão é mostrado a seguir.



Já para $y = x$ a reta r forma um ângulo $\beta = \frac{\pi}{4}$. Assim, para obter o resultado desejado basta multiplicar os conjugados de z_1, z_2 e z_3 pelo complexo $w = cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}$. Vejamos o resultado a seguir.