



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JOERK DA SILVA OLIVEIRA

**APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NAS CIÊNCIAS**

Boa Vista, RR

2015

JOERK DA SILVA OLIVEIRA

**APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NAS CIÊNCIAS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira

Boa Vista, RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

O48a Oliveira, Joerk da Silva.  
Aplicações da trigonometria nas ciências / Joerk da Silva  
Oliveira – Boa Vista, 2015.  
124 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de  
Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional.

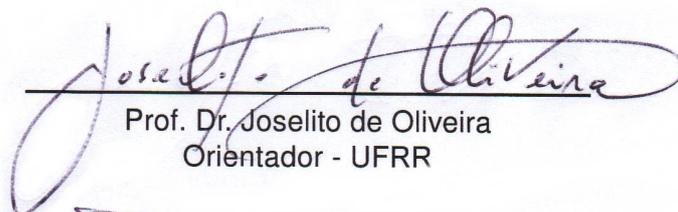
1 – Matemática. 2 – Trigonometria. 3 – Ensino de  
matemática. 4 – Fenômenos periódicos. I - Título. II –  
Oliveira, Joselito de (orientador).

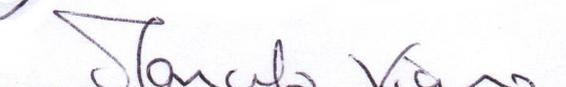
CDU – 514.116

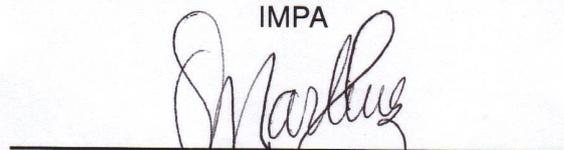
JOERK DA SILVA OLIVEIRA

APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA NAS CIÊNCIAS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 20 de abril de 2015 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

  
Prof. Dr. Joselito de Oliveira  
Orientador - UFRR

  
Prof. Dr. Marcelo Miranda Viana da Silva -  
IMPA

  
Prof. Dr. Alberto Martin Martinez  
Castañeda - UFRR

*A Deus, que iluminou os meus  
passos durante esta caminhada  
e a minha família pela criação,  
educação, cuidado, amor e pelo  
apoio durante toda minha vida.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me presentear com o maravilhoso dom da vida e por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia.

Ao meu pai, João Rodrigues Oliveira, pela criação, amor e pelo cuidado que teve por mim.

A minha irmã, Luzia da Silva Oliveira, pelo amor, carinho e por ter cuidado de mim, ajudando-me nos momentos que mais precisei.

Aos meus irmãos: Joel, Luciana e Maria das Graças, pelo incentivo, apoio e admiração.

Ao professor, Dr. Joselito de Oliveira, por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação ao PROFMAT como coordenador local.

Aos professores presenciais do PROFMAT: Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda, Me. Raimundo Nonato Araújo Pedro, Me. Silvestre da Cruz Monteiro, Me. Aldo Vieira Pinto, Dr. Lindeval Fernandes de Lima e Dr. Luciano Ferreira Silva, pela contribuição com seu bem mais precioso, o conhecimento.

Aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2013: Fabiana, Eduardo, Clarissa, Admilson, Ornélio e Osmilcy, pelos estudos em grupos; troca de conhecimento; experiências e; aprendizado.

Ao meu grande amigo do PROFMAT 2013, Franciel Araújo do Nascimento, por compartilhar o conhecimento e pelo apoio nos momentos que mais precisei.

Aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2012: Reginaldo, Denis, Rodson, Admilson dos Santos e Jerrimar, pela troca de experiências e aprendizado.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM/PROFMAT e à Universidade Federal de Roraima - UFRR, por me darem a oportunidade de cursar este mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

Ao gerente da Torre da EMBRATEL-RR, Eduardo Seffair, pela colaboração na permissão da subida da torre para medição de ângulo referente à atividade realizada neste trabalho.

Ao professor, Me. João Bosco Pereira Duarte, pela colaboração e; ao técnico da UFRR, Cláudio Araújo da Silva, por ceder o equipamento de medição de ângulo, além do auxílio do equipamento na execução de atividade.

A todos que contribuíram diretamente e indiretamente para que eu chegasse até aqui e alcançasse esse objetivo.

*"Porque o Senhor dá a sabedoria;  
da sua boca procedem o  
conhecimento e o entendimento"*

*Provérbios 2:6*

## RESUMO

Desde a antiguidade, a Trigonometria vem se destacando por sua utilidade na resolução de problemas da humanidade, principalmente para modelar fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais existem no universo. No Ensino Básico, espera-se que os alunos saibam utilizar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano. Dessa forma, o principal objetivo deste trabalho é apresentar um conjunto de aplicações da trigonometria em diversas áreas do conhecimento. Inicialmente aborda-se as definições, teoremas e propriedades da trigonometria. Por fim, apresenta-se um acervo de aplicações, no qual servirá como um referencial para os professores e alunos que desejarem explorar esse rico e próspero campo da Matemática.

**Palavras-chave:** Aplicações da trigonometria. Fenômenos periódicos.

## **ABSTRACT**

Since the beginnings, the trigonometry come if highlighting for its usefulness in solving the problems of humanity, especially for modeling of phenomena of periodic nature, oscillating or vibrating, which exist in the universe. In Basic education, it is expected that students know how to use mathematics to solve practical everyday problems. Thus, the main objective of this dissertation is to present a set of applications of trigonometry in various areas of knowledge. Initially presents the definitions, theorems and properties of trigonometry. Finally, we present a set of applications, which will serve as a reference for teachers and students who wish to explore this rich and prosperous field of mathematics.

**Key-words:** Applications of trigonometry. Periodic phenomena.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Corda do arco duplo .....	19
2	Ângulo $\widehat{AOB}$ e $\widehat{BOA}$ .....	21
3	Três pontos colineares .....	21
4	Triângulo $ABC$ de vértices $A$ , $B$ e $C$ .....	22
5	Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).....	22
6	Triângulo retângulo .....	23
7	Dois triângulos congruentes.....	24
8	O caso de congruência LAL.....	25
9	O caso de congruência ALA .....	25
10	O caso de congruência LLL .....	26
11	O caso de congruência LAAo.....	27
12	Teorema de Tales.....	27
13	Dois triângulos semelhantes .....	28
14	Triângulos semelhantes pelo caso AA.....	29
15	Critério de semelhança AA .....	29
16	Critério de semelhança LAL .....	30
17	Critério de semelhança LLL .....	31
18	Definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.....	33
19	Seno, cosseno e tangente de $30^\circ$ e $60^\circ$ .....	36
20	Seno, cosseno e tangente de $45^\circ$ .....	37
21	O círculo Trigonométrico $C$ .....	37
22	Circunferência unitária $C$ .....	39
23	Função de Euler .....	40
24	Sinais da função seno e cosseno .....	41
25	Gráfico da função seno .....	46
26	Gráfico da função cosseno .....	48
27	Gráfico da função tangente.....	50
28	Gráfico da função arco seno .....	52
29	Gráfico da função arco cosseno .....	53
30	Gráfico da função arco tangente.....	53
31	Coordenadas polares.....	55
32	O ponto $(\rho, \theta)$ , com $\rho < 0$ , corresponde ao ponto $(-\rho, \theta + \pi)$ .....	55
33	Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas .....	56
34	Representação trigonométrica de um número complexo .....	57
35	Elipse e seus elementos.....	59
36	Elipse: caso em que a diretriz $L_1$ não intercepta o eixo focal $OA$ .....	60

37	Parábola: caso em que a diretriz $L$ intercepta o eixo focal $OA$ .....	60
38	Área de um triângulo $ABC$ .....	62
39	$\hat{A}$ é ângulo agudo .....	62
40	$\hat{A}$ é ângulo obtuso .....	63
41	$\hat{A}$ é ângulo reto .....	63
42	Declividade de uma reta $r$ . .....	65
43	Declividade de demanda negativa. ....	67
44	Declividade de demanda nula. ....	67
45	Declividade de demanda indefinida. ....	68
46	Declividade de oferta positiva. ....	69
47	Declividade de oferta nula. ....	69
48	Declividade de oferta indefinida.....	70
49	Calculando a altura da Torre da EMBRATEL.....	72
50	Esquema ilustrativo: medição da altura da torre da EMBRATEL.....	72
51	Calculando o raio da terra .....	74
52	Calculando o ângulo do horizonte .....	75
53	Imagem ilustrativa da Terra, Lua e Sol .....	76
54	Esquema ilustrativo formado pela Terra, Lua e Sol .....	77
55	Triângulo retângulo formado pela Terra, Lua e Sol.....	77
56	Ângulo sob o qual um observador terrestre ver o Sol e a Lua .....	78
57	Cone de sombra da Terra sobre a Lua .....	79
58	Triângulos formados pelo Cone de sombra da Terra sobre a Lua .....	80
59	Esquema do exemplo 3.4.1 .....	82
60	Esboço do gráfico da órbita da Terra tendo o Sol como foco.....	83
61	Movimento balístico de uma bola de futebol.....	84
62	Movimento balístico. ....	85
63	Um avião lança um bote salva vidas enquanto se desloca.....	86
64	Uma força constante $F$ , que faz um ângulo $\phi$ com o deslocamento $d$ ...	87
65	Esquema do exemplo (3.5.2) .....	88
66	Dois trabalhadores arrastando um cofre .....	89
67	Esquema do exemplo (3.5.3) .....	89
68	Esquema do exemplo (3.5.4) .....	90
69	Comprimento e amplitude de uma onda senoidal .....	92
70	Comprimento de uma onda senoidal.....	93
71	Onda senoidal nos instantes iniciais e $t$ .....	94
72	Ilustração: maré alta, nível médio e maré baixa .....	95
73	Gráfico da função que aproxima a maré no Porto de Santana no dia 3 de dezembro de 2014 .....	97

74	Gráfico da função que descreve o nível de noradrenalina na urina de pessoas normais .....	98
75	Kenneth Cooper .....	99
76	Duas posições do braço de um corredor em seu movimento cíclico ...	100
77	Movimento oscilatório de um braço de um corredor .....	101
78	Ciclo oscilatório da pélvis feminina .....	102
79	Ilustração do olho humano .....	104
80	Objeto visto sem uma lente de aumento .....	105
81	Objeto visto com uma lente de aumento .....	105
82	Esquema do exemplo 3.7.3 .....	106
83	Gráfico da função (3.54) .....	108
84	Depressão causada pela pata de um inseto em um líquido. ....	109
85	Atração capilar quando o líquido é água (esquerda) e mercúrio (direita), sendo $\theta$ o ângulo de contato. ....	110
86	Se $\phi = 0$ , a corrente $I$ e a tensão $V$ estão em fase. ....	112
87	Se $\phi > 0$ , a corrente $I$ está atrasada em relação à tensão $V$ . ....	112
88	Se $\phi < 0$ , a corrente $I$ está adiantada em relação à tensão $V$ . ....	113
89	Triângulo das potências .....	114
90	Teorema de Pitágoras .....	124

## LISTA DE TABELAS

1	Seno, cosseno e tangente de alguns ângulos básicos.....	41
2	Alguns valores da função seno .....	45
3	Alguns valores da função cosseno .....	47
4	Alguns valores da função tangente.....	49

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b> .....	<b>18</b>
1.1	ABORDAGEM HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA.....	18
1.2	TRIÂNGULO.....	20
1.3	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS .....	23
<b>1.3.1</b>	<b>Casos de congruência de triângulos</b> .....	<b>23</b>
1.4	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS .....	27
<b>1.4.1</b>	<b>CrITÉRIOS de semelhança de triângulos</b> .....	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>TRIGONOMETRIA</b> .....	<b>33</b>
2.1	TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO.....	33
<b>2.1.1</b>	<b>Definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo</b> .....	<b>33</b>
<b>2.1.2</b>	<b>Relação Fundamental</b> .....	<b>35</b>
<b>2.1.3</b>	<b>Valores para alguns ângulos</b> .....	<b>36</b>
2.2	CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO.....	37
2.3	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS .....	38
<b>2.3.1</b>	<b>A função de Euler</b> .....	<b>38</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Estudo da função seno</b> .....	<b>44</b>
<b>2.3.3</b>	<b>Estudo da função cosseno</b> .....	<b>46</b>
<b>2.3.4</b>	<b>Estudo da função tangente</b> .....	<b>48</b>
<b>2.3.5</b>	<b>Funções trigonométricas inversas</b> .....	<b>50</b>
2.3.5.1	Função arco seno .....	51
2.3.5.2	Função arco cosseno .....	52
2.3.5.3	Função arco tangente .....	53
<b>3</b>	<b>APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA</b> .....	<b>54</b>
3.1	MATEMÁTICA .....	54
<b>3.1.1</b>	<b>Coordenadas polares</b> .....	<b>54</b>
3.1.1.1	Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas.....	56
<b>3.1.2</b>	<b>A forma trigonométrica dos números complexos</b> .....	<b>57</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Cônicas em coordenadas polares</b> .....	<b>58</b>
<b>3.1.4</b>	<b>Cálculo de áreas triangulares</b> .....	<b>61</b>
<b>3.1.5</b>	<b>Declividade de uma reta</b> .....	<b>65</b>
3.2	CIÊNCIAS ECONÔMICAS.....	66
<b>3.2.1</b>	<b>Curvas de demanda linear</b> .....	<b>66</b>
<b>3.2.2</b>	<b>Curvas de oferta linear</b> .....	<b>69</b>
3.3	ENGENHARIA CIVIL .....	71
<b>3.3.1</b>	<b>Calculando a altura de uma torre em Roraima</b> .....	<b>71</b>

3.4	ASTRONOMIA .....	73
<b>3.4.1</b>	<b>Medida do raio da Terra .....</b>	<b>74</b>
<b>3.4.2</b>	<b>Distância da Terra à Lua e da Terra ao Sol .....</b>	<b>76</b>
3.4.2.1	Relações entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua .....	76
3.4.2.2	Relações com os raios da Lua e do Sol .....	78
3.4.2.3	Relações com o raio da Terra.....	79
<b>3.4.3</b>	<b>A órbita dos planetas em torno do Sol .....</b>	<b>81</b>
3.5	FÍSICA .....	84
<b>3.5.1</b>	<b>Movimento balístico .....</b>	<b>84</b>
<b>3.5.2</b>	<b>Trabalho realizado por uma força constante .....</b>	<b>87</b>
<b>3.5.3</b>	<b>Campo magnético .....</b>	<b>90</b>
<b>3.5.4</b>	<b>Equação de onda harmônica simples .....</b>	<b>91</b>
3.6	GEOCIÊNCIAS .....	95
<b>3.6.1</b>	<b>Nível das marés .....</b>	<b>95</b>
3.7	CIÊNCIAS MÉDICAS .....	97
<b>3.7.1</b>	<b>Excreção de noradrenalina na urina de pessoas normais .....</b>	<b>98</b>
<b>3.7.2</b>	<b>Ritmo oscilatório dos braços .....</b>	<b>99</b>
<b>3.7.3</b>	<b>O balanço pélvico do andar feminino .....</b>	<b>102</b>
<b>3.7.4</b>	<b>O olho humano: aumento angular .....</b>	<b>103</b>
3.8	CIÊNCIAS BIOLÓGICAS .....	107
<b>3.8.1</b>	<b>Voo dos gafanhotos .....</b>	<b>108</b>
<b>3.8.2</b>	<b>Tensão superficial e atração capilar .....</b>	<b>109</b>
3.9	ELETROTÉCNICA.....	111
<b>3.9.1</b>	<b>Fator de potência.....</b>	<b>111</b>
4	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>117</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>118</b>
	<b>APÊNDICES .....</b>	<b>120</b>
	<b>APÊNDICE A – DEMONSTRAÇÃO DE PROPOSIÇÃO.....</b>	<b>121</b>
A.1	DEMONSTRAÇÃO DO LIMITE DE FUNÇÃO.....	121
	<b>ANEXOS .....</b>	<b>123</b>
	<b>ANEXO A – TEOREMA AUXILIAR .....</b>	<b>124</b>

## INTRODUÇÃO

Desde os tempos antigos, a Matemática vem se desenvolvendo como uma importante ferramenta utilizada pela humanidade. A partir dos primeiros problemas de contagem simples de objetos até o desenvolvimento de teorias refinadas e de grande avanço tecnológico, a Matemática se tornou indispensável para o nosso desenvolvimento.

**Trigonometria** (do grego *trigōnon*: triângulo + *metron*: medidas) é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo.

A trigonometria é um dos ramos mais antigos da Matemática e já existe desde os primórdios da humanidade, para medir ângulos e distâncias, com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre, a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas. A trigonometria foi uma criação da Matemática grega e surgiu devido às necessidades da Astronomia a fim de prever as efemérides celestes<sup>1</sup>; calcular o tempo e; ser utilizada na Navegação e na Geografia (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Nesse sentido, observa-se que a utilização e o desenvolvimento da trigonometria no decorrer da história, em sua grande parte, foi impulsionada pela sua aplicação no dia a dia da humanidade.

No Ensino Básico, a trigonometria é um conteúdo que pode ser bastante explorado em um contexto de aplicações. No entanto, muitos se perguntam: "Para que serve a trigonometria?"; "Além de achar os lados de um triângulo, onde vou usar isto na minha vida?". Será, então, que inserindo a trigonometria em um contexto de aplicação em problemas práticos, o processo de assimilação será melhor? Sabe-se que muitas vezes, o embasamento teórico do assunto, como definições, teoremas e propriedades, não é o suficiente para uma boa compreensão deste conteúdo.

De acordo com Brasil (2006, p. 69), além de outras competências, ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento e; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

---

<sup>1</sup> Efemérides celestes: calendário ou tábuas astronômicas que fornece, em intervalos de tempo regularmente espaçados, as coordenadas que definem a posição de um astro.

As funções trigonométricas constituem um tema importante da Matemática, tanto por suas aplicações (que vão desde as mais elementares, no dia a dia, até as mais complexas na ciência e na alta tecnologia) como pelo papel central que desempenham na Análise (LIMA et al., 2006, p. 209).

Uma propriedade fundamental das funções trigonométricas é que elas são periódicas, e por isso são especialmente adaptadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória; os quais existem no universo, como: o movimento de planetas; o som; corrente elétrica alternada; a circulação do sangue; os batimentos cardíacos; etc.

Sendo assim, este tema foi escolhido pela grande importância da trigonometria na vida da humanidade, desde os tempos antigos e, principalmente nos dias atuais. Pois sabe-se que hoje, a trigonometria é utilizada em várias situações práticas e teóricas envolvendo não somente problemas internos da matemática, mas também de outras disciplinas científicas e tecnológicas que envolvem fenômenos periódicos.

O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e para construir modelos que correspondem a fenômenos periódicos (BRASIL, 2006, p. 119).

Assim, entende-se que uma das alternativas para despertar o interesse do aluno ao estudar trigonometria, é abordar esse conteúdo focando principalmente as aplicações que lhes serão úteis.

Propõe-se um estudo da trigonometria, abordando as definições, teoremas e propriedades, porém com um foco de aplicabilidade dos conceitos adquiridos nas diversas áreas do conhecimento.

No capítulo um, além de uma abordagem histórica sobre a trigonometria, será feita uma revisão de algumas definições importantes para o desenvolvimento da teoria deste trabalho, como congruência e semelhança de triângulos.

Posteriormente, no capítulo dois, será apresentada a trigonometria no triângulo retângulo e no círculo trigonométrico. Neste capítulo, terá uma abordagem das principais funções trigonométricas, especificamente seno, cosseno, tangente e suas inversas. Isso porque as outras funções trigonométricas não são o foco das aplicações que serão apresentadas.

No capítulo três, terá um acervo de aplicações da trigonometria em diversas áreas do conhecimento, a saber, na própria Matemática, Ciências Econômicas, Engenharia Civil, Astronomia, Física, Geociências, Ciências Médicas, Ciências Biológicas e na Eletrotécnica.

## 1 PRELIMINARES

Neste capítulo, será apresentado alguns conceitos da Matemática básica necessários para o entendimento da Trigonometria. Além de uma abordagem histórica sobre a Trigonometria; faz-se um breve estudo sobre alguns conceitos da Geometria Plana, como: ângulo, triângulo, congruência e semelhança de triângulos.

### 1.1 ABORDAGEM HISTÓRICA DA TRIGONOMETRIA

A trigonometria é um dos ramos mais antigos da Matemática e existe desde a antiguidade, para medir ângulos e distâncias, com o objetivo de localizar pontos sobre a superfície terrestre, a fim de resolver problemas oriundos das necessidades humanas. A trigonometria teve seu início quando se acreditava que os planetas descreviam órbitas circulares em redor da terra, surgindo daí o interesse em relacionar o comprimento da corda de uma circunferência com o ângulo central por ela subtendido (LIMA et al., 2006).

Como os astros se movem sobre a superfície de uma esfera, a fim de poder calcular suas posições, era necessário usar a trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. Mas esta exige conhecimento de trigonometria plana. Especificamente, os problemas que interessavam eram problemas de resolução de triângulos, ou seja, dados alguns dos elementos de um triângulo – lados e ângulos – calcular os outros (ROQUE; CARVALHO, 2012).

No início de seu desenvolvimento, a trigonometria recebeu várias contribuições, entre eles podemos destacar Euclides, Aristarco de Samos, Teodósio, Ptolomeu, Menelau, Hipsiclo e Hiparco. Podemos ver em CARMO, MORGADO e WAGNER (2005), que o fundador da trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 200 a.C.

De acordo com ROQUE e CARVALHO (2012), Hiparco tem sido considerado como o primeiro a determinar com precisão o nascer e o acaso de várias estrelas, usando para isso uma tabela de cordas por ele calculada. Suas tabelas foram construídas para serem usadas na Astronomia, e suas principais contribuições neste campo foram: a organização dos dados empíricos babilônicos; a confecção de um catálogo de estrelas e; a descoberta precessão dos equinócios<sup>1</sup>. É provável que a divisão do círculo em 360 partes tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco.

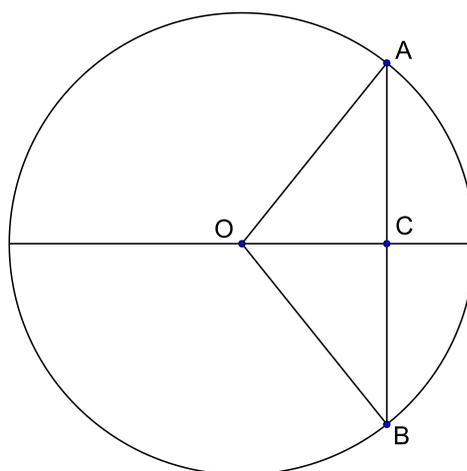
Pode-se ver em CARMO, MORGADO e WAGNER (2005), que os matemáticos gregos não usavam o seno de um ângulo, e sim trabalhavam com a corda do arco

<sup>1</sup> Equinócio: momento em que o sol se encontra na vertical sobre o equador fazendo com que a duração dos dias seja igual à duração das noites em toda a Terra.

duplo. Dado o ângulo  $\alpha = \widehat{AOC}$ , o dobro de  $\alpha$  é o ângulo  $\widehat{AOB}$ , que subtende o arco AB (Figura 1). Além disso, devido à influência babilônica, os gregos tomavam o raio AO com comprimento 60 e dividiam o círculo em 360 partes iguais. Temos então que:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{1}{2} \frac{\text{corda } AB}{OA} = \frac{1}{20} \text{ corda } AB$$

Figura 1 – Corda do arco duplo



Fonte: ROQUE e CARVALHO (2012)

A trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu, que viveu em torno de 150 E.C. Seu principal trabalho, o *Almagesto*, permite datar aproximadamente sua vida, pois nele Ptolomeu se refere a observações que fez de efemérides astronômicas, cujas datas são conhecidas. O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do Sistema Solar, supondo que a terra está em seu centro. Ptolomeu também deduziu o que, em notação moderna e usando as funções seno e cosseno, é a expressão para  $\text{sen}(a \pm b)$ . Além disso, demonstrou que  $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$ , em que  $\alpha$  é um ângulo agudo (ROQUE; CARVALHO, 2012).

Ptolomeu usou sua tabela de cordas para resolver vários problemas, como calcular o comprimento de uma sombra, bem como tratar vários outros problemas de Astronomia. Com as técnicas expostas em seu livro, Ptolomeu resolve qualquer triângulo, decompondo-o convenientemente em triângulos retângulos.

De acordo com CARMO, MORGADO e WAGNER (2005), a trigonometria era usada pelos gregos basicamente na astronomia, pois eles nunca se preocupavam em utilizá-la em topografia, campo em que hoje ela tem emprego constante, e além disso, a topologia grega (como a romana) sempre recorreu à Geometria Euclidiana. Com os

hindus, a Trigonometria continuou sendo aplicada à Astronomia. A trigonometria hindu era essencialmente aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica.

Já os árabes herdaram a Trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético destes últimos. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante.

A palavra meio-corda, em sânscrito, língua utilizada pelos antigos hindus, é *jiva*. Esta palavra foi utilizada sem modificações pelos árabes. No entanto, como em algumas outras línguas, em árabe frequentemente se escreve somente as consoantes das palavras, deixando as vogais ao cuidado da interpretação do leitor. A palavra *jiva* tem as mesmas consoantes que a palavra árabe bem familiar *jaib* (v e b se confundem como labiais explosivas). *Jaib*, em árabe, significa bacia ou bolso. Assim, foi natural que os tradutores de trabalhos matemáticos, do árabe para o latim, e que desconheciam o sânscrito, supusessem que lidavam com tabelas de *jaib*, e traduziram este termo pela palavra latina correspondente, *sinus*, que deu origem a seno (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia, que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a Trigonometria passou a ser utilizada nesta área e em Topografia. Grande parte do desenvolvimento da Trigonometria no Renascimento é devida aos alemães.

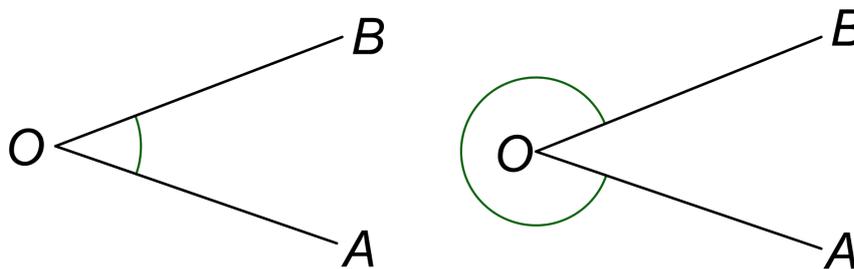
Segundo LIMA et al. (2006), a importância da trigonometria foi grandemente reforçada com a descoberta de Joseph Fourier<sup>2</sup>, em 1822, de que toda função periódica (com ligeiras e naturais restrições) é a soma (finita ou infinita) de funções do tipo  $a.\cos nx + b.\sin nx$ . Para que se tenha uma ideia da relevância desse fato, deu-se origem à chamada Análise de Fourier, e segundo o banco de dados da revista *Mathematical Reviews*, o nome mais citado nos títulos de trabalhos matemáticos nos últimos 50 anos é o de Fourier.

Com isso, o desenvolvimento da Trigonometria no decorrer do tempo continuou, e assim, as suas aplicações se expandiram nas diversas áreas do conhecimento.

## 1.2 TRIÂNGULO

**Definição 1.2.1 (Ângulo).** Dadas, no plano, duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , um **ângulo** (ou **região angular**) de vértice  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  (Figura 2).

<sup>2</sup> Joseph Fourier: foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier.

Figura 2 – Ângulo  $A\hat{O}B$  e  $B\hat{O}A$ 

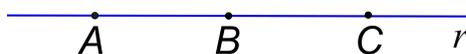
Fonte: Autor

**Observação 1.2.1.** Denotaremos um ângulo de lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  escrevendo  $A\hat{O}B$  para um ângulo como da Figura 2 (esquerda) e  $B\hat{O}A$  para um ângulo como da Figura 2 (direita) e que indicam que o ponto  $O$  é o vértice do ângulo, ou simplesmente  $\hat{O}$ , quando nenhum outro ângulo tem o mesmo vértice e não houver risco de confusão.

Para medirmos um ângulo, associa-se a ele uma medida da região do plano que ele ocupa. Para tanto, divide-se um círculo  $C$  de centro  $O$  em 360 arcos iguais e toma-se pontos  $A$  e  $B$ , extremos de um desses 360 arcos iguais. Diz-se que a **medida** do ângulo  $A\hat{O}B$  é de um **grau** e escreve-se  $A\hat{O}B = 1^\circ$ .

**Definição 1.2.2.** Considere três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano. Se  $C$  estiver sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , diz-se que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são **colineares**, caso contrário, afirma-se que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são **não colineares**.

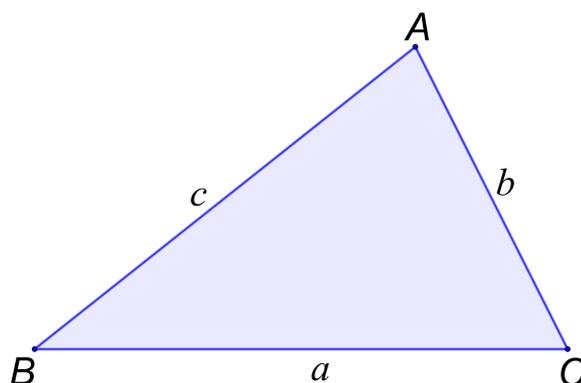
Figura 3 – Três pontos colineares



Fonte: Autor

**Definição 1.2.3 (Triângulo).** Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos e não colineares do plano. **Triângulo** é a figura plana formada pelos três segmentos determinados por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Neste caso, dizemos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo  $ABC$ .

Diz-se também que os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  (ou os comprimentos) são os lados do triângulo. Usualmente escreve-se  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$  para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo  $ABC$  (Figura 4).

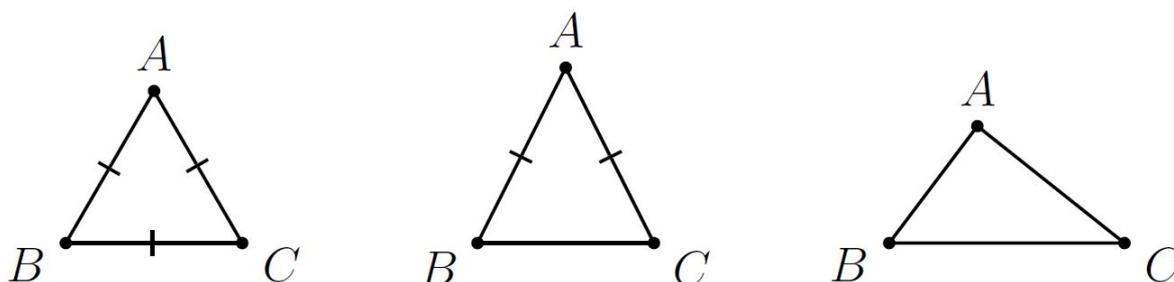
Figura 4 – Triângulo  $ABC$  de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ 

Fonte: Autor

**Definição 1.2.4.** Um triângulo  $ABC$  é denominado:

- (a) **Equilátero**, se  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ .
- (b) **Isósceles**, se ao menos dois dentre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  forem iguais.
- (c) **Escaleno**, se  $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC}$ .

Figura 5 – Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).

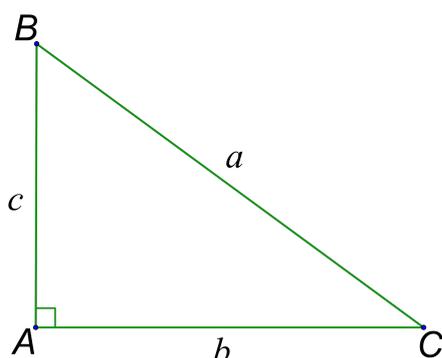


Fonte: NETO (2013)

**Definição 1.2.5 (Triângulo retângulo).** Dizemos que um **triângulo** é **retângulo** quando um de seus ângulos internos é reto, isto é, mede  $90^\circ$  (noventa graus).

No triângulo retângulo  $ABC$  da Figura 6, o lado maior  $a$  é chamado de hipotenusa e os lados menores  $b$  e  $c$  são chamados de catetos.

Figura 6 – Triângulo retângulo



Fonte: Autor

### 1.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, será visto condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam considerados "iguais". Essas condições (ou casos de congruência) serão apresentadas sob um ponto de vista informal, na sua maioria por meio de axiomas. Para isso, defini-se a congruência de segmentos e de ângulos.

**Definição 1.3.1.** Dizemos que dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são **congruentes** quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ; dizemos que dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são **congruentes** se eles têm a mesma medida.

Com esta definição, as propriedades da igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência, vale a simetria e a transitividade para congruência de segmentos e de ângulos, isto é, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si (o mesmo vale para ângulos).

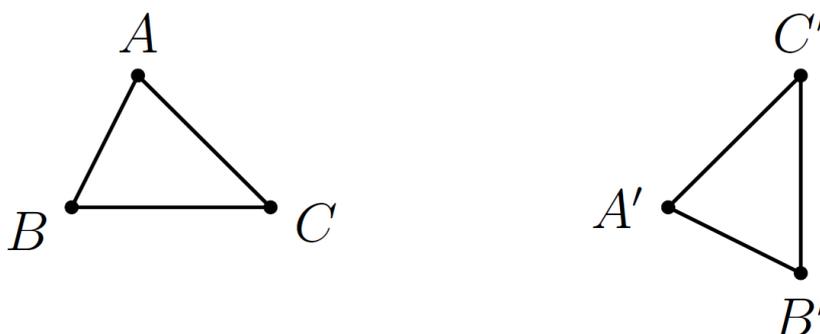
**Observação 1.3.1.** Utilizaremos o símbolo  $\equiv$  ou  $=$  para significar congruente. Assim,  $AB \equiv CD$  ( $AB = CD$ ) deve ser lido como  $AB$  é congruente a  $CD$  e  $\hat{A} \equiv \hat{B}$  (ou  $\hat{A} = \hat{B}$ ) deve ser lido como ângulo  $A$  é congruente ao ângulo  $B$ . Quando não for usado este símbolo, será utilizado a própria palavra. Como os lados de um triângulo são segmentos, também será usado a palavra congruência para designar a igualdade destes lados.

#### 1.3.1 Casos de congruência de triângulos

Nesta subseção apresenta-se quatro casos de congruências, no qual será denotado da seguinte forma: **LAL** (lado, ângulo, lado), **ALA** (ângulo, lado, ângulo), **LLL** (lado, lado, lado) e **LAO** (lado, ângulo, ângulo oposto).

**Definição 1.3.2.** *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

Figura 7 – Dois triângulos congruentes



Fonte: NETO (2013)

A definição (1.3.2) também pode ser apresentada sob outro ponto de vista. Dois triângulos são congruentes se for possível mover um deles no espaço, sem deformá-lo, até fazê-lo coincidir com o outro. Observe que o termo "espaço", neste contexto, não se refere ao espaço tridimensional, e sim, ao plano.

Podemos ver em BARBOSA (2012, p. 57-61), que os axiomas apresentados a seguir, são abordados como proposições com suas respectivas demonstrações. Porém, neste trabalho, para não nos distanciarmos dos nossos objetivos, vamos adotar a proposta encontrada em NETO (2013, p. 29-33).

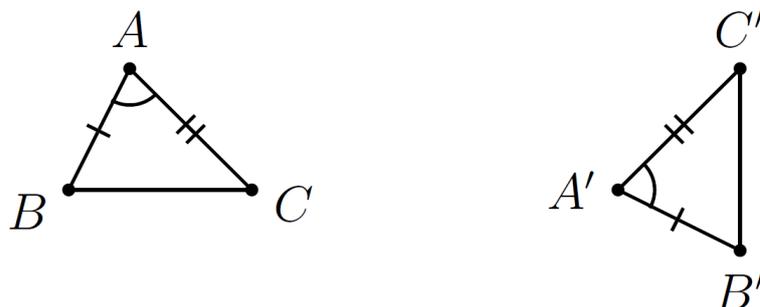
**Axioma 1.3.1 (Caso de congruência LAL).** *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

Em símbolos, o axioma (1.3.1) quer dizer que, dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{AC} = \overline{A'C'}, \text{ e } \hat{A} = \hat{A}' \implies ABC \equiv A'B'C'$$

com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$ . Em particular segue, daí, que  $\hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}'$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ .

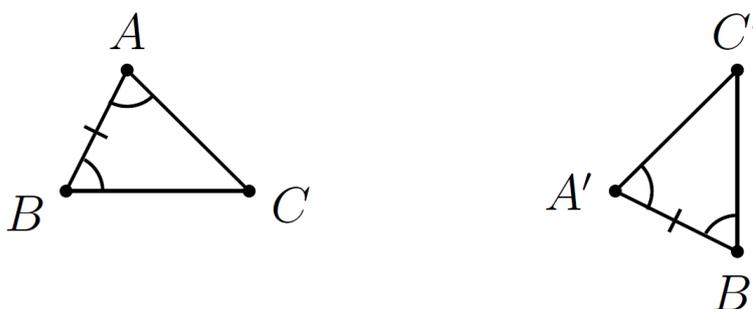
Figura 8 – O caso de congruência LAL



Fonte: NETO (2013)

**Axioma 1.3.2 (Caso de congruência ALA).** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 9 – O caso de congruência ALA



Fonte: NETO (2013)

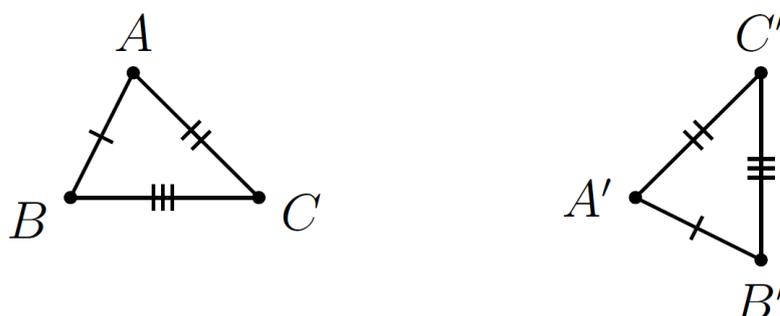
Em símbolos, o axioma (1.3.2) quer dizer que, dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \overline{AB} = \overline{A'B'} \implies ABC \equiv A'B'C'$$

com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B', C \leftrightarrow C'$ . Em particular segue, daí, que  $\hat{C} = \hat{C}', \overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ .

**Axioma 1.3.3 (Caso de congruência LLL).** *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 10 – O caso de congruência LLL



Fonte: NETO (2013)

Em símbolos, o axioma (1.3.3) quer dizer que, dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos:

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \overline{AC} = \overline{A'C'} \implies ABC \equiv A'B'C'$$

com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$ ,  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular segue, daí, que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ .

Finalmente será apresentado o último caso de congruência de triângulos. Caso este, que é conhecido como o caso de congruência **LAAo**.

**Teorema 1.3.1 (Caso de congruência LAAo).** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos:*

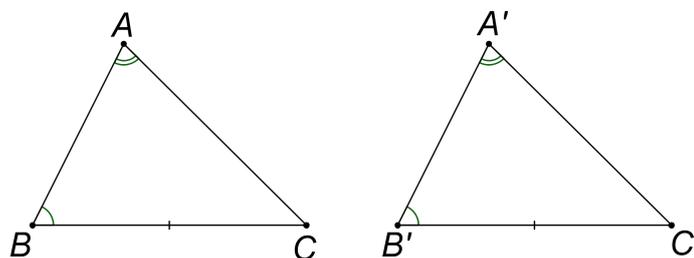
$$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \implies ABC \equiv A'B'C'$$

com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$ ,  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular, também temos  $\hat{C} = \hat{C}'$ ,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

*Demonstração.* Como por hipótese  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ , logo temos que

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \\ &= 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} \\ &= 180^\circ - \hat{A}' - \hat{B}' \\ &= 180^\circ - (\hat{A}' + \hat{B}') \\ &= \hat{C}' \end{aligned}$$

Figura 11 – O caso de congruência LAAo



Fonte: Autor

Portanto, como nos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ , e  $\hat{C} = \hat{C}'$ , logo pelo axioma (1.3.2) (caso de congruência ALA), os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são congruentes.  $\square$

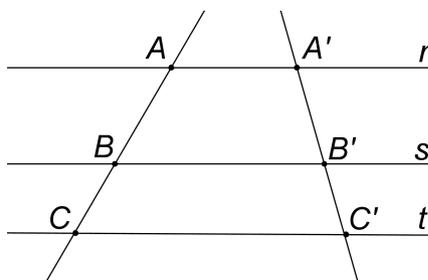
#### 1.4 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, estuda-se o conceito de semelhança de triângulos, o qual é de fundamental importância para tudo que se segue. Antes disso, anuncia-se um teorema muito conhecido da geometria plana, o Teorema de Tales<sup>3</sup>, cuja demonstração encontra-se em NETO (2013, p. 141-143).

**Teorema 1.4.1 (Teorema de Tales).** *Sejam  $r, s$  e  $t$  retas paralelas. Escolhemos pontos  $A, A' \in r, B, B' \in s$  e  $C, C' \in t$ , de modo que  $A, B, C$  e  $A', B', C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Figura 12 – Teorema de Tales

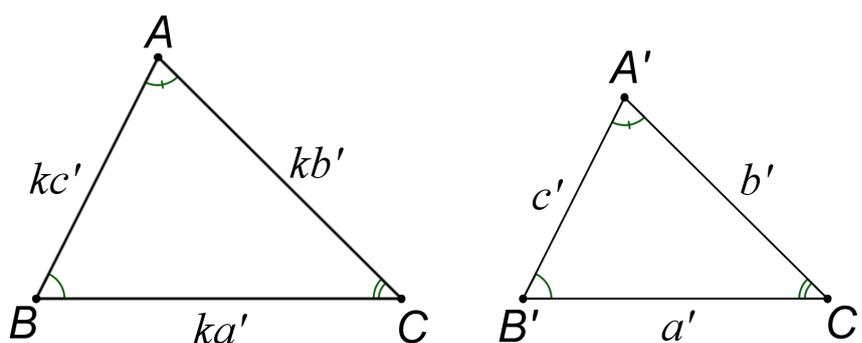


Fonte: Autor

<sup>3</sup> Tales de Mileto: filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia.

**Definição 1.4.1.** Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Figura 13 – Dois triângulos semelhantes



Fonte: Autor

**Observação 1.4.1.** Escrevemos  $ABC \sim A'B'C'$  para denotar que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Na Figura 13, o número real positivo  $k$  é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , nessa ordem.

Com a definição (1.4.1), queremos dizer que, se os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, então, valem, simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

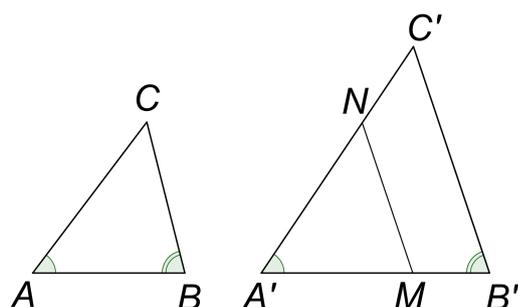
### 1.4.1 Critérios de semelhança de triângulos

Os três critérios de semelhança de triângulos a seguir, estabelecem as condições suficientes usuais para que dois triângulos sejam semelhantes. Esses critérios serão dados por meio de teoremas. Os critérios de semelhança de triângulos serão denotados da seguinte forma: **AA** (ângulo, ângulo), **LAL** (lado, ângulo, lado) e **LLL** (lado, lado, lado) e podem ser encontrados em BARBOSA (2012, p. 128-131).

**Teorema 1.4.2 (Critério AA).** Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ , então, os triângulos são semelhantes.

*Demonstração.* Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ , então, a congruência dos ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{A}'$  e dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{B}'$  implica na congruência dos ângulos  $\hat{C}$  e  $\hat{C}'$ . Para provar agora que os lados dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são proporcionais, vamos supor sem perda de generalidade que  $A'B' > AB$ . Tomemos no lado  $A'B'$  do triângulo  $A'B'C'$  o ponto  $M$ , de modo que  $A'M = AB$  (Figura 14). Caso  $A'B' < AB$ , realizamos o mesmo processo no triângulo  $ABC$ .

Figura 14 – Triângulos semelhantes pelo caso AA



Fonte: Autor

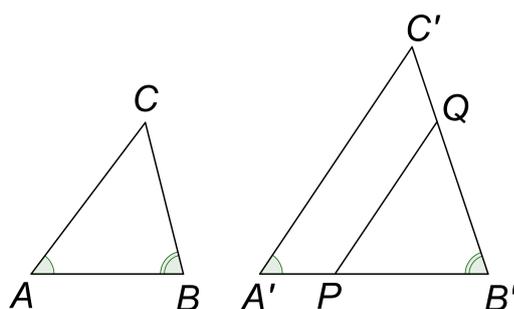
Pelo ponto  $M$ , trace uma reta paralela ao lado  $B'C'$  que corta o lado  $A'C'$  no ponto  $N$ , formando um triângulo  $A'MN$ . Como  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\overline{AB} = \overline{A'M}$  e  $\hat{B} = \hat{B}' = \hat{A'MN}$  (esta última congruência devido ao paralelismo de  $MN$  e  $B'C'$ ), temos que os triângulos  $ABC$  e  $A'MN$  são congruentes. Pelo teorema (1.4.1), segue que

$$\frac{\overline{A'M}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'N}}{\overline{A'C'}} \tag{1.1}$$

Como  $\overline{AB} = \overline{A'M}$  e  $\overline{AC} = \overline{A'N}$ , então da igualdade (1.1) obtemos  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ .

Para demonstrar que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ , faremos uma construção análoga. Tome no lado  $A'B'$  do triângulo  $A'B'C'$  o ponto  $P$ , de modo que  $PB' = AB$  (Figura 15).

Figura 15 – Critério de semelhança AA



Fonte: Autor

Pelo ponto  $P$ , trace uma reta paralela ao lado  $A'C'$  que corta o lado  $B'C'$  no ponto  $Q$ , formando um triângulo  $PQB'$ . Como  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\overline{AB} = \overline{PB'}$  e  $\hat{A} = \hat{A}' = \hat{B}'\hat{P}Q$  (esta última congruência devido ao paralelismo de  $PQ$  e  $A'C'$ ), temos que os triângulos  $ABC$  e  $PQB'$  são congruentes. Novamente pelo teorema (1.4.1), segue que

$$\frac{\overline{PB'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{B'Q}}{\overline{B'C'}} \quad (1.2)$$

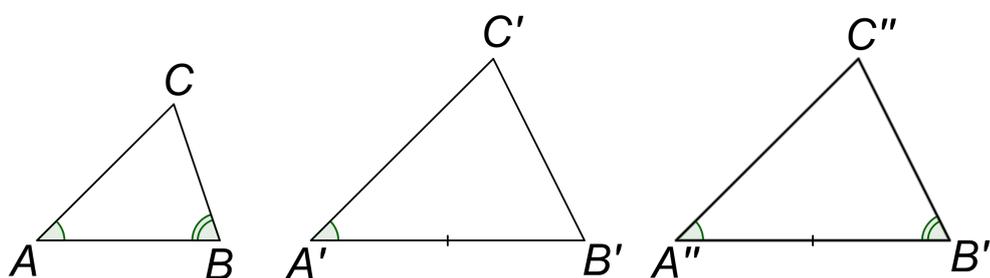
Como  $\overline{PB'} = \overline{AB}$  e  $\overline{B'Q} = \overline{BC}$ , então da igualdade (1.2) obtemos  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$ .

Portanto, segue que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$  e pela definição (1.4.1) provamos o teorema.  $\square$

**Teorema 1.4.3 (Critério LAL).** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ , então, os triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Para demonstrar esse teorema, construa um triângulo  $A''B''C''$  tal que  $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$ ,  $\hat{A}'' = \hat{A}$  e  $\hat{B}'' = \hat{B}$  (Figura 16).

Figura 16 – Critério de semelhança LAL



Fonte: Autor

Pelo teorema (1.4.2), os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  são semelhantes (critério AA). Dessa forma, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}} \Rightarrow \overline{A''C''} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{A''B''}}{\overline{AB}}. \quad (1.3)$$

Como pela hipótese temos que  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \Rightarrow \overline{A'C'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ , logo por (1.3), segue que  $\overline{A''C''} = \overline{A'C'}$ .

Por construção, sabe-se que,  $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$  e  $\hat{A}'' = \hat{A}' = \hat{A}$ . Portanto, os triângulos  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são congruentes (caso LAL). Como sabemos que os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  são semelhantes, pode-se concluir por transitividade que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  também são semelhantes.  $\square$

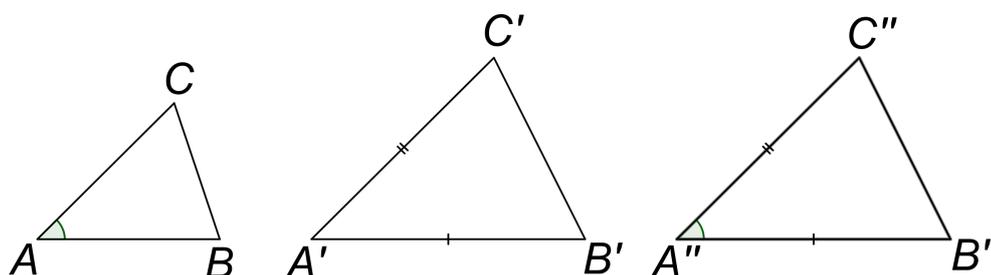
**Teorema 1.4.4 (Critério LLL).** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}},$$

*então, os triângulos são semelhantes.*

*Demonstração.* Para provar o teorema, construa um triângulo  $A''B''C''$ , tal que,  $\hat{A}'' = \hat{A}$ ,  $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{A''C''} = \overline{A'C'}$  (Figura 17).

Figura 17 – Critério de semelhança LLL



Fonte: Autor

Por esta construção e da hipótese, segue que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A''C''}} \tag{1.4}$$

Pelo teorema (1.4.3), os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  são semelhantes (critério LAL). Decorre daí, que vale a igualdade  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A''B''}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}$ , isto é,  $\overline{B''C''} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{A''B''}}{\overline{AB}}$ . Como da equação (1.4), temos que  $\overline{B'C'} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{A''B''}}{\overline{AB}}$ , logo segue que  $\overline{B''C''} = \overline{B'C'}$ .

Como tem-se por construção que  $\overline{A''B''} = \overline{A'B'}$  e  $\overline{A''C''} = \overline{A'C'}$ , conclui-se que os triângulos  $A'B'C'$  e  $A''B''C''$  são congruentes (caso LLL). Como os triângulos  $ABC$  e  $A''B''C''$  são semelhantes, por transitividade podemos concluir que, os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  também são semelhantes.  $\square$

A partir do conhecimento dos elementos de um triângulo e da semelhança de triângulos, será visto agora um importante teorema da Geometria Plana, conhecido como Teorema de Pitágoras, cuja demonstração encontra-se no Anexo.

**Teorema 1.4.5 (Teorema de Pitágoras).** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Isto*

é, dado um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$  e lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ , temos que

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{1.5}$$

## 2 TRIGONOMETRIA

No capítulo anterior, foi revisado algumas definições da Geometria Plana necessárias para o desenvolvimento da trigonometria. Neste capítulo, será apresentado a trigonometria que é de suma importância para a utilização nas aplicações. Inicia-se com a abordagem da trigonometria no triângulo retângulo, e posteriormente o círculo trigonométrico e as funções trigonométricas básicas. Antes de definir as funções seno, cosseno e tangente para os números reais, será visto a função de Euler.

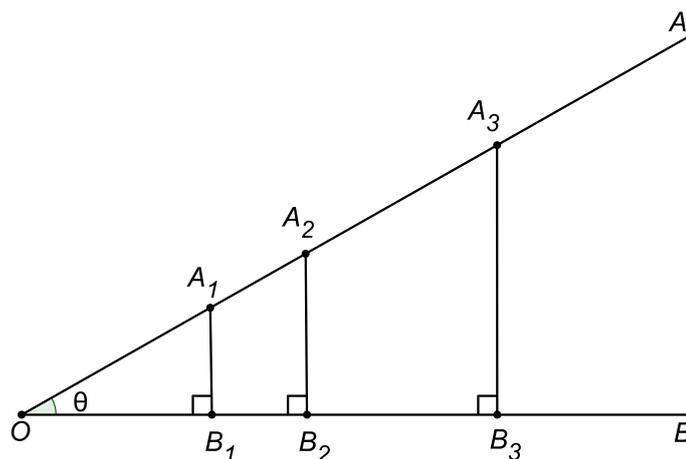
### 2.1 TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Nesta seção apresenta-se a trigonometria no triângulo retângulo, onde será definido o seno, cosseno e a tangente. Além disso, também será apresentado algumas propriedades importantes para este estudo.

#### 2.1.1 Definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Considere um ângulo  $\widehat{AOB} = \theta$ , com  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  e trace a partir dos pontos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  da semirreta  $OA$ , perpendiculares  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$  à semirreta  $OB$  (Figura 18).

Figura 18 – Definição de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo



Fonte: Autor

Os triângulos  $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, \dots$  são semelhantes por terem os mesmos ângulos, isto é, pelo critério AA (Ângulo, ângulo). Dessa forma, obtém-se as seguintes relações:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \dots$$

$$\frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} = \dots$$

$$\frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \dots$$

Observe que, essas relações não dependem do tamanho dos triângulos  $OA_1B_1$ ,  $OA_2B_2$ ,  $OA_3B_3$ , ..., mas somente do ângulo  $\theta$ . Dessa forma, defini-se agora, estas funções de  $\theta$  assim construídas, para  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ .

**Definição 2.1.1.** *Definimos seno, cosseno e tangente (respectivamente) do ângulo  $\theta$ , como:*

$$\text{sen } \theta = \frac{A_1B_1}{OA_1}; \quad (2.1)$$

$$\text{cos } \theta = \frac{OB_1}{OA_1}; \quad (2.2)$$

$$\text{tg } \theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}. \quad (2.3)$$

Portanto, temos que:

- *seno* do ângulo  $\theta$  é a razão entre o cateto oposto ao ângulo  $\theta$  e a hipotenusa;
- *cosseno* do ângulo  $\theta$  é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo  $\theta$  e a hipotenusa;
- *tangente* do ângulo  $\theta$  é a razão entre o cateto oposto ao ângulo  $\theta$  e o cateto adjacente ao ângulo  $\theta$ .

Segue como consequência da definição (2.1.1) a seguinte propriedade:

**Propriedade 2.1.1.** *Dado o triângulo  $OA_1B_1$ , retângulo em  $B_1$  e com  $A_1\hat{O}B_1 = \theta$ . Vale a seguinte propriedade:*

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Das equações (2.1) e (2.2), temos que  $A_1B_1 = OA_1 \text{sen } \theta$  e  $OB_1 = OA_1 \text{cos } \theta$ . Logo, substituindo esses valores em (2.3), segue que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{OA_1 \operatorname{sen} \theta}{OA_1 \operatorname{cos} \theta}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta}.$$

□

### 2.1.2 Relação Fundamental

A partir da definição (2.1.1), pode-se obter outra importante propriedade, conhecida como relação fundamental trigonométrica, ao qual será provada a seguir.

**Proposição 2.1.1.** *Dado o triângulo  $OA_1B_1$ , retângulo em  $B_1$  e com  $A_1\hat{O}B_1 = \theta$ . Vale a seguinte relação fundamental:*

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad (2.5)$$

*Demonstração.* De (2.1) e (2.2), temos que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta = \left( \frac{A_1B_1}{OA_1} \right)^2 \quad (2.6)$$

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{OB_1}{OA_1} \Rightarrow \operatorname{cos}^2 \theta = \left( \frac{OB_1}{OA_1} \right)^2 \quad (2.7)$$

Somando (2.6) e (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta &= \left( \frac{A_1B_1}{OA_1} \right)^2 + \left( \frac{OB_1}{OA_1} \right)^2 \\ &= \frac{(A_1B_1)^2 + (OB_1)^2}{(OA_1)^2} \end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo  $OA_1B_1$ , temos que  $(OA_1)^2 = (A_1B_1)^2 + (OB_1)^2$ . Portanto, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta &= \frac{(OA_1)^2}{(OA_1)^2} \\ \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta &= 1 \end{aligned}$$

□

Observe que, se um triângulo retângulo qualquer tem um ângulo  $\theta$  e hipotenusa de comprimento  $a$ , então os catetos medem  $a \cdot \operatorname{sen} \theta$  (o cateto oposto a  $\theta$ ) e  $a \cdot \operatorname{cos} \theta$  (o

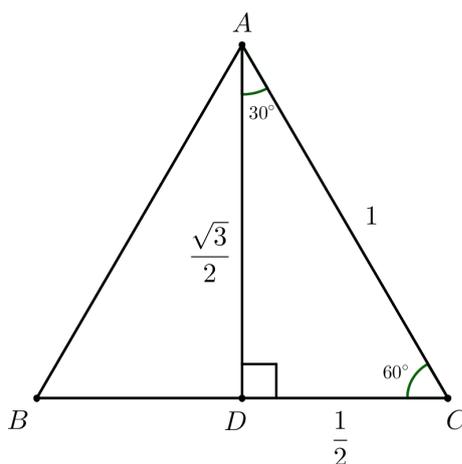
cateto adjacente a  $\theta$ ). Além disso, as relações (2.5) e (2.4) permitem que sejam obtidas todas as razões trigonométricas de um ângulo agudo  $\theta$ , uma vez conhecida qualquer uma delas.

### 2.1.3 Valores para alguns ângulos

Nas aplicações da trigonometria que serão posteriormente abordadas, muitas vezes serão usados o seno, cosseno e tangente de alguns ângulos notáveis, a saber,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , além de outros. Dessa forma, justifica-se aqui, o porque dos valores das funções trigonométricas básicas desses ângulos. Essa abordagem pode ser encontrada em CARMO, MORGADO e WAGNER (2005, p. 17).

Para iniciar, tem-se os ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , onde primeiramente será considerado um triângulo equilátero  $ABC$  de lado 1 (Figura 19). Nele trace a altura  $AD$ , que é sua mediana.

Figura 19 – Seno, cosseno e tangente de  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .

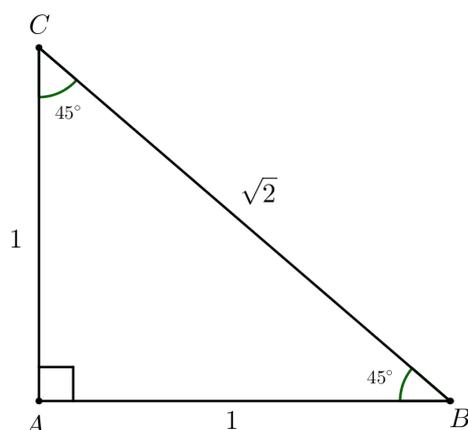


Fonte: Autor

Assim, como  $\overline{BC} = 1$ , tem-se que  $\overline{DC} = \frac{1}{2}$ . Logo, pelo teorema de Pitágoras, segue que  $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Como  $\widehat{ACD} = 60^\circ$  e  $\widehat{DAC} = 30^\circ$ , logo usando a definição (2.1.1), obtém-se

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{1}{2}, & \operatorname{cos} 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2}, & \operatorname{cos} 60^\circ &= \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Agora, considere o triângulo retângulo  $ABC$  da Figura 20, onde o mesmo tem catetos iguais a 1 e ângulos agudos de  $45^\circ$ .

Figura 20 – Seno, cosseno e tangente de  $45^\circ$ .

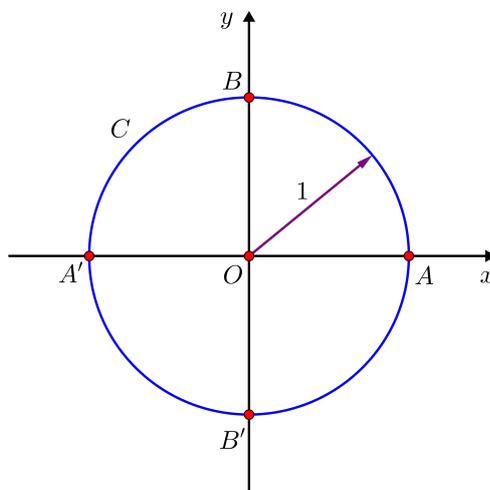
Fonte: Autor

Novamente pelo teorema de Pitágoras, tem-se que  $\overline{BC} = \sqrt{2}$ . Logo, pela definição (2.1.1), segue que

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

## 2.2 CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

No plano Cartesiano, tomemos uma circunferência  $C$  de centro  $O(0, 0)$ , raio 1 e comprimento  $2\pi$ . Sejam  $A(1, 0)$  e  $P(x, y)$  pontos pertencentes a  $C$  (Figura 21). A circunferência descrita desta forma é chamada de **Círculo Trigonométrico**.

Figura 21 – O círculo Trigonométrico  $C$ .

Fonte: Autor

**Definição 2.2.1.** Considerando um círculo de raio  $r$ , cujo centro é o vértice de um ângulo  $\alpha$ , a medida em **radianos** deste ângulo é a razão entre o comprimento  $s$  do arco determinado por  $\alpha$  e o raio  $r$ .

Sobre  $C$ , fixamos aqui, que o **sentido trigonométrico** (de percurso usual) é o *anti-horário*. Assim, o arco de  $2\pi$  radianos sobre  $C$  é o arco que dá uma volta em  $C$  no sentido trigonométrico, retornando ao ponto  $A$ . Por sua vez,  $-2\pi$  radianos em  $C$  é o arco que dá uma volta em  $C$  no sentido horário, retornando também ao ponto  $A$ .

**Observação 2.2.1.** Escreveremos  $1 \text{ radiano} = 1 \text{ rad}$ . Temos que,  $2\pi$  radianos corresponde  $360$  graus medidos no sentido trigonométrico a partir de  $A$  e  $-2\pi$  corresponde a  $360^\circ$  medidos no sentido horário a partir de  $A$ . Além disso, como  $2\pi$  radianos corresponde a  $360$  graus, segue que,  $1 \text{ rad} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^\circ \cong 57,3 \text{ graus}$ .

Em geral, sendo  $\theta$  a medida em graus e  $s$  a medida em radianos de um mesmo arco, com  $s > 0$ , segue que

$$\frac{\theta}{360} = \frac{s}{2\pi} \quad (2.8)$$

## 2.3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Por enquanto, viu-se as principais funções trigonométricas definidas para ângulos do intervalo  $(0, 90^\circ)$ . Nesta seção, será estudado as funções trigonométricas seno, cosseno e tangente no conjunto dos números reais. Nos limitaremos nestes três tipos de funções, devido ao foco principal, as aplicações. Para se definir estas funções, será visto uma função especial, ao qual é chamada de função de Euler  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ , onde  $C$  é a circunferência unitária, cuja abordagem pode ser encontrada em LIMA (2013, p. 220-230).

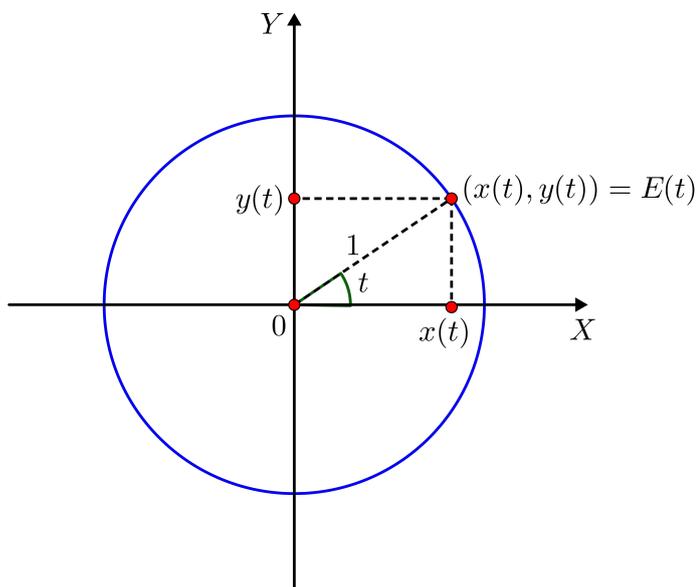
### 2.3.1 A função de Euler

A circunferência unitária  $C$ , definida na seção anterior, é dada por  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ , onde tem-se  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$  (Figura 22). A partir de  $C$ , dar-se-á a definição da função de Euler.

**Definição 2.3.1 (Função de Euler).** A função de **Euler**  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$ , é a função que faz corresponder a cada número real  $t$ , o ponto  $E(t) = (x(t), y(t))$  da circunferência unitária obtido do seguinte modo:

(i)  $E(0) = (1, 0)$ ;

Figura 22 – Circunferência unitária  $C$ .



Fonte: Autor

- (ii) se  $t > 0$ , percorremos sobre a circunferência  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $t$ , sempre no sentido anti-horário (sentido contrário aos ponteiros de um relógio). O ponto final do caminho será chamado de  $E(t)$ ;
- (iii) se  $t < 0$ , percorremos sobre  $C$ , a partir do ponto  $(1, 0)$ , um caminho de comprimento  $|t|$ , sempre no sentido horário (sentido dos ponteiros de um relógio). O ponto final do caminho será chamado de  $E(t)$ .

Observe que, cada vez que o ponto  $t$  descreve na reta  $\mathbb{R}$  um intervalo de comprimento  $l$ , sua imagem  $E(t)$  percorre sobre a circunferência  $C$  um arco de igual comprimento  $l$ . Portanto, como  $C$  tem comprimento igual a  $2\pi$ , quando o ponto  $t$  descreve um intervalo de comprimento  $2\pi$ , sua imagem  $E(t)$  dá uma volta completa sobre  $C$ , retornando ao ponto de partida.

Dessa forma, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , temos que  $E(t + 2\pi) = E(t)$  e, em geral, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , vale

$$E(t + 2k\pi) = E(t).$$

Tem-se que  $E(t') = E(t)$  se, e somente se,  $t' = t + 2k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 2.3.2.** Consideremos em  $C$ , os pontos  $A(1, 0)$  e  $B = (x(t), y(t))$  e  $t$  a medida (positiva ou negativa) do arco  $\widehat{AB}$ . Ponhamos  $B = E(t)$  (Figura 23). Define-se:

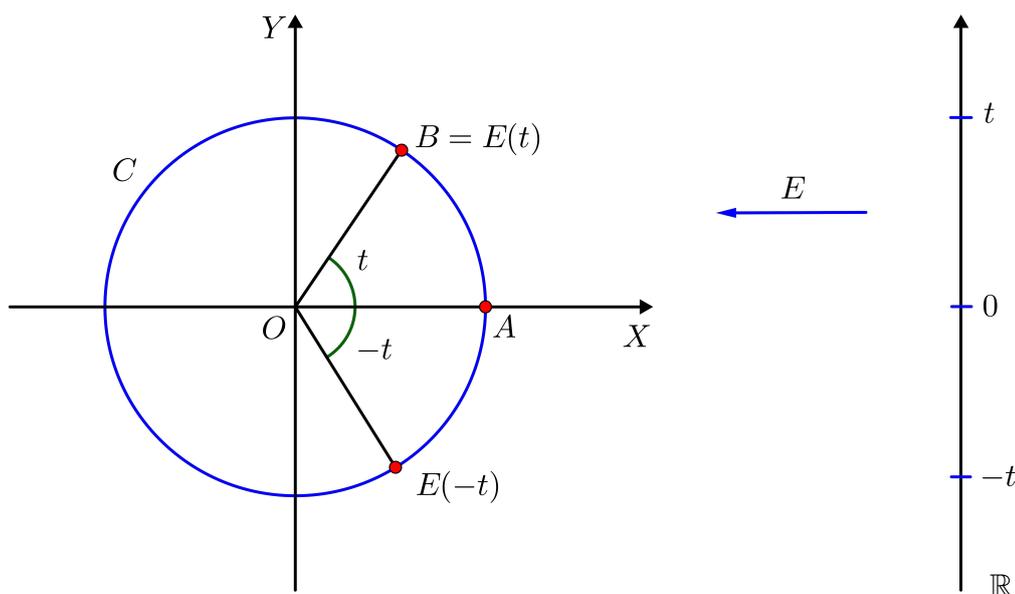
$$\cos t = x(t) \text{ (abscissa de B) e } \sin t = y(t) \text{ (ordenada de B)}$$

**Definição 2.3.3.** Se  $t \in \mathbb{R}$  é tal que  $\cos t \neq 0$ , define-se a **tangente** de  $t$ , abreviada  $tg t$ , por

$$tg t = \frac{\text{sen } t}{\text{cos } t}.$$

Observe que para se ter  $\cos t \neq 0$  é necessário que  $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$ .

Figura 23 – Função de Euler



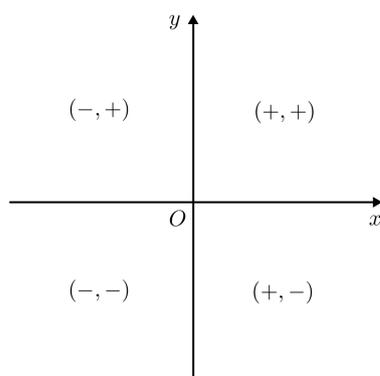
Fonte: Autor

**Observação 2.3.1.** Esta abordagem sugere as seguintes observações:

- Pode-se ter  $B = E(t)$  com  $t < 0$ . Assim, esta forma de medida é orientada, ou seja, é permitido a um ângulo ter medida negativa;
- A unidade de medida do ângulo  $\widehat{AOB}$  é dada em radianos, ou seja, o ângulo  $\widehat{AOB}$  mede  $t$  radianos;
- A medida do ângulo  $\widehat{AOB}$  é determinada apenas a menos de um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , pois  $B = E(t)$  implica  $B = E(t + 2k\pi) \forall k \in \mathbb{Z}$ . Isto implica que, por exemplo, o ângulo de 1 radiano é também um ângulo de  $1 - 2\pi$  radianos;
- Numa circunferência de raio  $r$ , a medida de um ângulo central em radiano é igual a  $\frac{l}{r}$ , onde  $l$  é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo.

As funções seno e cosseno, como coordenadas de um ponto, têm sinais que dependem do quadrante em que se encontra (Figura 24). Já o sinal da função tangente nos quatro quadrantes pode ser obtido facilmente por meio da definição (2.3.8).

Figura 24 – Sinais da função seno e cosseno.



Fonte: Autor

Sendo assim, o sinal da função tangente é positivo nos quadrantes onde os sinais da função seno e cosseno forem iguais, e é negativo nos quadrantes onde os sinais das funções seno e cosseno são opostos. Analisando a Figura 24, tem-se que, o sinal da função tangente é positivo no primeiro e no terceiro quadrante e, negativo no segundo e no quarto quadrante.

Observe que a maior ordenada de um ponto de  $C$  (ver Figura 21) é a de  $B(0, 1)$ , igual a 1, e a menor ordenada é a de  $B'(0, -1)$ , igual a  $-1$ . Também verifique que, a maior abscissa de um ponto de  $C$  é a de  $A(1, 0)$ , igual a 1, e a menor abscissa é a de  $A'(-1, 0)$ , igual a  $-1$ . Dessa forma, tem-se

$$\begin{cases} -1 \leq \cos t \leq 1 \\ -1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Reciprocamente, é verdade que, todo número real  $\alpha$  no intervalo  $[-1, 1]$  é seno (e, analogamente, o cosseno) de algum arco. Além disso, observando os valores das abscissas e ordenadas dos pontos no círculo trigonométrico, conseguiu-se facilmente alguns valores básicos para seno, cosseno e tangente, descritos na Tabela 1.

Tabela 1 – Seno, cosseno e tangente de alguns ângulos básicos

$\theta$	$\operatorname{sen} \theta$	$\cos \theta$	$\operatorname{tg} \theta$
$0^\circ$	0	1	0
$90^\circ$	1	0	$\nexists$
$180^\circ$	0	$-1$	0
$270^\circ$	$-1$	0	$\nexists$
$360^\circ$	0	1	0

Fonte: Autor

**Proposição 2.3.1 (Relação fundamental).** Para todo  $t \in \mathbb{R}$  vale a relação

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

*Demonstração.* Como na definição (2.3.2), tem-se que  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$  são, respectivamente, a abscissa e a ordenada do ponto  $E(t)$  da circunferência unitária, segue imediatamente que

$$\cos^2 t + \sin^2 t = x(t)^2 + y(t)^2 = 1$$

□

Será apresentada agora, algumas propriedades (ou fórmulas) trigonométricas bastantes úteis. Iniciaremos pela propriedade da adição de arcos, onde a demonstração pode ser encontrada em LIMA (2013, p. 230 - 232).

**Propriedade 2.3.1.** Para  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , temos:

$$(a) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$(b) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$(c) \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ sempre que } \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \beta \text{ e } \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) \text{ estiverem definidos.}$$

De (2.3.1) pode-se demonstrar outras propriedades importantes para este estudo.

**Propriedade 2.3.2.** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale as seguintes propriedades:

$$(i) \cos(-t) = \cos t;$$

$$(ii) \sin(-t) = -\sin t;$$

$$(iii) \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t;$$

$$(iv) \sin(t + 2\pi) = \sin t;$$

$$(v) \cos(t + 2\pi) = \cos t;$$

$$(vi) \operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t.$$

*Demonstração.* Será feita a demonstração do item (i) e a prova dos outros itens é análoga.

(i) Para demonstrar que  $\cos(-t) = \cos t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , basta usar o item (a) da propriedade (2.3.1), onde tomamos  $\alpha = 0$  e  $\beta = t$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned}\cos(0 - t) &= \cos 0 \cdot \cos t + \operatorname{sen} 0 \cdot \operatorname{sen} t \\ &= 1 \cdot \cos t + 0 \cdot \operatorname{sen} t \\ &= \cos t\end{aligned}$$

Portanto,  $\cos(-t) = \cos t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

□

Veja agora, mais algumas propriedades trigonométricas.

**Propriedade 2.3.3.** Para todo  $t \in \mathbb{R}$ , vale as seguintes propriedades:

- (1)  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  e  $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$ ;
- (2)  $\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$  e  $\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$ ;
- (3)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{sen} t$  e  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$ ;
- (4)  $\cos(\pi - t) = -\cos t$  e  $\operatorname{sen}(\pi - t) = \operatorname{sen} t$ .

*Demonstração.* Será feita a demonstração do item (1). A prova dos outros itens é análoga.

(1) Para demonstrar que  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , tome  $\alpha = t$  e  $\beta = \pi$  no item (a) da propriedade (2.3.1), onde segue que

$$\begin{aligned}\cos(t + \pi) &= \cos t \cdot \cos \pi - \operatorname{sen} t \cdot \operatorname{sen} \pi \\ &= \cos t \cdot (-1) - \operatorname{sen} t \cdot 0 \\ &= -\cos t\end{aligned}$$

Agora, tomando  $\alpha = t$  e  $\beta = \pi$  no item (b) da propriedade (2.3.1), tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(t + \pi) &= \operatorname{sen} t \cdot \cos \pi + \cos t \cdot \operatorname{sen} \pi \\ &= \operatorname{sen} t \cdot (-1) + \cos t \cdot 0 \\ &= -\operatorname{sen} t\end{aligned}$$

Portanto,  $\cos(t + \pi) = -\cos t$  e  $\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

□

**Definição 2.3.4 (Função Periódica).** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **periódica** quando existe um número real  $T \neq 0$  tal que

$$f(t + T) = f(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . O menor valor  $T > 0$  que satisfaz a condição acima é chamado de **período** da função  $f$ .

**Definição 2.3.5.** Diz-se que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é **par** quando se tem  $f(-t) = f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ; Se  $f(-t) = -f(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , diz-se que a função  $f$  é **ímpar**.

Observe que os itens (i), (ii) e (iii), da propriedade (2.3.2), diz que a função cosseno é par e as funções seno e tangente são ímpares. Além disso, essas mesmas funções, são periódicas, sendo que seno e cosseno de período  $2\pi$  e tangente de período  $\pi$ . Estas afirmações serão provadas nas subseções a seguir, cuja abordagem pode ser encontrada em SANTOS (2014, 29-32).

### 2.3.2 Estudo da função seno

Como foi visto na subseção (2.3.1), *sen t* ficou definida para quaisquer que seja  $t \in \mathbb{R}$ . Desta forma, faz sentido dar a seguinte definição a seguir.

**Definição 2.3.6.** A função seno  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{sen } x.$$

**Proposição 2.3.2.** Sendo  $f$  a função dada na definição (2.3.6), então:

- (i)  $f$  é uma função ímpar;
- (ii) a função  $f$  é periódica de período  $2\pi$ .

*Demonstração.* Seja a função seno  $f(x) = \text{sen } x$  com  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Para provar que a função  $f$  é ímpar, deve-se mostrar que  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, dado  $x \in \mathbb{R}$ , temos que

$$f(-x) = \text{sen } (-x).$$

Do item (ii) da propriedade (2.3.2), obtemos  $\text{sen } (-t) = -\text{sen } t \forall t \in \mathbb{R}$ . Logo, segue que

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\text{sen } x \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

isto é, a função  $f$  é ímpar.

(ii) Para provar que a função  $f$  é periódica de período  $2\pi$ , deve-se mostrar que  $f(x + 2\pi) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, temos que

$$f(x + 2\pi) = \text{sen}(x + 2\pi).$$

Como do item (iv) da propriedade (2.3.2)  $\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen } t \forall t \in \mathbb{R}$ , logo segue que

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \text{sen}(x + 2\pi) \\ &= \text{sen } x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  é periódica de período  $2\pi$ .

□

O fato de a função seno ser periódica de período  $2\pi$ , significa que, se conhecemos o seu comportamento no intervalo  $[0, 2\pi]$ , passamos a conhecer imediatamente como esta função se comporta em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento  $2\pi$ .

Portanto, o gráfico da função seno  $f(x) = \text{sen } x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  é o mesmo em qualquer intervalo da forma  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Com isso, para obter o gráfico completo dessa função, basta repetir uma infinidade de vezes a figura traçada no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Assim, para traçar o gráfico da função seno, basta conhecer o conjunto de pontos básicos. Para uma melhor visualização, tem-se uma tabela com os valores que serão usados para traçar esse gráfico.

Tabela 2 – Alguns valores da função seno

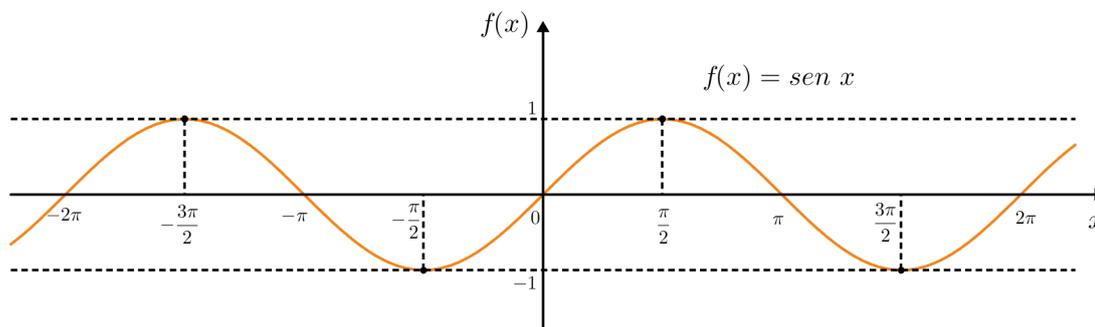
$x$	$-2\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x) = \text{sen } x$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$	$1$	$0$	$-1$	$0$

Fonte: Autor

Com os valores descritos na Tabela 2, obtém-se um esboço do gráfico da função seno (Figura 25).

Por meio da análise de seu gráfico no intervalo  $[0, 2\pi]$ , pode-se observar que, a função  $f(x) = \text{sen } x$  é crescente quando  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  e  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  e decrescente quando  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ .

Figura 25 – Gráfico da função seno



Fonte: Autor

### 2.3.3 Estudo da função cosseno

Da subseção (2.3.1),  $\cos t$  ficou definida para quaisquer que seja  $t \in \mathbb{R}$ . Dessa forma, assim como foi definida a função seno, faz sentido dar a definição da função cosseno.

**Definição 2.3.7.** A função cosseno  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \cos x.$$

**Proposição 2.3.3.** Sendo  $g$  a função dada na definição (2.3.7), então:

- (i)  $g$  é uma função par;
- (ii) a função  $g$  é periódica de período  $2\pi$ .

*Demonstração.* Seja a função cosseno  $g(x) = \cos x$  com  $x \in \mathbb{R}$ .

- (i) Para provar que  $g$  é uma função par, deve-se mostrar que  $g(-x) = g(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, dado  $x \in \mathbb{R}$ , temos que

$$g(-x) = \cos(-x).$$

Do item (i) da propriedade (2.3.2), obtemos  $\cos(-t) = \cos t \forall t \in \mathbb{R}$ . Portanto, segue que

$$\begin{aligned} g(-x) &= \cos x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Assim,  $g$  é uma função par.

(ii) Para provar que a função  $g$  é periódica de período  $2\pi$ , deve-se mostrar que  $g(x + 2\pi) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . De fato, temos que

$$g(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi).$$

Como do item (v) da propriedade (2.3.2)  $\cos(t + 2\pi) = \cos t \forall t \in \mathbb{R}$ , logo segue que

$$\begin{aligned} g(x + 2\pi) &= \cos(x + 2\pi) \\ &= \cos x \\ &= g(x). \end{aligned}$$

Portanto,  $g$  é periódica de período  $2\pi$ .

□

Assim como na função seno, o fato de a função cosseno ser periódica de período  $2\pi$ , também significa que, se conhecemos o seu comportamento no intervalo  $[0, 2\pi]$ , passamos a conhecer imediatamente como esta função se comporta em todos os intervalos seguintes (ou anteriores) de comprimento  $2\pi$ .

Portanto, o gráfico da função cosseno  $g(x) = \cos x$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  é o mesmo em qualquer intervalo da forma  $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ . Com isso, para obter o gráfico completo dessa função, basta repetir uma infinidade de vezes a figura traçada no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Assim, para traçar o gráfico da função cosseno, basta conhecer o conjunto de pontos básicos. Para uma melhor visualização, tem-se uma tabela com os valores que serão usados para traçar esse gráfico.

Tabela 3 – Alguns valores da função cosseno

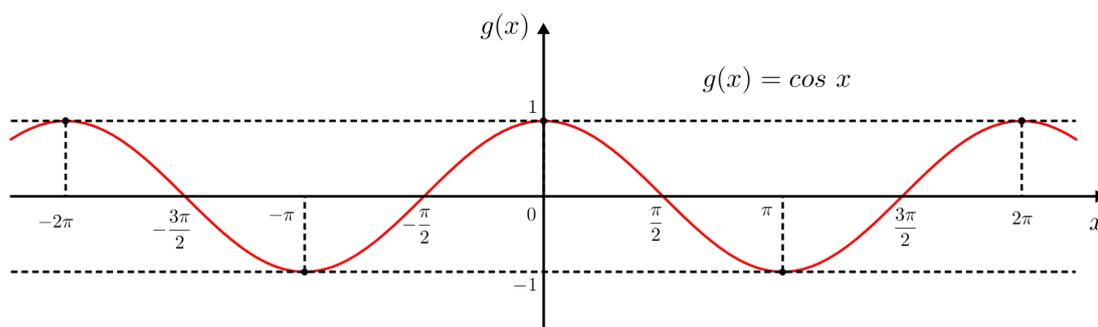
$x$	$-2\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f(x) = \cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

Fonte: Autor

Com os valores descritos na Tabela 3, obtém-se um esboço do gráfico da função cosseno (Figura 26).

Por meio da análise de seu gráfico no intervalo  $[0, 2\pi]$ , pode-se observar que, a função  $g(x) = \cos x$  é decrescente quando  $0 < x < \pi$  e crescente quando  $\pi < x < 2\pi$ .

Figura 26 – Gráfico da função cosseno



Fonte: Autor

### 2.3.4 Estudo da função tangente

Considere o conjunto  $A = \{w \in \mathbb{R} : w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ . Da definição de cosseno, tem-se que para cada  $t \in A$ ,  $\cos t \neq 0$ . Isto é, dado  $t \in A$ , então existe  $tg t$ . Portanto, segue a definição:

**Definição 2.3.8.** A função tangente  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in A, h(x) = tg x.$$

**Proposição 2.3.4.** Sendo  $h$  a função dada na definição (2.3.8), então:

- (i)  $h$  é uma função ímpar;
- (ii) a função  $h$  é periódica de período  $\pi$ .

*Demonstração.* Seja a função tangente  $h(x) = tg x$  com  $x \in A$ . Como se sabe,  $h$  pode ser escrita na forma

$$tg x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}. \quad (2.10)$$

- (i) Para provar que  $h$  é uma função ímpar, deve-se mostrar que  $h(-x) = -h(x)$ ,  $\forall x \in A$ . De fato, dado  $x \in A$ , de (2.10) temos que

$$h(-x) = \frac{\text{sen } (-x)}{\text{cos } (-x)}.$$

Como a função seno é ímpar e a função cosseno é par, segue que

$$\begin{aligned}
 h(-x) &= \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} \\
 &= \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \\
 &= -\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} \\
 &= -h(x).
 \end{aligned}$$

Logo,  $h$  é uma função ímpar.

(ii) Para provar que a função  $h$  é periódica de período  $\pi$ , deve-se mostrar que  $h(x+\pi) = h(x) \forall x \in A$ . De fato, temos que

$$h(x + \pi) = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Como no item (vi) da propriedade (2.3.2)  $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t \forall t \in A$ , logo segue que

$$\begin{aligned}
 h(x + \pi) &= \operatorname{tg}(x + \pi) \\
 &= \operatorname{tg} x \\
 &= h(x).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  é periódica de período  $\pi$ .

□

Para valores próximos e menores que  $\frac{\pi}{2}$ , a tangente torna-se maior que qualquer número positivo dado, e para valores próximos e maiores que  $\frac{\pi}{2}$ , a tangente torna-se menor que qualquer número dado.

Além disso, como a função tangente é periódica de período  $\pi$ , para construir o seu gráfico, podemos esboça-lo no intervalo  $[0, \pi]$  e repeti-lo em todos os intervalos da forma  $[k\pi, (k + 1)\pi]$ . Para melhor visualização, veja a tabela com os valores de referência que serão usados para traçar esse gráfico.

Tabela 4 – Alguns valores da função tangente

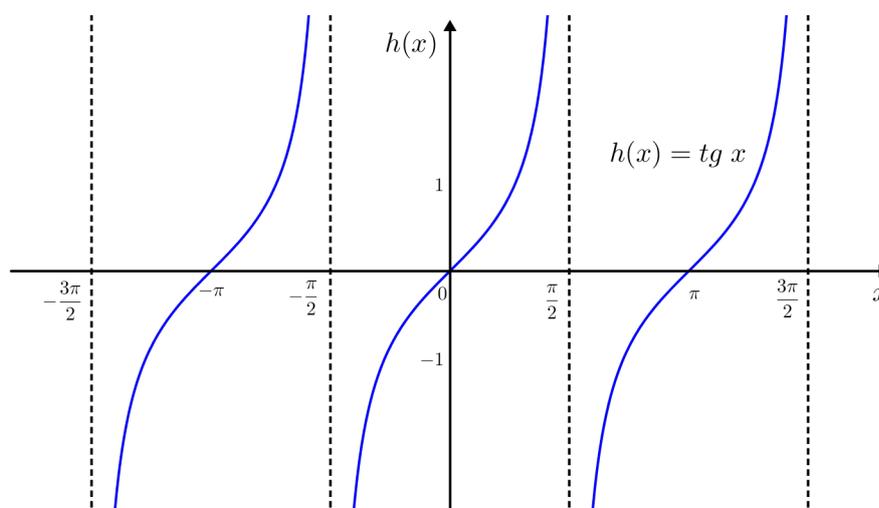
$x$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$
$h(x) = \operatorname{tg} x$	$\#$	$0$	$\#$	$0$	$\#$	$0$	$\#$

Fonte: Autor

Observe um esboço do gráfico da função tangente na Figura 27.

Como o domínio da função tangente é formado pela união dos intervalos abertos  $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , tem-se que, em cada um desses intervalos, por exemplo

Figura 27 – Gráfico da função tangente



Fonte: Autor

$(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ , a função tangente é crescente e, além disso, é uma correspondência biunívoca entre um intervalo aberto de comprimento  $\pi$  e a reta inteira  $\mathbb{R}$ .

### 2.3.5 Funções trigonométricas inversas

Algumas vezes neste trabalho, precisa-se encontrar um número que tenha um dado seno, cosseno ou tangente. Por exemplo, pode-se querer encontrar um número real  $x$  tal que  $\text{sen } x = 0$ . É claro que muitos desses valores podem ser obtidos sem muito esforço, por meio de simples observação geométrica. Outros podem ser obtidos mediante uma calculadora científica, principalmente uma que opere com radianos e com graus. Entretanto, independente de calculadoras, é muito importante saber, sem pensar muito, quais valores que satisfazem equações, como a citada acima.

Dessa forma, nesta subseção, será feito um breve estudo das funções trigonométricas inversas. Para tanto, relembremos o conceito de função inversa, que pode ser encontrado em LIMA (2013, p. 188 - 189).

**Definição 2.3.9.** Diz-se que a função  $g : Y \rightarrow X$  é a **inversa** da função  $f : X \rightarrow Y$  quando se tem  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(y)) = y$  para quaisquer  $x \in X$  e  $y \in Y$ .

Quando  $g$  é a inversa de  $f$ , tem-se que  $g(y) = x$  se, e somente se,  $f(x) = y$ . Observe que, se  $g(f(x)) = x$  para todo  $x \in X$ , então a função  $f$  é injetiva. Isso porque

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Já se,  $f(g(y)) = y$  é válido para todo  $y \in Y$ , significa que  $f$  é sobrejetiva, pois dado  $y \in Y$  qualquer, basta tomar  $x = g(y) \in X$  e teremos  $f(x) = y$ . Portanto, tem-se as seguintes observações:

**Observação 2.3.2.** *Tem-se que:*

- se a função  $f : X \rightarrow Y$  possui inversa então  $f$  é injetiva e sobrejetiva, isto é,  $f$  é bijetiva;
- se  $f : X \rightarrow Y$  é bijetiva então  $f$  possui uma inversa  $g : Y \rightarrow X$ .

Para definir  $g$ , observe que, sendo  $f$  sobrejetiva, tem-se que para todo  $y \in Y$  existe algum  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Além disso, como  $f$  é injetiva, temos que este  $x$  é único. Põe-se então  $g(y) = x$  e define-se  $g : Y \rightarrow X$  como sendo a função que associa a cada elemento  $y \in Y$  um único  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ .

Esta abordagem será apenas das inversas das funções trigonométricas básicas estudadas até aqui, que são importantes para as aplicações. Será iniciado com a função arco seno.

### 2.3.5.1 Função arco seno

A função seno  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada pela definição (2.3.6) não é injetiva, pois, por exemplo,  $0 \neq 2\pi$  e  $\text{sen } 0 = \text{sen } 2\pi = 0$  e, não é sobrejetiva, pois  $\nexists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{sen } x = 2$ . Portanto,  $f$  não é bijetiva, isto é, não possui função inversa.

Porém, considerando a função seno restrita ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e com contradomínio  $[-1, 1]$ , isto é,  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$  com  $f(x) = \text{sen } x$ , tem-se que  $f$  é injetiva e sobrejetiva. Isto porque para todo  $y \in [-1, 1]$  existe  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  tal que  $\text{sen } x = y$  e, além disso, como a função seno é crescente em  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , dados  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes ao domínio de  $f$ , temos que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \text{sen } x_1 \neq \text{sen } x_2.$$

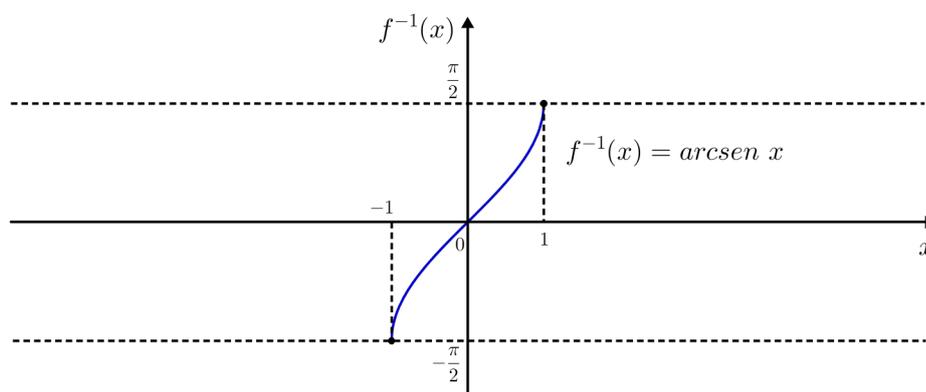
Assim, pela observação (2.3.2), a função seno restrita da forma que foi feita possui inversa  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , chamada *arco seno*, onde é definida da seguinte forma:

**Definição 2.3.10.** *A função arco seno  $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  é definida por*

$$\forall x \in [-1, 1], f^{-1}(x) = \text{arcsen } x.$$

Observe que dado  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ , tem-se que  $y = \text{arcsen } x$  para algum  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$ . Isto significa que  $\text{sen } y = x$ . Veja um esboço do gráfico da função arco seno na Figura 28.

Figura 28 – Gráfico da função arco seno



Fonte: Autor

### 2.3.5.2 Função arco cosseno

A função cosseno  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada pela definição (2.3.7) não é injetiva, pois  $0 \neq 2\pi$  e  $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$  e, não é sobrejetiva, pois  $\nexists x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos x = 2$  e, conseqüentemente não possui função inversa.

Porém, considerando a função cosseno restrita ao intervalo  $[0, \pi]$  e com contradomínio  $[-1, 1]$ , isto é,  $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  com  $g(x) = \cos x$ , tem-se que  $g$  é sobrejetiva, pois para todo  $y \in [-1, 1]$  existe  $x \in [0, \pi]$  tal que  $\cos x = y$ . Além disso é injetiva, pois como a função cosseno é decrescente em  $[0, \pi]$ , dados  $x_1$  e  $x_2$  pertencentes ao domínio de  $g$ , temos que

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos x_1 \neq \cos x_2.$$

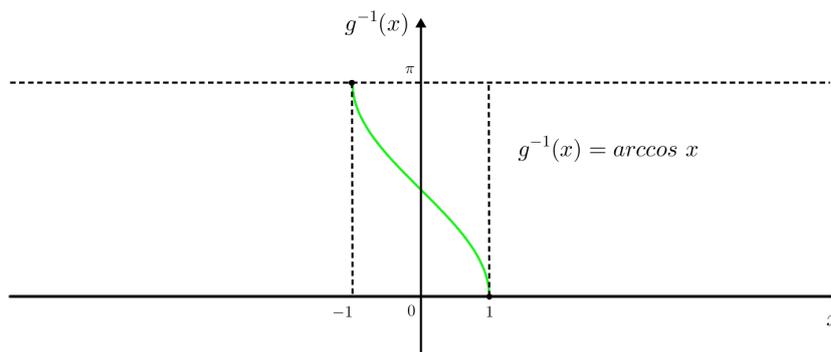
Assim, pela observação (2.3.2), a função cosseno restrita da forma que foi feita possui inversa  $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , chamada *arco cosseno*, onde é definida da seguinte forma:

**Definição 2.3.11.** A função arco cosseno  $g^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  é definida por

$$\forall x \in [-1, 1], g^{-1}(x) = \arccos x.$$

Observe que dado  $0 \leq y \leq \pi$ , tem-se que  $y = \arccos x$  para algum  $x$  tal que  $-1 \leq x \leq 1$ . Isto significa que  $\cos y = x$ . Veja um esboço do gráfico da função arco cosseno na Figura 29.

Figura 29 – Gráfico da função arco cosseno



Fonte: Autor

### 2.3.5.3 Função arco tangente

A função tangente  $h : A \rightarrow \mathbb{R}$ , dada pela definição (2.3.8) é sobrejetiva, pois para todo  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in A$  tal que  $tg x = y$ . No entanto,  $h$  não é injetiva, pois  $0 \neq \pi$  e  $tg 0 = tg \pi = 0$  e, conseqüentemente não possui função inversa.

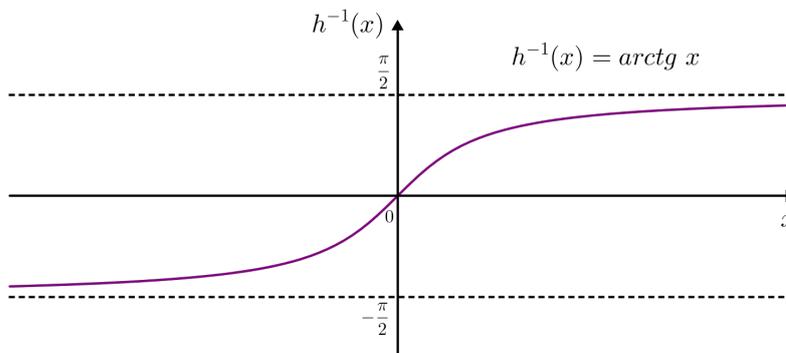
Já a restrição da função tangente ao intervalo  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  a tornará injetiva, pois nesse intervalo ela é crescente. Logo, pela observação (2.3.2), tem-se que a função tangente restrita desta maneira possui inversa  $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , chamada *arco tangente*, onde é definida da seguinte forma:

**Definição 2.3.12.** A função arco tangente  $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  é definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}, h^{-1}(x) = arctg x.$$

Observe que dado  $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ , tem-se que  $y = arctg x$  para algum  $x \in \mathbb{R}$ . Isto significa que  $tg y = x$ . Veja um esboço do gráfico da função arco tangente na Figura 30.

Figura 30 – Gráfico da função arco tangente



Fonte: Autor

### 3 APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA

Nos capítulos anteriores, foram vistos, as definições, propriedades e toda a teoria matemática necessária para um bom entendimento das aplicações da Trigonometria em outras áreas do conhecimento, no qual será apresentada.

Portanto, sendo este o foco deste trabalho, este capítulo visa a aplicação da Trigonometria na resolução de situações problemas em diversos campos da ciência. Será exposto diversos modelos de aplicações, contribuindo assim para um ensino da trigonometria mais prático, servindo dessa forma como um referencial para os professores de Matemática do Ensino Básico e acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática.

#### 3.1 MATEMÁTICA

A aplicação da Trigonometria na própria Matemática é muito rica. Existem diversas aplicações que poderiam ser mostradas nesta seção. No entanto, será apresentada a aplicação da trigonometria em cinco delas, a saber: na definição de coordenadas polares, que posteriormente será usada na abordagem das cônicas; na representação de um número complexo; no cálculo de áreas triangulares e; na declividade de retas.

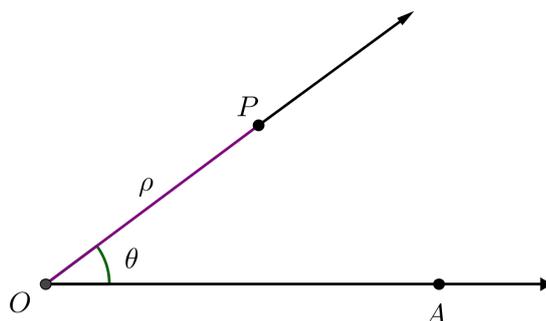
##### 3.1.1 Coordenadas polares

Embora o sistema cartesiano seja muito utilizado desde o ensino básico, existem situações em que é mais conveniente usar um outro sistema de coordenadas. Nesta subseção, será apresentado o *sistema de coordenadas polares* e, como a trigonometria é utilizada na convenção das coordenadas polares para cartesianas e vice-versa, sendo dessa forma, uma importante aplicação na Matemática. Essa abordagem pode ser encontrada em GÓMEZ, FRENSEL e CRISSAFF (2013).

**Definição 3.1.1 (Coordenadas polares).** *Um sistema de **coordenadas polares**  $O\rho\theta$  no plano consiste de um ponto  $O$ , denominado **polo** ou **origem**, de uma semirreta  $\overrightarrow{OA}$ , com origem em  $O$ , denominada **eixo polar**, e de uma unidade de comprimento utilizada para medir a distância de  $O$  a um ponto qualquer do plano. Dado um ponto  $P$  do plano, suas coordenadas nesse sistema são  $\rho$  e  $\theta$ , onde  $\rho$  é a distância de  $P$  a  $O$  e  $\theta$  é a medida do ângulo do eixo polar para a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ . Dessa forma, escreve-se:*

$$P = (\rho, \theta)$$

Figura 31 – Coordenadas polares.

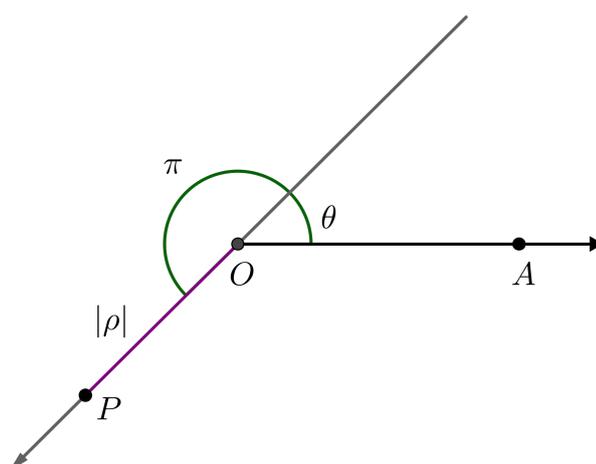


Fonte: Autor

**Observação 3.1.1.** Convencionam-se aqui, que a medida do ângulo tomada de  $\overrightarrow{OA}$  para  $\overrightarrow{OP}$  no sentido anti-horário é positiva, e negativa no sentido horário; se a primeira coordenada polar de um ponto é zero, então esse ponto é o polo. Dessa forma, tem-se que  $P = (0, \theta)$  são as coordenadas polares do polo, para todo ângulo  $\theta$ .

A primeira coordenada polar  $\rho$  de um ponto distinto do polo é sempre maior que zero, pois representa a distância do ponto ao polo. No entanto, pode-se tomar também valores negativos para  $\rho$ , convencionando-se, neste caso, a marcar a distância  $|\rho|$  na semirreta oposta à semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , ou seja, o ponto  $P = (\rho, \theta)$ , com  $\rho < 0$ , corresponde ao ponto  $P = (-\rho, \theta + \pi)$  (Figura 32).

Figura 32 – O ponto  $(\rho, \theta)$ , com  $\rho < 0$ , corresponde ao ponto  $(-\rho, \theta + \pi)$ .



Fonte: Autor

O par  $(\rho, \theta)$  determina, de maneira única, um ponto do plano. Mas, como sabe-se, as medidas  $\theta$  e  $\theta + 2k\pi$ , onde  $k \in \mathbb{Z}$ , estão associadas ao mesmo ângulo. Isso

significa que, um ponto no plano pode ser determinado por meio de várias coordenadas polares distintas, isto é,  $(\rho, \theta)$  e  $(\rho, \theta + 2k\pi)$  representam o mesmo ponto do plano.

Além disso, como  $(\rho, \theta) = (-\rho, \theta + \pi)$  se  $\rho < 0$ , então  $(-\rho, \theta + \pi) = (\rho, \theta + 2\pi) = (\rho, \theta)$  se  $\rho > 0$ . Assim, temos que  $(\rho, \theta) = (\rho, \theta + 2k\pi) = (-\rho, \theta + (2n + 1)\pi)$  quaisquer que sejam  $k, n \in \mathbb{Z}$  e  $\rho \in \mathbb{R}$ .

Observe que, se o ponto  $P$  não for a origem e se restringirmos  $\rho$  e  $\theta$  aos intervalos  $(0, +\infty)$  e  $[0, 2\pi)$ , respectivamente, existirá apenas um par de coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  para  $P$ .

### 3.1.1.1 Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas

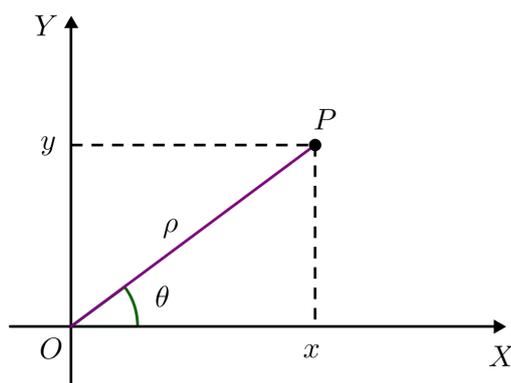
A partir do estudo da subseção anterior, será visto agora a aplicação da trigonometria nas relações entre as coordenadas polares e coordenadas cartesianas.

Considere o sistema de coordenadas polares  $O\rho\theta$  no plano. Seja  $XOY$  o sistema cartesiano ortogonal, tal que a origem coincida com o polo, o eixo polar seja o semieixo positivo  $OX$  e o eixo  $OY$  seja obtido rotacionando  $OX$  de  $90^\circ$  no sentido positivo.

**Definição 3.1.2.** *Seja  $P \neq O$  um ponto no plano tal que  $P = (\rho, \theta)$ , no sistema  $O\rho\theta$ , e  $P = (x, y)$ , no sistema  $XOY$ . Então, as relações entre essas coordenadas são dadas por:*

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \rho \sin \theta \quad (3.1)$$

Figura 33 – Relações entre coordenadas polares e coordenadas cartesianas



Fonte: Autor

Como  $x^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$  e  $y^2 = \rho^2 \sin^2 \theta$ , tem-se que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta \\ &= \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Como  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ , segue que  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Portanto, desse último resultado e das relações em (3.1), segue que

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad (3.2)$$

onde esta última igualdade se deve ao fato de  $\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ .

### 3.1.2 A forma trigonométrica dos números complexos

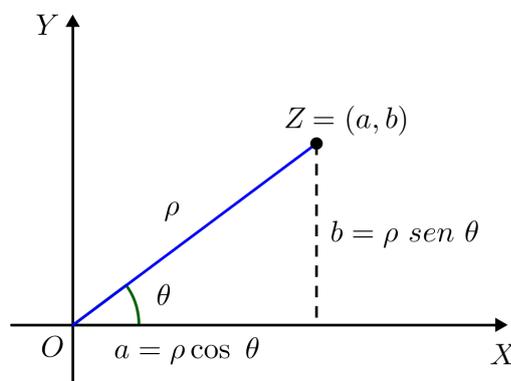
Nesta subseção, será apresentado a forma trigonométrica (ou polar) dos números complexos, cuja abordagem encontra-se em CARMO, MORGADO e WAGNER (2005). Para isso, lembramos que a forma algébrica de um número complexo  $z$  é dado por

$$z = a + bi,$$

onde  $a$  é chamada de parte real,  $b$  é chamada de parte imaginária e  $i^2 = -1$ .

Um número complexo  $z$  pode ser pensado como um ponto  $Z$  do plano, de coordenadas  $(a, b)$  ou como um vetor  $\vec{OZ}$  de origem  $O$  e extremidade  $(a, b)$ . Assim,

Figura 34 – Representação trigonométrica de um número complexo



Fonte: Autor

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  é o comprimento de  $\vec{OZ}$  que suponha-se diferente de zero e seja  $\theta$  o ângulo positivo formado por  $\vec{OZ}$  e pelo eixo das abscissas (Figura 34). Pela definição (3.1.2) tem-se que as coordenadas cartesianas de  $Z$  pode ser representada por

$$a = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad b = \rho \sin \theta,$$

isto é,

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ &= \rho \cos \theta + \rho \sin \theta i \\ &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

A representação  $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  é chamada a **forma trigonométrica** ou **forma polar** do complexo  $z$ .

Observe que, se substituirmos  $\theta$  por  $\theta + 2k\pi$  em (3.3), onde  $k \in \mathbb{Z}$ , o complexo  $z$  não se altera, pois foi visto que o seno e o cosseno têm período  $2\pi$ . Dessa forma, em alguns casos é mais conveniente usar a expressão mais geral

$$z = \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)), \quad (3.4)$$

onde  $\theta + 2k\pi$  são os argumentos de  $z$ .

**Exemplo 3.1.1.** *Obter a forma trigonométrica do número complexo  $z = 3 + 3i$ .*

**Solução:**

Como  $a = b = 3$ , temos que  $\rho = \sqrt{3^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$ . Logo, de (3.2) segue que

$$\cos \theta = \operatorname{sen} \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Logo, temos que

$$z = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right),$$

ou também pode ser escrito na forma

$$z = 3\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right).$$

### 3.1.3 Cônicas em coordenadas polares

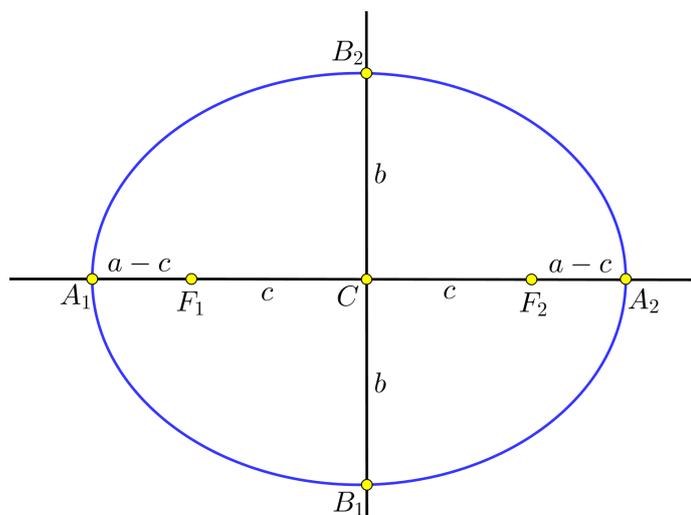
Nesta subseção, será visto como a trigonometria é utilizada na equação polar de uma cônica. Esta última, quando é uma elipse, será utilizada posteriormente em outra aplicação, a saber, na órbita dos planetas tendo o Sol como um dos focos. Para este estudo, será abordado, a definição de uma elipse na sua forma clássica e na forma geral de uma cônica, cuja abordagem pode ser encontrada em GÓMEZ, FRENSEL e CRISSAFF (2013).

**Definição 3.1.3 (Elipse).** *Uma **elipse**  $E$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  é o conjunto dos pontos  $P$  do plano cuja soma das distâncias a  $F_1$  e  $F_2$  é igual a uma constante  $2a > 0$ , maior do que a distância entre os focos  $2c \geq 0$ . Ou seja, sendo  $0 \leq c < a$  e  $d(F_1, F_2) = 2c$ ,*

$$E = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

**Observação 3.1.2.** *A reta que contém os focos  $F_1$  e  $F_2$  é chamada de **reta focal** e o segmento de extremidade nos vértices  $A_1$  e  $A_2$  de comprimento  $2a$  é o **eixo focal** da elipse; o centro  $C$  da elipse é o ponto médio do eixo focal  $A_1A_2$ ; a **reta não focal** é a reta*

Figura 35 – Elipse e seus elementos



Fonte: Autor

perpendicular à reta focal que passa pelo centro  $C$  e intercepta a elipse nos vértices  $B_1$  e  $B_2$ ; o número  $e = \frac{c}{a}$  é a excentricidade da elipse (Figura 35).

**Definição 3.1.4 (Definição Geral de uma Cônica).** *Sejam  $F$  um ponto do plano,  $L$  uma reta do plano tal que  $F \notin L$  e  $e$  um número real positivo. Então, o conjunto*

$$C = \{P \mid d(P, F) = e d(P, L)\}$$

é uma elipse se  $e < 1$ , uma parábola se  $e = 1$  e uma hipérbole se  $e > 1$ , de foco no ponto  $F$  e excentricidade  $e$ . A reta  $L$  é chamada diretriz correspondente ao foco  $F$ .

**Observação 3.1.3.** *No caso em que interessa, quando a cônica é uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ , tem-se duas diretrizes  $L_1$  e  $L_2$  correspondentes a cada um dos focos. A diretriz  $L_i$  correspondente ao foco  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , é a reta perpendicular à reta focal que está à distância  $\frac{a}{e}$  do centro, com o foco  $F_i$ .*

Seja  $C$  uma cônica de excentricidade  $e > 0$ . Considere um sistema de coordenadas polares em que um foco  $F$  da cônica é a origem  $O$  e o eixo polar  $OA$  está contido na reta focal de  $C$ .

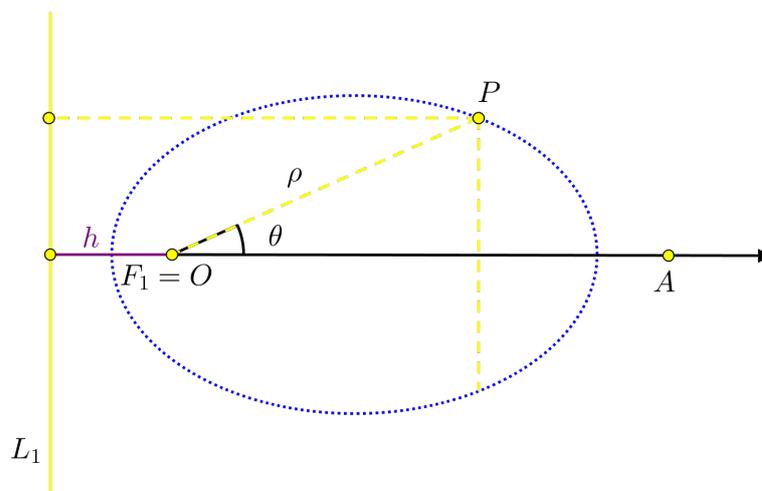
Considere  $L$  a diretriz associada ao foco  $F$  e seja  $h = d(F, L)$ . Segundo a definição (3.1.4), temos que

$$P = (\rho, \theta) \in C \Leftrightarrow d(P, F) = ed(P, L) \Leftrightarrow \rho = ed(P, L)$$

É preciso considerar dois casos:

a) Se  $L$  não intersecta o eixo polar, então  $d(P, L) = h + \rho \cos \theta$  (Figura 36). Isto é,

Figura 36 – Elipse: caso em que a diretriz  $L_1$  não intercepta o eixo focal  $OA$



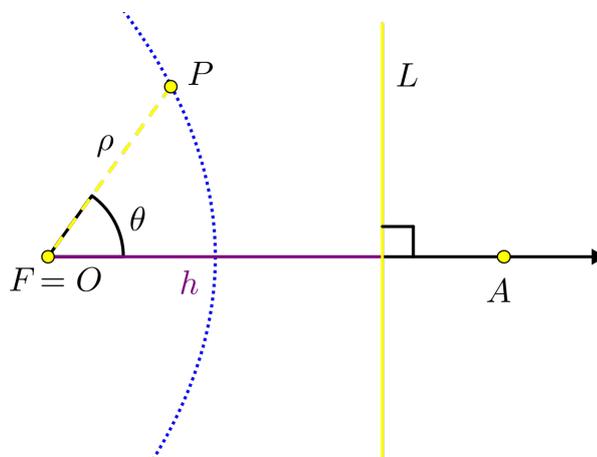
Fonte: GÓMEZ, FRENSEL e CRISSAFF (2013), adaptado.

tem-se que  $P = (\rho, \theta) \in C$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} \rho &= ed(P, L) \\ \rho &= e(h + \rho \cos \theta) \\ \rho - e\rho \cos \theta &= eh \\ \rho(1 - e \cos \theta) &= eh \\ \rho &= \frac{eh}{1 - e \cos \theta} \end{aligned}$$

**b)** Se  $L$  intersecta o eixo polar, então  $d(P, L) = h - \rho \cos \theta$  (Figura 37).

Figura 37 – Parábola: caso em que a diretriz  $L$  intercepta o eixo focal  $OA$



Fonte: GÓMEZ, FRENSEL e CRISSAFF (2013), adaptado.

Neste caso, tem-se que  $P = (\rho, \theta) \in C$  se, e somente se,

$$\begin{aligned}\rho &= ed(P, L) \\ \rho &= e(h - \rho \cos \theta) \\ \rho + e\rho \cos \theta &= eh \\ \rho(1 + e \cos \theta) &= eh \\ \rho &= \frac{eh}{1 + e \cos \theta}\end{aligned}$$

Portanto, a equação polar de  $C$ , no sistema,  $O\rho\theta$  é dada por

$$\rho = \frac{eh}{1 \pm e \cos \theta}, \quad (3.5)$$

onde  $h$  é a distância entre a diretriz e o foco (origem). Na equação (3.5), tome o sinal positivo se a diretriz intersecta o eixo polar, e o sinal negativo se a diretriz não intersecta o eixo polar.

No caso em que o eixo polar  $OA$ , for escolhido de modo a ser paralelo à diretriz, ou seja, perpendicular à reta focal, a equação polar da cônica obtida é dada por

$$\rho = \frac{eh}{1 \pm e \sen \theta}, \quad (3.6)$$

na qual será considerado o sinal positivo se a diretriz intersecta a semirreta  $OB$ , onde  $OB$  é a rotação de  $\frac{\pi}{2}$  do eixo polar  $OA$ , no sentido positivo. Caso contrário, tomamos o sinal negativo.

### 3.1.4 Cálculo de áreas triangulares

Nesta subseção, será apresentada a aplicação da trigonometria no cálculo de áreas triangulares. Para demonstração que pretendemos dar, é necessário lembrar a seguinte definição:

**Definição 3.1.5.** A área de um triângulo  $ABC$ , de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$ ,  $\overline{BC} = a$  e altura  $\overline{BH} = h$ , (Figura 38), é dado por

$$S = \frac{bh}{2} \quad (3.7)$$

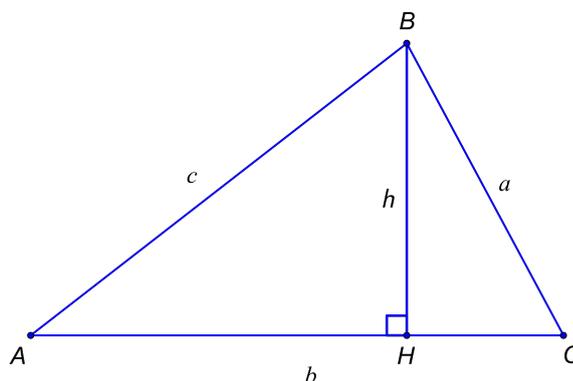
A partir desta definição, será provada a seguinte proposição, que é o objetivo principal desta subseção:

**Proposição 3.1.1.** Se  $ABC$  é um triângulo de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , então sua área  $S$  é dado por

$$S = \frac{1}{2}bc \sen \hat{A}, \quad (3.8)$$

onde  $\hat{A}$  é o ângulo interno formado pelos lados  $b$  e  $c$ .

Figura 38 – Área de um triângulo  $ABC$

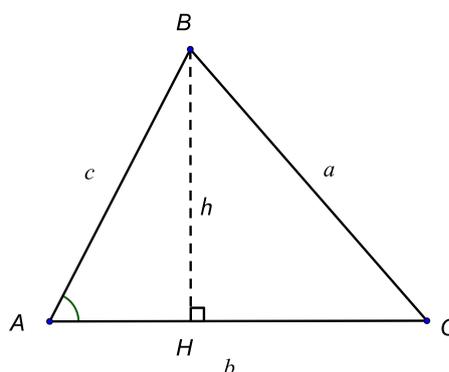


Fonte: Autor

*Demonstração.* Para se demonstrar a proposição (3.1.1), será analisado três casos:

a) Se  $\hat{A}$  é um ângulo agudo (Figura 39), tem-se que

Figura 39 –  $\hat{A}$  é ângulo agudo



Fonte: Autor

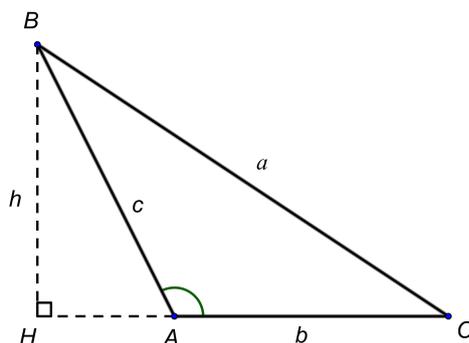
$$\begin{aligned} \text{sen } \hat{A} &= \frac{h}{c} \\ h &= c \text{ sen } \hat{A} \end{aligned}$$

Portanto, da equação (3.7), segue que

$$\begin{aligned} S &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{1}{2}bc \text{ sen } \hat{A} \end{aligned}$$

b) Se  $\hat{A}$  é um ângulo obtuso (Figura 40), observe que  $H\hat{A}B = \pi - \hat{A}$ . Logo, temos que

Figura 40 –  $\hat{A}$  é ângulo obtuso



Fonte: Autor

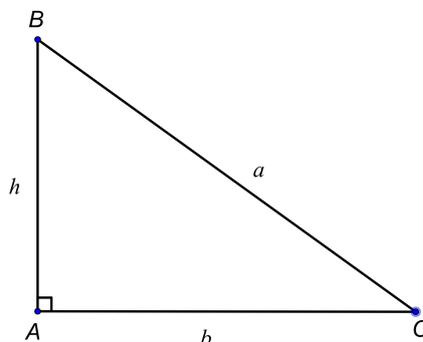
$$\begin{aligned} \text{sen}(\pi - \hat{A}) &= \frac{h}{c} \\ h &= c \text{sen}(\pi - \hat{A}) \end{aligned}$$

Pela propriedade (2.3.3), se sabe que  $\text{sen}(\pi - \hat{A}) = \text{sen} \hat{A}$ , segue que  $h = c \text{sen} \hat{A}$ . Portanto, da equação (3.7), tem-se que

$$\begin{aligned} S &= \frac{bh}{2} \\ &= \frac{1}{2}bc \text{sen} \hat{A} \end{aligned}$$

- c) Se  $\hat{A}$  é um ângulo reto, isto é,  $\hat{A} = 90^\circ$  (Figura 41), temos que  $h = c$  e  $\text{sen} \hat{A} = 1$ , logo segue imediatamente da equação (3.7) que

Figura 41 –  $\hat{A}$  é ângulo reto



Fonte: Autor

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{bh}{2} \\
 &= \frac{bc}{2} \\
 &= \frac{1}{2}bc \cdot 1 \\
 &= \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} \hat{A}
 \end{aligned}$$

□

Por raciocínio inteiramente análogo, tem-se ainda para a área do triângulo  $ABC$  as expressões:

$$S = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} \hat{B}, \quad (3.9)$$

$$S = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \hat{C} \quad (3.10)$$

Uma importante aplicação das expressões (3.8), (3.9) e (3.10) na própria trigonometria é a famosa *Lei dos senos*. Será apresentada essa lei por meio da seguinte proposição:

**Proposição 3.1.2.** *Em qualquer triângulo  $ABC$  de lados  $a, b$  e  $c$  vale a relação*

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}. \quad (3.11)$$

*Demonstração.* Para demonstrar a lei dos senos, primeiramente multiplicaremos a relação (3.8) por  $a$  (comprimento do lado  $BC$ ), onde obtemos

$$aS = \frac{1}{2}abc \operatorname{sen} \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{abc}{2S} \quad (3.12)$$

Multiplicando a relação (3.9) por  $b$  (comprimento do lado  $AC$ ), obtemos

$$bS = \frac{1}{2}abc \operatorname{sen} \hat{B} \Rightarrow \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{abc}{2S} \quad (3.13)$$

e por último, multiplicando a relação (3.10) por  $c$  (comprimento do lado  $AB$ ), temos que

$$cS = \frac{1}{2}abc \operatorname{sen} \hat{C} \Rightarrow \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{abc}{2S} \quad (3.14)$$

Portanto, de (3.12), (3.13) e (3.14), podemos concluir que

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}.$$

□

### 3.1.5 Declividade de uma reta

Nesta subseção, será feito um estudo básico da declividade de uma reta, dando ênfase na trigonometria aplicada.

Na Geometria Analítica, uma das propriedades de uma reta é a sua declividade constante. A declividade pode ser determinada por meio de dois pontos distintos quaisquer da reta. Será usado esse fato para determinar posteriormente a equação de uma reta não vertical. Antes disso, será apresentado a definição de declividade de uma reta.

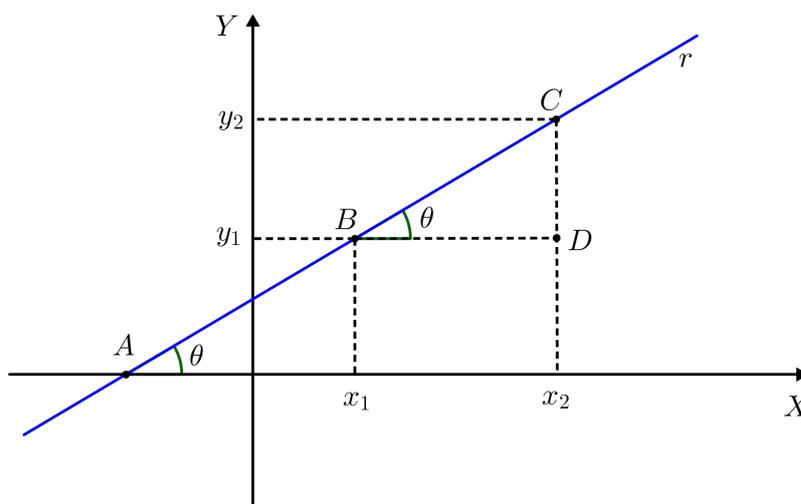
**Definição 3.1.6.** Considere no plano cartesiano uma reta  $r$  que intercepta o eixo  $OX$  em um ponto  $A$  e seja  $\theta$  o ângulo entre  $r$  e o eixo  $OX$ , medido no sentido anti-horário. A **declividade** da reta  $r$  é a tangente do ângulo  $\theta$ , denotada por  $m$ , isto é,

$$m = \operatorname{tg} \theta. \quad (3.15)$$

Observe que, como o ângulo  $\theta$  é medido no sentido anti-horário, desde o sentido positivo de  $OX$  até a reta, ele está sempre entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ .

Agora, considere  $B = (x_1, y_1)$  e  $C = (x_2, y_2)$  dois pontos distintos da reta  $r$  e  $D$  um ponto de abscissa  $x_2$  e ordenada  $y_1$  (Figura 42).

Figura 42 – Declividade de uma reta  $r$ .



Fonte: Autor

Observe que, como  $\overline{BD}$  é paralelo ao eixo  $OX$ , tem-se  $\widehat{DBC} = \theta$ . Assim, aplicando a definição (2.1.1) no triângulo  $BCD$  retângulo em  $D$ , tem-se que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{CD}{BD}. \quad (3.16)$$

Como  $BD = x_2 - x_1$  e  $CD = y_2 - y_1$ , então a declividade de  $r$  é dada por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.17)$$

Sendo  $(x, y)$  um ponto arbitrário e  $(x_1, y_1)$  um ponto conhecido de  $r$ , segue que  $\operatorname{tg} \theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ . Portanto, tem-se que a equação da reta  $r$  é

$$y - y_1 = \operatorname{tg} \theta (x - x_1) \quad (3.18)$$

## 3.2 CIÊNCIAS ECONÔMICAS

No estudo de **oferta e demanda** em economia, envolve-se uma abordagem de equações lineares. Segundo WEBER (2001), "na prática, algumas equações de oferta e demanda são aproximadamente lineares na faixa de valores que interessa; outras não são lineares". No entanto, as equações lineares podem oferecer representações de oferta e demanda razoavelmente precisas dentro de uma faixa limitada. Deve-se observar também, que apenas os segmentos das curvas de equações lineares que estão no primeiro quadrante do plano cartesiano interessam à análise econômica. Isto porque a oferta, o preço, e a quantidade são, em geral iguais a zero ou um número positivo.

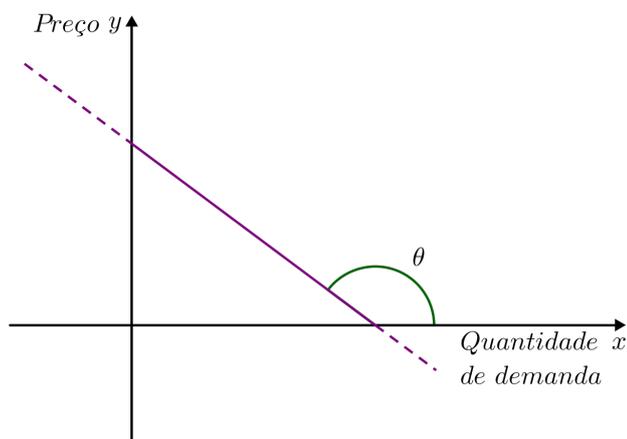
Assim, nesta seção pretende-se apresentar uma aplicação da trigonometria no estudo das equações de oferta e demanda, no qual se dá por meio da análise de retas e sua declividade, no qual foi abordada na subseção (3.1.5).

### 3.2.1 Curvas de demanda linear

As pessoas procuram bens e serviços para satisfazerem suas necessidades. A **demanda** de mercado de um bem ou serviço nos informa a quantidade que os consumidores participantes daquele mercado desejam comprar a cada preço unitário que tenham de pagar, num determinado período de tempo, dado um determinado cenário (SILVA et al., 2002).

Segundo WEBER (2001), normalmente a declividade de uma curva de demanda é negativa. Isto é, à medida que o preço aumenta, a quantidade procurada diminui e à medida que o preço diminui, a quantidade procurada aumenta (Figura 43). Neste caso, temos a declividade  $\operatorname{tg} \theta < 0$  quando  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ .

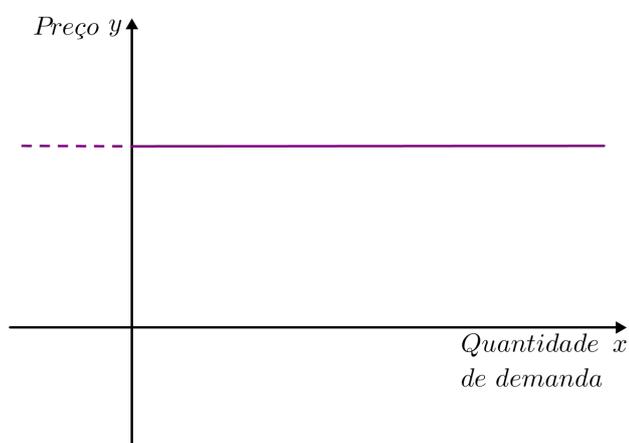
Figura 43 – Declividade de demanda negativa.



Fonte: Autor

Em certos casos, a declividade de uma curva de demanda também pode ser nula, isto é, o preço é constante, independente da demanda (Figura 44). Neste caso, temos a declividade  $\text{tg } \theta = 0$  quando  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

Figura 44 – Declividade de demanda nula.

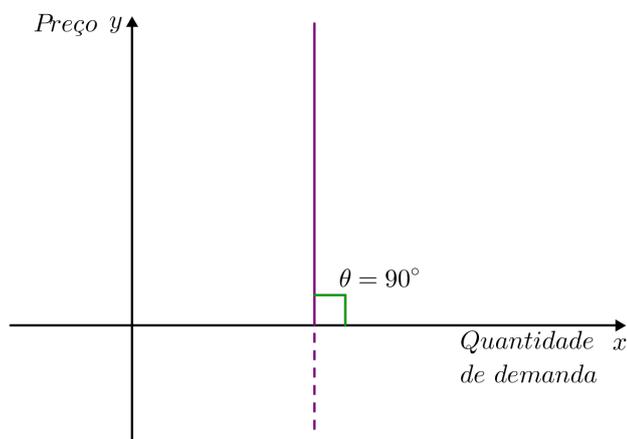


Fonte: Autor

Em outros casos, a declividade de uma curva de demanda pode ser indefinida, ou seja, a procura é constante, independente do preço (Figura 45). Neste caso, a declividade  $\text{tg } \theta$  não está definida quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Exemplo 3.2.1.** *Dez relógios de pulso são vendidos quando o seu preço é R\$80,00. Sabendo que o ângulo de inclinação da reta que descreve a equação de demanda é aproximadamente  $116^\circ$ , determine a quantidade de relógios vendidos quando o seu preço é R\$60,00 (WEBER, 2001, p. 36, adaptado).*

Figura 45 – Declividade de demanda indefinida.



Fonte: Autor

**Solução:**

Como a o ângulo de inclinação da reta é  $116^\circ$ , temos que a declividade da reta é

$$m = \operatorname{tg} 116^\circ \cong -2.$$

Como 10 relógios são vendidos quando seu preço é R\$80,00, o ponto  $(10, 80)$  pertence à reta. Assim, podemos usar a equação (3.18) para determinar a equação de demanda. Logo, segue que

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \operatorname{tg} \theta (x - x_1) \\ y - 80 &= -2(x - 10) \\ y - 80 &= -2x + 20 \\ 2x + y - 100 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação de demanda é  $2x + y - 100 = 0$ , onde  $x$  é a demanda (quantidade de relógios vendidos) e  $y$  é o preço do relógio. Como queremos saber a quantidade de relógios vendidos quando seu preço é R\$60,00, basta substituir  $y = 60$  na equação de demanda para determinar o valor de  $x$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned} 2x + y - 100 &= 0 \\ 2x + 60 - 100 &= 0 \\ 2x &= 40 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

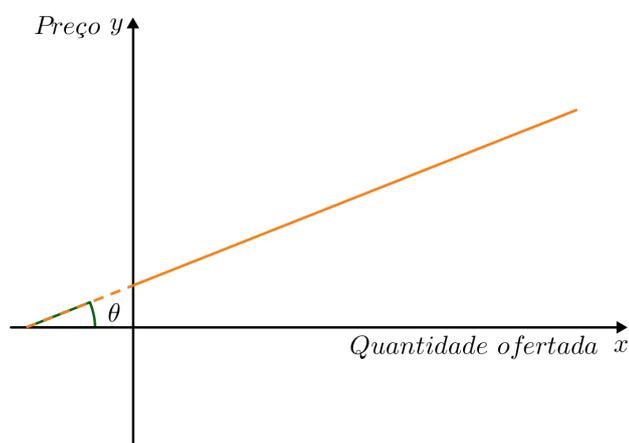
Logo, são vendidos 20 relógios quando o seu preço é 60 reais.

### 3.2.2 Curvas de oferta linear

A **oferta** está relacionada ao custo de produção e este à tecnologia de produção e aos preços dos fatores empregados na produção (SILVA et al., 2002). Isto é, pode-se dizer que oferta é a quantidade de um produto ou serviço disponível para compra.

Podemos ver em WEBER (2001), que normalmente a declividade de uma curva de oferta linear é positiva, isto é, à medida que o preço aumenta, a oferta aumenta, e à medida que o preço diminui, a oferta diminui (Figura 46). Neste caso, temos a declividade  $\operatorname{tg} \theta > 0$  quando  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ .

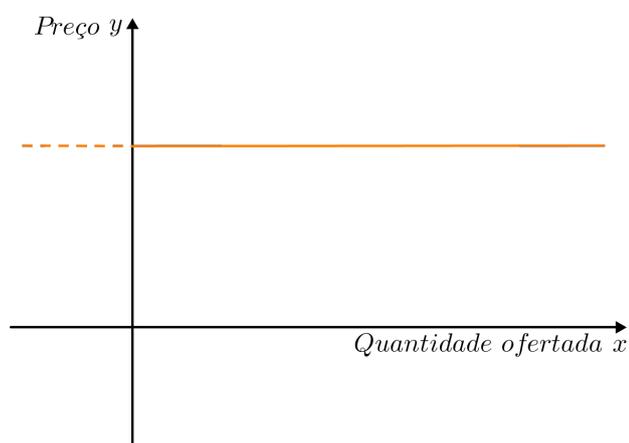
Figura 46 – Declividade de oferta positiva.



Fonte: Autor

Em certos casos, a declividade de uma curva de oferta é nula, isto é, o preço é constante, independente da oferta (Figura 47). Neste caso, assim como na declividade de demanda nula, temos a declividade de oferta  $\operatorname{tg} \theta = 0$  quando  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

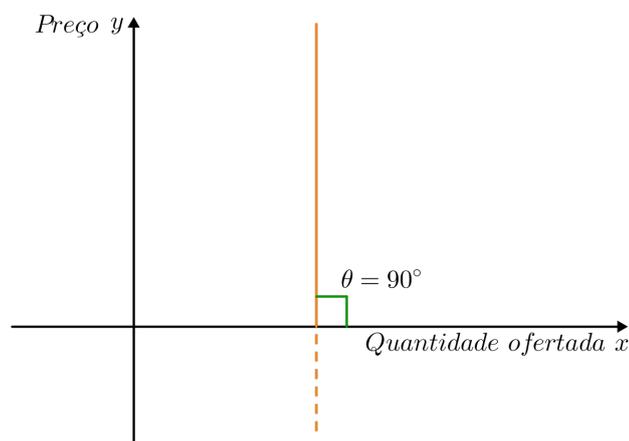
Figura 47 – Declividade de oferta nula.



Fonte: Autor

Em outros casos, a declividade de uma curva de oferta pode ser indefinida, ou seja, a oferta é constante, independente do preço (Figura 48). Onde sabe-se que, neste caso, a declividade de oferta  $\operatorname{tg} \theta$  não está definida quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Figura 48 – Declividade de oferta indefinida.



Fonte: Autor

**Exemplo 3.2.2.** Quando o preço for de R\$300,00, então 100 máquinas fotográficas de um determinado tipo estão disponíveis no mercado. Sabendo que o ângulo de inclinação da reta que descreve a equação de oferta é aproximadamente  $26,6^\circ$ , determine o preço, quando 180 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado (WEBER, 2001, p. 38, adaptado).

### Solução:

Como o ângulo de inclinação da reta é  $26,6^\circ$ , então tem-se que a declividade da reta é

$$m = \operatorname{tg} 26,6^\circ \cong 0,5$$

Quanto o preço for de R\$300,00, temos que 100 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado. Assim, o ponto  $(100, 300)$  pertence à reta. Assim, também pode-se usar a equação (3.18) para determinar a equação de oferta. Logo, segue que

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \operatorname{tg} \theta (x - x_1) \\ y - 300 &= \frac{1}{2}(x - 100) \\ 2y - 600 &= x - 100 \\ x - 2y + 500 &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, a equação de oferta é  $x - 2y + 500 = 0$ , onde  $x$  é a quantidade ofertada e  $y$  é o preço da máquina fotográfica.

Como queremos determinar o preço da máquina fotográfica, quando 180 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado, basta substituir  $x = 180$  na equação de oferta para determinar o valor do preço  $y$ . Assim, temos que

$$\begin{aligned}x - 2y + 500 &= 0 \\180 - 2y + 500 &= 0 \\2y &= 680 \\y &= 340\end{aligned}$$

Logo, quando 180 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado, o preço da máquina fotográfica é R\$340,00.

Observe que, embora no estudo de oferta e demanda aborda-se geometria analítica, é fundamental o uso da trigonometria. Sendo assim, vê-se a importância da trigonometria neste estudo.

### 3.3 ENGENHARIA CIVIL

A utilização da Matemática na Engenharia Civil é indispensável. Em particular, com a trigonometria não é diferente, pois é utilizada, por exemplo, na construção de edifícios, pontes, etc. Nesta seção, será determinada a altura de uma torre local por meio do uso da trigonometria. Esta aplicação também será usada posteriormente para o cálculo do raio da Terra.

#### 3.3.1 Calculando a altura de uma torre em Roraima

Como será descrito na subseção (3.4.1), além de outras coisas, para se determinar o raio  $R$  da Terra, precisa-se da altura de uma torre (ou um prédio). Dessa forma, nesta subseção, será determinada a altura de uma torre local ao qual será utilizado para o cálculo do raio da Terra, a saber, a Torre da EMBRATEL, localizada no Centro de Boa Vista-RR.

Para isso, consideremos um ponto  $A$  sendo o topo da torre. Nos afastamos da torre uma certa distância  $x$  e marcamos um ponto "imaginário"  $C$ . Desse ponto  $C$ , utilizando um instrumento de medição de ângulo chamado "Estação Total", medimos o ângulo de visão  $\alpha$  ao qual observamos o topo da torre. Nos afastamos 50 m do ponto  $C$  na mesma direção e marcamos o ponto "imaginário"  $D$ . Do ponto  $D$  observamos novamente o topo da torre sob um ângulo  $\beta$ .

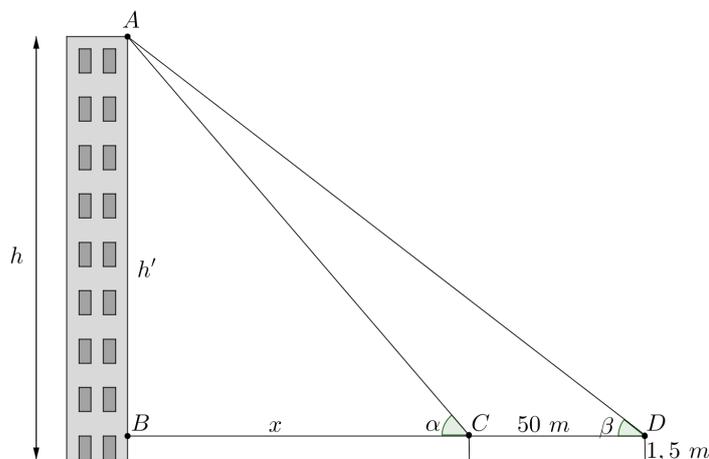
Figura 49 – Calculando a altura da Torre da EMBRATEL



Fonte: Autor

Como a observação do topo da torre foi feita com o instrumento a uma altura de 1,5 m do chão, temos que a altura da torre é  $h = h' + 1,5$ , onde  $h' = AB$  e  $B$  é um ponto da torre localizado a 1,5 m do solo, como ilustra a Figura 50.

Figura 50 – Esquema ilustrativo: medição da altura da torre da EMBRATEL



Fonte: Autor

Na primeira observação do topo da torre, no ponto  $C$ , obtemos  $\alpha \cong 16,9^\circ$  e na segunda observação do topo da torre, no ponto  $D$ , obtemos  $\beta \cong 14,8^\circ$ .

Pela equação (2.3) da definição (2.1.1) no triângulo retângulo  $ABC$ , temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h'}{x} \Rightarrow x = \frac{h'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (3.19)$$

Analogamente, no triângulo retângulo  $ABD$ , temos que

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h'}{x + 50} \Rightarrow h' = (x + 50)\operatorname{tg} \beta \quad (3.20)$$

Substituindo (3.19) em (3.20), segue que

$$\begin{aligned} h' &= \left(\frac{h'}{\operatorname{tg} \alpha} + 50\right) \operatorname{tg} \beta \\ h' &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} h' + 50 \operatorname{tg} \beta \\ h' - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha} h' &= 50 \operatorname{tg} \beta \\ h' \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}\right) &= 50 \operatorname{tg} \beta \\ h' &= \frac{50 \operatorname{tg} \beta}{1 - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}} \end{aligned}$$

Logo, segue que

$$h' = \frac{50 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}. \quad (3.21)$$

Substituindo os valores  $\alpha = 16,9^\circ$  e  $\beta = 14,8^\circ$  em (3.21), e efetuando os cálculos, temos que

$$\begin{aligned} h' &= \frac{50 \operatorname{tg} 16,9^\circ \operatorname{tg} 14,8^\circ}{\operatorname{tg} 16,9^\circ - \operatorname{tg} 14,8^\circ} \\ h' &\cong 101,33 \text{ m} \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} h &= h' + 1,5 \\ &= 101,33 + 1,5 \\ &= 102,83 \text{ m} \end{aligned}$$

Isto é, a altura da torre da EMBRATEL é aproximadamente 102,83 metros.

A altura da torre é em torno de 104 metros. Assim, o erro cometido é de aproximadamente 1%.

### 3.4 ASTRONOMIA

Nesta seção será apresentado algumas aplicações da trigonometria na Astronomia. Primeiramente descreve-se um método bastante interessante de como calcular o raio da Terra. Posteriormente, apresenta-se o método de Aristarco para medir as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol, mas utilizando medidas atuais. Também será visto como a trigonometria é utilizada na descrição da órbita dos planetas ao redor do Sol, utilizando para isso, conhecimento sobre elipse.

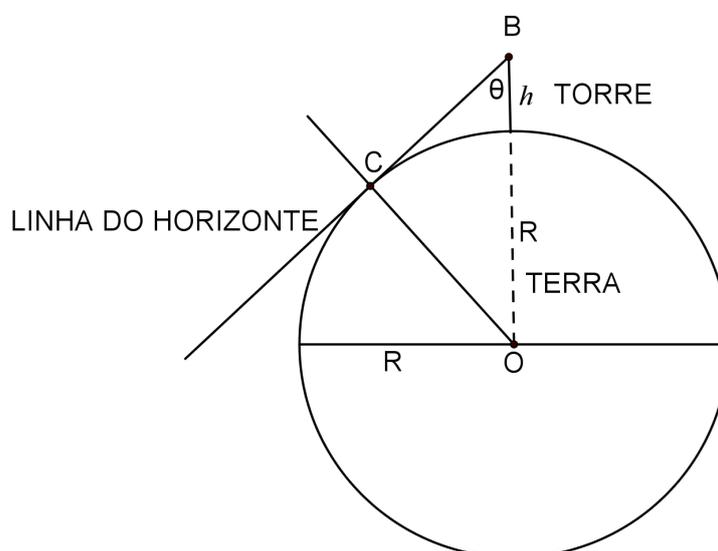
### 3.4.1 Medida do raio da Terra

Usando a trigonometria, será apresentado um método bastante engenhoso para se medir o raio  $R$  da Terra, um comprimento geralmente inacessível às medidas diretas. Após descrever este método, o usaremos para calcular aproximadamente o raio da Terra, utilizando para isso, medições feitas na comunidade local.

O método que será descrito, foi usado desde os gregos, e pode ser encontrado em LIMA et al. (2006, p. 12):

Sobe-se a uma torre de altura  $h$  e mede-se o ângulo  $\theta$  que faz a reta  $BC$  do horizonte de B com a vertical  $BO$  do lugar (Figura 51).

Figura 51 – Calculando o raio da terra



Fonte: LIMA et al. (2006), adaptado.

Como o triângulo  $OBC$  é retângulo em  $C$ , tem-se que

$$\frac{R}{R+h} = \text{sen } \theta$$

$$R \text{sen } \theta + h \text{sen } \theta = R$$

$$R(1 - \text{sen } \theta) = h \text{sen } \theta$$

Dessa forma, o raio  $R$  da Terra é dado por:

$$R = \frac{h \text{sen } \theta}{1 - \text{sen } \theta} \quad (3.22)$$

Se tivermos as medidas de  $h$  e  $\theta$  (que são acessíveis) e uma tabela de senos, ou até mesmo uma calculadora científica, então poderemos calcular o raio  $R$  da Terra.

Da subseção (3.3.1), já temos a altura de uma torre local, de altura  $h = 102,83$  metros. Portanto, resta apenas medir o ângulo  $\theta$  da linha do horizonte. Para isso, subimos até o topo da Torre da EMBRATEL (Figura 52).

Figura 52 – Calculando o ângulo do horizonte



Fonte: Autor

Utilizando o instrumento "Estação Total", primeiramente medimos o ângulo complementar ao ângulo do horizonte no qual queríamos, por uma questão relacionada ao instrumento de medição. Assim, obtemos um ângulo de aproximadamente  $0,32^\circ$ . Dessa forma, o ângulo que faz a reta  $BC$  do horizonte de B com a torre da EMBRATEL é  $\theta = 90^\circ - 0,32^\circ = 89,68^\circ$ .

Portanto, substituindo  $\theta = 89,68^\circ$  e  $h = 102,83$  m na equação (3.22), e utilizando uma calculadora científica, segue que

$$\begin{aligned} R &= \frac{h \operatorname{sen} \theta}{1 - \operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{102,83 \cdot \operatorname{sen} 89,68^\circ}{1 - \operatorname{sen} 89,68^\circ} \\ &= 6593097,6 \text{ m} \end{aligned}$$

Transformando essa medida em quilômetros, obtemos  $R = 6593,1$  km. Isto é, o raio da Terra obtido é aproximadamente 6593,1 km.

É claro que o ângulo do horizonte obtido do topo da torre é uma medida aproximada, pois há alguns fatores que temos que considerar, como por exemplo, o erro causado pelo balançar da torre, ocasionado pelo vento. O equipamento de medição "Estação Total" ao qual foi utilizado, tem um erro angular de apenas dois segundos. Em relação a altura da torre, também temos que considerar a elevação do terreno que, embora seja aproximadamente plano, há pequenos declives.

Pode-se ver em HALLIDAY et al. (2012b, A-356), que o raio médio da Terra

é cerca de 6370 km. Assim, pode-se observar que o valor obtido nestes cálculos é razoável, visto que, o erro cometido é de aproximadamente 3,5%.

### 3.4.2 Distância da Terra à Lua e da Terra ao Sol

Os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, séculos antes de Cristo, mas poucas pessoas sabem como eram feitos esses cálculos (AVILA, 1986). Elas se baseavam em ideias simples e geniais que estão fortemente interligadas aos conteúdos de Geometria e Trigonometria.

Figura 53 – Imagem ilustrativa da Terra, Lua e Sol



Fonte: Bio Digital<sup>1</sup>

Será descrito aqui, o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III a.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol, cuja abordagem encontra-se na Revista do Professor de Matemática - RPM. Para tal finalidade, não usaremos as medidas dos ângulos observados por Aristarco na antiguidade, já que atualmente existem valores mais precisos, pelo qual serão utilizados nesta aplicação.

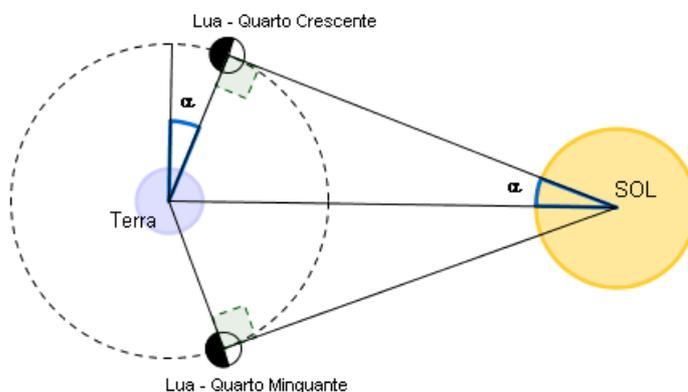
#### 3.4.2.1 Relações entre as distâncias da Terra ao Sol e da Terra à Lua

Pode-se ver em AVILA (1986), que Aristarco observou que, existem duas posições da Lua em sua órbita, o "quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Figura 54). Quando isso acontece, o triângulo Terra - Lua - Sol é retângulo (FILHO; SARAIVA, 2004), com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Observe que nessa configuração o ângulo de vértice centrado na terra (ao qual chamaremos  $\beta$ ) é muito próximo de  $90^\circ$ .

<sup>1</sup> Disponível em: <http://www.labec.com.br/biodigital/ambientes/praiamares/>. Acesso em 16/12/14.

Aristarco teria medido esse ângulo, encontrando para ele o valor de  $87^\circ$ , ou seja, o ângulo  $\alpha$  seria de  $3^\circ$ . Atualmente, tem-se que o valor correto de  $\alpha$  é menor do que  $3^\circ$ , que por sua vez é próximo de  $0,15^\circ$ , ou seja, o ângulo  $\beta$  é aproximadamente  $89,85^\circ$ .

Figura 54 – Esquema ilustrativo formado pela Terra, Lua e Sol

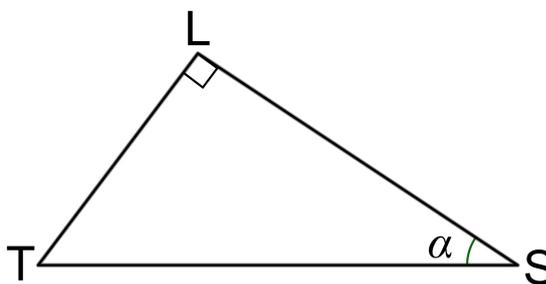


Fonte: Geometria e Trigonometria<sup>2</sup>

Não se sabe como Aristarco teria chegado ao valor de  $\alpha$ . Segundo AVILA (1986), "ao que parece, a diferença que Aristarco teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época".

Com os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  determinados, basta construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar o valor da razão  $\frac{TL}{TS}$ , que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes (Figura 55).

Figura 55 – Triângulo retângulo formado pela Terra, Lua e Sol



Fonte: Autor

Portanto, temos que

<sup>2</sup> Disponível em: [http://www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/geotri/modulo3/problema\\_triggeo.html](http://www.ufrgs.br/espamat/disciplinas/geotri/modulo3/problema_triggeo.html). Acesso em 16/12/14.

$$\begin{aligned}\frac{TL}{TS} &= \operatorname{sen} \alpha \\ &= \operatorname{sen} 0,15^\circ \\ &\approx 0,0026 \\ &\approx \frac{1}{390}\end{aligned}$$

$$TS = 390.TL \quad (3.23)$$

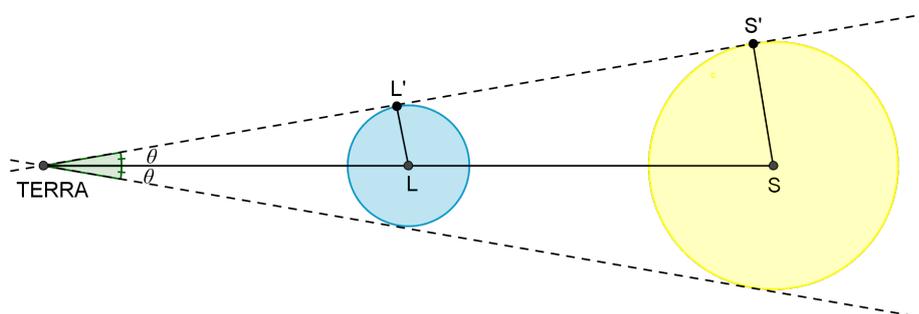
Isto é, a distância da Terra ao Sol é aproximadamente 390 vezes maior que a distância da Terra à Lua. Se usássemos os ângulos encontrados por Aristarco, teríamos  $TS = 19.TL$ , ou seja, um resultado muito longe do valor correto.

**Observação 3.4.1.** Para facilitar a notação, usaremos  $D_{TS}$  (distância da Terra ao Sol),  $D_{TL}$  (distância da Terra à Lua),  $R_S$  (Raio do sol),  $R_L$  (Raio da Lua) e  $R_T$  (Raio da Terra). Dessa forma, já temos, até aqui, que  $D_{TS} = 390D_{TL}$ .

### 3.4.2.2 Relações com os raios da Lua e do Sol

Para continuar nossa construção, analisemos outra observação feita por esse gênio da Grécia Antiga. Pode-se ver em AVILA (1986), que Aristarco também observou que o Sol e a Lua têm o mesmo tamanho angular, isto é, o ângulo  $2\theta$ , sob o qual um observador terrestre ver o Sol, é o mesmo sob o qual ele ver a Lua (Figura 56). Pode-se confirmar essa observação quando ocorre um eclipse total do Sol.

Figura 56 – Ângulo sob o qual um observador terrestre ver o Sol e a Lua



Fonte: Autor

Aristarco estimou o ângulo  $2\theta$  da Figura 56 como sendo  $2^\circ$ , porém, ele é aproximadamente  $0,5^\circ$ , ou seja,  $\theta = 0,25^\circ$ .

Dessa forma, como os triângulos  $TLL'$  e  $TSS'$  são semelhantes (Critério AA), pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{R_S}{D_{TS}} &= \frac{R_L}{D_{TL}} = \operatorname{sen} \theta \\ &= \operatorname{sen} 0,25^\circ \\ &\cong 0,0044 \end{aligned}$$

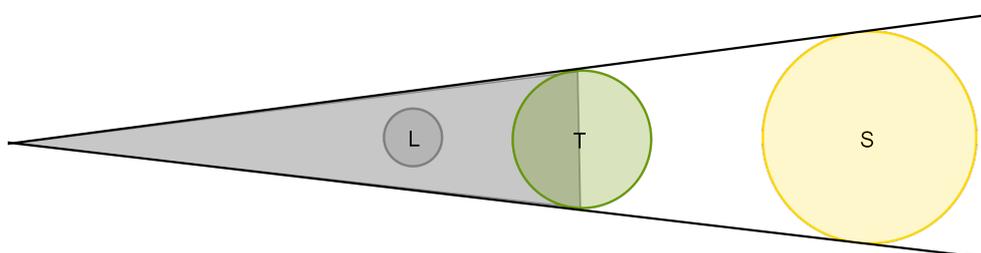
$$R_S = 0,0044D_{TS} \quad (3.24)$$

Para facilitar a notação, será denotado por  $a = 390$  e  $b = 0,0044$ , os valores encontrados em (3.23) e (3.24).

### 3.4.2.3 Relações com o raio da Terra

Agora, para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua ao raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da Terra (Figura 57).

Figura 57 – Cone de sombra da Terra sobre a Lua



Fonte: Autor

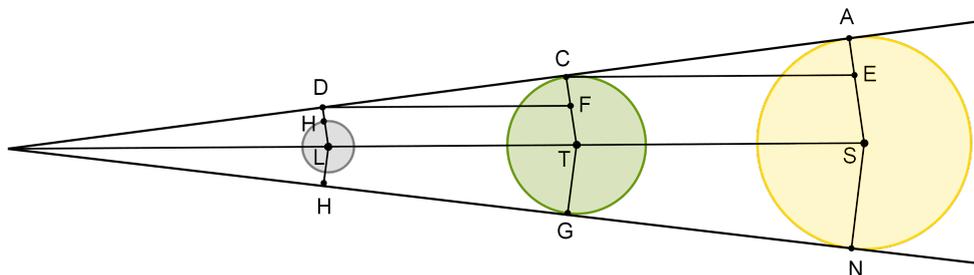
Pelo tempo gasto nessa travessia, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era  $\frac{8}{3}$  do diâmetro da Lua (FILHO; SARAIVA, 2004).

Chamando de  $L$ ,  $T$  e  $S$  os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; temos que  $LH = R_L$ ,  $TC = R_T$  e  $SA = R_S$  são os respectivos raios;  $LD$  é o raio do cone de sombra da altura da Lua (Figura 58). Como já sabemos,  $LD = \frac{8}{3}R_L$ .

Pelo critério AA (teorema 1.4.2) os triângulos  $DFC$  e  $CEA$  são semelhantes. Portanto, temos que

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE} \quad (3.25)$$

Figura 58 – Triângulos formados pelo Cone de sombra da Terra sobre a Lua



Fonte: Autor

Observe que  $CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - \frac{8}{3}R_L$ ;  $DF = D_{TL}$ ;  $AE = AS - SE = R_S - R_T$  e  $CE = D_{TS}$ . Logo, substituindo esses valores em (3.25), temos que

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_{TL}} = \frac{R_S - R_T}{D_{TS}} \quad (3.26)$$

Das equações (3.23) e (3.24) já temos que  $D_{TS} = aD_{TL}$ ;  $R_S = bD_{TS} = abD_{TL}$  e  $R_L = bD_{TL}$ . Assim, substituindo esses valores em (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{R_T - \frac{8}{3}bD_{TL}}{D_{TL}} &= \frac{abD_{TL} - R_T}{aD_{TL}} \\ \frac{R_T}{D_{TL}} - \frac{8}{3}b &= b - \frac{R_T}{aD_{TL}} \\ \frac{R_T}{D_{TL}} + \frac{R_T}{aD_{TL}} &= b + \frac{8}{3}b \\ \frac{aR_T + R_T}{aD_{TL}} &= \frac{11}{3}b \\ \frac{aR_T + R_T}{a} &= \frac{11}{3}bD_{TL} \\ R_T + \frac{R_T}{a} &= \frac{11}{3}bD_{TL} \\ R_T \left( \frac{a+1}{a} \right) &= \frac{11}{3}bD_{TL} \\ D_{TL} &= \frac{3(a+1)}{11ab}R_T \end{aligned} \quad (3.27)$$

como  $D_{TS} = aD_{TL}$ , temos que

$$D_{TS} = \frac{3(a+1)}{11b}R_T \quad (3.28)$$

Dessa forma, substituindo  $a = 390$  e  $b = 0,0044$  nas equações (3.27) e (3.28), obtém-se os valores aproximados

$$D_{TL} = 62R_T \text{ e } D_{TS} = 24235R_T \quad (3.29)$$

Como o valor atual do raio médio da Terra é de 6370 km, temos que

$$D_{TL} = 394940 \text{ km e } D_{TS} = 154376950 \text{ km} \quad (3.30)$$

Isto é, a distância da Terra à Lua é de 394940 km e a distância da Terra ao sol é de 154376950 km. Vale ressaltar, que, os resultados obtidos aqui, é razoável, em relação aos valores atuais 382000 km (distância da Terra à Lua) e 150000000 km (distância da Terra ao Sol), onde pode-se ver em HALLIDAY et al. (2012b, A-356). Observe que, com os valores encontrados nestes cálculos, obtém-se um erro de aproximadamente 3,4% e 2,9%, respectivamente, para as distâncias Terra-Lua e Terra-Sol.

### 3.4.3 A órbita dos planetas em torno do Sol

Nesta subseção, será apresentada outra aplicação da Trigonometria no estudo da Astronomia, isto é, na órbita dos planetas em torno do Sol, onde esta pode ser encontrada em GÓMEZ, FRENSEL e CRISSAFF (2013). Para isso, será usado o conhecimento desenvolvido na subseção (3.1.3), onde se conhece o que é uma cônica e sua equação na forma polar.

Desde os tempos remotos, os movimentos aparentemente aleatórios dos planetas em relação às estrelas intrigam os observadores do céu (HALLIDAY et al., 2012a).

Ao analisar a enorme coleção de dados e observações astronômicas de Thcho Brahe (1546 - 1601), de quem se tornou assistente, Johannes Kepler (1571 - 1630) concluiu que a órbita de Marte é uma elipse tendo o Sol num dos focos (GÓMEZ; FRENSEL; CRISSAFF, 2013). Esta é a primeira lei do movimento planetário ou primeira lei de Kepler (onde no total são três).

Posteriormente, Kepler confirmou que as mesmas propriedades eram válidas para as órbitas dos outros planetas, isto é, em particular para a órbita da Terra.

Isaac Newton, em seu *Principia Mathematica*, de 1687, mostrou as três leis de Kepler a partir de duas leis de sua autoria: a Segunda Lei do Movimento e; a Lei Universal da Gravitação. Para isso, usou o cálculo vetorial e o cálculo diferencial para chegar a conclusão que a equação do movimento de um planeta em torno do Sol tem equação polar

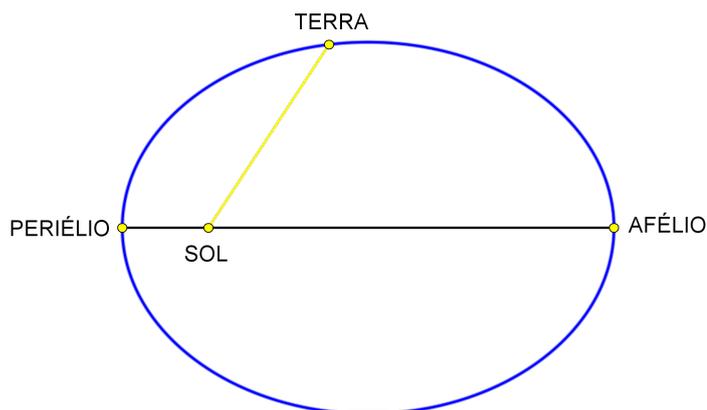
$$\rho = \frac{e h}{1 + e \cos \theta}, \quad (3.31)$$

num sistema de coordenadas polares com o Sol no polo. Dessa forma, como a órbita de um planeta é uma curva limitada, a cônica descrita por um planeta é uma elipse, provando, assim, a primeira lei de Kepler.

As posições de um planeta que estão mais próximas e mais afastadas do Sol são chamadas *periélio* e *afélio* do planeta, respectivamente. Isto é, se  $F_1$  é o foco correspondente ao Sol, a posição que a Terra ocupa quando está no vértice  $A_1$  é a mais próxima do Sol e a posição que ocupa quando está no vértice  $A_2$  é a mais afastada do Sol.

**Exemplo 3.4.1 (A órbita da Terra em torno do Sol).** *Encontre uma equação polar aproximada para a órbita elíptica da Terra ao redor do Sol (em um foco), sabendo que a excentricidade é aproximadamente 0,017 e o comprimento do eixo focal é cerca de  $2,99 \cdot 10^8$  Km. Obtenha também as distâncias da Terra ao Sol no periélio e no afélio (GÓMEZ; FRENSEL; CRISSAFF, 2013).*

Figura 59 – Esquema do exemplo 3.4.1



Fonte: Autor

### Solução:

Por (3.31), observe que para encontrar uma equação polar aproximada da órbita da Terra em torno do Sol, precisamos determinar o valor de  $h$  (distância entre o foco e a diretriz).

Como o eixo focal da elipse é  $2,99 \cdot 10^8$  km, temos que

$$\begin{aligned} 2a &= 2,99 \cdot 10^8 \\ a &= 1,495 \cdot 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

Como  $e = \frac{c}{a}$ , sendo  $e = 0,017$ , segue que  $c = 0,025 \cdot 10^8$  km. Pela observação (3.1.3), a distância entre o centro da elipse e a diretriz correspondente ao foco (Sol) é

$\frac{a}{e}$ . Já a distância entre o foco e o centro da elipse é  $c$ . Como  $h$  é a distância entre o foco e a diretriz, temos que

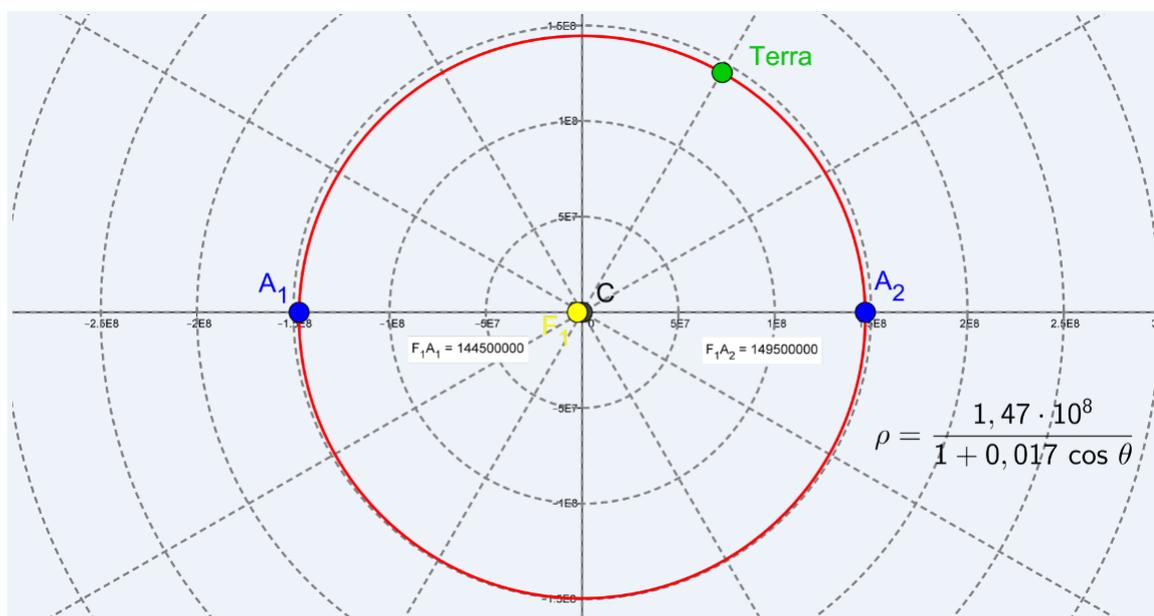
$$\begin{aligned} \frac{a}{e} &= h + c \\ h &= \frac{a}{e} - c \\ h &= \frac{1,495 \cdot 10^8}{0,017} - 0,025 \cdot 10^8 \\ h &= 86,42 \cdot 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

Portanto, a equação polar aproximada da órbita da Terra ao redor do Sol é

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{0,017 \cdot 86,42 \cdot 10^8}{1 + 0,017 \cos \theta} \\ \rho &= \frac{1,47 \cdot 10^8}{1 + 0,017 \cos \theta} \end{aligned}$$

Observe que, a distância da Terra ao sol no periélio é  $a - c$ , isto é,  $1,47 \cdot 10^8$  km e no afélio é  $a + c$ , que equivale a  $1,52 \cdot 10^8$  km.

Figura 60 – Esboço do gráfico da órbita da Terra tendo o Sol como foco



Fonte: Autor

A equação polar da órbita aproximada da terra está esboçada na Figura 60, no qual foi gerada por meio do software Geogebra. Nela pode-se observar o quanto essa órbita elíptica se aproxima de uma circunferência, ou seja, o foco  $F_1$  (Sol) está próximo do centro  $C$  da elipse. Isso se deve à pequena excentricidade da Terra. Pode-se ver em HALLIDAY et al. (2012a), que as excentricidades das órbitas dos planetas são

tão pequenas que as órbitas parecem circulares se forem desenhadas em escala. Na Figura 60 também estão expressas as distâncias aproximadas da Terra ao Sol no periélio e no afélio.

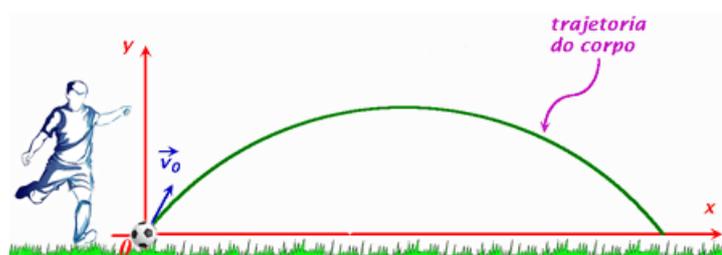
### 3.5 FÍSICA

A aplicação da Matemática na Física sempre foi muito rica, e particularmente, a trigonometria é muito utilizada no estudo de muitos fenômenos dessa área. Assim, nesta seção, será descrito a aplicação da trigonometria no estudo do movimento balístico, no trabalho realizado por uma força constante, em um campo magnético e na equação de uma onda harmônica.

#### 3.5.1 Movimento balístico

Será apresentado a seguir um caso especial de movimento bidimensional. Isto é, uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  e com uma aceleração constante, dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetado ou lançado) e o movimento é chamado de **movimento balístico**.

Figura 61 – Movimento balístico de uma bola de futebol.



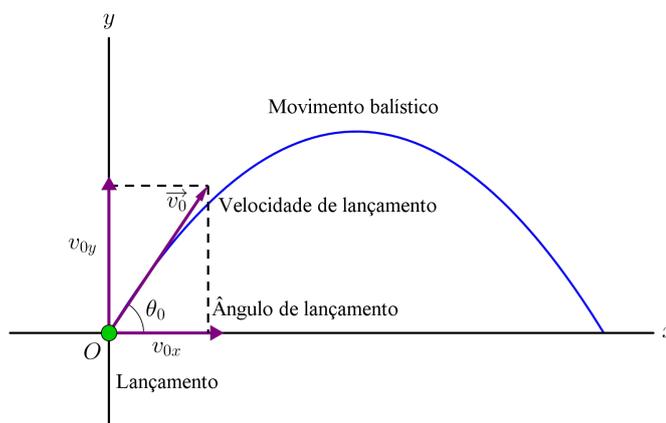
Fonte: Para todos e sobre tudo<sup>3</sup>, adaptado.

Muitos esportes como por exemplo, o futebol, envolvem o movimento balístico de uma bola. Muitos jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esse movimento para obter o máximo de vantagem (HALLIDAY et al., 2013).

Segundo HALLIDAY et al. (2013), durante o movimento bidimensional, a aceleração  $a$  do projétil é constante e está sempre dirigido verticalmente para baixo, isto é, o projétil não possui aceleração horizontal. Neste caso, substituí-se a aceleração  $a$  por  $-g$ , onde  $g$  é a aceleração em queda livre (perto da superfície da Terra  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

<sup>3</sup> Disponível em: <http://www.paratodosesobretudo.com.br/2011/02/movimentos-balisticos.html>. Acesso em: 09/01/15.

Figura 62 – Movimento balístico.



Fonte: Autor

Pela Figura 62, sabemos que  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ . Como não existe aceleração na direção horizontal, em qualquer momento  $t$ , o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial,  $x - x_0$ , é dado por

$$x - x_0 = tv_0 \cos \theta_0 \quad (3.32)$$

Já o movimento vertical do projétil, segundo HALLIDAY et al. (2013, p. 70), é dado por

$$y - y_0 = tv_0 \sen \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.33)$$

**Definição 3.5.1.** O **alcance horizontal**  $R$  de um projétil é a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar à altura inicial (altura de lançamento) e é dado por

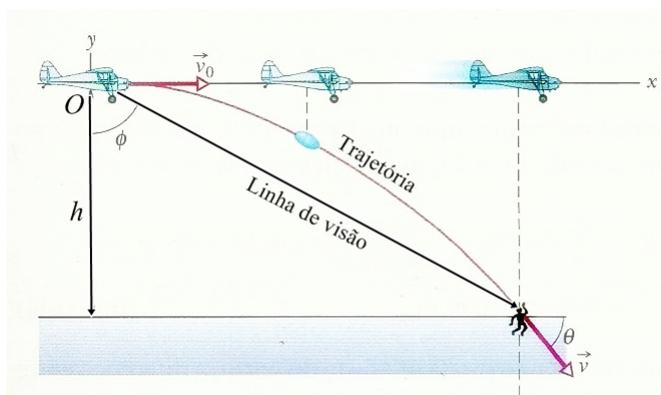
$$R = \frac{v_0^2}{g} \sen 2\theta_0. \quad (3.34)$$

**Observação 3.5.1.** A equação (3.34) não fornece a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento. Observe que  $R$  atinge o valor máximo para  $\sen 2\theta_0 = 1$ , que corresponde a  $2\theta_0 = 90^\circ$  ou  $\theta_0 = 45^\circ$ .

**Exemplo 3.5.1.** Um avião de salvamento voa a 55 m/s, a uma altura constante de 500 m, rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair um bote salva vidas. Qual deve ser o ângulo  $\phi$  da linha de visão do piloto para vítima no instante em que o piloto deixa cair o bote salva vidas? (HALLIDAY et al. (2013), adaptado).

**Solução:**

Figura 63 – Um avião lança um bote salva vidas enquanto se desloca.



Fonte: HALLIDAY et al. (2013)

Observe que depois de liberado do avião, o bote salva vidas é um projétil. Assim, analisaremos os movimentos horizontal e vertical separadamente, isto é, não é preciso levar em conta a curvatura da trajetória. Pela Figura 63, temos que

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{x}{h} \quad (3.35)$$

onde  $x$  é a coordenada horizontal da vítima (e do bote salva vidas ao chegar à água) e  $h = 500$  m. Pode-se calcular o valor de  $x$  pela equação (3.32), pois sabemos que  $x_0 = 0$ , devido à origem ser colocada no ponto de lançamento. Como o bote é deixado cair e não arremessado do avião, a velocidade inicial  $\vec{v}_0$  é igual à velocidade do avião. Isto é, a velocidade inicial tem módulo  $v_0 = 55$  m/s e ângulo  $\theta_0 = 0^\circ$ , medido em relação ao eixo  $x$ .

No entanto, não se conhece o valor de  $t$ , no qual o bote leva para percorrer a distância do avião até a vítima. Neste caso, consideraremos o movimento vertical descrito pela equação (3.33). Assim, segue que

$$\begin{aligned} y - y_0 &= tv_0 \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2 \\ -500 &= 55 \cdot t \cdot \operatorname{sen} 0^\circ - \frac{1}{2} \cdot 9,8t^2 \\ 4,9t^2 &= 500 \\ t &= 10,1 \end{aligned}$$

onde o termo negativo em  $y - y_0 = -500$  indica que o bote se move para baixo. Agora, como sabemos que  $t = 10,1$ , basta substituir os dados na equação (3.32), onde obtemos

$$\begin{aligned} x - x_0 &= tv_0 \cos \theta_0 \\ x - 0 &= 10,1 \cdot 55 \cdot \cos 0^\circ \\ x &= 555,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Assim, substituindo os dados obtidos na equação (3.35), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \phi &= \frac{x}{h} \\ \operatorname{tg} \phi &= \frac{555,5}{500} \\ \phi &= \operatorname{arctg} 1,111 \\ \phi &= 48^\circ \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo da linha de visão do piloto para vítima no instante em que deixa cair o bote salva vidas deve ser de  $48^\circ$ .

### 3.5.2 Trabalho realizado por uma força constante

**Definição 3.5.2.** *Trabalho*  $W$  é a energia transferida para um objeto ou de um objeto através de uma força que age sobre o objeto. Quando a energia é transferida para o objeto, o trabalho é positivo; quando a energia é transferida do objeto, o trabalho é negativo.

O trabalho  $W$  realizado por uma força  $\vec{F}$  constante, sobre um corpo em movimento retilíneo no sentido dessa força, é definido como o produto do módulo da força  $F$  pelo módulo do deslocamento  $d$  da partícula. Isto é,

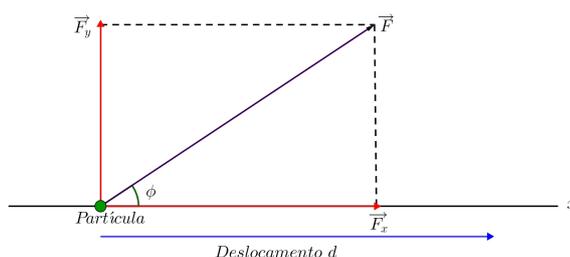
$$W = Fd, \quad (3.36)$$

onde a unidade de trabalho é o joule (J) e o da força é o Newton (N), sendo  $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}$ .

Se uma força constante  $\vec{F}$ , inclinada de um ângulo  $\phi$  com o eixo  $x$ , atua sobre uma partícula cujo deslocamento naquele instante é  $d$  (Figura 64), então o trabalho realizado por essa força durante o deslocamento é

$$W = Fd \cos \phi \quad (3.37)$$

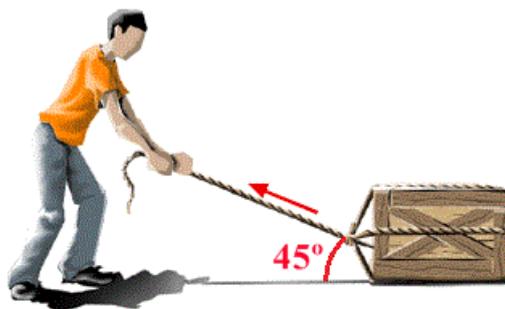
Figura 64 – Uma força constante  $F$ , que faz um ângulo  $\phi$  com o deslocamento  $d$ .



Fonte: Autor

**Exemplo 3.5.2.** Para puxar um caixote de 50 kg num piso sem atrito, um operário aplica uma força de 210 N, dirigida  $45^\circ$  acima da horizontal. Se o caixote se desloca de 3,0 m, qual o trabalho realizado pelo operário sobre o caixote?

Figura 65 – Esquema do exemplo (3.5.2)



Fonte: Fundamental<sup>4</sup>, adaptado.

**Solução:**

Sendo o caixote um corpo, tem-se que, como a força exercida pelo operário é constante, basta substituir os dados na equação (3.37). Dessa forma, obtém-se

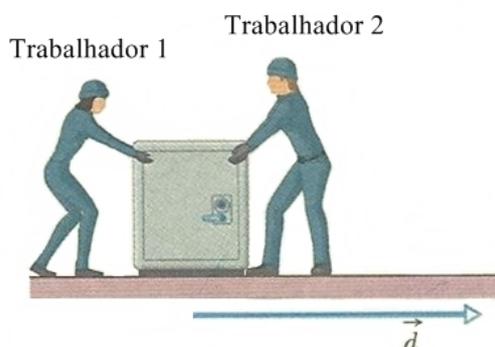
$$\begin{aligned} W &= 210 \cdot 3,0 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 630 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 445,5 \text{ J} \end{aligned}$$

Portanto, o trabalho realizado pelo operário é de 445,5 J.

**Exemplo 3.5.3.** A Figura 66 mostra dois trabalhadores de uma empresa de mudanças arrastando um cofre de 225 kg a partir do repouso e assim produzindo um deslocamento  $\vec{d}$  de módulo 8,50 m, em direção a um caminhão. O empurrão  $\vec{F}_1$  do trabalhador 1 tem módulo de 12 N e faz um ângulo de  $30^\circ$  para baixo com a horizontal; o puxão  $\vec{F}_2$  do trabalhador 2 tem módulo de 10 N e faz um ângulo de  $45^\circ$  para cima com a horizontal. Os módulos e orientações das forças não variam quando o cofre se desloca e o atrito entre o cofre e o piso é desprezível. Qual é o trabalho total realizado pelas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sobre o cofre durante o deslocamento  $\vec{d}$ ? (HALLIDAY et al. (2013, p. 150), adaptado).

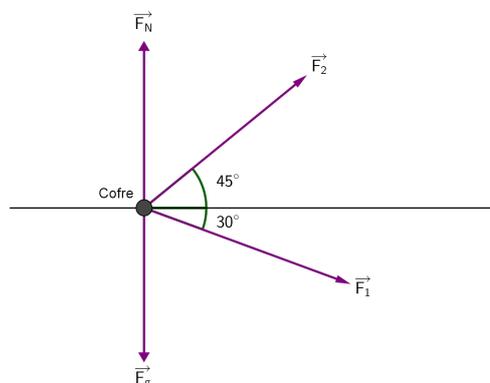
<sup>4</sup> Disponível em: [http://cepa.if.usp.br/e-fisica/imagens/mecanica/basico/cap14/imag14\\_2.gif](http://cepa.if.usp.br/e-fisica/imagens/mecanica/basico/cap14/imag14_2.gif). Acesso em: 08/01/15.

Figura 66 – Dois trabalhadores arrastando um cofre



Fonte: HALLIDAY et al. (2013), adaptado.

Figura 67 – Esquema do exemplo (3.5.3)



Fonte: HALLIDAY et al. (2013), adaptado.

**Solução:**

O trabalho total  $W$  realizado sobre o cofre é a soma dos trabalhos realizados separadamente pelas duas forças. Como o cofre pode ser tratado como uma partícula e as forças são constantes, tanto em módulo como em orientação, basta utilizar os dados na equação (3.37) para calcular esses trabalhos.

O trabalho realizado pela força  $\vec{F}_1$  é

$$\begin{aligned} W_1 &= F_1 d \cos \phi_1 \\ &= 12 \cdot 8,5 \cdot \cos 30^\circ \\ &= 102 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 88,33 \text{ J} \end{aligned}$$

e o trabalho realizado pela força  $\vec{F}_2$  é

$$\begin{aligned} W_2 &= F_2 d \cos \phi_2 \\ &= 10 \cdot 8,5 \cdot \cos 45^\circ \\ &= 85 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 60,10 \text{ J} \end{aligned}$$

Assim, o trabalho total  $W$  realizado pelas forças  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  sobre o cofre é

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 \\ &= 88,33 + 60,10 \\ &= 148,43 \text{ J} \end{aligned}$$

Portanto, durante o deslocamento de 8,5 m, o trabalho total realizado pelos trabalhadores é de 148,43 J.

### 3.5.3 Campo magnético

Um dos principais objetivos da Física é estudar os campos elétricos. Provavelmente a maioria das pessoas que possuem geladeira já prendeu um bilhete na porta da geladeira usando um ímã; o ímã interage com a porta da geladeira através de um campo magnético (HALLIDAY et al., 2012b). Nesta subseção será apresentado o uso da trigonometria nesse estudo. Para isto, defini-se antes um campo magnético.

**Definição 3.5.3.** Um campo magnético  $\vec{B}$  é uma grandeza vetorial cuja direção coincide com aquela para qual a força  $\vec{F}_B$  que age sobre uma partícula é zero. Depois de medir  $\vec{F}_B$  para velocidade da partícula  $v$  perpendicular a  $\vec{B}$ , define-se o módulo de  $\vec{B}$  em termos do módulo da força:

$$B = \frac{F_B}{|q|v \operatorname{sen} \phi}, \quad (3.38)$$

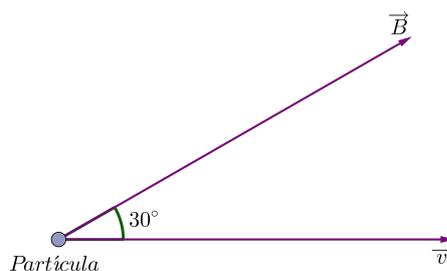
onde  $q$  é a carga da partícula e  $\phi$  é o ângulo entre as direções da velocidade  $v$  e do campo magnético  $\vec{B}$ .

**Observação 3.5.2.** A unidade de  $\vec{B}$  no sistema internacional **SI** é o newton por coulomb-metro por segundo. Por conveniência, essa unidade é chamada de **tesla T**, onde

$$1 \text{ tesla} = 1 \text{ T} = \frac{\text{newton}}{(\text{coulomb})(\text{metro/segundo})}$$

**Exemplo 3.5.4.** No interior de uma câmara de laboratório existe um campo magnético  $\vec{B}$  de módulo  $10^2 \text{ T}$ . Uma partícula com carga  $0,0003 \text{ C}$  (coulomb) é lançado na câmara movendo-se a uma velocidade de  $3,2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ , em uma direção que forma um ângulo de  $30^\circ$  com a direção do campo magnético (Figura 68). Qual a intensidade da força magnética que age sobre a partícula? (HALLIDAY et al. (2012b, p. 193), adaptado).

Figura 68 – Esquema do exemplo (3.5.4)



Fonte: Autor

**Solução:**

Para determinar a intensidade da força magnética  $F_B$  pode-se usar a equação (3.38), onde temos

$$F_B = |q|vB \operatorname{sen} \phi \quad (3.39)$$

Como temos a carga  $q = 0,0003 \text{ C} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ , o módulo do campo magnético  $B = 10^2 \text{ T}$ , a velocidade  $v = 3,2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$  e o ângulo entre a direção da velocidade e o campo magnético é  $30^\circ$ , basta substituir esses dados na equação (3.39), onde segue que

$$\begin{aligned} F_B &= |q|vB \operatorname{sen} \phi \\ &= 3 \cdot 10^{-4} \cdot 3,2 \cdot 10^7 \cdot 10^2 \operatorname{sen} 30^\circ \\ &= 9,6 \cdot 10^5 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4,8 \cdot 10^5 \text{ N} \end{aligned}$$

Portanto, a intensidade da força magnética que age sobre a partícula é de  $4,8 \cdot 10^5$  newtons.

### 3.5.4 Equação de onda harmônica simples

As ondas são um dos principais campos da Física. Para ter uma ideia disso, basta considerar a indústria musical. Toda música que se escuta, de um samba a um concerto sinfônico, envolve a produção de ondas pelos artistas e a detecção dessas ondas pela plateia. Da produção à detecção, a informação contida nas ondas pode ser transmitida por diversos meios. A importância econômica do controle de ondas musicais é enorme e a recompensa para os engenheiros que desenvolvem novas técnicas pode ser muito generosa (HALLIDAY et al., 2012a).

Dessa forma, será mostrado aqui, como a Trigonometria é utilizada para descrever uma onda harmônica simples. Antes disso, será definido alguns conceitos.

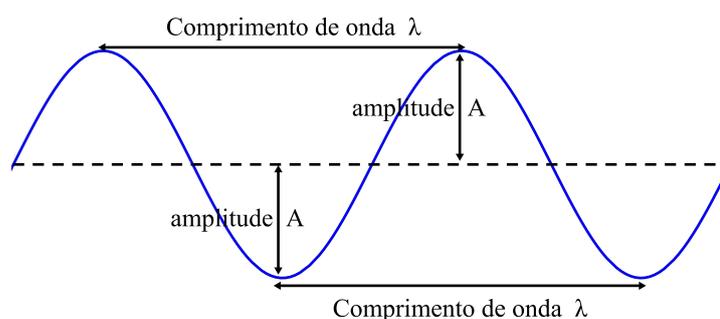
**Definição 3.5.4.** *Onda é uma perturbação ou distúrbio transmitido através do vácuo ou de um meio gasoso, líquido ou sólido.*

Existe uma variedade muito grande de ondas, por exemplo: as ondas do mar; as ondas numa corda; numa mola; as ondas sonoras; as ondas eletromagnéticas etc. Essas ondas podem diferir em muitos aspectos, mas todas podem transmitir energia de um ponto a outro; algumas através de grandes distâncias sem necessariamente haver transporte de matéria. Cada tipo de onda pode ser caracterizado pela oscilação de uma ou mais variáveis físicas que se propagam através do espaço (OKUNO; CALDAS; CHOW, 1982).

**Definição 3.5.5 (Amplitude, Período, Frequência e Comprimento de onda).**

- (i) A **amplitude**  $A$  de uma onda é a metade da distância entre os valores máximos e mínimos;
- (ii) O **período**  $T$  é o menor tempo necessário para que a onda execute um ciclo completo;
- (iii) A **frequência**  $f$  é o número de oscilações por unidade de tempo. A unidade de frequência é o hertz (Hz) e está relacionada com o período por  $T = \frac{1}{f}$ ;
- (iv) o **comprimento de onda**  $\lambda$  é distância entre dois máximos consecutivos, isto é, a distância mínima em que a forma da onda se repete.

Figura 69 – Comprimento e amplitude de uma onda senoidal



Fonte: Autor

Mas onde está o uso da trigonometria no estudo das ondas? Por ser um fenômeno de natureza periódica, as ondas podem ser descritas matematicamente pela função seno ou cosseno, e portanto esse tipo de onda é chamado de *onda senoidal*.

Será mostrado agora, uma importante propriedade sobre a representação de funções senoidais, envolvendo amplitude e período, no qual usa-se fortemente a Trigonometria.

**Propriedade 3.5.1.** Para descrever amplitudes e períodos arbitrários de funções senoidais, são usadas funções da forma:

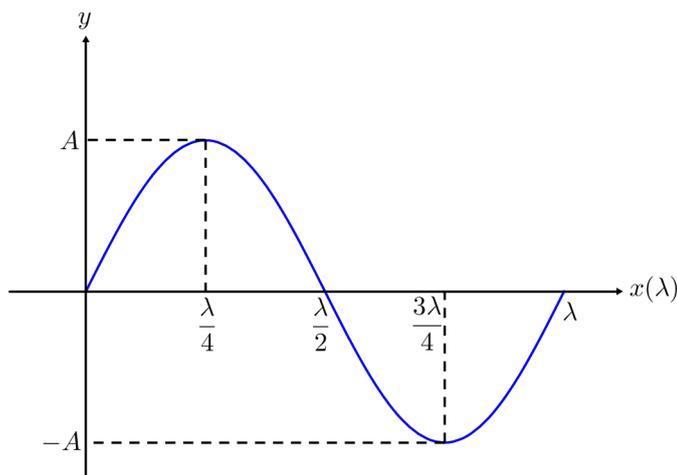
$$f(t) = A \operatorname{sen}(Bt) \text{ e } g(t) = A \operatorname{cos}(Bt) \quad (3.40)$$

onde  $A$  é a amplitude e  $B = \frac{2\pi}{T}$  é a frequência angular, sendo  $T$  o período da função (HUGHES-HALLETT, 2011).

**Observação 3.5.3.** Para representar diferenças de fase arbitrárias, desloca-se horizontalmente um gráfico com amplitude e o período corretos substituindo  $t$  por  $t - h$  (deslocamento para direita) ou  $t + h$  (deslocamento para esquerda), onde  $h > 0$ .

Considere agora, num instante  $t = 0$ , um comprimento de onda  $\lambda$  de uma onda senoidal de amplitude  $A$  (Figura 70).

Figura 70 – Comprimento de uma onda senoidal



Fonte: Autor.

Como a função faz um ciclo completo entre  $x(\lambda) = 0$  e  $x(\lambda) = \lambda$ , temos que neste caso, o período  $T$  é igual a  $\lambda$ . Assim, de (3.5.1), temos que  $B = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Logo, o deslocamento vertical  $y$  de uma onda senoidal em função da distância  $x(\lambda)$ , pode ser descrito por

$$y = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda} x \right) \quad (3.41)$$

**Exemplo 3.5.5.** Uma onda senoidal tem amplitude  $A = 1$  cm e comprimento de onda  $\lambda = 30$  cm. Qual é seu deslocamento vertical em  $x = 2,5$  cm?

**Solução:**

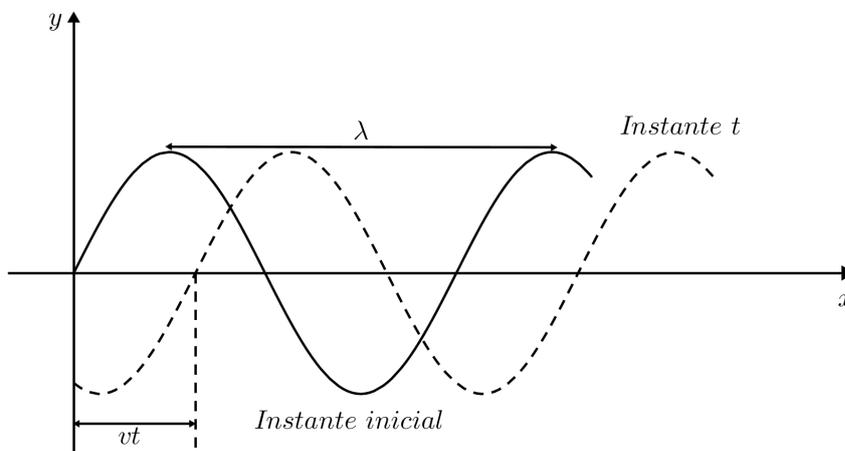
Substituindo os valores dados, na equação (3.41), temos

$$\begin{aligned} y &= 1 \text{ cm} \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{30 \text{ cm}} 2,5 \text{ cm} \right) \\ &= 1 \text{ cm} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 1 \text{ cm} \cdot 0,5 \\ &= 0,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Portanto, o deslocamento vertical da onda senoidal em  $x = 2,5$  cm é de 0,5 cm.

Se , com o decorrer do tempo, essa onda se propagar para a direita com velocidade  $v$ , após um tempo  $t$ , a onda terá percorrido uma distância  $vt$  (Figura 71).

Figura 71 – Onda senoidal nos instantes iniciais e  $t$



Fonte: OKUNO, CALDAS e CHOW (1982), adaptado.

Portanto, a equação de onda no instante  $t$  será

$$y = A \operatorname{sen} \left( \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right) \quad (3.42)$$

Sabe-se que, o período  $T$  de uma onda, corresponde ao tempo necessário para que a onda percorra uma distância igual a um comprimento de onda  $\lambda$ , e também pode ser dado por  $T = \frac{\lambda}{v}$ . Logo, temos que  $v = \frac{\lambda}{T}$ . Substituindo esse valor em (3.42), obtemos

$$y = A \operatorname{sen} \left( 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right) \quad (3.43)$$

Define-se *número de onda*  $k$  como o número de comprimento de onda  $\lambda$  na distância  $2\pi$ , isto é,  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , onde temos  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ .

Substituindo  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  e  $T = \frac{2\pi}{B}$  na equação (3.43), obtém-se uma outra forma da equação de uma onda senoidal que progride para direita, dado por

$$y = A \operatorname{sen} (kx - Bt) \quad (3.44)$$

Obviamente a equação de uma onda senoidal que se desloca para esquerda é

$$y = A \operatorname{sen} (kx + Bt) \quad (3.45)$$

**Exemplo 3.5.6.** Uma onda que se propaga em uma corda é descrita pela equação  $y = 0,00327 \text{ sen } (72,1x - 2,72t)$ , onde as constantes numéricas estão em unidades do Sistema Internacional (0,00327 m; 72,1 rad/s e 2,72 rad/s). Qual é o deslocamento  $y$  dessa onda em  $x = 0,225$  m e  $t = 18,9$  s (HALLIDAY et al., 2012a, p. 123).

**Solução:**

Substituindo os valores dados na equação, temos:

$$\begin{aligned}y &= 0,00327 \cdot \text{sen } (72,1 \cdot 0,225 - 2,72) \\&= 0,00327 \cdot \text{sen } (-35,1855) \\&= 0,00327 \cdot 0,588 \\&= 0,00192\end{aligned}$$

Assim, o deslocamento é de 0,00192 metros.

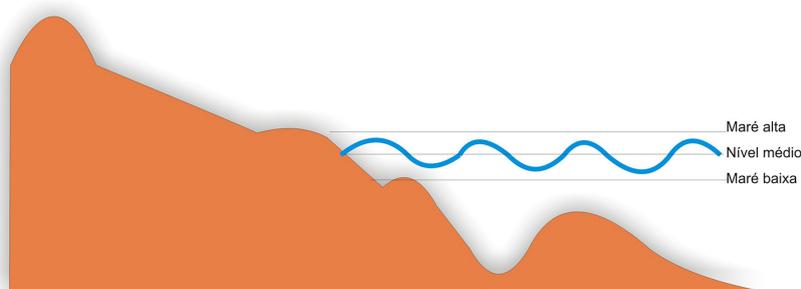
## 3.6 GEOCIÊNCIAS

Nesta seção, será apresentado uma importante aplicação da trigonometria na resolução de problemas relacionada às marés. Neste estudo, será mostrado um exemplo real adaptado, isto é, modelaremos o nível aproximado da maré no Porto de Santana (Estado do Amapá) em certo dia, por meio de uma função trigonométrica.

### 3.6.1 Nível das marés

O homem desde a mais remota antiguidade, tem observado a subida e descida das águas nas costas dos continentes (LOPES, 1996). O conhecimento sobre as marés é essencial para muitas pessoas, que têm suas profissões ou formas de lazer ligadas diretamente ao período correspondente, no qual ocorrem os fenômenos das *marés baixas* e *marés altas*.

Figura 72 – Ilustração: maré alta, nível médio e maré baixa



Fonte: Maré Meteorológica<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Disponível em: [www.praia.log.furg.br/MareMeteorologica/MareMeteorologica.html](http://www.praia.log.furg.br/MareMeteorologica/MareMeteorologica.html). Acesso em: 20/12/14.

As marés refletem as ações combinadas de atração gravitacional entre a Terra e a Lua e, complementarmente, o Sol. As energias cinéticas da Terra e da Lua também participam do processo de formação das marés movimentando-a pelos oceanos como consequência da rotação da Terra em torno do seu eixo e do movimento orbital da Lua em torno da Terra (BARROSO, S.D.).

As marés são fenômenos de natureza periódica e segundo HUGHES-HALLETT (2011, p. 27), o intervalo entre marés altas sucessivas é, em média, em torno de 12 horas e 24 minutos. Dessa forma, nesta seção, será apresentado uma aplicação da Trigonometria na modelagem de problemas relacionados esse fenômeno.

**Exemplo 3.6.1.** *Em 3 de dezembro de 2014, a maré alta no Porto de Santana (Estado do Amapá) era à 0 h e 56 min. O nível de água na maré alta era de 3,1 metros; mais tarde, na maré baixa, era de 0,3 metros. Supondo que a próxima maré alta é exatamente às 13 horas e 20 minutos e que a altura da água é dada por uma curva seno ou cosseno, encontre uma fórmula para o nível da água no Porto de Santana em função do tempo (HUGHES-HALLETT, 2011, p. 27, adaptado).*

### Solução:

Seja  $y$  o nível da água em metros e seja  $t$  o tempo medido em horas a partir da meia noite (0 hora). Como a amplitude  $A$ , de funções periódicas (quando existem), é a metade da distância dos valores de máximo e mínimo, temos que,

$$\begin{aligned} A &= \frac{3,1 - 0,3}{2} \\ &= \frac{2,8}{2} \\ &= 1,4 \end{aligned}$$

ou seja, a amplitude dessas oscilações é de 1,4 metro. Já o período das oscilações é 12,4, pois o tempo que a maré alta leva para ocorrer novamente, depois de 0 h e 56 min, é de 12 horas e 24 minutos, que por sua vez é igual 12,4 horas. Logo, pela Propriedade (3.5.1), temos que

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{B} \\ 12,4 &= \frac{2\pi}{B} \\ 12,4B &= 2\pi \\ B &= \frac{2\pi}{12,4} \\ B &= \frac{2\pi}{62} \\ &= \frac{\pi}{31} \end{aligned}$$

$$B = \frac{5\pi}{31}$$

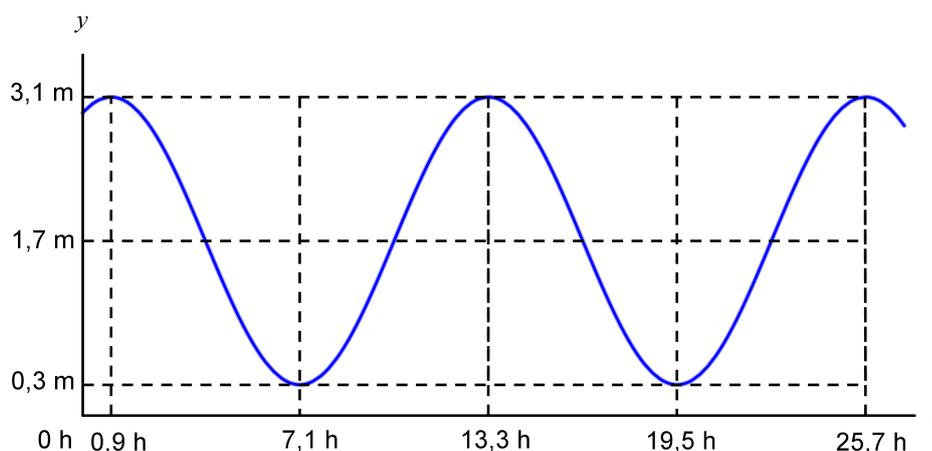
Observe que as oscilações são representadas melhor por uma função cosseno, pois, se a maré alta fosse exatamente à meia noite, teríamos para  $t = 0$ , o nível mais alto da água. Como a água está em seu nível mais alto à 0 h e 56 min, ou seja,  $\frac{56}{60} = \frac{14}{15} \cong 0,93$  horas depois da meia noite, basta substituir  $t$  por  $\left(t - \frac{14}{15}\right)$ . Dessa forma, de (3.40), já temos  $\frac{7}{5} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{31}\left(t - \frac{14}{15}\right)\right)$ , porém ainda falta uma observação para conclusão.

Observe que o nível médio de altura da água é  $\frac{3,1 + 0,3}{2} = \frac{3,4}{2} = \frac{17}{10}$ , isto é, 1,7 metros. Assim, deve-se deslocar a função cosseno para cima, somando  $\frac{17}{10}$ . Portanto, a função que descreve (aproximadamente) a maré no Porto de Santana no Amapá em 3 de dezembro de 2014 é

$$y = \frac{17}{10} + \frac{7}{5} \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{31}\left(t - \frac{14}{15}\right)\right) \quad (3.46)$$

Veja um esboço do gráfico da função (3.46) na Figura 73.

Figura 73 – Gráfico da função que aproxima a maré no Porto de Santana no dia 3 de dezembro de 2014



Fonte: Autor

### 3.7 CIÊNCIAS MÉDICAS

A trigonometria é largamente utilizada na modelagem de problemas relacionados às Ciências Médicas. Nesta seção, será apresentado o uso da trigonometria nas mais diversas subáreas dessas ciências. Primeiramente será visto que o nível de noradrenalina na urina de pessoas normais pode ser modelada por uma função trigonométrica. Posteriormente apresentaremos a aplicação da trigonometria no estudo

do ritmo oscilatório dos braços de um corredor e ademais, no balanço pélvico do andar feminino. Por fim, será feita uma breve abordagem do uso da trigonometria no cálculo do aumento angular do olho humano proporcionado por uma lente de aumento.

### 3.7.1 Excreção de noradrenalina na urina de pessoas normais

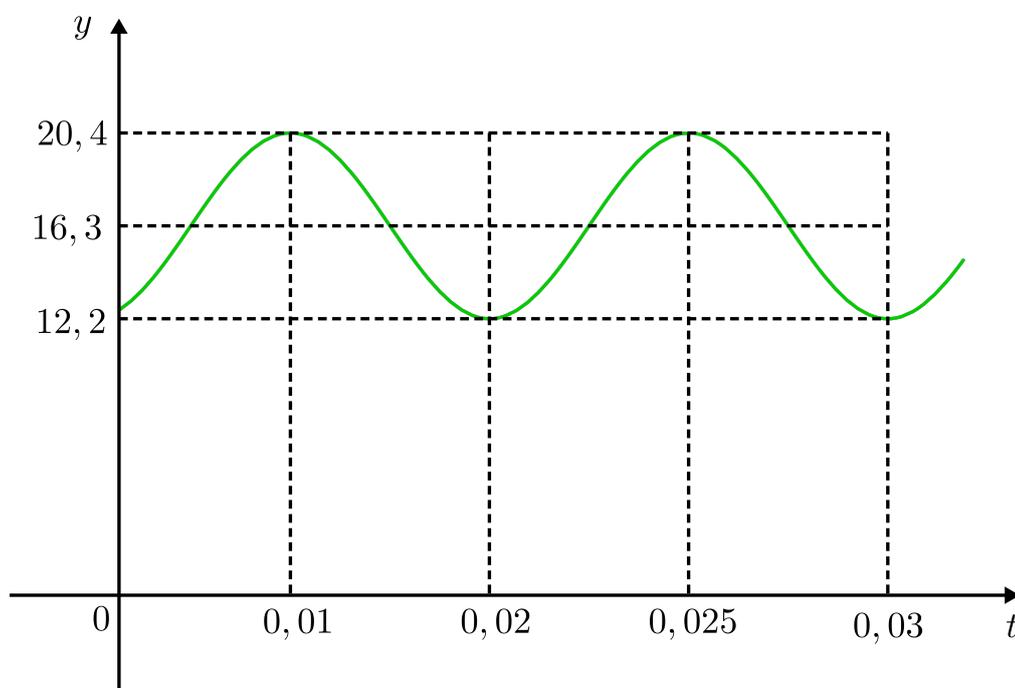
Descovitch et al. (1974), citado por AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988), estudaram o ritmo circanual da excreção de noradrenalina encontrada na urina de pessoas normais.

A noradrenalina é encontrada, principalmente, ao nível das sinapses dos nervos do sistema simpático, atuando como neurotransmissor (AGUIAR; XAVIER; RODRIGUES, 1988). Os níveis  $y$  de noradrenalina observados na urina de pessoas normais podem representar-se, aproximadamente, pela equação

$$y = f(t) = 16,3 + 4,1\cos(360t - 153,5), \quad (3.47)$$

onde  $y$  é dado por uma unidade adequada,  $t$  é o tempo transcorrido em anos e as medidas angulares  $\alpha = 360t - 153,5$  supõem-se ser expressas em graus circulares.

Figura 74 – Gráfico da função que descreve o nível de noradrenalina na urina de pessoas normais



Fonte: Autor

Determinemos o período  $T$  e a frequência  $f = \frac{1}{T}$  da função (3.47). De fato, como queremos calcular o período  $T$ , pela definição (2.3.4), devemos obter o menor

número real positivo, tal que  $f(t) = f(t + T)$ , para todo  $t$  real. Dessa forma, temos:

$$16,3 + 4,1\cos(360t - 153,5) = 16,3 + 4,1\cos(360(t + T) - 153,5)$$

$$\cos(360t - 153,5) = \cos(360(t + T) - 153,5)$$

$$(360t - 153,5) + 360k = 360(t + T) - 153,5 \text{, com } k \text{ inteiro.}$$

Sendo assim,

$$360t - 153,5 + 360k = 360t + 360T - 153,5$$

$$360k = 360T$$

$$T = k$$

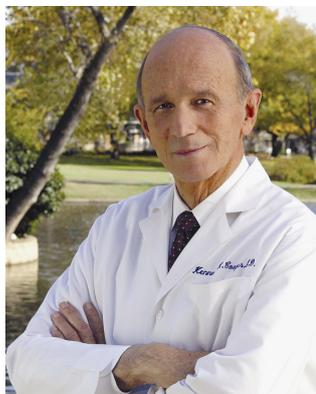
Observe que, o menor valor positivo de  $T$  corresponde, exatamente, a  $T = 1$  ano, já que  $k$  é inteiro. Esse resultado, por sua vez, dá a frequência  $\lambda = 1$  ciclo/ano.

### 3.7.2 Rítmo oscilatório dos braços

Em 1968, Kenneth Cooper publicou o livro "*Aerobics*", (lançado como "Capacidade Aeróbica" no Brasil, em 1970). A obra introduziu um novo conceito na preparação física nos Estados Unidos e depois no mundo (MIRÁS, 2010).

Segundo MIRÁS (2010), durante 13 anos, além de trabalhar como cirurgião, o doutor Cooper também dirigia o Aerospace Medical Laboratory, em San Antonio. E foi lá que desenvolveu um teste que utilizava corridas de 1,5 milha (2,4 quilômetros) a serem cobertas em 12 minutos – havia um sistema de pontuação de acordo com as distâncias conseguidas. Estudou o impacto dos exercícios e também o quanto o corpo de cada indivíduo precisa fazer para ter saúde.

Figura 75 – Kenneth Cooper



Fonte: Expsychlab<sup>6</sup>

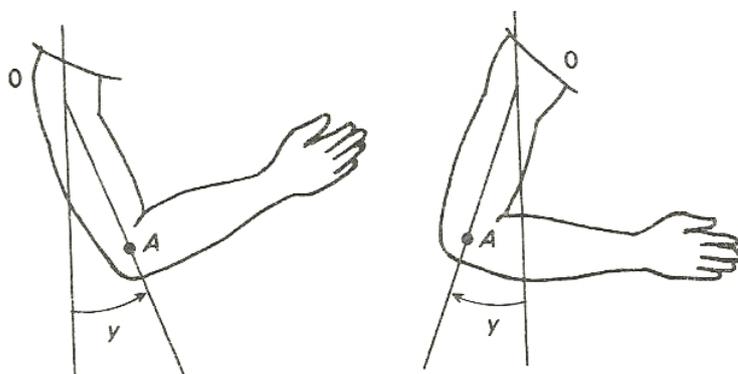
<sup>6</sup> Disponível em: <http://expsychlab.com/2012/01/06/dr-kenneth-cooper-on-exercise-and-aging-3/>. Acesso em: 07/01/15.

De acordo com AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988), um praticante do método de corridas de Cooper balança cada um dos braços ritmicamente, enquanto corre, seguindo a equação:

$$f(t) = \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \left( t - \frac{3}{4} \right) \right), \quad (3.48)$$

onde  $f(t)$  é o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical (Figura 76) e  $t$  é o tempo medido em segundos.

Figura 76 – Duas posições do braço de um corredor em seu movimento cíclico



Fonte: AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988).

O braço oscila para frente e para trás em torno do ponto O. Sua posição é estimada através do ângulo  $f(t)$ , compreendida entre o braço propriamente dito e o eixo vertical. Vamos determinar o período, a frequência e a amplitude da oscilação e esboçaremos o gráfico da função (3.48).

De fato, pela definição (2.3.4), deve-se obter o menor número real positivo  $T$ , tal que  $f(t) = f(t + T)$ , para todo  $t$  real. Dessa forma, temos que:

$$\frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \left( t - \frac{3}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \left( (t + T) - \frac{3}{4} \right) \right)$$

$$\frac{8\pi}{3} \left( t - \frac{3}{4} \right) + 2\pi k = \frac{8\pi}{3} \left( (t + T) - \frac{3}{4} \right)$$

$$\frac{8\pi t}{3} + \frac{8\pi T}{3} - \frac{8\pi}{4} = \frac{8\pi t}{3} - \frac{8\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\frac{8\pi T}{3} = 2\pi k$$

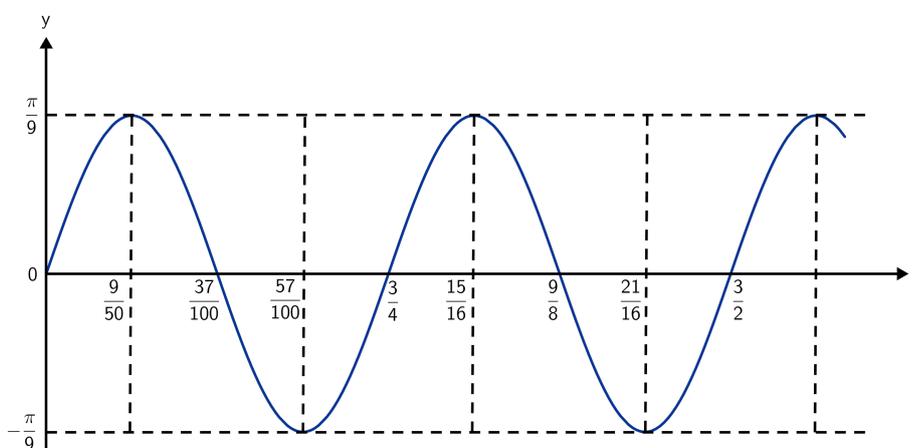
$$8\pi T = 6\pi k$$

$$T = \frac{6\pi}{8\pi} k$$

$$T = \frac{3}{4}k$$

Como  $k = 1$  é o menor inteiro positivo, segue que o período é dado por  $T = \frac{3}{4}$  segundos por ciclo, isto é, uma oscilação completa, onde o braço descreve o ciclo para frente e para trás, é concluída em  $\frac{3}{4}$  de um segundo. Assim, o braço se move em uma frequência de  $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$ , isto é, aproximadamente 1,33 ciclos por segundo. Obviamente a amplitude é  $A = \frac{\pi}{9}$ . Um esboço do gráfico de  $y$  está na Figura 77.

Figura 77 – Movimento oscilatório de um braço de um corredor



Fonte: Autor

**Exemplo 3.7.1.** *Determine o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical de um corredor, praticante do Método de Cooper, após 10 segundos de corrida.*

**Solução:**

Queremos saber o valor de  $f(t)$  da equação (3.48) quando  $t = 10$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} f(10) &= \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \left( 10 - \frac{3}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \left( \frac{40 - 3}{4} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{37}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{9} \operatorname{sen} \left( \frac{74\pi}{3} \right) \\ &= \frac{\pi}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{18} \end{aligned}$$

Portanto, o ângulo compreendido entre a posição do braço e o eixo vertical em  $t = 10$  segundos é de  $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ .

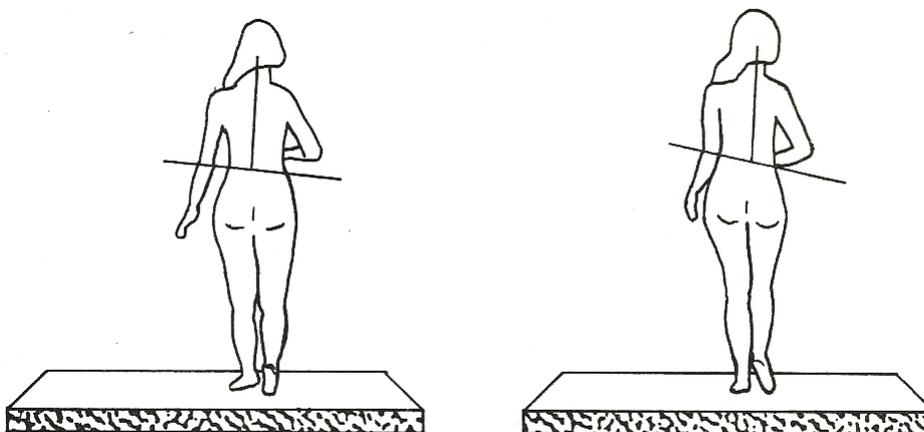
### 3.7.3 O balanço pélvico do andar feminino

Pélvis é a cavidade na parte inferior (ou posterior) do tronco onde se aloja o reto e uma grande parte dos aparelhos urinário e genital; bacia. É bem conhecido o balançar rítmico da pélvis feminina, que difere bastante do andar "duro" masculino. Isto acontece, basicamente porque há certas diferenças anatômicas entre os dois sexos.

Observa-se, que a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Pode-se avaliar tal movimento oscilatório supondo uma vara (na verdade uma linha imaginária) passando pelas duas cristas ilíacas (bordo superior convexo do osso ilíaco em forma de S), perpendicular a uma outra linha, aqui representada pela coluna vertebral (AGUIAR; XAVIER; RODRIGUES, 1988).

Quando a mulher se desloca no seu andar, a vara oscilará em torno de seu centro para cima e para baixo, acompanhando o ritmo da pélvis (Figura 78).

Figura 78 – Ciclo oscilatório da pélvis feminina



Fonte: AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988)

Suponha que o movimento se complete ao final de 1,5 segundo, isto é, seu período  $T$  é de  $\frac{3}{2}$  segundo por ciclo. Pela propriedade (3.5.1), temos que

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{2\pi}{T} \\
 &= \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{4\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Também pode-se ver que a frequência  $f$  dada por  $f = \frac{1}{T}$  é aproximadamente 0,67 ciclo por segundo. Suponha que a amplitude seja de  $18^\circ$ , ou seja,  $\frac{\pi}{10}$ , e considere  $x(t)$ , o ângulo entre a vara que está presa em seu centro e o eixo vertical. A partir do exposto, temos que  $x$  poderia ser expresso por

$$x(t) = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) \quad (3.49)$$

**Exemplo 3.7.2.** Qual o menor instante, em que a vara (linha imaginária) e a coluna vertebral de uma mulher formam  $15^\circ$ , enquanto ela se desloca em seu andar, segundo a equação (3.49)?

**Solução:**

Queremos saber o menor valor de  $t$  na equação (3.49), quando  $x(t) = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$ . Substituindo esse valor na equação dada, obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right) &= \frac{\pi}{12} \\
 \frac{4\pi}{3}t &= \arccos\left(\frac{10}{12}\right) \\
 \frac{4\pi}{3}t &= 33,56 \\
 t &= 0,14
 \end{aligned}$$

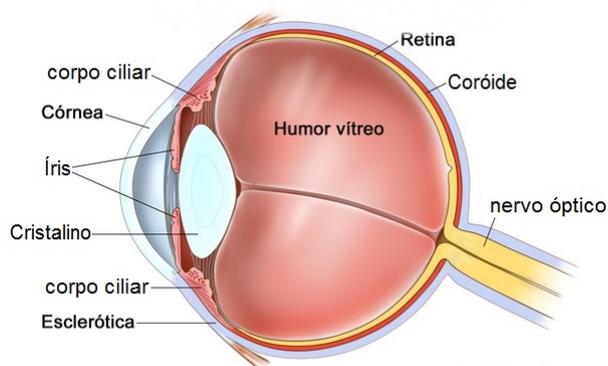
Logo, o menor instante, em que a vara (linha imaginária) e a coluna vertebral de uma mulher formam  $15^\circ$  enquanto ela anda, é em aproximadamente 0,14 segundos.

### 3.7.4 O olho humano: aumento angular

O olho humano é opticamente equivalente a uma máquina fotográfica comum, sendo constituído basicamente de um sistema de lentes, um sistema de diafragma variável e uma retina que corresponde a um filme a cores (OKUNO; CALDAS; CHOW,

1982). O olho tem características especiais, muitas das quais inexistentes mesmo nas câmeras mais sofisticadas (Figura 79).

Figura 79 – Ilustração do olho humano



Fonte: Hospital de olhos de Blumenau<sup>7</sup>

Nesta seção será apresentada uma aplicação da trigonometria no estudo do aumento angular da visão por meio do uso de lentes de aumento. Será omitido algumas informações, tais como as características citadas anteriormente, por não ser este, o objetivo desse trabalho, porém será dado ênfase na aplicação propriamente dita.

Considere um objeto de altura  $h$  a uma distância  $o$  de uma lente. Sua imagem, de altura  $h'$ , forma-se a uma distância  $i$  da lente. Pode-se ver em OKUNO, CALDAS e CHOW (1982, p. 275), que as relações entre as distâncias  $o$  e  $i$ , assim como entre as alturas  $h$  e  $h'$  são dadas por

$$\frac{h}{h'} = \frac{o}{i} \text{ e } \frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}, \quad (3.50)$$

onde  $f$  é a distância focal, ou seja, é a distância do foco da visão à lente.

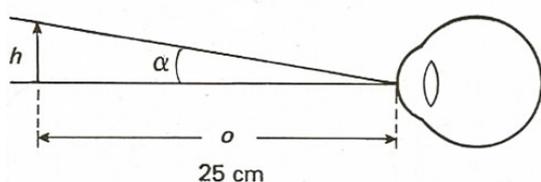
De acordo com OKUNO, CALDAS e CHOW (1982), no caso da formação de uma imagem na retina, quanto mais próximo do olho estiver o objeto, maior será a imagem formada na retina e maior será o ângulo subtendido pelo objeto no olho. Porém, existe um limite de máxima aproximação do objeto, a partir do qual o olho não consegue produzir uma imagem nítida na retina. O valor desse limite varia de pessoa para pessoa, tendo sido fixado como padrão a distância de 25 cm. Contudo, um objeto a distâncias menores que 25 cm ainda pode ser visto nitidamente com o uso de uma lente de aumento.

No caso de um objeto a 25 cm do olho, visto sem o auxílio de uma lente, o ângulo subtendido pelo objeto no olho é  $\alpha$  (Figura 80). Quando o objeto é visto por

<sup>7</sup> Disponível em: <http://hob.med.br/como-funciona-o-olho-humano>. Acesso em: 12/04/15.

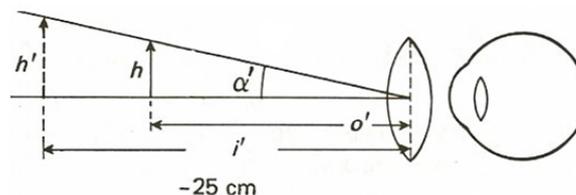
meio de uma lente de aumento, o ângulo  $\alpha'$  subtendido pela imagem virtual que deve está pelo menos a 25 cm do olho, é maior que o ângulo  $\alpha$  (Figura 81).

Figura 80 – Objeto visto sem uma lente de aumento



Fonte: OKUNO, CALDAS e CHOW (1982)

Figura 81 – Objeto visto com uma lente de aumento



Fonte: OKUNO, CALDAS e CHOW (1982)

**Definição 3.7.1.** *Defini-se aumento angular  $\theta$  como sendo*

$$\theta = \frac{\alpha'}{\alpha}. \tag{3.51}$$

No triângulo da Figura 80, temos que  $tg \alpha = \frac{h}{o}$  e do triângulo da Figura 81, temos que  $tg \alpha' = \frac{h}{o'}$ . Logo, segue que

$$\begin{aligned} \frac{tg \alpha'}{tg \alpha} &= \frac{\frac{h}{o'}}{\frac{h}{o}} \\ \frac{tg \alpha'}{tg \alpha} &= \frac{o}{o'} \\ \frac{tg \alpha'}{tg \alpha} &= \frac{25}{o'} \end{aligned}$$

Como os ângulos  $\alpha$  e  $\alpha'$  são pequenos eles podem ser substituídos pelas suas tangentes, isto é, o *aumento angular* pode ser expresso por:

$$\theta \cong \frac{tg \alpha'}{tg \alpha} = \frac{25}{o'}. \tag{3.52}$$

A justificativa de poder substituir um ângulo  $x$  muito pequeno pela sua tangente, ou seja, por  $tg x$ , é devido ao fato de que quando  $x$  tende a zero, a sua tangente também tende a esse mesmo valor. Em símbolos, tem-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg x}{x} = 1$$

O leitor pode ver a demonstração desta afirmação no Apêndice A, no qual é usado noções de cálculo diferencial.

**Exemplo 3.7.3.** Algumas pessoas usam óculos de grau e outras preferem usar lentes de contato para enxergar objetos a certa distância. Se um objeto é visto através de uma lente com distância focal de 26 cm e colocado a 20 cm dela:

- calcule o aumento angular, quando a superfície de uma lente de contato for colocada junto ao olho;
- calcule o aumento angular, quando por meio do uso de óculos, uma lente for colocada a 3 cm do olho;
- compare os resultados obtidos em **a)** e **b)**.

OKUNO, CALDAS e CHOW (1982, p. 279), adaptado.

**Solução:**

- Pelo enunciado, temos que  $o' = 20$  cm (distância do objeto à lente), logo, substituindo na equação (3.52), obtemos

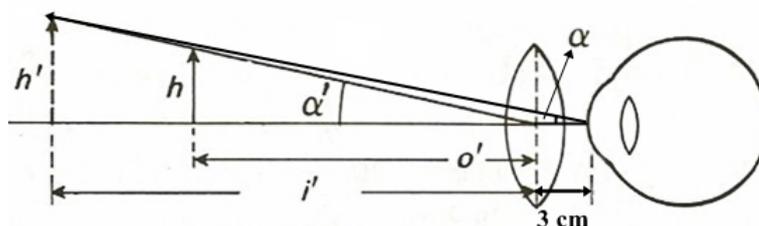
$$\theta = \frac{25}{20}$$

$$\theta = 1,3^\circ$$

Portanto, o aumento angular, quando o olho for colocado junto à superfície de uma lente de contato é de aproximadamente  $1,3^\circ$ .

- Observando a ilustração do problema na Figura 82, e pela equação (3.52), temos que

Figura 82 – Esquema do exemplo 3.7.3



Fonte: OKUNO, CALDAS e CHOW (1982), adaptado.

$$\theta = \frac{\alpha'}{\alpha} \cong \frac{\text{tg } \alpha'}{\text{tg } \alpha} = \frac{\frac{h'}{|i'|}}{\frac{h'}{|i'| + 3}}, \quad (3.53)$$

Como tem-se a distância focal  $f = 26$  cm e  $o' = 20$  cm, pela equação (3.50) podemos determinar  $i'$ , isto é

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{o'} + \frac{1}{i'} \\ \frac{1}{26} &= \frac{1}{20} + \frac{1}{i'} \\ \frac{1}{i'} &= \frac{1}{26} - \frac{1}{20} \\ \frac{1}{i'} &= \frac{20 - 26}{520} \\ \frac{1}{i'} &= \frac{-6}{520} \\ i' &= -86,7 \text{ cm}\end{aligned}$$

Pode-se ver em OKUNO, CALDAS e CHOW (1982), que o sinal  $(-)$  significa que a imagem é virtual, ou seja, produzida pela lente. Logo, substituindo esse valor em (3.53), temos que

$$\begin{aligned}\theta &\cong \frac{h'.(|i'| + 3)}{h'.|i'|} \\ &\cong \frac{|i'| + 3}{|i'|} \\ &\cong \frac{86,7 + 3}{86,7} \\ &\cong \frac{89,7}{86,7} \\ \theta &\cong 1,03^\circ\end{aligned}$$

Portanto, o aumento angular, quando o olho for colocado a 3 cm da lente, por meio do uso de óculos é de aproximadamente  $1,03^\circ$ .

- c)** Comparando os resultados obtidos em **a)** e **b)**, pode-se concluir que neste caso, a lente de contato tem um melhor ganho de imagem, se comparado às lentes de óculos.

### 3.8 CIÊNCIAS BIOLÓGICAS

Nesta seção, será apresentado a aplicação da trigonometria no estudo do voo dos gafanhotos. Nela, não descreveremos os passos da modelagem da situação problema, ou seja, será mostrado apenas a função trigonométrica que descreve o voo dos gafanhotos. Isto porque para descrever os passos da modelagem, precisaríamos utilizar técnicas avançadas de cálculo, o qual não é o objetivo de nosso trabalho.

### 3.8.1 Voo dos gafanhotos

Desde os tempos antigos, o homem se preocupa com o voo dos pássaros e insetos. Seu objetivo era compreender porque estes animais eram capazes de voar e ele não. No início, tentou imitar o voo dos pássaros, construindo asas mecânicas e se lançando do alto de penhascos, quase sempre com resultados desastrosos (atualmente tais técnicas já foram desenvolvidas e divulgada através das conhecidas *asas deltas*) (AGUIAR; XAVIER; RODRIGUES, 1988).

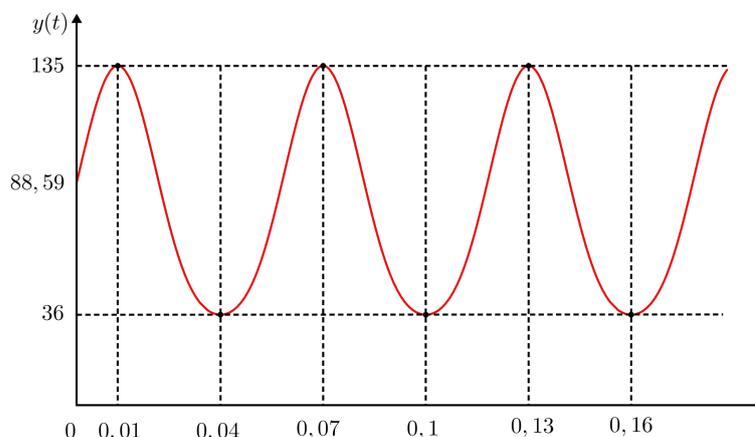
Segundo AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988), o zoologista T. Weis-Fogh, realizou uma experiência que permitiu descrever de forma precisa o voo de um gafanhoto.

O movimento completo é realizado em 60 milissegundos, isto é,  $\frac{60}{1000}$  segundos, que como se sabe é o período  $T$ . Isto significa que o gafanhoto realiza  $\frac{1000}{60} \cong 16,67$  ciclos por segundo, ou seja, suas asas movimentam-se para baixo e para cima 16,67 vezes em um segundo, que de fato, é a frequência  $f = \frac{1}{T}$ . Pode-se observar também, que a amplitude da oscilação é maior nas asas traseiras (grandes). Pode-se ver em AGUIAR, XAVIER e RODRIGUES (1988), que o ângulo das asas  $y(t)$  pode ser expresso pela função

$$y(t) = 72 - 49,5 \operatorname{sen} \left( \frac{100\pi}{3}(t - 0,027) \right) + 13,5 \operatorname{sen}^2 \left( \frac{100\pi}{3}(t - 0,027) \right). \quad (3.54)$$

Para obter o gráfico da função (3.54) descrito na Figura 83, usou-se o programa matemático Geogebra, onde foi preciso aumentar a escala em grande proporção para produzir o esboço.

Figura 83 – Gráfico da função (3.54)



Fonte: Autor

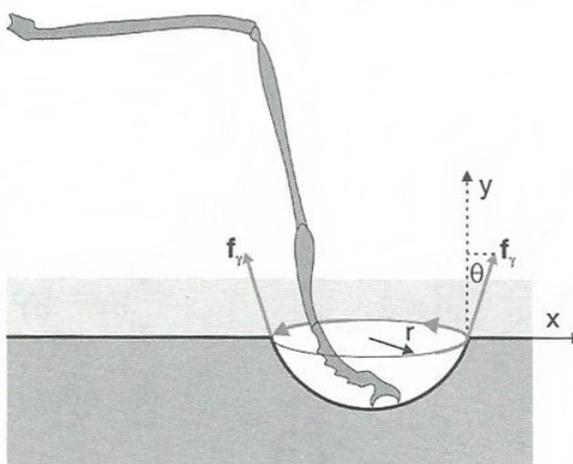
### 3.8.2 Tensão superficial e atração capilar

Em um líquido, as forças atrativas entre suas moléculas são suficientes para manter o fluido em um estado condensado, exibindo uma superfície (DURÁN, 2003). Essas forças entre moléculas do mesmo tipo e próximas entre si são denominadas *forças coesivas*, e elas são muito importantes nos fenômenos que estão associados com a superfície de um líquido.

Segundo DURÁN (2003), as partículas da superfície do líquido experimentam uma força resultante média dirigida para seu interior. Pode-se dizer que a origem dessa força é uma energia potencial da superfície, caracterizando uma membrana superficial relativamente elástica. Por sua vez, essa energia potencial por unidade de área define uma propriedade do interior do líquido, que é denominada **tensão superficial**  $\gamma$ . A tensão superficial também é uma medida do trabalho necessário por unidade de área para aumentar a superfície do líquido, e sua unidade é  $\text{J/m}^2$  ou  $\text{N/m}$ .

A tensão superficial dos líquidos tem um papel importante no funcionamento dos pulmões e da traqueia dos insetos e permite explicar o movimento e a corrida de seres vivos sobre a água (DURÁN, 2003). Ao pisar em um líquido, a pata de um inseto cria uma depressão, cuja curva de nível tem raio  $r$  e uma força  $f_\gamma$  devido a tensão que age na circunferência (Figura 84).

Figura 84 – Depressão causada pela pata de um inseto em um líquido.



Fonte: DURÁN (2003, p. 111)

Assim, a força resultante terá uma magnitude ou tensão superficial  $T_\gamma$ , e é dada por:

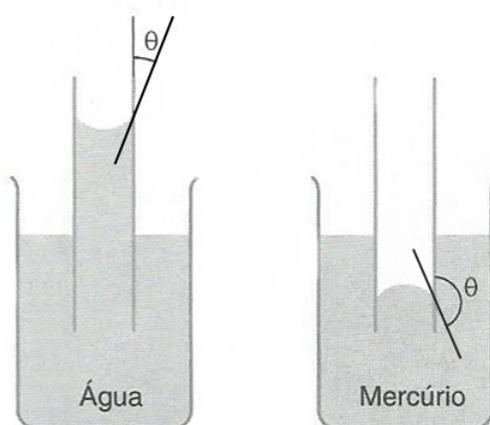
$$T_\gamma = 2\pi r \gamma \cos \theta, \quad (3.55)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de contato formado na deformação da superfície.

Pode-se ver em DURÁN (2003), que outro efeito bastante conhecido na Biologia, devido a tensão superficial de um líquido, é a capacidade que ele tem para subir ou descer dentro de um tubo com diâmetro muito pequeno, aparentemente violando a lei da gravidade. Esse efeito é denominado **atração capilar** ou **capilaridade**.

Quando há capilaridade, o líquido dentro do capilar alcança uma determinada altura  $h$  e a superfície do líquido no interior do capilar apresenta uma curvatura que define um ângulo  $\theta$ , já denominado *ângulo de contato* (Figura 85).

Figura 85 – Atração capilar quando o líquido é água (esquerda) e mercúrio (direita), sendo  $\theta$  o ângulo de contato.



Fonte: DURÁN (2003, p. 111)

O ângulo de contato  $\theta$  e a altura  $h$  a que o líquido sobe ou desce dentro do tubo dependerão da intensidade de forças coesivas do líquido e do material do tubo de raio  $r$ . Em geral, neste estudo, tem-se que  $\theta < 90^\circ$  e  $\theta > 90^\circ$ . Pode-se ver em DURÁN (2003), que a expressão que descreve capilaridade e a tensão superficial de um líquido é dado por

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot r}, \quad (3.56)$$

onde  $\rho$  é a densidade do líquido ( $\rho \cong 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) e  $g$  é a gravidade ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

No estudo da Biologia, a capilaridade é parcialmente responsável pela elevação da seiva<sup>8</sup>, desde as raízes de uma planta ou árvore até sua folhagem.

**Exemplo 3.8.1.** *Suponha que os capilares existentes na camada externa ativa de uma árvore sejam cilindros uniformes e que a elevação da seiva deve-se exclusivamente à capilaridade, com ângulo de contato de  $45^\circ$  e tensão superficial de  $0,05 \text{ N/m}$ . Qual*

<sup>8</sup> Seiva: líquido que contém princípios nutritivos e que circula no interior do vegetal, através de um sistema vascular.

é o raio dos capilares em uma árvore de 20 metros de altura? DURÁN (2003, p. 112, adaptado).

### Solução:

Da equação (3.56) temos que, o raio dos capilares da árvore é dado por

$$r = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho \cdot g \cdot h} \quad (3.57)$$

Logo, substituindo os dados da questão na equação (3.57), onde temos  $0,05 \text{ N/m} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$ , obtemos

$$\begin{aligned} r &= \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cos 45^\circ}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 20} \\ &= \frac{10^{-2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{19,6 \cdot 10^3} \\ &= 3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m} \end{aligned}$$

Portanto, o raio dos capilares em uma árvore de 20 metros de altura é de aproximadamente  $3,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ .

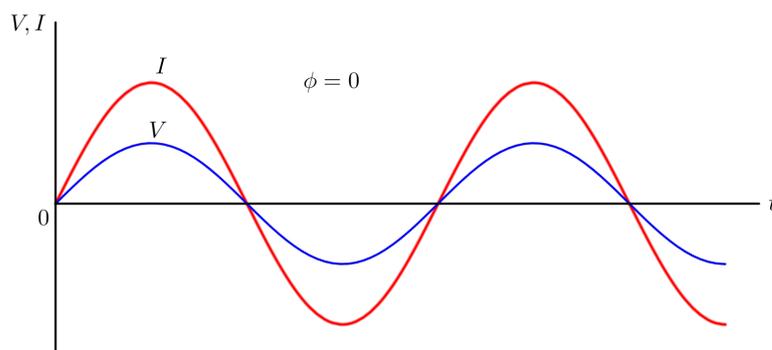
## 3.9 ELETROTÉCNICA

Assim como em diversos campos, a trigonometria também está na base do estudo teórico da eletricidade. Em particular, na Eletrotécnica tem-se vários estudos envolvendo o uso da trigonometria. Nesta seção, será apresentado uma aplicação da trigonometria no estudo do fator de potência. Antes, será visto algumas definições necessárias para um bom entendimento da aplicação.

### 3.9.1 Fator de potência

Na maioria dos casos de distribuição de energia elétrica, a energia é fornecida na forma de correntes e tensões senoidais, sistema que é conhecido como **corrente alternada (CA)** (HALLIDAY et al., 2012b). No sistema de corrente alternada no Brasil, a tensão e a corrente mudam de polaridade 120 vezes por segundo e, portanto, tem uma frequência  $f$  de 60 Hz.

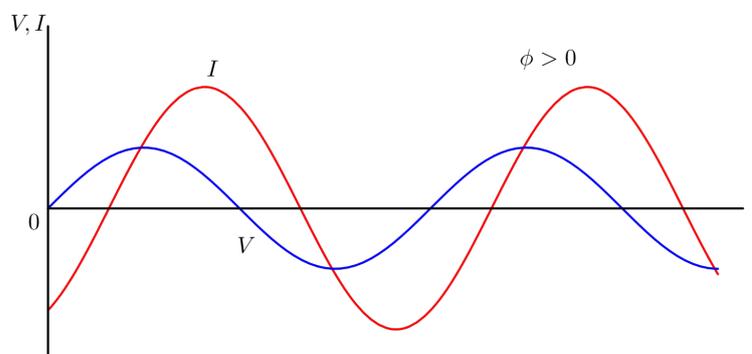
Em circuitos de corrente alternada **puramente resistivos**, ou seja, em que a única dificuldade a ser vencida pela tensão aplicada é a resistência efetiva, as ondas de tensão e de corrente elétrica estão em fase, ou seja, a tensão e a intensidade da corrente atingem valores correspondentes ao mesmo tempo (Figura 86).

Figura 86 – Se  $\phi = 0$ , a corrente  $I$  e a tensão  $V$  estão em fase.

Fonte: Autor

Neste caso o ângulo de fase ou defasagem  $\phi$  é nulo. Assim, diz-se que carga possui característica resistiva.

Quando cargas reativas estão presentes, o armazenamento de energia nessas cargas resulta em uma diferença de fase entre as ondas de tensão e corrente, onde pode-se ter  $\phi > 0$  ou  $\phi < 0$ . Quando  $\phi > 0$ , diz-se que a corrente está atrasada em relação à tensão (Figura 87).

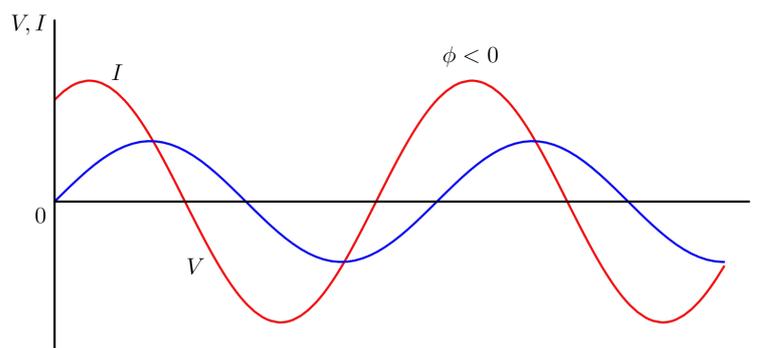
Figura 87 – Se  $\phi > 0$ , a corrente  $I$  está atrasada em relação à tensão  $V$ .

Fonte: Autor

Quando  $\phi < 0$  diz-se que a corrente está adiantada em relação à tensão (Figura 88).

A energia aplicada por segundo a uma corrente alternada (potência do circuito) é destinada a vencer as três dificuldades normalmente presentes no mesmo, conhecidas como: a resistência efetiva, a reatância indutiva e a reatância capacitiva (CAVALCANTI, 1987, p. 100-102).

Segundo CAVALCANTI (1987, p. 102), a parte destinada a vencer a resistência efetiva do circuito é denominada **potência real  $P$  ou potência ativa** do circuito

Figura 88 – Se  $\phi < 0$ , a corrente  $I$  está adiantada em relação à tensão  $V$ .

Fonte: Autor

(expressa em Watts). Esta potência corresponde a energia elétrica que está sendo transformada em calor, em cada segundo, e costuma também ser chamada de **potência efetiva**.

A energia gasta para vencer a reatância do circuito é denominada **potência reativa**  $Q$ , no qual é expressa em volts-ampères reativos (VARs). Isto é, a potência reativa é usada apenas para criar e manter os campos eletromagnéticos das cargas indutivas.

Assim, enquanto a potência ativa é sempre consumida na execução de trabalho, a potência reativa, além de não produzir trabalho, circula entre a carga e a fonte de alimentação, ocupando um "espaço" no sistema elétrico que poderia ser utilizado para fornecer mais energia ativa.

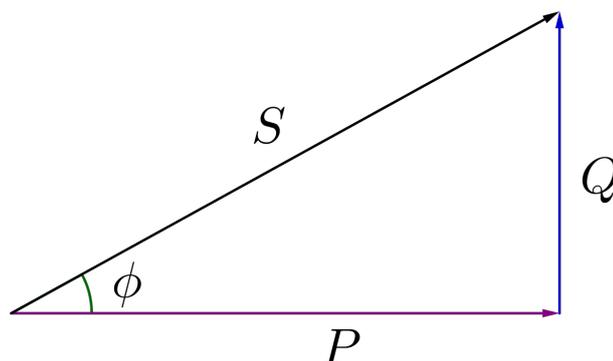
A soma vetorial das potências ativa e reativa é igual ao produto da tensão aplicada ao circuito pela intensidade da corrente do mesmo (CAVALCANTI, 1987). Este produto é conhecido como **potência aparente**  $S$  do circuito, e corresponde a energia aplicada por segundo para vencer a dificuldade total do circuito, onde é dada em Volts-ampères.

No caso de formas de onda perfeitamente senoidais,  $P$ ,  $Q$  e  $S$  podem ser representados por vetores que formam um triângulo retângulo, também conhecido como triângulo de potências (Figura 89).

**Definição 3.9.1 (Fator de Potência).** O **fator de potência**  $FP$  de um circuito em corrente alternada, é definido pela razão da potência ativa  $P$  pela potência aparente  $S$ , isto é, é o cosseno do ângulo de fase (ou defasagem)  $\phi$  entre a tensão aplicada ao circuito e a corrente do circuito (Figura 89).

$$FP = \frac{P}{S} = \cos \phi \quad (3.58)$$

Figura 89 – Triângulo das potências



Fonte: Autor

Como por definição a potência aparente  $S$  é dada por  $S = I.V$ , no triângulo das potências também pode-se concluir que:

a) a potência ativa  $P$  é expressa por:

$$P = I.V.\cos \phi \quad (3.59)$$

b) a potência reativa  $Q$  é dada por:

$$Q = I.V.\sen \phi \quad (3.60)$$

No estudo da eletricidade, o *fator de potência* pode ser visto como a eficiência com pela qual a energia está sendo utilizada. Isto é, o fator de potência indica qual porcentagem da potência total fornecida (kVA) é efetivamente utilizada como potência ativa (kW). Assim, o fator de potência mostra o grau de eficiência do uso dos sistemas elétricos. Valores altos de fator de potência indicam uso eficiente da energia elétrica, enquanto valores baixos evidenciam seu mau aproveitamento, além de representar uma sobrecarga para todo o sistema elétrico.

Segundo CAVALCANTI (1987), o fator de potência de um circuito deve ser mantido aproximadamente igual a 1, o que equivale a manter o ângulo de fase  $\phi$  o mais próximo possível de zero, pois se estiver muito baixo, implica no encarecimento da instalação e em maiores perdas do cobre.

Portanto, o fator de potência  $\cos \phi$  é máximo quando é igual a 1, ou seja, quando  $\phi = 0$ , o que significa que toda a energia aplicada ao circuito está sendo gasta para vencer sua resistência. Quando há no circuito reatância de qualquer espécie, o fator de potência é um número decimal (CAVALCANTI, 1987). Segundo HALLIDAY et al. (2012b, p. 306), o valor do ângulo de defasagem é máximo quando  $\phi = 90^\circ$ , onde se

dá quando o circuito é puramente indutivo e é mínimo se  $\phi = -90^\circ$ , onde só acontece quando o circuito é puramente capacitivo. Isto é, temos que  $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ .

De acordo com ANEEL (2010), o fator de potência de referência, indutivo ou capacitivo, tem como limite mínimo permitido, para as unidades consumidoras dos grupos A (consumidores atendidos pela rede de alta tensão, de 2,3 a 230 quilovolts (kV)) e B (unidades consumidoras atendidas em tensão inferior a 2,3 kV), o valor de 0,92. Isto acontece quando tem-se um ângulo de defasagem de aproximadamente  $23^\circ$ .

Aos montantes de energia elétrica e demanda de potência reativos que excederem o limite permitido, aplicam-se as cobranças estabelecidas nas normas da ANEEL.

**Exemplo 3.9.1.** *Em uma fábrica, a conta de energia em certo mês, veio no valor total de R\$155.000,00. Na conta, veio especificado o valor gasto referente a energia ativa, que foi de R\$150.000,00 e o valor de uma multa de R\$5.000,00 referente a energia reativa excedente. Supondo que a fábrica funcione durante 500 horas ao mês; que o valor da energia ativa é de R\$0,50 por Kilowatt hora (KWh) e R\$0,20 por Quilovolt-ampere reativos (KVARs) excedente, determine o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente do sistema elétrico da fábrica.*

### Solução:

Observe que neste problema, se quer determinar o ângulo de fase  $\phi$  entre a tensão e a corrente elétrica.

Como o valor cobrado pela energia reativa excedente foi de R\$5.000,00 e é cobrado R\$0,20 por KVAR excedente, temos  $\frac{5000}{0,2} = 25000$  KVARh excedente por mês. Logo, como a fábrica funciona 500 horas por mês, segue que  $\frac{25000}{500} = 50$  KVAR é a energia reativa excedente  $Q_e$ .

Analogamente, temos que a potência ativa  $P$  é de  $\frac{150000}{0,50 \cdot 5000} = 600$  KW (Quilowatts). Pela equação (3.59), temos que  $P = I.V.\cos \phi$ , onde segue que

$$I.V = \frac{600}{\cos \phi}, \quad (3.61)$$

é a potência aparente  $S$ . Como a defasagem máxima correspondente ao fator de potência mínimo admitido é de  $23^\circ$ , temos que a potência reativa máxima admitida  $Q_m$  é

$$Q_m = S.\text{sen } 23^\circ = 0,391.S.$$

Isto é, a potência reativa total é

$$Q_e + Q_m = 50 + 0,391.S = S.\text{sen } \phi,$$

onde segue que

$$S.(\text{sen } \phi - 0,391) = 50. \quad (3.62)$$

Substituindo (3.61) em (3.62), temos que

$$\begin{aligned} \frac{600}{\cos \phi} \cdot (\text{sen } \phi - 0,391) &= 50 \\ \text{sen } \phi - 0,391 &= 0,083 \cos \phi \\ \text{sen } \phi &= 0,083 \cos \phi + 0,391 \\ \text{sen}^2 \phi &= 0,0069 \cos^2 \phi + 0,0649 \cos \phi + 0,1529 \end{aligned}$$

Como  $\cos^2 \phi + \text{sen}^2 \phi = 1$ , temos que

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2 \phi &= 0,0069 \cos^2 \phi + 0,0649 \cos \phi + 0,1529 \\ 1,0069 \cos^2 \phi + 0,0649 \cos \phi - 0,8471 &= 0 \end{aligned}$$

considerando  $x = \cos \phi$ , e resolvendo a equação  $1,0069x^2 + 0,0649x - 0,8471 = 0$ , obtemos as raízes  $0,8856$  e  $-0,5176$ . Assim, para esses valores temos  $\arccos 0,8856 = 27,7^\circ$  e  $\arccos (-0,5176) = 121,2^\circ$ , onde se descarta este último valor, pois sabemos que  $-90^\circ \leq \phi \leq 90^\circ$ .

Portanto,  $\phi = 27,7^\circ$  é o ângulo de defasagem entre a tensão e a corrente elétrica. Observe que com este valor, o fator de potência é  $\cos 27,7^\circ$ , o que corresponde aproximadamente a 89, ou seja, abaixo do mínimo permitido, que é de 0,92. Dessa forma, com esses valores, a fábrica poderá fazer a correção, e assim evitar um desperdício e, evidentemente uma multa.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresenta-se neste trabalho muitas aplicações da trigonometria nas várias áreas do conhecimento. Com isso, viu-se a importância de se ter um bom conhecimento teórico da trigonometria para o entendimento das aplicações. Dessa forma, ressalta-se aqui, que apesar de atualmente ser cada vez mais exigido que sejam aplicadas as teorias matemáticas à vida prática, é de suma importância que sempre se trabalhe os conceitos matemáticos adequados.

Há de se concordar, que na abordagem dos conteúdos, as aplicações não devem ser deixadas somente para o final, mas devem ser o motivo e o contexto para que os alunos aprendam a trigonometria, pois permitem que o ensino se estruture através dos muitos exemplos dados.

Foram abordadas aplicações que podem ser utilizadas em atividades envolvendo interdisciplinariedade nas escolas. Também apresentou-se situações problemas bem formuladas, que de certa forma, podem estimular a curiosidade dos alunos e os motivá-los a resolver. Pode-se ver que as aplicações apresentadas neste trabalho, foram abordadas utilizando unicamente os recursos da trigonometria, que deve ser ensinada aos alunos do Ensino Básico. Nesse sentido, todas as aplicações podem ser trabalhadas em sala de aula com os alunos.

Reforçamos mais uma vez, sobre a grande importância nos dias atuais que as funções trigonométricas possuem, pois têm grande aplicabilidade e podem ser exploradas para a construção do conhecimento. Muitas das aplicações da trigonometria apresentadas neste trabalho, são devido a uma propriedade fundamental das funções trigonométricas, ou seja, pelo fato delas serem periódicas. Por isso, foram especialmente usadas para descrever os fenômenos de natureza periódica, oscilatória ou vibratória, os quais existem no universo, como o movimento dos planetas em torno do Sol, corrente elétrica alternada, nível das marés, etc.

Algumas vezes foi preciso estender teorias importantes de outras áreas. Porém, não com o objetivo de se aprofundar, mas para um bom entendimento das aplicações. Foi apresentado no capítulo três, um acervo de aplicações da trigonometria. No entanto, este trabalho pode ser ampliado com mais aplicações da trigonometria em outras áreas da Ciência.

Destaca-se que as aplicações apresentadas, demonstram o quanto a trigonometria é importante nas ciências. Assim, espera-se que este trabalho seja um apoio e um referencial para os professores e alunos que desejarem explorar esse rico e próspero campo da Matemática e suas aplicações.

## REFERÊNCIAS

- AGUIAR, A. F. A.; XAVIER, A. F. S.; RODRIGUES, J. E. M. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: HARBRA, 1988. 351 p.
- ANEEL. **Condições gerais de fornecimento de energia elétrica**: resolução Normativa Nº 414/2010 - Direitos e Deveres do Consumidor de Energia Elétrica. Agência Nacional de Energia Elétrica, 2010. Disponível em: <[www.aneel.gov.br/.../livros/REN\\_414\\_2010\\_atual\\_REN\\_499\\_2012.pdf](http://www.aneel.gov.br/.../livros/REN_414_2010_atual_REN_499_2012.pdf)>. Acesso em: 23 jan. 2015.
- AVILA, G. A geometria e as distâncias astronômicas na grécia antiga. **Revista do Professor de Matemática - RPM, Nº1**, São Paulo, 1986.
- BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**: coleção do professor de Matemática. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p.
- BARROSO, J. A. **Os ventos, as ondas e as marés como agentes geológicos de superfície modeladores das faixas litorâneas**. Rio de Janeiro, S.D. Disponível em: <<http://www.ccron.org.br/images/file/artigos%20josue/ARTIGO%209.pdf>>. Acesso em: 22 Dez. 2014.
- BRASIL. **PCN Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>>. Acesso em: 25 jun. 2014.
- CARMO, M. P. d.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria/números complexos**: coleção do professor de Matemática. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 165 p.
- CAVALCANTI, P. J. M. **Fundamentos de eletrotécnica para técnicos em eletrônica**. 17. ed. Rio de Janeiro: Freita Bastos, 1987. 222 p.
- DURÁN, J. E. R. **Biofísica**: fundamentos e aplicações. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 318 p.
- FILHO, K. d. S. O.; SARAIVA, M. d. F. O. **Astronomia e astrofísica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2004. 674 p.
- GÓMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. d. S. **Geometria analítica**: coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 340 p. ISBN 9788583370093.
- HALLIDAY, D. et al. **Fundamentos de Física**. v. 2. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 308 p.
- HALLIDAY, D. et al. **Fundamentos de Física**. v. 3. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. 375 p.
- HALLIDAY, D. et al. **Fundamentos de Física**. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 340 p.

- HUGHES-HALLETT, D. **Cálculo de uma variável**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. 524 p.
- LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. v. 1. 3. ed. São Paulo: HARBRA, 1994. 733 p.
- LIMA, E. L. **Números e funções reais**: coleção PROFMAT. v. 1. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do ensino médio**: coleção do professor de Matemática. v. 1. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 237 p.
- LOPES, W. Efeitos das marés sobre o sistema terra - lua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, Nº4, São Paulo, v. 18, dezembro 1996. Disponível em: <<http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/v18a31.pdf>>. Acesso em: 20 Dez. 2014.
- MIRÁS, D. **Correndo na frente**. v. 1. 1. ed. [s.n.], 2010. Disponível em: <[espacoevents.com.br/livro\\_correndo\\_na\\_frente.pdf](http://espacoevents.com.br/livro_correndo_na_frente.pdf)>. Acesso em: 07 jan. 2015.
- NETO, A. C. M. **Geometria**: coleção PROFMAT. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 471 p.
- OKUNO, E.; CALDAS, I. L.; CHOW, C. **Física para ciências biológicas e biomédicas**. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1982. 490 p.
- ROQUE, T.; CARVALHO, J. B. P. **Tópicos de história da Matemática**: coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 467 p.
- SANTOS, A. A. d. **Trigonometria hiperbólica**: uma abordagem elementar. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT), Universidade Federal de Roraima, Boa Vista, 2014.
- SILVA, C. L. d. et al. **Economia empresarial**: coleção gestão empresarial. Associação Franciscana de Ensino Senhor Bom Jesus - AFESBJ / FAE Business School - Editora Gazeta do Povo, 2002. 64 p. Disponível em: <<http://www.unc.br/mestrado/textos/Bibliografia-2013-LIVRO-GESTAO-EMPRESARIAL-02-ECONOMIA.pdf>>. Acesso em: 28 jan. 2015.
- WEBER, J. E. **Matemática para economia e administração**. 2. ed. São Paulo: HARBRA, 2001. 674 p.

## **Apêndices**

## A DEMONSTRAÇÃO DE PROPOSIÇÃO

Neste apêndice, será mostrado que o limite da função  $f(x) = \frac{tg\ x}{x}$  quando  $x$  tende a zero é igual a 1. Esta demonstração justifica o fato de poder substituir um ângulo  $x$  muito pequeno pela sua tangente, ou seja, por  $tg\ x$ , no qual é importante para o desenvolvimento da aplicação da trigonometria que se encontra na subseção (3.7.4).

### A.1 DEMONSTRAÇÃO DO LIMITE DE FUNÇÃO

**Proposição A.1.1.** *O limite da função  $f(x) = \frac{tg\ x}{x}$  quando  $x$  tende a zero é igual a 1. Isto é,*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg\ x}{x} = 1$$

*Demonstração.* Note que não podemos aplicar a regra do limite do quociente já que o limite do denominador é 0. Assim, para demonstrar a proposição (A.1.1) será feito uso do limite trigonométrico fundamental,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen\ x}{x} = 1, \quad (\text{A.1})$$

cuja demonstração encontra-se em LEITHOLD (1994, p. 116-118). Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg\ x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{sen\ x}{x}}{\frac{cos\ x}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen\ x}{x\ cos\ x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{sen\ x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cos\ x}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Vamos calcular agora, o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cos\ x}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cos\ x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{cos\ 0} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Portanto, substituindo (A.1) e (A.3) em (A.2), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{cos} x} \\ &= 1\end{aligned}$$

□

## **Anexos**

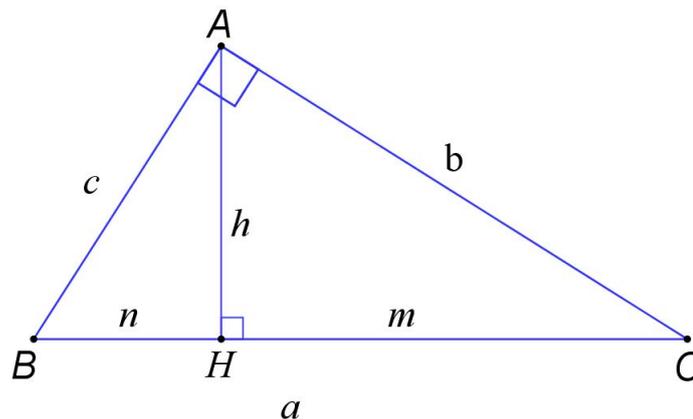
## A TEOREMA AUXILIAR

Neste anexo, será apresentado um importante teorema da Geometria Plana, conhecido como Teorema de Pitágoras, ao qual foi utilizado neste trabalho. Para demonstrarmos este teorema usaremos semelhança de triângulos.

**Teorema A.0.1 (Teorema de Pitágoras).** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma dos quadrados das medidas dos catetos. Isto é, dado um triângulo  $ABC$ , retângulo em  $A$  e lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$ , temos que*

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{A.1})$$

Figura 90 – Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor

*Demonstração.* Considere no triângulo retângulo  $ABC$ , o segmento  $AH = h$  perpendicular ao lado  $BC$  e as medidas  $BH = n$  e  $HC = m$  (Figura 90). Como os triângulos  $ABC$ ,  $HBA$  e  $HAC$  possuem todos os ângulos congruentes, segue pelo critério AA (teorema 1.4.2) que eles são semelhantes.

Da semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $HAC$ , temos a relação

$$\frac{m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow am = b^2 \quad (\text{A.2})$$

e da semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $HBA$ , temos a relação

$$\frac{n}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow an = c^2 \quad (\text{A.3})$$

Somando (A.2) e (A.3), obtemos

$$\begin{aligned}am + an &= b^2 + c^2 \\a.(m + n) &= b^2 + c^2 \\a.a &= b^2 + c^2 \\a^2 &= b^2 + c^2\end{aligned}$$

□