UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

JOSIVALDO REIS OLIVEIRA

A TRANSCENDÊNCIA DE PI, e E DOS NÚMEROS DE LIOUVILLE

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2015

JOSIVALDO REIS OLIVEIRA

A TRANSCENDÊNCIA DE PI, e E DOS NÚMEROS DE LIOUVILLE

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fábio dos Santos

SÃO CRISTÓVÃO–SE
2015

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

O48t

Oliveira, Josivaldo Reis

A trancedência de PI, e e dos números de Liouville / Josivaldo Reis Oliveira ; orientador Fábio dos Santos. – São Cristóvão, 2015.

58 f. : il.

Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática)– Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Matemática. 2. Teoria dos números. 3. Teoria dos números algébricos. I. Santos, Fábio dos, orient. II. Título.

CDU 511

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

A Transcendência de Pi, *e* e dos Números de Liouville
por

Josivaldo Reis Oliveira

Aprovada pela Banca Examinadora:

Fábio dos Santos

Prof. Dr. Fábio dos Santos - UFS
Orientador

Marta Elid Amorim Mateus.

Prof. Dra. Marta Elid Amorim Mateus- UFS
Primeiro Examinador

Crislene Santos da Paixão

Prof. Dra. Crislene Santos da Paixão - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 24 de março de 2015.

Cidade Universitária "Prof. José Aloísio de Campos" – Av. Marechal Rondon, s/no - Jardim Rosa Elze – Campus de São Critóvão. Tel. (00 55 79) 2105-6887
CEP: 49100-000 - São Cristóvão – Sergipe - Brasil – E-mail: promat.ufs@gmail.com

Dedicatória

A Deus e a minha família. Em especial a minha esposa Ilana e filhas, Karoline e Kaline que me deram apoio e força para chegar até aqui. E a meus professores e coordenadores da turma PROFMAT−2013 *dessa instituição, que me inspiraram.*

Agradecimentos

- Em primeiro lugar agradeço a Deus.
- Aos meus pais, sem eles nada disso teria acontecido.
- À minha esposa, Ilana Ramos Pamponet e filhas, Karoline Pamponet Oliveira e Kaline Pamponet Oliveira pela alegria que me propiciam diariamente.
- Ao professor Dr. Fábio dos Santos, por sua orientação, dúvidas e problemas resolvidos.
- À cada um que acreditou no meu trabalho.
- À família profmatiana turma 2013 dessa instituição, pelos momentos de muito estudo, pelas conversas tão descontraídas e importantes que tivemos.
- Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para minha formação.

Resumo

Nesta dissertação abordaremos, de maneira sutil, alguns fatos históricos em relação ao número π e ao número de Euler e alguns conceitos básicos sobre os conjuntos dos números racionais e reais. Mostraremos também alguns números algébricos e transcendentes, assim como suas enumerabilidades, o primeiro número transcendental e por fim a demonstração da transcendência dos números de Liouville, Euler e de π.

Palavras - chave: Números algébricos. Transcendentes.

Abstract

In this dissertation subtly discuss some historical facts in relation to the number π and number of Euler and some basics on the sets of rational numbers and reais. We will also show some numbers algebraic and transcendental, as well as their enumerabilidades, the first transcendental number and finally the demonstration of the transcendence of Liouville numbers, Euler and π.

Keywords: Algebraic numbers. Transcendent.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Os números estão presentes no cotidiano do homem desde a antiguidade e cada vez mais os matemáticos vêm aperfeiçoando-os, afim de se resolver determinados tipos de problemas. A humanidade desenvolveu lentamente o princípio de contagem como a comparação entre grandezas discretas. Neste contexto podemos citar o exemplo clássico do homem que conta seu rebanho utilizando pedras, daí a origem da palavra cálculo e o surgimento dos naturais.

O presente trabalho abordará certos tipos de números denominados **algébricos e transcendentes**. Dizemos que um número é algébrico, se o mesmo é solução de uma equação polinomial com coeficientes inteiros, caso contrário é chamado transcendente. Daí, já podemos concluir que todo número racional $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, é algébrico, pois é solução da equação polinomial $qx - p = 0$. Além disso, alguns irracionais também são algébricos, como por exemplo $\sqrt{3}$, que é solução da equação $x^2 - 3 = 0$.

Existem também alguns números irracionais que não são solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros, chamados de números transcendentes. Nesta dissertação daremos alguns exemplos de tais números, de modo que provaremos que π, e e os números de Liouville são trancendentes. O matemático francês Joseph Liouville foi o autor da primeira demonstração da existência de números desse tipo, estabelecendo um critério para que um número seja transcendental. Com isso permitiu-se a construção da famosa constante de Liouville, definida por:

$$0,110001000000000000000001\ldots$$

Esta dissertação está composta por 4 capítulos, nos quais, o primeiro aborda definições sobre números algébricos e transcendentes, corpo ordenado do conjunto dos Racionais, o conjunto dos números Reais, a enumerabilidade e a não enumerabilidade dos conjuntos Algébricos e Transcendentes respectivamente, o segundo apresenta o formato dos números de Liouville e sua transcendência, o terceiro e quarto capítulos mostram alguns fatos históricos, assim como a demonstração da transcendência dos números de Euler e π .

Capítulo 1

Números Algébricos e Transcendentes

Neste capítulo, forneceremos alguns conceitos básicos sobre números algébricos e trancendentes. Com o intuito de deixar o texto mais completo, iniciaremos com uma breve revisão sobre números racionais e reais.

1.1 O corpo ordenado dos números racionais

Considere um conjunto $\mathbb{K}$ munido de duas operações: soma $(+)$ e produto $(\cdot)$. Dizemos que este conjunto é um **corpo** se ele satisfaz as 9 propriedades abaixo:

1. **Comutatividade da soma:**

   Se $a, b \in \mathbb{K}$ então
   $$a + b = b + a;$$

2. **Associatividade da soma:**

   Se $a, b, c \in \mathbb{K}$ então
   $$(a + b) + c = a + (b + c);$$

3. **Existência do elemento neutro da soma:**

   Existe um elemento $0 \in \mathbb{K}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{K}$ temos
   $$0 + a = a + 0 = a;$$

4. **Existência do elemento inverso da soma:**

   Para todo elemento $a \in \mathbb{K}$ existe um elemento $-a \in \mathbb{K}$ tal que

   $$a + (-a) = 0;$$

5. **Comutatividade do produto:**

   Se $a, b \in \mathbb{K}$ então

   $$a \cdot b = b \cdot a;$$

6. **Associatividade do produto:**

   Se $a, b, c \in \mathbb{K}$ então

   $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$$

7. **Existência do elemento neutro do produto:**

   Existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que, para todo $a \in \mathbb{K}$ temos

   $$1 \cdot a = a \cdot 1 = a;$$

8. **Existência do elemento inverso do produto:**

   Para todo elemento $a \in \mathbb{K}$, com $a \neq 0$, existe um elemento $a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que

   $$a \cdot (a^{-1}) = 1;$$

9. **Distributividade:**

   Se $a, b, c \in \mathbb{K}$ então $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
   e
   $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Se o conjunto $\mathbb{K}$ é um corpo então ele possui a seguinte propriedade:

$$\text{Se } a, b \in \mathbb{K} \text{ e } a \cdot b = 0 \text{ então } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Assumiremos que o leitor já tem conhecimento prévio dos conjuntos dos números naturais $\mathbb{N}$ e do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, pois usaremos naturalmente esses conjuntos em todo o texto.

Por exemplo, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ não é um corpo, pois não existe inverso multiplicativo.

Faremos agora uma breve explanação sobre os números racionais.

O conjunto dos números racionais é o conjunto

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}\,,\ q \neq 0 \right\},$$

onde dois elementos $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$ são iguais se $a \cdot d = b \cdot c$.

Considere as seguintes operações em $\mathbb{Q}$:

$$\text{Soma: } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d};$$

$$\text{Produto: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

O conjunto $\mathbb{Q}$ munido dessas duas operações é um **corpo**.

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ dado por

$$Z = \left\{ \frac{p}{1} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Veja que a soma e o produto de elementos em Z e em $\mathbb{Z}$ são mantidas via esta identificação. Por exemplo:

$$\frac{2}{1} + \frac{7}{1} = \frac{9}{1} \text{ e } \frac{2}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{1}.$$

Dessa forma podemos considerar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é munido da seguinte **relação de ordem**:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ se } a \cdot d < b \cdot c.$$

Visto que $\mathbb{Q}$ possui esta relação de ordem, $\mathbb{Q}$ é chamado **Corpo Ordenado**. Infelizmente, o conjunto dos números racionais apresenta algumas deficiências. Um exemplo bem simples é o seguinte:

$$\text{Não existe } r \in \mathbb{Q}, \text{ tal que } r^2 = 2.$$

De fato, suponha que existe $r = \dfrac{p}{q}$ tal que $r^2 = 2$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $mdc(p, q) = 1$, então temos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 2 && (1.1)\\
\frac{p^2}{q^2} &= 2 && (1.2)\\
p^2 &= 2 \cdot q^2 && (1.3)
\end{aligned}
$$

Pelo **Teorema Fundamental da Aritmética** todo número inteiro positivo escreve-se de forma única como produto de números primos logo, na última igualdade, o número de vezes que o fator 2 aparece no lado esquerdo é par, mas o número de vezes que aparece no lado direito é ímpar. Isso é uma contradição. □

Na próxima seção usaremos o conjunto dos números racionais para definir um conjunto maior de números, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, no qual encontramos alguns números com propriedades interessantes denominados de números trancendentes.

1.2 O conjunto dos números reais

Na seção anterior mostramos que nem todos os cálculos podem ser resolvidos usando apenas os números racionais. Isso nos faz buscar por um conjunto de números um pouco melhor. A noção básica é a seguinte:

Traçamos uma reta orientada e marcamos sobre esta reta dois pontos distintos A e B com B à direita de A. Associamos ao ponto A o número 0 e ao ponto B o número 1, e usamos o comprimento do segmento AB como unidade de medida (veja a Figura 1.1).

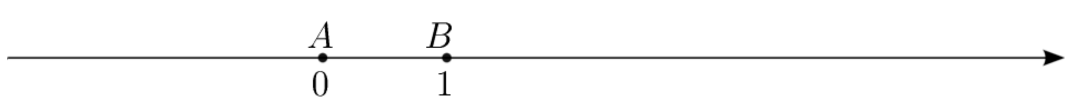

Figura 1.1: Criando uma unidade de medida sobre a reta

Usando esta medida podemos marcar recursivamente pontos à esquerda de A e à direita de B de forma que a distância entre dois pontos consecutivos seja o comprimento do segmento AB. Desta forma podemos representar todos os números inteiros sobre a reta (veja a Figura 1.2).

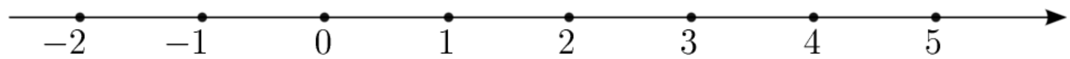

Figura 1.2: Representação dos números inteiros sobre a reta

Da mesma forma podemos representar todos os números racionais sobre a reta. A título de exemplo, vamos mostrar como representar todas as frações que tenham denominador igual a 7.

Primeiro dividimos o segmento que vai de 0 a 1 em 7 partes iguais (veja a Figura 1.3), e marcamos recursivamente sobre a reta pontos em que a distância entre dois pontos consecutivos seja o comprimento das partes em que foi dividido o segmento, assim obtemos a representação sobre a reta de todas as frações de denominador 7 (veja a Figura 1.3).

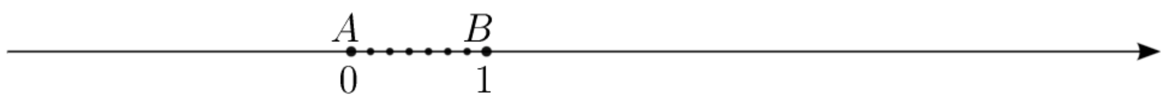

Figura 1.3: Ilustração da representação dos números racionais sobre a reta

Da mesma forma, podemos representar todas as frações de denominador igual a 2, 3, 4, 5, 6, . . . , e assim sucessivamente. Portanto, podemos representar todos os números racionais sobre a reta.

O número associado a um ponto da reta é chamado **abscissa** do ponto. Todos os números racionais são abscissas de pontos da reta. Mas existem pontos sobre a reta cuja abscissa não é um número racional.

Exemplo 1.2.1. $\diamond$
Tracemos um quadrado em que um de seus lados seja o segmento da reta com extremidades nos pontos de abscissas 0 *e* 1*. Seja* α *a medida de sua diagonal, então, pelo Teorema de Pitágoras* $\alpha^2 = 1^2 + 1^2$*, ou seja,* $\alpha^2 = 2$*. Considere a circunferência de raio* α *centro no ponto de abscissa em* 0 *(veja a Figura 1.4). Essa circunferência intercecta a reta no ponto de abscissa* α*. Mas, como vimos na seção anterior não existe nenhum número racional que elevado ao quadrado resulte em* 2*.*

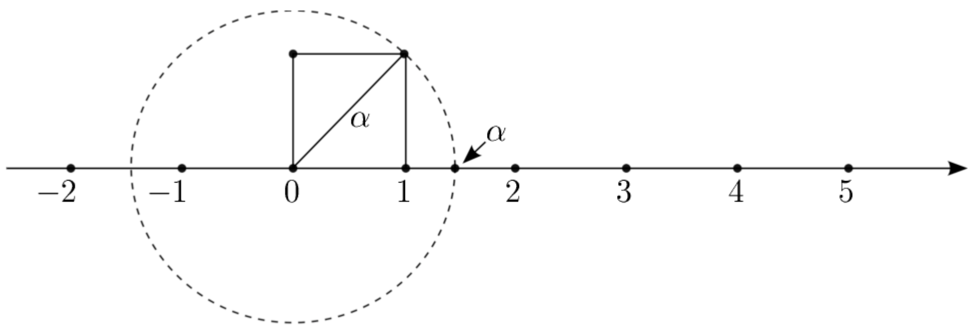

Figura 1.4: Ponto da reta sem abscissa racional

Definição 1.2.2. *Definimos o conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$*, como sendo o conjunto das abscissas de todos os pontos da reta. Desta forma, chamaremos a reta de* **Reta Real***.*

Neste caso, a abscissa α encontrada na Figura 1.4 é um número real. Note que, de acordo com esta definição, os números racionais são números reais. Os números reais que não são racionais são chamados de **números irracionais**. O número α encontrado no Exemplo 1.2.1 é um número irracional. Este número α é representado por $\sqrt{2}$ lê-se "raiz quadrada de 2", ou seja, um número que elevado ao quadrado resulta em 2.

Um número real muito interessante é o número obtido da seguinte forma. Considere uma circunferência cujo diâmetro mede 1. Posicione esta circunferência de forma que ela tangencie a reta no ponto de abscissa 0. Agora "desenrolamos" a circunferência sobre a reta para a direita na intenção de medir seu comprimento (veja a Figura 1.5). A abscissa do ponto obtido ao final deste processo é um número real que chama-se π e é aproximadamente $3,1415926\ldots$. O número π é um número irracional, mas não entraremos em detalhes aqui para não fugir aos objetivos deste texto.

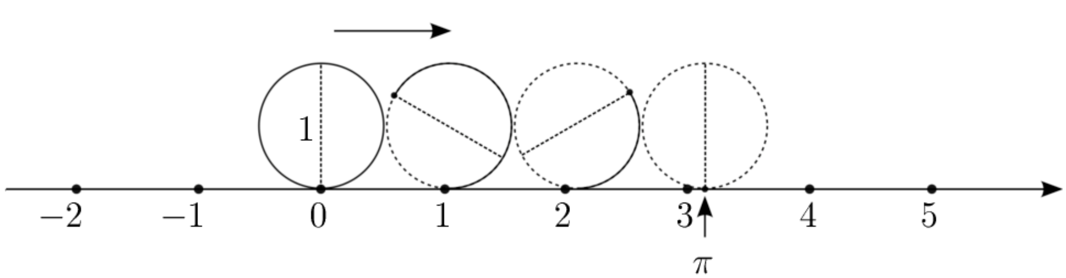

Figura 1.5: O número π sobre a Reta Real

Os números reais possuem a seguinte relação de ordem:

> Se x, y são números reais, dizemos que $x < y$ ou $y > x$ se o ponto de abscissa x está à esquerda do ponto de abscissa y.

Lê-se: $(x < y)$ "x é menor que y" e $(y > x)$ "y é maior que x".

Por exemplo, na Figura 1.5 temos $\pi > 3$.

Essa relação de ordem no conjunto dos números reais satisfaz a seguinte propriedade:

Tricotomia: Se x, y são números reais quaisquer, então, apenas uma das condições abaixo é verdadeira:

$$\text{ou } x > y, \text{ ou } x = y \text{ ou } x < y.$$

Denotamos $x \leq y$ (respectivamente, $y \geq x$) e lê-se "x é menor ou igual a y" (respectivamente, "y é maior ou igual a x"), quando $x < y$ ou $x = y$.

Em $\mathbb{R}$ estão definidas duas operações: soma $(+)$ e produto $(\cdot)$. A soma associa a cada par de números reais α, β o número real $\alpha + \beta$ e produto associa a cada par de números reais α, β o número real $\alpha \cdot \beta$.

A soma na Reta Real é feita da seguinte forma:
Sejam α, β números reais. Seja O o ponto de abscissa 0, A o ponto de abscissa α e B o ponto de abscissa β. Considere o segmento OB. Transladamos o segmento OB sobre a reta até que a extremidade que tinha abscissa 0 coincida com o ponto A. Neste caso, a extremidade e OB que tinha abscissa β vai estar sobre um ponto G da reta. O número real $\alpha + \beta$ é a abscissa do ponto G (veja a Figura 1.6).

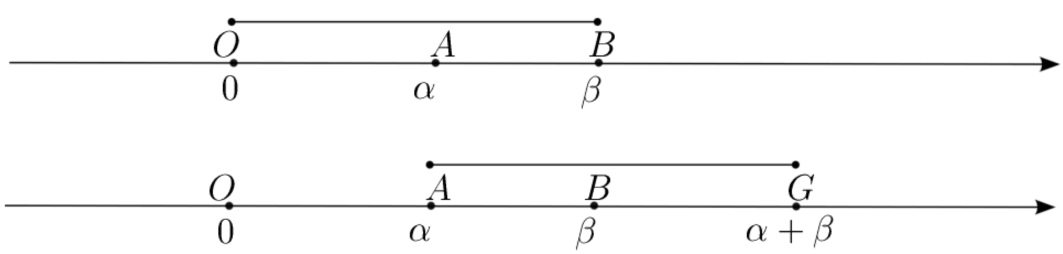

Figura 1.6: Soma na Reta Real

Todo número real α possui um inverso aditivo que é denotado por $-\alpha$ com a propriedade de que $\alpha + (-\alpha) = 0$. Neste caso, se $\alpha \neq 0$ então os pontos de abscissas

α e $-\alpha$ estão em lados opostos ao ponto de abscissa 0, ou seja, se $\alpha < 0$ então $-\alpha > 0$ e se $\alpha > 0$ então $-\alpha < 0$.

O produto na Reta Real é feito da seguinte forma:

1. $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ para qualquer que seja o número real α.

2. Sejam α, β números reais com $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Seja A o ponto de abscissa 0, B o ponto de abscissa 1, C o ponto de abscissa α e D o ponto de abscissa β (veja a Figura 1.7).

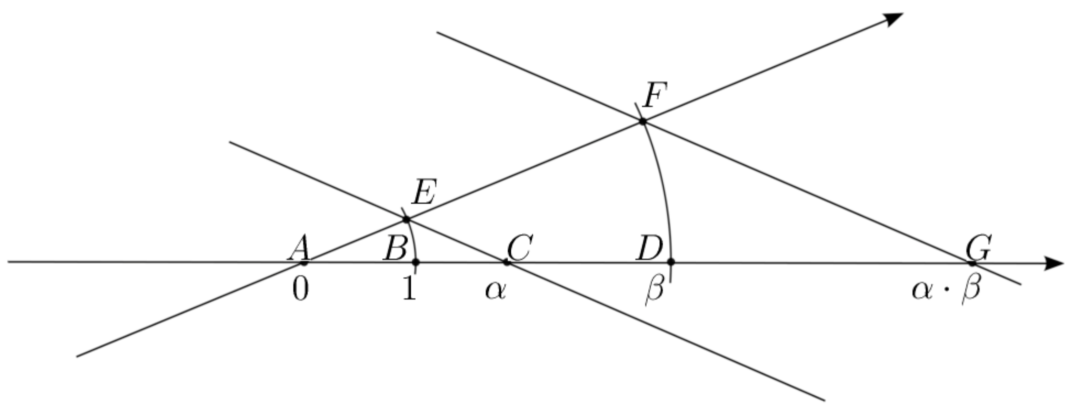

Figura 1.7: Produto na Reta Real

   Traçamos uma nova reta orientada passando por A e que não coincida com a reta anterior. Com a ajuda de um compasso encontramos os pontos E e F sobre esta nova reta de forma que a medida de AE seja 1 e a medida de de AF seja β. Traçamos a reta que passa por E e C e depois traçamos a reta paralela a esta e que passa pelo ponto F e assim encontramos o ponto G sobre a Reta Real. O número real $\alpha \cdot \beta$ será a abscissa do ponto G.

3. Se $\alpha < 0$ e $\beta > 0$ temos $\alpha \cdot \beta = -((-\alpha) \cdot \beta)$.

4. Se $\alpha > 0$ e $\beta < 0$ temos $\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot (-\beta))$.

5. Se $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ temos $\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta)$.

Com estas duas operações $\mathbb{R}$ é um corpo. Parte das propriedades de corpo já foram dadas na definição da soma e produto. Estas operações de soma e produto, quando restritas a $\mathbb{Q}$, coincidem com as operações de soma e produto definidas em $\mathbb{Q}$.

Visto que $\mathbb{R}$ possui a relação de ordem $(<)$ então $\mathbb{R}$ é dito um corpo ordenado. Esta relação de ordem quando restrita a $\mathbb{Q}$, coincide com a relação de ordem em $\mathbb{Q}$.

1.2.1 Aproximação de Números Irracionais por Números Racionais

1. **Aproximação por inteiros**

   Dado qualquer número real, se quisermos arredondarmos para um número inteiro mais próximo, o erro cometido será no máximo, igual a $\frac{1}{2}$. Por exemplo, se substituirmos $4,3$ por 4, ou $8,7$ por 9, ou $6,5$ por 7 o erro não ultrapassa $\frac{1}{2}$. Em particular se substituirmos um número irracional pelo inteiro mais próximo, o erro será menor do que $\frac{1}{2}$.

Teorema 1.2.1. *Para qualquer número irracional α, existe um único inteiro m tal que*

$$-\frac{1}{2} < \alpha - m < \frac{1}{2}.$$

Prova. Seja um segmento qualquer AB, de comprimento unitário, marcado na reta real, daí esse segmento conterá exatamente um número inteiro, sendo que A e B não são pontos inteiros. Vamos chamar A de $\alpha - \frac{1}{2}$ e B de $\alpha + \frac{1}{2}$, com α irracional, então A e B são irracionais (demonstração) ver [1], pág 62. Vamos provar que m é o único inteiro desse segmento, daí:

$$\alpha - \frac{1}{2} < m < \alpha + \frac{1}{2}$$

somando $-\alpha$, obtemos:

$$-\frac{1}{2} < m - \alpha < \frac{1}{2},$$

onde m - α está entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. O mesmo acontecerá com o número que se obtém trocando o seu sinal e, portanto, $\alpha - m$ também estará entre $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. O inteiro m é único. De fato, suponhamos que existisse outro inteiro n, satisfazendo

$$-\frac{1}{2} < \alpha - n < \frac{1}{2}$$

e esse n também satisfaria

$$-\frac{1}{2} < n - \alpha < \frac{1}{2}.$$

Somando α a essas duas desigualdades resulta em

$$\alpha - \frac{1}{2} < n < \alpha + \frac{1}{2}.$$

Daí, $-1 < m - n < 1$. Como $m - n$ é inteiro, segue que $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n$. Logo o segmento AB possui apenas um inteiro. $\square$

2. **Aproximação por Racionais**

   Todo número irracional pode ser aproximado por um número racional de denominador arbitrário.

Teorema 1.2.2. *Sejam β um número irracional qualquer e n um número inteiro positivo qualquer. Então existe um número racional de denominador n, digamos $\frac{m}{n}$, tal que :*

$$-\frac{1}{2n} < \beta - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

Demonstração. Seja β qualquer irracional e qualquer inteiro positivo n, e sabendo que $n \cdot \beta$ também é irracional, chamaremos de m, o inteiro mais próximo de $n \cdot \beta$, portanto pelo Teorema 1.2.1.

$$-\frac{1}{2} < n \cdot \beta - m < \frac{1}{2}.$$

Multiplicando todos os membros por n^{-1}, temos que :

$$-\frac{1}{2n} < \beta - \frac{m}{n} < \frac{1}{2n}.$$

$\square$

3. **Existem outras aproximações melhores**, como caracteriza os seguintes teoremas :

Teorema 1.2.3. *Quaisquer que sejam o número irracional β e o inteiro positivo k, existe um número racional $\frac{m}{n}$, cujo denominador não excede k, tal que :*

$$-\frac{1}{nk} < \beta - \frac{m}{n} < \frac{1}{nk}.$$

Ver Demonstração em [1], páginas 109 - 114 .

Teorema 1.2.4. *Para todo número irracional β, existem infinitos números racionais $\frac{m}{n}$, com $mdc(m,n)=1$, tais que:*

$$-\frac{1}{n^2} < \beta - \frac{m}{n} < \frac{1}{n^2}.$$

Ver Demonstração em [1], páginas 115 - 119.

Definição 1.2.3. *Um número real α é aproximável na ordem n por racionais, se existem uma constante $C>0$ e uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq 1}$ de racionais distintos, com $q_j > 1$ e $mdc(p_j,q_j)=1$ tais que $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{C}{q_j^n}$ para todo $j \geq 1$.*

Podemos dizer que um número real é bem aproximado por racionais se é aproximável na ordem n por racionais. Ver [3] para maiores esclarecimentos.

1.3 Números Algébricos e Transcendentes

Definição 1.3.1. *Qualquer solução de uma equação polinomial da forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$,$\forall\, i \in \{0,1,2,3,\cdots,n\}$ é chamado um número algébrico. Ou seja, um número α é algébrico quando é possível encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, da qual α seja raiz. No caso em que o coeficiente do termo de grau n é 1, esse número é chamado de **inteiro algébrico***. Um número real que não seja algébrico é chamado* **transcendente** *.*

Exemplo 1.3.2. *Todo número Racional é algébrico, pois se $\alpha = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $q \neq 0$, então α é raiz do polinômio $P(x) = qx - p$ e portanto é algébrico.*

Exemplo 1.3.3. *Nas equações $x-8=0$ e $x^2-5=0$, os números 8 e $\pm\sqrt{5}$ são respectivamente as raízes dessas equações, portanto são inteiros algébricos.*

Do mesmo modo, podemos listar alguns exemplos, tais como :

- $\mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ são inteiros algébricos, pois, são soluções da equação $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$;
- $\sqrt{\mathbf{3}}$ é um inteiro algébrico, pois, é solução da equação $\mathbf{x^2 - 3 = 0}$;
- $\sqrt[3]{5}$ é um inteiro algébrico, pois, é solução da equação $\mathbf{x^3 - 5 = 0}$;
- $\sqrt{\mathbf{5} + \sqrt{\mathbf{2}}}$ é um inteiro algébrico, pois, é solução da equação $\mathbf{x^4 - 10x^2 + 23 = 0}$.

Observação 1.3.4. *Podemos observar que todos os números inteiros são Inteiros Algébricos, no entanto, dos exemplos acima percebemos que existem Inteiros Algébricos que são Irracionais.*

Teorema 1.3.1. *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ um inteiro algébrico. Então α é inteiro ou irracional.*

Prova. Suponha por absurdo, que o número racional $\alpha = \frac{p}{q}$ com p, q $\in$ $\mathbf{N}^*$ e mdc (p, q) = 1 satisfaça a equação :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x^1 + a_0 = 0$$

daí,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0$$

$$\frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \cdots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$$\frac{p^n}{q^n} = -a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} - \cdots - a_1\frac{p}{q} - a_0$$

$$p^n = q^n\left(-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} - \cdots - a_1\frac{p}{q} - a_0\right)$$

$$p^n = q^{n-1}\cdot q\left(-a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} - a_{n-2}\frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} - \cdots - a_1\frac{p}{q} - a_0\right)$$

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1}\right)$$

substituindo

$$-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q - \cdots - a_1pq^{n-2} - a_0q^{n-1} \quad por \quad K$$

temos que: $p^n = qK$. Agora, seja r um fator primo de q, com $r \neq 1$ (observe que se q for primo podemos considerar $r = q$), então r divide p^n, logo, r divide p. Obtemos assim que, $r \mid q$ e $r \mid p$, o que contradiz o fato do mdc(p,q) = 1. O absurdo ocorre quando admitimos que $\frac{p}{q}$ é solução da equação. Portanto, a equação só poderá ter solução inteira ou irracional. $\square$

Exemplo 1.3.5. *Se* $x = \sqrt{\mathbf{5} + \sqrt{\mathbf{2}}}$ *é um algébrico, então podemos encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros, na qual* $\sqrt{\mathbf{5} + \sqrt{\mathbf{2}}}$ *seja raiz. De fato,*

$$x = \sqrt{5 + \sqrt{2}} \Rightarrow x^2 = 5 + \sqrt{2}$$

resultando em

$$x^2 - 5 = \sqrt{2} \Rightarrow \left(x^2 - 5\right)^2 = 2$$

$$x^4 - 10x^2 + 25 = 2$$

$$x^4 - 10x^2 + 23 = 0.$$

Logo, $x^4 - 10x^2 + 23 = 0$ *é a equação procurada.*

1.3.1 Enumerabilidade do conjunto dos Números Algébricos

Nesta seção, mostraremos que o conjunto dos números algébricos é enumerável, ou seja, que existe uma bijeção dos números naturais no conjunto dos números algébricos.

Definição 1.3.6. *Um conjunto A é enumerável se seus elementos podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números naturais.*

Exemplo 1.3.7. *O conjunto dos números pares positivos é enumerável. O conjunto dos números pares pode ser escrito da forma* $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ *e a função*

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{P}$$

$$n \mapsto 2n$$

faz uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{P}$ *e* $\mathbb{N}$*. De fato,*

(i) f *é injetiva, pois, suponha que* $f(x) = f(y)$*. Queremos mostrar que* $x = y$*, mas* $2x = 2y$*, logo* $x = y$*;*

(ii) f *é sobrejetiva, ou seja* $f(\mathbb{N}) = P$*. Mas* $f(\mathbb{N}) \subset P$ *pela definição de imagem e* $P \subset f(\mathbb{N})$*, pois, seja* $b \in P$ *qualquer, então* $b = 2n_0$ *para algum* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Vamos*

tomar $x = n_0$, daí $f(x) = f(n_0) = 2n_0 = b$, ou seja $b \in f(\mathbb{N})$, Portanto $b = f(x)$. Logo f é sobrejetiva. De (i) e (ii) f é bijetiva, ou seja, P é enumerável porque podemos dispor seus elementos em correspondência biunívoca com os números naturais.

O conjunto dos números Racionais é enumerável. Vamos mostrar primeiramente que os Racionais positivos é enumerável depois mostraremos os Racionais não positivos.

Seja o quadro abaixo :

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{1} \arrow[r] & \frac{1}{2} \arrow[dl] & \frac{1}{3} \arrow[r] & \frac{1}{4} \arrow[dl] & \frac{1}{5} \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{2}{1} \arrow[d] & \frac{2}{2} \arrow[ur] & \frac{2}{3} \arrow[dl] & \frac{2}{4} \arrow[ur] & \frac{2}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\frac{3}{1} \arrow[ur] & \frac{3}{2} \arrow[dl] & \frac{3}{3} \arrow[ur] & \frac{3}{4} \arrow[dl] & \frac{3}{5} \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
\frac{4}{1} \arrow[d] & \frac{4}{2} \arrow[ur] & \frac{4}{3} \arrow[dl] & \frac{4}{4} \arrow[ur] & \frac{4}{5} \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que todos os números da forma $\frac{p}{q}$ com p e q $\in$ $\mathbb{N}$ e $q \neq 0$ aparecem no quadro acima. Seguindo as flechas temos uma certa ordenação desse conjunto, daí temos que:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^*$$

$$n \mapsto f(n)$$

Donde $f(n)$ é o n-ésimo elemento quando encontramos seguindo as flechas. Portanto f é uma bijeção, logo: O conjunto dos Racionais positivos é enumerável. Como $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$, então a demonstração do item (i) do teorema abaixo mostra que todo os Racionais são enumeráveis.

Teorema 1.3.2. *i) A união de dois conjuntos enumeráveis é enumerável;*

(ii) A união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável ;

(iii) A união enumerável de conjuntos finitos é enumerável;

(iv) A união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável.

Demonstração (i). Seja A $= \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ um conjunto finito e B $= \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ um conjunto enumerável. O conjunto $A \cup B$ é enumerável, pois bastamos considerar a correspondência biunívoca entre $A \cup B$ e $\mathbb{N}$ expressa por:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1, & \cdots, & a_n, & b_1, & b_2, & b_3, \cdots & \\ \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & & n & n+1 & n+2 & n+3 & \cdots \end{array}$$

(ii). Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, \}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ dois conjuntos enumeráveis, daí $A \cup B$ é enumerável, pois temos a seguinte correspondência biunívoca:

$$\begin{array}{cccccc} a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, \cdots & \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

(iii). Sejam $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ conjuntos enumeráveis , queremos mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ é enumerável, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Vamos usar o princípio da indução finita. Observa-se que para n = 1 a propriedade é satisfeita, pois temos A_1 e A_1 é enumerável. Para n = 2 também é válida, pelo item (ii). Suponhamos que seja válida para n = k, ou seja $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$ são enumeráveis, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k$ é enumerável e provaremos que seja válida para n = k + 1. Note que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}$ $= (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k)\ \cup A_{k+1}$. Considere A $= (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k)$, daí, temos que: $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1} = A \cup A_{k+1}$. Como A é enumerável pela hipótese de indução segue que $A \cup A_{k+1}$ é enumerável por (ii), então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}$ é enumerável. Logo, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n$ é enumerável, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(iv). Seja $\{A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n, \cdots\}$ um conjunto enumerável onde cada A_i é um conjunto finito, para quaisquer i $\in \{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$. Queremos mostrar que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ é enumerável. Suponha que $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots a_{1r_1}\}$, $A_2 = \{a_{21}, A_{22}, a_{23}, \cdots, a_{2r_2}\}$ e $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \cdots, a_{nr_n}\}$.

Então,

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \{a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1r_1}, a_{21}, A_{22}, \cdots, a_{2r_2}, a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nr_n}, \cdots\}$.
Definamos a seguinte corresponência entre $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ e $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}, & \cdots & a_{1r_1}, & a_{21}, & \cdots & a_{2r_2}, & \cdots, & a_{n1}, & \cdots, & a_{nr_n}, & \cdots \\
\updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & \updownarrow \\
1, & \cdots & r_1 & r_1{+}1, & \cdots & r_1{+}r_2 \cdots, & & (r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} + 1), & & & \cdots r_{n+1} \cdots
\end{array}$$

Logo, a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos é enumerável. $\square$

Teorema 1.3.3. *O conjunto de todos os números algébricos é enumerável.*

Prova. Considere a família de conjuntos $\{P_n\}$, onde P_n é o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros. Definamos também a família de conjuntos $\{A_n\}$ onde A_n são as raízes complexas de $p(x)$ com $p(x) \in P_n$ e note que os elementos de A_n são números algébricos.

Agora fixado um $j \in \mathbb{N}$ sabemos que P_j tem um número finito de elementos. Como um polinômio de grau n possui no máximo n raízes complexas, concluimos que A_j também é finito. Definamos agora A $= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e observe que os elementos de A são números algébricos. Assim pelo Teorema 1.3.2, podemos afirmar que A é enumerável. Mostraremos agora que A coincide com o conjunto de todos os números algébricos.

De fato, seja α um número algébrico. Sabemos da definição de número algébrico que α é raiz de algum polinômio $g(x) \in P_k$ para algum k $\in \mathbb{N}$. Assim pela definição da família $\{A_n\}$, temos que $\alpha \in A_k$ e, consequentemente $\alpha \in A$. Portanto, dessa forma o conjunto A nada mais é do que o conjunto de todos os números algébricos, daí, A é enumerável. $\square$

Observação: Se A é enumerável e $B \subset A$ é um conjunto infinito, então B é enumerável, pois, como A é enumerável, existe uma correspondência biunívoca entre A e $\mathbb{N}$, então basta considerar a restrição $f\,|_B \colon B \to \mathbb{N}$. Com isso, concluimos que o conjunto dos números inteiros algébricos é enumerável.

1.3.2 A Não Enumerabilidade do Conjuntos dos Números Transcendentes

Vimos alguns exemplos de números algébricos e, além disso que o conjunto de tais números é enumerável. Uma pergunta natural neste momento é sobre a existência de números transcendentes, ou seja, de números que não seja raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Mostraremos agora a existência desses números, mais ainda, mostraremos que o conjunto dos números transcendentes não é enumerável.

Teorema 1.3.4. *O conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais não é enumerável.*

Prova. Demonstraremos que o conjunto dos números reais $x \in [0, 1)$, isto é, $0 \leq x \leq 1$ não é enumerável, segue que $\mathbb{R}$ também não é enumerável. Note que os números $x \in [0, 1)$ tem a seguinte representação decimal:

$$0, a_1 a_2 a_3 \cdots \tag{1.4}$$

onde a_i é um dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9. Mas alguns números possui duas representações da forma (1.4). Por exemplo o Número $\frac{1}{2}$ é igual a $0, 500 \cdots$ ou $0, 499 \cdots$. Para tais números, eliminamos os decimais que a partir de uma certa ordem todos são 9. Suponhamos que os decimais do tipo (1.4), ou que os números reais no intervalo $[0, 1)$, formam um conjunto enumerável.

$$0, a_{11} a_{12} a_{13} \cdots$$

$$0, a_{21} a_{22} a_{23} \cdots$$

$$0, a_{31} a_{32} a_{33} \cdots$$

$$\cdots$$

Considerando agora, o decimal $0, b_1 b_2 b_3 \cdots$, onde os b_is são diferentes de 0 ou de 9 e $b_1 \neq a_{11}$, $b_2 \neq a_{22}$,$b_3 \neq a_{33} \cdots$. Claramente $0, b_1 b_2 b_3 \cdots \neq 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \cdots$, para todo n, pois $b_n \neq a_{nn}$. Logo $0, b_1 b_2 b_3 \cdots$ não está no quadro acima, o que é um absurdo, já que é um número real entre 0 e 1, o que nos leva a concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável. $\square$

O conjunto dos números reais pode ser considerado como a união do conjunto dos números algébricos com o conjunto dos números transcendentes. Como o conjunto $\mathbb{R}$ não é enumerável e o conjunto dos números algébricos é enumerável, concluimos que o conjunto dos números trancendentes é não enumerável.

Nos próximos capítulos, daremos alguns exemplos de números trancendentes.

Capítulo 2

A Transcendência dos Números de Liouville

Por volta de 1851, foi possível provar que existem números transcendentes, graças ao matemático françês Joseph Liouville[1]. Ele construiu uma propriedade, onde todos os números algébricos tem que satisfazê-la e depois construiu um número totalmente artificial, chamado **Número de Liouville**, no qual não satisfaz essa propriedade, daí surgiu os primeiros números transcendentes.

2.1 Números de Liouville

Teorema 2.1.1. (Teorema de Liouville): *Se α é algébrico de grau n então existe uma constante $A = A(\alpha) > 0$, tal que*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^n},$$

para todo $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $q \neq 0$ e $mdc(p, q) = 1$.

Prova. Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ um polinômio minimal de α. Então existe $\delta > 0$ tal que $[\alpha - \delta, \alpha + \delta] \cap \mathbb{R}_f = \{\alpha\}$, onde $\mathbb{R}_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ com } f(x) = 0\}$, ou

[1]Joseph Liouville: matemático francês (Saint-Omer 1809 - Paris 1882). Em 1836, fundou o Journal des Mathematiques Pures et Appliquées que exerceu profunda influência em seu século. Foi o primeiro a determinar um número transcendente.

seja, a existência de um tal δ se segue de que a equação polinomial tem no máximo n raízes reais: portanto δ pode ser qualquer número menor que a menor das distâncias de α às demais raízes reais.

Dado $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $q > 1$, temos que:

Caso 1: $\frac{p}{q} \notin [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ então $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \delta \geqslant \frac{\delta}{q^n}$;

Caso 2: $\frac{p}{q} \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, sabemos que a função f é contínua e derivável no intervalo com extremos α e $\frac{p}{q}$. Logo, pelo teorema do valor médio, existe γ entre α e $\frac{p}{q}$ tal que $f(\alpha) - f\left(\frac{p}{q}\right) = f'(\gamma)(\alpha - \frac{p}{q})$. Como $f(\alpha) = 0$, segue que $\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\gamma)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Como f' é contínua no intervalo fechado com extremos α e $\frac{p}{q}$, então podemos tomar M tal que $|f'(x)| \leqslant M$, para todo x nesse intervalo, onde M é o máximo, nesse intervalo, daí:

$$(*) \qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\gamma)| \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|.$$

Sabemos que:

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\frac{p^2}{q^2} + \cdots + a_n\frac{p^n}{q^n}\right| \neq 0$$

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n}{q^n}\right|$$

$$(**) \qquad \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{|a_0q^n + a_1pq^{n-1} + \cdots + a_np^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n}$$

pois,

$$|a_0q^n + \cdots + a_np^n| \in \mathbb{Z}^*$$

De $(*)$ e $(**)$, obtemos :

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \leqslant M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$$

$$\frac{1}{q^n} \leqslant M \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

$$\frac{1}{M \cdot q^n} \leqslant \left| \alpha - \frac{p}{q} \right|$$

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geqslant \frac{1}{M \cdot q^n}$$

Portanto,

$$A = min\{\delta, \frac{1}{M}\}$$

Então,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{A}{q^n}, \quad \forall \quad \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

□

Um número real α é chamado número de Liouville, se existe uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j \geq 1} \in \mathbb{Q}$ infinita, $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tal que

$$\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}, \qquad \forall j \geq 1.$$

Proposição 2.1.1. *A sequência (q_j) é ilimitada.*

Prova. Supomos que $\left| \alpha - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}$, $\forall j \geq 1$

Suponha que a sequência (q_j) é limitada, isto é, $q_j \leq M$, então:

$$|\alpha q_j - p_j| < q_j \leq M$$

da desigualdade triangular inversa, temos:

$$|p_j| - |\alpha q_j| \leq M$$

$$\Rightarrow |p_j| \leq M + |\alpha| \, |q_j| \leq (|\alpha| + 1) \, M$$

É absurdo, pois existem infinitos $\frac{p_j}{q_j}$'s. Logo, a sequência (q_j) é ilimitada. □

2.2 Prova da Transcendência dos Números de Liouville

Teorema 2.2.1. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Prova. Suponha que α é um número de Liouville e algébrico de grau n, então existe $\left(\dfrac{p_j}{q_j}\right)$ tais que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}, \quad \forall j \geq 1 \tag{2.1}$$

Pelo Teorema de Liouville

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| > \frac{A}{q_j^n}. \tag{2.2}$$

Então, de (2.1) e (2.2), temos que:

$$\frac{A}{q_j^n} < \frac{1}{q_j^j} \quad \Rightarrow \quad q_j^{j-n} < \frac{1}{A}$$

Então (q_j) seria limitada, contradizendo a proposição 2.1.1, absurdo, pois supomos que o número de Liouville seria algébrico. Logo, todo número de Liouville é transcendente. $\square$

Teorema 2.2.2. *O número* $L = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000000} + \cdots = 0,1100010\cdots$ *é transcendente.*

Observe que os números 1's estão nas posições dos fatoriais, ou seja os 1's estão nas casas decimais 1!, 2!, 3!, 4!, 5!, respectivamente e as outras casas decimais são preenchidas com zeros.

Prova. Basta provar que L é uma número de Liouville.

Defina

$$p_j = \sum_{n=1}^{j} 10^{j!-n!} \qquad e \qquad q_j = 10^{j!} \in \mathbb{Z}$$

daí, temos:

$$\frac{p_j}{q_j} = \sum_{n=1}^{j} 10^{-n!}$$

Portanto,

$$\left|L - \frac{p_j}{q_j}\right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!}$$

Para provarmos que L é transcendente, basta provar que $\displaystyle\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} < \frac{1}{q_j^j} = \frac{1}{10^{j!j}}$

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} = \frac{1}{10^{(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+2)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!}} + \cdots$$

$$= \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \frac{1}{10^{(j+3)!-(j+1)!}} + \cdots\right)$$

Observe que: $(j+k)! - (j+1)! > k-1$, com $k \geq 2$

De fato

$$(j+1)! \cdot [(j+k)\cdots(j+2) - 1] > k-1$$

Daí:

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} < \frac{1}{10^{(j+1)!}} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{10^{(j+1)!}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{10^{(j+1)!}}.$$

Então $\displaystyle\sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} < \frac{1}{10^{(j+1)!-1}}$. Portanto $\left|L - \dfrac{p_j}{q_j}\right| < \dfrac{1}{10^{(j+1)!-1}}$

Logo, basta mostrar que $(j+1)! - 1 \geq j!j$.

Daí: $(j+1) \cdot j! - 1 = j \cdot j! + j! - 1 \geq j \cdot j!$

Portanto,

$$\left|L - \frac{p_j}{q_j}\right| = \sum_{n=j+1}^{\infty} 10^{-n!} < \frac{1}{10^{j!j}}$$

Logo, L é um número transcendente. □

Proposição 2.2.1. *Qualquer número da forma*

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}},$$

onde a_k é um dos algarismos de 1 a 9, é um número de Liouville.

Prova. Considere os números inteiros $p_j = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_k}{10^{(j!-k!)}}$ e $q_j = 10^{j!} > 0$. Temos que,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| = \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}} = \left(a_{j+1} + \frac{a_{j+2}}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \cdots\right) \leq$$

$$\leq \frac{9}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10^{(j+2)!-(j+1)!}} + \cdots\right) \tag{2.3}$$

Note que $10^{(j+k)!-(j+1)!} > 10^{k-1}$ para todo $k > 1$. Daí podemos majorar (2.3) como

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| \leq \frac{9}{10^{(j+1)!}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \cdots\right) = \frac{9}{10^{(j+1)!}} \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{10^{j!j} \cdot 10^{j!}} < \frac{1}{p_j^j}$$

Como todo número de Liouville é transcendente, segue que α é transcendente, pois α é um número de Liouville. $\square$

Com o avanço dos métodos computacionais, constatou-se que por uma margem de erro extremamente pequena, o número de Liouville não satisfaz a equação:

$$10x^6 - 76x^3 - 190x + 21 = 0$$

pois, substituindo a indeterminada x pelo número de Liouville,$0,1100010\cdots$ a equação dará $-0,0000000059$ muito próximo de ZERO.

Proposição 2.2.2. *Quase todo número é transcendente.*

Demosntração em [4] página 67.

Alguns anos depois do surgimento do chamado Número de Liouville, Georg Cantor[2] provou que quase todos os números são transcendentes . Por exemplo, se pegarmos a reta real e colocarmos todos os números algébricos colorido de vermelho e colocarmos todos os transcendentes de outra cor, digamos amarelo, nós vamos enxergar a reta real toda amarela. Do ponto de vista de probabilidade, se pegarmos

[2]Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor nasceu em São Petersburgo, na Rússia em 1845, e faleceu em Halle, Alemanha, em 1918. Deixou a Rússia ainda menino, emigrando com a família para a Alemanha. Estudou em Zurique, Berlim e Göttingen. Em 1872 foi nomeado professor assistente de matemática em Halle, assumindo a direção da cadeira no ano de 1879.

um número ao acaso, a probabilidade dele ser transcendente é 1. Os números transcendentes existem infinitamente, porém é muito difícil e complicado afirmar se tal número é transcendente.

Capítulo 3

A Transcendência do Número de Euler

3.1 História do Número de Euler

Jakob Bernolli tentava encontrar um valor para a seguinte expressão, que é muito usada no cálculo de juros compostos:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

o qual encontrou um valor aproximado, que vale aproximadamente $2,71828182845904$. Um pouco mais tarde, o matemático suíço Leonhard Euler demonstrou que tal número é irracional, o qual em sua homenagem levou o nome de número de Euler. A escolha da letra e para representar esse número deve-se a Euler, essa notação apareceu pela primeira vez na publicação *Euler's Mechanica* em 1736. Não se sabe quais foram as verdadeiras razões para essa escolha, mas especula-se que seja porque e é a primeira letra da palavra exponencial.

As origens desse número não são tão claras, mas há indícios de que já era conhecido pelos matemáticos pelo menos meio século antes da invenção do cálculo. Uma explicação é de que teria aparecido primeiro, ligado a uma fórmula para o cálculo de juros compostos, como foi mencionado anteriormente.

Exemplo 3.1.1. *Para um determinado capital C de valor R\$ 1,00 for composto n vezes por ano, durante um ano sobre uma taxa de juros de 1% ao ano. No final, qual será o Montante M, sendo que n aumente sem limites?*

A tabela abaixo mostra alguns resultados usando a Fórmula $M = C \cdot (1 + \frac{r}{n})^{n \cdot t}$:

$Capital(C)$	$NdeVezes(n)$	$Tempo(t)$	$Juros(r)$	$Montante(M)$
1	45	1	1	2,688681171
1	90	1	1	2,703332461
1	135	1	1	2,70828185
1	180	1	1	2,710769298
1	225	1	1	2,712265705
1	325	1	1	2,71411162
1	425	1	1	2,715090736
1	625	1	1	2,716110388
1	1625	1	1	2,717445926
1	4625	1	1	2,717988066
1	5625	1	1	2,718040277
1	10625	1	1	2,718154005
1	20625	1	1	2,718216019
1	1000625	1	1	2,718293008
1	100000625	1	1	2,718281997
1	10000000625	1	1	2,718298804

Daí, observa-se que quanto mais aumenta-se o valor de n, o valor de M chega mais próximo da constante de Euler.

O número e também pode ser escrito como a soma das séries infinitas:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2(n-1)!}, \qquad e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n!}, \qquad e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5n!}, \qquad e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{15n!}$$

E de outras relações.

A história do número e confunde-se com a história do cálculo integral e diferencial. Foi na tentativa de calcular a área da curva $y = \dfrac{1}{x}$ que inspirou Newton e Leibnitz a estudarem os processos infinitos, e assim toparem com o cálculo dessa constante.

Essa constante é definida como o número K, tal que a área do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$ e acima do eixo x, para $1 \leq x \leq$ K, vale 1. Ou seja, o número e pode ser definido como o único número K tal que:

$$\int_1^K \frac{dt}{t} = lnK = 1.$$

3.1.1 Fatos Cronológicos

- Em **1618** o matemático escocês John Napier (Neper) encontra uma constante cujo valor aproximado é 2, 71828, no seu trabalho com os logaritmos [1];

- Em **1727** Euler começa a representar esse número pela letra e;

- Em **1748** Euler consegue calcular o valor do tal número com 23 casas decimais. Até hoje é lhe atribuída a descoberta da famosa igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, considerada uma das mais belas fórmulas matemáticas;

- Em **1873** Charles Hermite prova que e é um número transcendente [2];

- Em **2007** O valor de e é calculado com 10^{11} casas decimais (evidentemente, com auxílio de computadores e software adequado).

3.2 Prova da Transcendência do Número de Euler

Como já foi dito anteriormente Liouville foi o primeiro matemático a conseguir construir um número transcendente. Passando duas décadas depois pouca coisa nova e significante foi acrescentada à Teoria dos Números Transcendentes, até que, em 1873, os estudos de Hermite[3] sobre funções contínuas algébricas o levaram a estabelecer e provar a transcendência do número de Euler, base dos logaritmos neperianos.

[1]Esse trabalho estendeu-se por mais de vinte anos e levou à publicação de um livro em 1614, que revolucionou a Matemática da época.

[2]No qual, faz parte desse trabalho.

[3](Charles Hermite, nasceu em Dieuze , França, 1822 - morreu em Paris, 1901) matemático françes. Ensinou na Escola Politécnica e na Sorbonne, em Paris e membro da Academia de Ciências de Paris. Em 1873 publicou, no seu relatório sobre a função exponencial, a primeira demonstração de que o número e (também chamado Euler ou constante Napier) é um número transcendental.

Como é comum na história da matemática, a demonstração de Hermite sofreu um processo de simplificação, por outros matemáticos, ao longo dos anos. Hilbert[4] deu uma certa simplificada na demonstração da transcendência de e.

Antes da demonstração propriamente dita, vamos abordar dois pequenos Lemas que serão úteis no decorrer do processo.

Lema 3.2.1. *Seja $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja p um número inteiro positivo menor que o grau de $f(x)$. Então, para $i \geq p$*

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{f(x)}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros e divisíveis por p.

Prova. Uma vez que a derivada é um operador linear é suficiente mostrarmos que

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right)$$

tem coeficiente inteiro e divisível por p. Se tivermos $i > j$ esta derivada será nula e não há nada a mostrar, por isso vamos considerar apenas o caso $i \leq j$. Lembrando que $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ podemos estabelecer, de maneira recursiva, o seguinte resultado:

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{x^j}{(p-1)!}\right) = \frac{j!}{(j-i)!(p-1)!}x^{j-i}$$

Vamos mostrar que $\dfrac{j!}{(j-i)!(p-1)!}$ é um número inteiro e divisível por p. Com efeito temos:

$$\frac{j!}{(j-i)!(p-1)!} = \frac{j!i!}{(j-i)!i!(p-1)!}.$$

Mas $\dfrac{j!}{(j-i)!i!} = \binom{j}{i}$ é um dos coeficientes do desenvolvimento de $(a+b)^j$ sendo portanto um número inteiro, digamos k. Agora, lembrando que $i \geq p$ podemos escrever:

[4]David Hilbert: matemático alemão (Königsberg 1862 - Göttingen 1943). Seus trabalhos versam sobre a teoria dos números, a álgebra, a análise e a geometria. Foi um dos fundadores do método axiomático, concebendo os termos fundamentais como seres lógicos, que tem como únicas propriedades as que lhes são atribuídas pelos axiomas.

$$\frac{j!}{(j-i)!(p-1)!} = \frac{k \cdot i \cdot (i-1)(i-2)(i-3)\cdots p(p-1)!}{(p-1)!} = k \cdot i(i-1)(i-2)\cdots p.$$

Logo,

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{f(x)}{(p-1)!}\right)$$

é um polinômio com coeficientes inteiros e divisíveis por p. $\square$

Lema 3.2.2. *Considere a sequência $\{a_p\}$ definida por*

$$a_p = \frac{\mathrm{e}^n n^p (M)^p}{(p-1)!},$$

onde M é uma constante. Então $\lim_{p\to\infty} a_p = 0$.

Prova: Para provar esse Lema vamos usar o seguinte fato: Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é convergente então $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Com isso é suficiente mostrarmos que $\sum_{p=1}^{\infty} a_p$ converge. Para isto temos que,

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^n n^p (M)^p}{(p-1)!} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{e^n (n \cdot M)^p}{(p-1)!} = e^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(M \cdot n)^{p+1}}{p!} = e^n \sum_{p=0}^{\infty} c_p.$$

Pelo teste da razão é suficiente mostrarmos que $\lim_{p\to\infty} \left|\frac{c_{p+1}}{c_p}\right| < 1$. Calculemos este limite:

$$\lim_{p\to\infty} \left|\frac{c_{p+1}}{c_p}\right| = \lim_{p\to\infty} \left[\frac{(nM)^{p+1} nM}{(p+1)p!} \cdot \frac{p!}{(nM)^{p+1}}\right] = \lim_{p\to\infty} \frac{nM}{(p+1)} = 0 < 1.$$

Assim a série converge e temos que $\lim_{p\to\infty} a_p = 0$. $\square$

Vamos agora expor a demonstração da transcendência do número de Euler, o qual é um dos objetivos desse trabalho.

Teorema 3.2.1. *O número de Euler é transcendente.*

Prova. Considere $f(x)$ um polinômio de grau r com coeficientes reais. Seja

$$F(x) = f(x) + f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + f^{(3)}(x) + \cdots + f^{(r)}(x), \tag{3.1}$$

onde $f^{(i)}(x)$ representa a i-ésima derivada de $f(x)$ em relação a x. Daí, temos que,

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = e^{-x}f^{(1)}(x) - e^{-x}f(x) + e^{-x}f^{(2)}(x) - e^{-x}f^{(1)}(x) + \cdots +$$

$$+e^{-x}f^{(r)}(x) - e^{-x}f^{(r-1)}(x) + e^{-x}f^{(r+1)}(x) - e^{-x}f^{(r)}(x)$$

Efetuando todos os cancelamentos e lembrando que $f^{(r+1)}(x) = 0$ teremos a seguinte relação:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}F(x)\right) = -e^{-x}f(x) \tag{3.2}$$

Uma vez que $F(x)$ é um polinômio e a função exponencial é infinitamente derivável podemos afirmar que $e^{-x}F(x)$ também é infinitamente derivável e portanto vale o Teorema do Valor Médio em qualquer intervalo da reta. Em particular, se tomarmos o intervalo $[0, k]\,, k > 0$, teremos:

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -k e^{-k\theta_k} f(k\theta_k),$$

onde θ_k é um número real que depende de k e está entre 0 e 1. Multiplicando esta última igualdade por e^k, obtemos:

$$F(k) - e^k F(0) = -k e^{k(1-\theta_k)} f(k\theta_k) \tag{3.3}$$

Defina agora

$$\epsilon_k = F(k) - e^k F(0) = -k e^{k(1-\theta_k)} f(k\theta_k). \tag{3.4}$$

Vamos supor por absurdo, que e seja um número algébrico. Então existem constantes inteiras $c_0, c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n$ tais que,

$$c_n e^n + c_{n-1}e^{n-1} + c_{n-2}e^{n-2} + \cdots + c_{1e} + c_0 = 0. \tag{3.5}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que, $c_0 > 0$. Observe agora que:

$$c_1\epsilon_1 = c_1F(1) - c_1 eF(0)$$

$$c_2\epsilon_2 = c_2F(2) - c_2e^2F(0)$$

$$c_3\epsilon_3 = c_3F(3) - c_3e^3F(0)$$

$$\vdots$$

$$c_n\epsilon_n = c_nF(n) - c_ne^nF(0)$$

Somando todas essas igualdades teremos:

$$c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 + \cdots + c_n\epsilon_n = c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) - \beta,$$

onde $\beta = F(0)(c_1e + c_2e^2 + c_3e^3 + \cdots c_ne^n)$. Mas, por (3.5), podemos concluir que $\beta = -c_0F(0)$ e portanto ficamos somente com:

$$c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 + \cdots + c_n\epsilon_n = c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) \tag{3.6}$$

Uma vez que $f(x)$ é um polinômio qualquer, vamos continuar nossa argumentação fazendo

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)!}x^{p-1}\left[(1-x)(2-x)\cdots(n-x)\right]^p,$$

onde p é um número primo tal que $p > n$ e $p > c_0$.

Note que

$$(1-x)(2-x)(3-x)\cdots(n-x) = n! + \sum_{j=1}^{n} d_jx^j, \quad com \quad d_j \in \mathbb{Z}$$

E portanto

$$f(x) = \frac{(n!)^px^{p-1}}{(p-1)!} + \sum_{j=p}^{p(n+1)-1} \frac{b_jx^j}{(p-1)!} \quad com \quad b_j \in \mathbb{Z} \tag{3.7}$$

Observe que $x = 1, 2, 3, 4, \cdots, n$ é raiz de multiplicidade p do polinômio $f(x)$. Daí teremos que:

$$f(x) = f^{(1)}(x) = f^{(2)}(x) = \cdots = f^{(p-1)}(x) = 0, \quad para \quad x = 1, 2, 3, \cdots, n \tag{3.8}$$

Aplicando o resultado do Lema 3.2.1 ao polinômio $f(x)$ podemos concluir que, para $x = 1, 2, 3, \cdots, n, f^{(p)}(x), f^{(p+1)}(x), \cdots, f^{(n(p+1)-1)}(x)$ assume somente valores múltiplos de p. Podemos afirmar que $F(x)$é múltiplo de p para $x = 1, 2, 3, \cdots, n$ e portanto

$$c_1F(1) + c_2F(2) + c_3F(3) + \cdots + c_nF(n) \tag{3.9}$$

é múltiplo de p.

Olhemos agora para $F(0)$.

Observe inicialmente que $x = 0$ é uma raiz de multiplicidade $p-1$ do polinômio $f(x)$. Deste fato segue que

$$f(0) = f^{(0)}(0) = f^{(1)}(0) = \cdots = f^{(p-2)}(0). \tag{3.10}$$

Para $i \geq p$, $f^{(i)}(0)$ é um múltiplo de p, pelo Lema 3.2.1. Porém, da relação (3.7), temos que $f^{(p-1)}(0) = (n!)^p$. Uma vez que $p > n$ e p é primo, podemos concluir que p não divide $(n!)^p$ e portanto $f^{(p-1)}(0)$ é um número não divisível por p. Agora note que $F(0)$ é uma soma de inteiros, onde todos eles, exceto um são divisíveis por p. Logo p não divide $F(0)$ e, uma vez que $p > c_0$, p não divide $c_0F(0)$ e podemos finalmente afirmar que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) \tag{3.11}$$

é um número inteiro não divisível por p.

Guardemos esta informação e trabalharemos agora o lado esquerdo da equação (3.6). Recordemos a definição abaixo dada por:

$$\epsilon_k = -k e^{k(1-\theta_k)} f(k\theta_k).$$

$$\epsilon_k = -k e^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} \left[|1 - k\theta_k| \, |2 - k\theta_k| \cdots |n - k\theta_k| \right]^p .$$

Em virtude da definição de $f(x)$ teremos então:

$$|\epsilon_k| = \frac{e^{k(1-\theta_k)}}{(p-1)!} k^p \theta_k^{p-1} \left[|1 - k\theta_k| \, |2 - k\theta_k| \cdots |n - k\theta_k| \right]^p$$

Agora observe que, como $0 < k \leq n$ e $0 < \theta_k < 1$, para todo $i \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < i \leq n$ vale a seguinte relação:

$$|i - k\theta_k| \leq |i| + |k\theta_k| \leq 2n$$

E desta última desigualdade segue que

$$[|1 - k\theta_k|\,|2 - k\theta_k| \cdots |n - k\theta_k|]^p \leq (2^n n^n)^p = (M)^p\,, \tag{3.12}$$

onde $M = 2^n n^n$ é uma constante.

Como $k \leq n$ e $0 < \theta_k < 1$ teremos:

(i) $\quad k\,(1-\theta_k) \leq n\,(1-\theta_k) \leq n \quad \Rightarrow \quad e^{k(1-\theta_k)} \leq e^n;$

(ii) $\quad k^p \leq n^p;$

(iii) $\quad \theta_k^{p-1} \leq 1.$

Destas três desigualdades e da desigualdade (3.12) nos permite escrever

$$|\epsilon_k| \leq \frac{e^n n^p\,(M)^p}{(p-1)!} \quad para \quad k \leq n.$$

Sabendo que o conjunto dos números primos é infinito e em virtude do Lema 3.2.2 podemos fazer com que os termos $\epsilon\,'s$ sejam tão próximo de zero quanto se queira. Portanto podemos afirmar que:

$$|c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 + \cdots + c_n\epsilon_n| < 1 \tag{3.13}$$

para p suficientemente grande.

Em virtude da igualdade (3.6) e de (3.11), a parcela da esquerda na última desigualdade deve ser um número inteiro. Como ela é menor do que 1 devemos ter $c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + c_3\epsilon_3 + \cdots + c_n\epsilon_n = 0$. Portanto, concluímos que

$$c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n) = 0$$

O que implica que p divide

$$[c_0F(0) + c_1F(1) + c_2F(2) + \cdots + c_nF(n)]\,.$$

Mas isso é um absurdo, pois vai contra o resultado (3.11). O absurdo se dá pelo fato de termos considerado o número e como sendo algébrico. Logo, o número e é transcendente. $\square$

Capítulo 4

A Transcendência do número Pi

4.1 História do Pi

Os egípcios descobriram que a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência, e o seu valor é um pouco maior que 3. Essa razão é o que atualmente chamamos de pi, cujo símbolo é a letra π.

Para chegar ao valor de π expresso por $3\frac{1}{6}$, que é aproximadamente 3.16, os egípcios partiram de um quadrado inscrito em uma circunferência, cujo lado media 9 unidades. Dobraram os lados do quadrado para obter um polígono de 8 lados e calcularam a razão entre os perímetros dos octógonos inscrito e circunscrito e o diâmetro da circunferência.

Os egípcios conseguiram uma aproximação melhor que a dos babilônios, pois, o comprimento de qualquer circunferência era o triplo de seu diâmetro, o que fornecia o valor 3 para π.

Por volta do século III a.C., Arquimedes[1] também procurou calcular a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Começando com um hexágono regular, Arquimedes calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Encontrou para π um valor entre 3,1408 e 3,1428 , no qual para ele, π tem esse valor.

Com um polígono de 720 lados inscrito numa circunferência de 60 unidades de raio, Ptolomeu[2] conseguiu um valor para π igual a 3,1416 que é uma aproximação

[1] O mais famoso matemático da Antiguidade, que viveu e morreu em Siracusa, na Grécia

[2] Viveu em Alexandria, no Egito, por volta do século III d.C.

melhor que a de Arquimedes.

No fim do século V. o matemático Tsu Ch'ung-Chih foi mais longe ainda, encontrou um valor entre 3,1415926 e 3,1415927. E assim sucessivamente, vários matemáticos continuaram tentando novos valores, com mais casas decimais ou seja com uma melhor aproximação.

O método de inscrição e circunscrição de polígonos regulares de cada vez mais lados apresentou limitações por sua convergência demorada para π, e daí surgiram outros algorítmos mais eficientes. François Viéte (1540-1603) apresentou a primeira expansão infinita:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots,$$

daí vieram outras, como a apresentada por John Wallis(1616-1703):

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\cdot\cdot}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot\cdot\cdot}$$

James Gregiry(1638-1675), mostrou que:

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

quando x = 1, temos que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Muitos outros matemáticos chegaram a várias relações que encontrasse o valor de π. Com o passar do tempo com o surgimento dos computadores, os dígitos dessa constante, que tem causado grande repercursão ao meio da sociedade matemática, chega a ordem de milhões, bilhões e atualmente a mais de 2 trilhões de dígitos.

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459 2\cdots$$

4.2 Polinômios Simétricos

A maneira usada por Hermite para demonstrar a transcendência de e foi estendida por Lindemann, em 1882, para a demonstração da transcendência do número π . E diante desse processo ele percebeu o porquê da não quadratura do círculo (ou seja, não é possível, com régua e compasso, construir um quadrado cuja área seja igual a de um círculo dado).

Antes de apresentar a demonstração sobre a transcendência de π, necessitamos enunciar alguns conceitos, a respeito de polinômios simétricos, pois, será útil no decorrer do desenvolvimento.

Definição 4.2.1. *Um polinômio $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é dito simétrico se, e somente se, para qualquer permutação $\sigma : \{1, 2, \cdots, n\} \to \{1, 2, \cdots, n\}$ vale:*

$$p^{\sigma}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p(x_{\sigma(1)}, \cdots, x_{\sigma(n)}) = p(x_1, \cdots, x_n)$$

Definição 4.2.2. *Monômio é toda expresão algébrica determinada por apenas um número real, uma variável ou pelo produto de números e variáveis.*

Definição 4.2.3. *Dado um monômio $ax_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$, seu peso é o número $\sum_{j=1}^{n} jk_{j.}$ O peso de um polinômio é o máximo entre os pesos de seus monômios.*

Definição 4.2.4. *Os polinômios simétricos dados por:*

$$\begin{gathered} s_1 = \sum_{j=1}^{n} x_j, \\ s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \\ \vdots \\ s_n = x_1 \cdots x_n, \end{gathered}$$

são chamados os polinômios simétricos elementares.

Os teoremas a seguir são provados para um corpo K qualquer, e para os polinômios com coeficientes em $K[x]$, embora só precisaremos para esse texto que os coeficientes estejam em $\mathbb{Q}[x]$.

Teorema 4.2.1. *Dado $p(x_1, \cdots, x_n) \in K[x_1, \cdots, x_n]$ simétrico de grau d, existe $q(s_1, \cdots, s_n) \in K[s_1, \cdots, s_n]$ de peso menor ou igual a d, tal que*

$$p(x_1, \cdots, x_n) = q(s_1, \cdots, s_n),$$

onde s_i são definidos como em 4.2.3.

Prova. Para $n = 1$, é óbvio. Suponhamos que seja verdadeiro para $n-1$. Para provar que o teorema vale para n, procedemos por indução em d.

Se $d = 0$, não tem nada a provar, pois $p(x_1, \cdots, x_n)$ é constante. Agora supomos que valha se o grau for menor que d.

Sejam $\overline{s}_1, \overline{s}_2, \cdots, \overline{s}_{n-1}$ os polinômios elementares em $x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$. Pela hipótese de indução existe $q_1(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \cdots, \overline{s}_{n-1})$ de peso menor ou igual que $d-1$ tal que:

$$p(x_1, \cdots x_{n-1}, 0) = q_1(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \cdots, \overline{s}_{n-1})$$

Definindo $p_1 = p - q_1$, obtemos um polinômio simétrico em $x_1, \cdots, x_n$, pois p e q_1 também são simétricos. Fazendo $x_n = 0$, pela equação acima temos que:

$$p_1(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) = p(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0) - q_1(\overline{s}_1, \overline{s}_2, \cdots, \overline{s}_{n-1}) = 0 \tag{4.1}$$

O que implica que x_n é fator comum de p_1. Mas como este é simétrico, então cada x_j é fator comum de p_1 e, portanto, s_n é fator comum. Ou seja:

$$p_1(x_1, \cdots, x_n) = s_n p_2(x_1, \cdots, x_n) \tag{4.2}$$

O grau de p_2 é menor ou igual que $d-n$. Aplicando a indução, obtemos $q_2(s_1, \cdots, s_n)$ de peso menor ou igual a $d-n$ que coincide com $p_2(x_1, \cdots, x_n)$. Usando este fato e substituindo em (4.2) e depois em (4.1) chegamos a igualdade:

$$p(x_1, \cdots, x_n) = s_n q_n(s_1, \cdots, s_n) + q_1(s_1, \cdots, s_n) = q(s_1, \cdots, s_n),$$

que tem grau menor ou igual a d. □

Teorema 4.2.2. *Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ números algébricos, tais que os polinômios simétricos elementares*

$$s_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j,$$

$$s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j,$$

$$\vdots$$

$$s_n = \alpha_1 \cdots \alpha_n,$$

estão em K. Considere os $\binom{n}{k}$ elementos algébricos $\beta_{i1,\cdots,ik} = \alpha_{i1} + \cdots + \alpha_{ik}$. Então os polinômios simétricos elementares associados aos $\beta_{i1}, \cdots {}_{,ik}$ também estão em K.

Prova. Por simplicidade, provaremos o teorema para $k = 2$, mas a demonstração no caso geral é idêntica. Para isso, provaremos que os polinômios simétricos elementares nos β_{ij} são simétricos nos α_i.

Dada a permutação α, vamos usar a notação $\sigma(p) = p^\sigma$. Assim, a ação de σ é, dada pela definição:

$$\sigma\left(\sum a_{i1,\cdots,in}\alpha_1^{i_1}\cdots\alpha_n^{i_n}\right) = \sum a_{i1,\cdots,in}\sigma(\alpha_1)^{i_1}\cdots\sigma(\alpha_n)^{i_n}$$

Considere a permutação induzida por σ nos β_{ij} , $\overline{\sigma}$, ou seja:

$$\overline{\sigma}(\beta_{ij}) = \sigma(\alpha_i) + \sigma(\alpha_j) = \sigma(\beta_{ij}).$$

Temos, portanto, que para cada permutação elementar S_k dos β_{ij}

$$\sigma(S_k) = \overline{\sigma}(S_k) = S_k,$$

uma vez que os S_k são simétricos em β_{ij}. Isso mostra que eles também são simétricos nos α_i, e, aplicando o Teorema 4.2.1, obtemos o resultado desejado. □

Corolário 4.2.5. *Sejam os α_i's do teorema anterior, as raízes de um polinômio $P(x) \in K[x]$ de grau n. Então os $\binom{n}{k}$ números $\beta_{i_1,\cdots,ik} = \alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}$ são as raízes de um polinômio em $K[x]$ que tem grau $\binom{n}{k}$.*

Prova. Basta observar que $P(x) = x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \cdots + (-1)^n s_n$, onde s_i são os polinômios simétricos elementares em $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$. Logo temos $s_i \in K$, e aplicamos o teorema. □

Teorema 4.2.3. *O número π é transcendente.*

Prova. Suponhamos por absurdo, que π seja algébrico. Então, $i\pi$ também será algébrico, por ser o produto de dois algébricos. Daí temos que $i\pi$ é raiz de um polinômio com coeficientes inteiros. Sejam $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$, as raízes deste polinômio.

Da igualdade de Euler $e^{i\pi} + 1 = 0$, segue que:

$$0 = \prod_{j=1}^{n}(e^{\alpha_j} + 1) = K + \sum_{j=1}^{m} e^{\beta_j}, \tag{4.3}$$

onde $K \in \mathbb{N}$ e $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n$ são números não - nulos expressos por:

$$\alpha_i, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{4.4}$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \qquad 1 \leq i < j \leq n \tag{4.5}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n, \tag{4.6}$$

e $k \in \mathbb{N}$ é obtido agrupando a soma dos termos cujos expoentes são nulos.

Os números $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_m$ dados anteriormente são as raízes de um polinômio $R(x) = cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_1x + c_0$ de coeficientes inteiros. Tomando um primo p genérico e $s = m(p-1)$, definamos:

$$f(x) = \frac{c^s}{(p-1)!}x^{p-1}(R(x))^p \tag{4.7}$$

O grau de f é $s+p$. Definamos também:

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(s+p)}(x) \tag{4.8}$$

que, assim como (3.2), satisfaz:

$$\frac{d}{dx}e^{-x}F(x) = -e^{-x}f(x),$$

donde:

$$e^{-x}F(x) - F(0) = -\int_0^x e^{-t}f(t)dt.$$

Usando uma mudança de variável $t = \lambda x$ (onde λ é variável e x é fixo):

$$F(x) - e^x F(0) = -x\int_0^1 e^{(1-\lambda)x}f(\lambda x)d\lambda.$$

Somando as igualdades para $x = \beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_m$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{m} F(\beta_j) + kF(0) = -\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j)d\lambda. \tag{4.9}$$

Observando que em (4.7) β_j é raiz de $f(x)$ de multiplicidade p, e chegamos a conclusão que:

$$0 \leq t < p \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} f^{(t)}(\beta_j) = 0.$$

Se $t \geq p$, apenas a p-ésima derivada de $R(x)$ no ponto $x = \beta_j$ é não - nula. Derivando p vezes o polinômio $R(x)$ neste ponto, teremos um coeficiente $p!$ que cancelará o denominador $(p-1)!$ de $f(x)$, deixando p vezes um polinômio com coeficientes inteiros calculado em β_j. O que implica que $\frac{1}{c^s} f^t(\beta_j)$ é um polinômio em β_j com coeficientes inteiros divisíveis por p. Além disso, $\sum_{j=1}^{m} f^t(\beta_j)$ é simétrico nos β_j de grau menor ou igual a s. Daí, devido ao coeficiente c^s, este polinômio é de coeficientes inteiros e grau menor ou igual a s. Portanto:

$$p \leq t \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} (\beta_j) = pk_t \quad com \quad k_t \in \mathbb{Z}.$$

Examinaremos agora $F(0)$. Notamos que $f^{(t)}(0) = 0$ se $t \leq p-2$, $f^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p$ e $f^{(t)}(0)$ é um inteiro divisível por p se $p \leq t$.

Portanto, o termo em (4.9) é da forma $Kp + kc^s c_0^p$ com K inteiro, e tal expressão é inteira. Tomando $p > \max\{k, |c|, |c_0|\}$, conseguimos em (4.9) um termo não divisível por p, (pois, $kc^s c_0^p$ não pode ser divisível), e, logo, não - nulo. De (4.7), obtemos:

$$|f(\lambda\beta_j)| \leq \frac{|c|^s m_j^p}{(p-1)!} |\beta_j|^{p-1}$$

que segue se tomarmos $m_j = max_{\ 0 \leq \lambda \leq 1} |R(\lambda\beta_j)|$. Portanto:

$$\left| -\sum_{j=1}^{m} \beta_j \int_0^1 e^{(1-\lambda)\beta_j} f(\lambda\beta_j) d\lambda \right| \leq \sum_{j=1}^{m} \frac{|\beta_j|^p |c|^s |m_j|^p B}{(p-1)!}, \tag{4.10}$$

onde $B = sup_j \int_0^1 \left| e^{(1-\lambda)\beta_j} \right| d\lambda$.

Ora, o lado esquerdo da equação (4.10) é positivo e o lado direito tende a zero quando $p \to \infty$, o que é um absurdo. Como supomos que π era algébrico, chegamos numa contradição. Logo, π é transcendente. □

Observação 4.2.6. *Cada número tem uma certa característica, algo específico, somente dele. Individualmente provamos que* π *e* e *são transcendentes, mas algumas combinações deles não nos garante sua transcendência, a exemplos de:* ▪ e^{π} *foi pro-*

vado que é transcendente, graças ao auxílio da famosa fórmula de Euler: $\mathrm{e}^{i\pi} + 1 = 0$*.* *Mas, os seguintes números estão ainda em aberto:* π^{e}*;* e^{e}*;* π^{π}*;* $\mathrm{e} + \pi$*;* $\mathrm{e} \cdot \pi$*.*

Apêndice: Teorema Fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da álgebra afirma que qualquer polinômio $P(z)$ com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa. Em outras palavras, o corpo dos números complexos é algebricamente fechado e, portanto, tal como com qualquer outro corpo algebricamente fechado a equação $P(z) = 0$ tem n soluções não necessariamente distintas. como não será necessário no presente trabalho equações com coeficientes complexos, somente coeficientes inteiros, vamos abordar os seguintes teoremas:

Teorema .0.4. *Qualquer equação da forma*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0 \tag{11}$$

com coeficientes inteiros, tem no máximo n raízes distintas. Podendo supor a_n positivo pois, se fosse negativo, multiplicaríamos por -1, sem que isso afetasse as raízes.

Vamos fazer a demonstração depois de provarmos o seguinte teorema:

Teorema .0.5. *Sejam $f(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros e β um número racional, raiz de $f(x) = 0$. Então, $x - \beta$ é um fator de $f(x)$; isto é, existe um polinômio $q(x)$, tal que $f(x) = (x - \beta)q(x)$. Além do mais, $q(x)$ tem coeficientes racionais e seu grau é uma unidade menor do que o grau de $f(x)$.*

Prova. Se dividirmos $f(x)$ por $x-\beta$ resultará um quociente $q(x)$ e um resto, digamos, r . Sendo o grau do resto sempre menor do que o grau do divisor (que no caso, é o polinômio $x - \beta$ de grau 1), vemos que r é uma constante, independente de x. Daí temos que:

$$f(x) = (x - \beta)q(x) + r,$$

e, como no processo de divisão as passagens são operações racionais, temos que $q(x)$ terá coeficientes racionais. A equação acima é uma identidade em x, portanto, podemos substituir x por β e obter $f(\beta) = r$. Mas $f(\beta) = 0$, pois β é uma raiz de $f(x) = 0$. Daí, $r = 0$, isto é, o resto da divisão de $f(x)$ por $x - \beta$ é zero e, assim, $f(x) = (x - \beta)q(x)$. Portanto, qualquer que seja o grau de $f(x)$, temos que o grau de $q(x)$ é uma unidade menor. □

Vamos à demonstração do **Teorema .0.4.**

Prova. Suponhamos ao contrário, que a equação (11) tenha $n + 1$ raízes distintas, digamos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n, \beta_{n+1}$. Do Teorema .0.5, temos que $x - \beta$ será um fator de $f(x)$ se β for uma raiz de $f(x) = 0$, onde β seja ou não racional. Se β for irracional, o quociente $q(x)$ terá coeficientes irracionais, mas isso não importa no momento. No contexto atual, vemos que $x - \beta_1$ é um fator de $f(x)$ com quociente, digamos, $q_1(x)$, daí:

$$f(x) = (x - \beta_1)q_1(x)$$

Como β_2 é uma outra raiz de $f(x) = 0$, temos que β_2 tem que ser uma raiz de $q_1(x) = 0$ e, assim, $x - \beta_2$ é um fator de $q_1(x)$, com quociente, digamos, $q_2(x)$, daí:

$$q_1(x) = (x - \beta_2)q_2(x)$$

$$f(x) = (x - \beta_1)q_1(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)q_2(x).$$

Continuando esse processo com $\beta_3, \beta_4, \cdots, \beta_n$, observamos que $f(x)$ pode ser fatorado como:

$$f(x) = (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3)(x - \beta_4)\cdots(x - \beta_n)q_n(x) \tag{12}$$

Mas $f(x)$ tem grau n, portanto, $q_n(x)$ tem que ser uma constante; de fato, $q_n(x)$ tem que ser a_n para que a fatoração esteja de acordo com a equação (11).

Consideremos agora a raiz β_{n+1} , que é diferente de todas as outras raízes. Pelo fato de ser $f(\beta_{n+1}) = 0$, temos de (12) que:

$$(\beta_{n+1} - \beta_1)(\beta_{n+1} - \beta_2)(\beta_{n+1} - \beta_3)\cdots(\beta_{n+1} - \beta_n)a_n = 0,$$

que é impossível, pois o produto de fatores não nulos não pode ser zero.

Logo, a demonstração está concluída. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] NIVEN, Ivan. *Números: Racionais e Irracionais*. 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] ENDLER, Otto. *Teoria dos Números Algébricos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

[3] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Números Irracionais e Transcendentes*. 3^a ed. Rio de Janeiro : SBM, 2011.

[4] MARQUES, Diego. *Teoria dos Números Transcendentes*. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[5] SANTOS, José Plínio de Oliveira. *Introdução à teoria dos números*. 3^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[6] HEFEZ, Abramo. *Curso de álgebra*. Volume 1; 4^a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[7] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: polinômios*. Volume 6; 1^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[8] FERREIRA, Jamil, *A construção dos Números*. 3^a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[9] BOYER, C. B. *História da Matemática*. 2^a ed. Ed. Edgard Blucher Ltda: São Paulo, 1996.

[10] HEFEZ, Abramo, *Polinômios e Equações Algébricas* / Abrano Hefez; Maria Lúcia Torres Villela, Rio de Janeiro: SBM , 2012.

[11] <http://www.mathworld.wolfram.com/LiouvilleConstant.html>. Acesso em 03/02/2015.

[12] <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca> Acesso em 10/12/2014.

[13] <http://www.dme.ufcg.edu.br/pet/arquivos/Uma-Conversa-Sobre-os-Numeros-Transcendentes.pdf>. Acesso em 15/01/2015.

[14] <http://bit.profmat-sbm.org.br>. Acesso em 25/11/2014.

[15] <http://gigamatematica.blogspot.com.br/2011/06/introducao-aos-numeros-algebricos-e.html>. Acesso em 18/01/2014.

[16] <http://www.somatematica.com.br/curiosidades/c15.html>. Acesso em 02/02/2015.

[17] <http://www.impa.br/opencms/pt/pesquisa/pesquisa-coloquio-brasileiro-de-matematica/CBM29/attach/poster-leon-lima.pdf>. Acesso em 28/12/2014.