Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

Departamento de Matemática

Médias, desigualdade das médias e aplicações

Luciano Manoel da Silva

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Cuiabá - MT

Junho de 2015

Médias, desigualdade das médias e aplicações

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Luciano Manoel da Silva e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 31 de março de 2016.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade
Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S586m Silva, Luciano Manoel da.
Médias, desigualdade das médias e aplicações / Luciano Manoel da Silva. -- 2015
x, 39 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Martinho da Costa Araújo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. inequação. 2. construções geométricas. 3. problemas de otimização. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de Junho de 2015 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo

Prof. Dr. Lenimar Nunes de Andrade

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Dedico este trabalho à minha mãe Benedita Martinha da Silva, ao meu sobrinho João Victor da Silva e a minha doce amada Francyne Carmem Santos Correia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força e sabedoria que me forneceu durante esta caminhada. Agradeço a minha querida mãe Benedita que sempre me deu força e coragem para continuar seguindo meus objetivos . Quero agradecer também ao meu sobrinho João Victor, que apesar de não saber deste acontecimento, me motivou à buscar novos conhecimentos. À minha doce amada Francyne pela paciência, força e companherismo durante todo este processo. Agradeço a todos os colegas de turma pela contribuição em aprender e a ensinar. Agradeço em especial ao meu orientador Professor Martinho da Costa Araújo pela paciência e sabedoria que me transferiu neste trabalho.

Muito obrigado a todos!

Aos que aqui chegaram,
vale lembrar a frase de Aristóteles

*É fazendo que se aprende a fazer aquilo
que se deve aprender a fazer.*

Aristóteles.

Resumo

Neste trabalho abordaremos as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, enfatizando alguns resultados que estabelecem relações de desiguladades entre essas médias. Trataremos uma interpretação geométrica para as desigualdades das médias quando consideramos dois números reais positivos, bem como várias aplicações, tais como, problemas de otimização simples, demonstração de desigualdades elementares e aproximações de raízes quadráticas.

Palavras chave: Inequação, construções geométricas, problemas de otimização.

Abstract

In this work we discuss the arithmetic, geometric, harmonic and quadratic averages, emphasizing some results that establish inequality relations between these averages. We approach a geometric interpretation to the average inequalities when we consider two positive real numbers, as well as various applications such as simple optimization problems, demonstration of elementary inequalities and approximations of square roots.

Keywords: Inequality, geometric constructions, optimization problems.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

O conceito de médias para uma lista de números é muito utilizado no cotidiano, principalmente associado a dados estatísticos que apontam onde se concentra uma tendência de distribuição de uma certa característica da lista. Se essa caracteristica é a soma dos elementos da lista, obtemos a média aritmética simples, se a caraterística considerada for o produto dos elementos da lista, obteremos a média geométrica. Agora, se a caraterística for a soma dos inversos dos elementos da lista, teremos a média harmônica. E se a caraterística for a soma dos quadrados, obteremos a média quadrática.

As desigualdades estabelecidas entre as médias são muito utilizadas para resolver diversos problemas em matemática. Uma delas se trata da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para números reais positivos que há muito tempo é conhecida pela grande variedade de demonstrações e aplicações em problemas de otimização.

Trataremos no Capítulo 2 das médias e suas aplicações, caraterizando cada média. Apresentaremos também demonstrações algébrica e geométrica das desigualdades das médias para dois números reais positivos, enfatizando uma interpretação geométrica. Para outras interpretações geométricas consulte Lima et al. (2006).

No Capítulo 3, estenderemos a válidade das desigualdades das média para uma lista de n números reais positivos, priorizando as demonstrações e utilizando resultados conhecidos da matemática.

Para o Capítulo 4, reservamos uma coleção de problemas interessantes resolvidos pelo uso simples ou combinado das desigualdades das médias, entre eles, problemas de otimização e aproximação de raízes quadradas. A referência Cvetkovski (2012) traz vários problemas resolvidos pelas desigualdades das médias. Podemos citar outras referências bibliográficas tais como Lima (2006), Araújo (2011), Carneiro (2001),Wagner (1995), Silva e Gomes (2010).

1.1 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

– Abordar as principais médias e suas características.

– Disponibilizar um material de apresentação de algumas desigualdades das médias para estudantes de licenciatura em matemática, para iniciantes em preparação olímpicas de matemática ou de aprofundamentos para estudantes do ensino médio.

– Difundir diversas aplicações dessas desigualdades.

– Expor que as desigualdades podem ser ensinadas no ensino médio, a que não requerem conhecimentos avançados de matemática.

1.2 Justificativa

Quando o assunto se trata de desigualdades das médias, muitos estudantes apresentam dificuldades em lidar com suas propriedades e grande parte deles não conhecem suas principais aplicações em resolução de problemas. Por outro lado, há muito tempo as desigualdades são trabalhadas com estudantes em olimpíadas de matemática e não são raros os problemas que podem ser resolvidos de maneira simples, por meio do uso delas.

Algumas vezes, o uso dessas desigualdades substitui a aplicação de derivadas para resolver problemas que requerem um valor máximo ou valor mínimo para uma determinada função ou expressão. Sendo assim, sua utilização é possível para estudantes do ensino médio, privilegiando na solução do problema o raciocínio e a criatividade.

Portanto, este trabalho poderá servir de consulta e suporte aos estudantes e professores interessados no assunto, pois além de trazer as demostrações das desigualdades das médias e uma interpretação geométrica, serão apresentados diversos problemas de aplicações.

1.3 Metodologia

A idéia fundamental é demonstrar as desigualdades entre as médias, aritmética, geométrica, harmônica e quadrática para uma lista de n números reais positivos e aplicar na resolução de problemas de matemática. Estes problemas servirão como suporte para o leitor buscar novos problemas que poderão ser resolvidos utilizando idéias semelhantes.

Para as resoluções, buscamos primeiramente apresentar os problemas e em seguida as suas soluções. Em geral, a simples leitura da solução do problema, sem uma prévia tentativa de resolução, não representa passos significativos para compreender a aplicação das desigualdades das médias, pois os principais resultados usados na resolução nem ao menos são percebidos.

Capítulo 2

Médias e desigualdade das médias

Neste capítulo, serão caracterizadas as médias aritmética, geométrica, harmônica e quadrática, exemplificando a ocorrência delas em alguns problemas típicos. Em seguida, estabeleceremos as relações de desigualdades entre elas para dois números reais positivos, demonstradas de duas maneiras, uma algébrica baseada na propriedade que o quadrado de um número real é não-negativo e outra geométrica, tomando um triângulo inscrito num semicírculo de diâmetro conhecido.

2.1 Médias

Definição 1 ***A Média Aritmética*** *dos números reais positivos* $x_1, x_2, ..., x_n$ *é um valor real* A *tal que*

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \underbrace{A + A + ... + A}_{n-termos} = n.A$$

Daí, concluimos:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Podemos observar que a característica da média aritmética(simples) é preservar a soma dos elementos da lista.

Exemplo 1 *A média aritmética dos números* $3, 27$ *e* 72 *é*

$$A = \frac{3 + 27 + 72}{3} = 34$$

Exemplo 2 *A média aritmética de* 60 *números é* 45*. Se dois desses números,* 80 *e* 126*, forem suprimidos, qual será a média aritmética dos números restantes?*

Solução: Dada uma lista de 60 números entre os quais figuram os números 80 e 126, pelo enunciado temos

$$45 = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{58} + 80 + 126}{60} \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_{58} = 60 \cdot 45 - 80 - 126 = 2494$$

Logo, a média aritmética dos números restantes é

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{58}}{58} = \frac{2494}{58} = 43$$

Exemplo 3 *Prove que a média aritmética A de uma lista de números satisfaz $m \leqslant A \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.*

Solução: Como cada um dos n números x_i satisfaz $m \leqslant x_i \leqslant M$, temos

$$n \cdot m \leqslant x_1 + x_2 + ... + x_n \leqslant n \cdot M \Longrightarrow m \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leqslant M$$

Portanto, $m \leqslant A \leqslant M$.

Definição 2 ***A Média Geométrica*** *dos números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor real G tal que*

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = \underbrace{G \cdot G \cdot ... \cdot G}_{n-termos} = G^n$$

Donde, temos:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$$

Note que na média geométrica tem como caraterística preservar o produto dos elementos da lista considerada.

Exemplo 4 *A média geométrica dos números 3, 27 e 72 é*

$$G = \sqrt[3]{3 \cdot 27 \cdot 72} = 18$$

Exemplo 5 *Prove que a média geométrica G de uma lista de n números positivos satisfaz $m \leqslant G \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.*

Solução: Como cada um dos n números positivos x_i satisfaz $m \leqslant x_i \leqslant M$, temos

$$m^n \leqslant x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n \leqslant M^n \Longrightarrow m \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leqslant M$$

. Portanto, $m \leqslant G \leqslant M$.

Definição 3 ***A Média Harmônica*** *dos números reais positivos* $x_1, x_2, ..., x_n$ *é um valor real* H *tal que*

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{H} + \frac{1}{H} + ... + \frac{1}{H}}_{n-termos} = \frac{n}{H}$$

Donde, temos:

$$H = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}}$$

A média harmônica preserva a soma dos inversos dos elementos da lista, ou seja, é definida como o inverso da média aritmética dos inversos desses números.

Exemplo 6 *A média harmônica dos números 3, 27 e 72 é*

$$H = \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{27} + \frac{1}{72}} = \frac{3}{\frac{72+8+3}{216}} = \frac{3 \cdot 216}{83} \cong 7,8.$$

Exemplo 7 *Prove que a média harmônica* H *de uma lista de* n *números positivos satisfaz* $m \leqslant H \leqslant M$, *onde* m *e* M *são respectivamente o menor e o maior dos números.*

Solução: Como cada um dos n números positivos x_i satisfaz $m \leqslant x_i \leqslant M$, tem- se $\dfrac{1}{m} \geqslant \dfrac{1}{x_i} \geqslant \dfrac{1}{M}$ e daí, obtemos

$$\frac{n}{m} \geqslant \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} \geqslant \frac{n}{M} \Longrightarrow \frac{m}{n} \leqslant \frac{1}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \frac{M}{n}$$

Portanto, multiplicando por n , concluímos $m \leqslant H \leqslant M$.

Exemplo 8 *Uma carro vai da cidade* C_1 *para a cidade* C_2 *com velocidade média de* $60Km/h$ *e volta, pelo mesmo caminho, de* C_2 *para* C_1 *com uma velocidade média de* $90Km/h$. *Qual é a velocidade média do carro durante todo o percurso?*

Solução: Para resolver este problema considere as seguintes denotações

d é a distância entre as cidades C_1 e C_2.

v_1 e v_2 as velocidades médias de ida e de volta respectivamente.

t_1 e t_2 os tempos de ida e de volta respectivamente.

Assim, temos que $d = v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$. Se v é a velocidade média durante todo o percurso, então

$$2d = v(t_1 + t_2) \Longrightarrow 2d = v\left(\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}\right) \Longrightarrow 2 = v\left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}\right)$$

Daí, resulta

$$v = \frac{2}{\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}\right)}$$

Substituindo $v_1 = 60Km/h$ e $v_2 = 90Km/h$, obtemos $v = 72Km/h$. Observe, que a velocidade média durante todo o percurso é a média harmônica de v_1 e v_2.

Definição 4 ***A Média Quadrática*** *dos números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é um valor real Q tal que*

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \underbrace{Q^2 + Q^2 + ... + Q^2}_{n-termos} = nQ^2$$

Daí, obtemos

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Na média quadrática a caraterística preservada é a soma dos quadrados dos elementos da lista.

Exemplo 9 *A média quadrática dos números 3, 27 e 72 é*

$$Q = \sqrt{\frac{3^2 + 27^2 + 72^2}{3}} = \sqrt{\frac{9 + 729 + 5184}{3}} = \sqrt{\frac{5922}{3}} \cong 44,4.$$

Exemplo 10 *Prove que a média quadrática Q de uma lista de n números positivos satisfaz $m \leqslant Q \leqslant M$, onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números.*

Solução: Como cada um dos n números positivos x_i satisfaz $m \leqslant x_i \leqslant M$, e daí $m^2 \leqslant {x_i}^2 \leqslant M^2$, logo

$$n{\cdot}m^2 \leqslant {x_1}^2{+}{x_2}^2{+}...{+}{x_n}^2 \leqslant n{\cdot}M^2 \Longrightarrow m^2 \leqslant \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2}{n} \leqslant M^2 \Longrightarrow m^2 \leqslant Q^2 \leqslant M^2$$

Portanto, $m \leqslant Q \leqslant M$.

Observando as médias aritmética (A), geométrica (G), harmônica (H) e quadrática (Q) dos números $3, 27$ e 72 temos as seguites de desigualdades entre elas

$$3 < H = 7,8 < G = 18 < A = 34 < Q = 44,4 < 72$$

A relação de desigualdade estabelecida entre as médias é muito importante, principalmente para provar outras desigualdades, aplicar em problemas de otimização , isto é, problemas que requerem uma solução máxima ou mínima para funções ou expressões , aproximar raízes quadradas, dentre outros.

A seguir, enunciaremos as desigualdades das médias no caso geral, deixando suas demonstrações para o Capítulo 3, donde concluiremos a seguinte relação onde m e M são respectivamente o menor e o maior dos números. Ocorrendo a igualdade se, e somente se, todos os números são iguais.

$$m \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q \leqslant M$$

Proposição 1 *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ tem-se;*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

isto é, $G \leqslant A$. Além disso, valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Proposição 2 *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ tem-se;*

$$\frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1.x_2....x_n}$$

ou seja, $H \leqslant G$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,$x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Proposição 3 *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ tem-se;*

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

ou seja, $A \leqslant Q$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

2.2 Desigualdade das médias: caso $n = 2$

Inicialmente, trataremos o caso mais simples quando temos dois números reais positivos. Faremos as demonstrações algébricas e em seguida apresentaremos uma interpretação geométrica das desigualdades das médias.

Sendo x_1 e x_2 números reais positivos segue que $\sqrt{x_1 x_2}$ está bem definido nos reais. A idéia fundamental da demonstração se baseia no fato (propriedade dos números reais) que todo quadrado de um número real sempre é positivo, sendo nulo quando este for nulo, logo

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 &\Longleftrightarrow {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 \geqslant 4x_1x_2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1 + x_2) \geqslant 2\sqrt{x_1x_2} \\
&\Longleftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geqslant \sqrt{x_1x_2} \\
&\Longleftrightarrow A \geqslant G.
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$(x_1 - x_2)^2 = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

Utilizando a mesma propriedade de números reais , temos;

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 &\Longleftrightarrow {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow {x_1}^2 + 2x_1x_2 + {x_2}^2 \geqslant 4x_1x_2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1 + x_2)^2 \geqslant 4x_1x_2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1 + x_2)^2 x_1x_2 \geqslant 4x_1^2x_2^2 \\
&\Longleftrightarrow \left[(x_1 + x_2)\sqrt{x_1x_2}\right]^2 \geqslant (2x_1x_2)^2 \\
&\Longleftrightarrow (x_1 + x_2)\sqrt{x_1x_2} \geqslant 2x_1x_2 \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{x_1x_2} \geqslant \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \\
&\Longleftrightarrow G \geqslant H
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$(x_1 - x_2) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

Finalmente, para a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, obtemos;

$$\begin{aligned}
(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0 &\Longleftrightarrow {x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 \geqslant 0 \\
&\Longleftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) \geqslant x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\
&\Longleftrightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geqslant \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} \geqslant \frac{x_1 + x_2}{2} \\
&\Longleftrightarrow Q \geqslant A.
\end{aligned}$$

Desta forma, podemos concluir

$$H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$$

2.3 Uma interpretação geométrica da desigualdades da médias: caso $n = 2$.

Sejam $x_1 = AD$ e $x_1 = DB$, construindo um semicírculo de diâmetro $2r = x_1 + x_2$ como mostrado na Figura 2.1, segue que o raio OC e a *média aritmética* de x_1 e x_2. Para mostrar que o comprimento do segmento CD é igual a *média geométrica* dos números x_1 e x_2, basta notar que o triângulo ABC está inscrito no semicírculo de diâmetro AB, logo, é retângulo em C. Além disso, os triângulo ACD e BCD são semelhantes, de modo

$$\frac{CD}{x_1} = \frac{x_2}{CD} \Longrightarrow CD = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$$

Isto significa, que num triângulo retângulo, a altura baixada do vértice do ângulo reto sobre a hipotenusa é a média geométrica entre os segmentos que ela determina sobre essa hipotenusa. Portanto, temos pela Figura 2.1, que média aritmética e a média geométrica são respectivamente a mediana e altura do triângulo ABC e daí a média aritmética é maior do que a média geométrica, ocorrendo a igualdade quando a altura e a mediana se coincidirem, isto é, $x_1 = x_2$.

Além disso, os triângulos COD e CDE são semelhantes, daí obtemos

$$\frac{CE}{CD} = \frac{CD}{OC} \Longleftrightarrow \frac{CE}{\sqrt{x_1x_2}} = \frac{\sqrt{x_1x_2}}{\frac{x_1+x_2}{2}} \Longleftrightarrow CE = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} = \frac{2}{\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)}$$

Logo, o comprimento do segmento CE é a média harmônica de x_1 e x_2. Note que CE é um dos catetos do triângulo retângulo CDE de hipotenusa CD.

Considere o triângulo retângulo DOF de catetos $OF = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ e $DO = \dfrac{x_2-x_1}{2}$, aplicando o Teorema de Pitágoras, temos

$$DF^2 = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2 \Longrightarrow DF = \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$$

Assim, o comprimento de DF é a média quadrática de x_1 e x_2.

Como a hipotenusa é o maior lado de um triângulo retângulo, temos as seguintes desigualdades para o comprimento dos segmentos $CE \leqslant CD \leqslant OC \leqslant DF$, a igualdade ocorre quando $x_1 = x_2$. Logo,

$$\frac{2}{\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\right)} \leqslant \sqrt{x_1x_2} \leqslant \frac{x_1+x_2}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$$

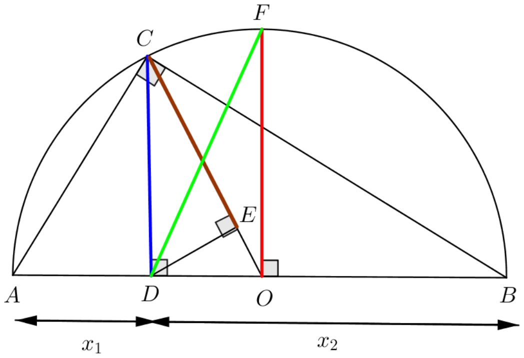

Figura 2.1: Desigualdade das médias para $n = 2$.

Desta forma, obtemos a representação geométrica das médias em que fica fácil identificar e de ilustar as desigualdades estabelecidas entre elas. No próximo capítulo, demonstraremos as desigualdades das médias para uma lista de n números reais positivos.

Capítulo 3

Desigualdade das médias no caso geral

Provaremos a seguir, a extensão das desigualdades entre as médias para uma lista de n números reais positivos. Começaremos com a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Esta desigualdade é conhecida pela grande variedade de demonstrações a ela atribuída. Para a sua demonstração, usaremos de um lema que será demonstrado pelo processo de indução finita sobre n e em seguida demonstraremos a desigualdade entre as médias geométrica e harmônica.

Para finalizar, utilizaremos da desigualdade de Cauchy - Schwarz para demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática e ainda generalizamos para a desigualdade entre as médias de potência e concluiremos a válidade das desigualdades das médias para uma lista de n reais positivos.

3.1 Desigualdade entre as médias aritmética e geométrica

Proposição 1 *Para quaisquer $n > 1$ números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ tem-se;*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

isto é, $G \leqslant A$. Além disso, valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Lema 1. *Se $x_1, x_2, .., x_n$ são números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 1$, então $x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n$, valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n = 1$.*

Demonstração: Faremos por indução sobre n.

Para $n = 1$, temos $x_1 = 1$, logo $x_1 \geqslant 1$, o que torna o resultado verdadeiro.

Vamos supor que o resultado seja válido para $n = r$, isto é,

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_r = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 + ... + x_r \geqslant r$$

Mostraremos que o resultado é válido para $n = r + 1$. Para isto, considere $x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}$, números reais positivos tais que $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_r \cdot x_{r+1} = 1$, assim temos dois casos a analisar:

(i) Todos os números $x_1, x_2, ..., x_r, x_{r+1}$ são iguais, isto é, $x_1 = x_2 = ... = x_r = x_{r+1}$. Por hipótese de indução $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_r \cdot x_{r+1} = 1$, logo neste caso, todos eles têm de ser iguais a 1 e daí concluímos que $x_1 + x_2, ... + x_r + x_{r+1} = r + 1$. Portanto, o resultado vale para $n = r + 1$, quando cada um dos números é igual a 1.

(ii) Nem todos os números são iguais, isto é, há entre eles, os números que são menores que 1 e outros que são maiores que 1, pois não podemos ter todos os números menores que 1 e nem todos os números maiores que 1, visto que o produto de todos eles deve ser igual a 1. Sem perda de generalidade podemos supor que $x_1 < 1$ e $x_{r+1} > 1$.

Fazendo $x_1 \cdot x_{r+1} = a$, segue que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_r \cdot x_{r+1} = 1 \Longrightarrow a \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_r = 1$$

Pela hipótese de indução segue que $a + x_2 + ... + x_r \geqslant r$. Assim,

$$x_1 + x_2 + ... + x_r + x_{r+1} = \underbrace{a + x_2 + ... + x_r}_{\geqslant r} + x_1 - a + x_{r+1} \geqslant r + x_1 - a + x_{r+1}$$

Para finalizar, devemos verificar que $x_1 - a + x_{r+1} \geqslant 1$.

De fato, lembrando que $x_1 \cdot x_{r+1} = a$ segue que

$$\begin{aligned} x_1 - a + x_{r+1} &= x_1 - x_1 x_2 + x_{r+1} \\ &= x_1(1 - x_{r+1}) + x_{r+1} - 1 + 1 \\ &= x_1(1 - x_{r+1}) - (1 - x_{r+1}) + 1 \\ &= (1 - x_{r+1})(x_1 - 1) + 1 \end{aligned}$$

Como

$$x_1 < 1 \Longrightarrow (x_1 - 1) < 0$$

$$x_{r+1} > 1 \Longrightarrow (1 - x_{r+1}) < 0$$

Segue que $(1 - x_{r+1})(x_1 - 1) > 0$ e logo

$$x_1 - a + x_{r+1} = (1 - x_{r+1})(x_1 - 1) + 1 \geqslant 1$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 + ... + x_r + x_{r+1} \geqslant r + x_1 - a + x_{r+1} \geqslant r + 1$$

que é exatamente o que queríamos demonstrar.

Com base no **Lema 1** fica imediato demonstrar a famosa desigualdade entre as média aritmética e geométrica de números reais positivos, vejamos

Se $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}$, então

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}}{G} = 1 &\Longleftrightarrow \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{G^n}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt[n]{\frac{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n}{G \cdot G \cdot ... \cdot G}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{G} = 1 \end{aligned}$$

Como $\frac{x_1}{G} \cdot \frac{x_2}{G} \cdot ... \cdot \frac{x_n}{G} = 1$, segue pelo **Lema 1** que

$$\frac{x_1}{G}+\frac{x_2}{G}+...+\frac{x_n}{G}\geqslant n\Longrightarrow x_1+x_2+...+x_n\geqslant nG\Longrightarrow G\leqslant\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=A$$

A igualdade, ocorre se, e somente se, $x_1=x_2=...=x_n$.

3.2 Desigualdade entre as médias geométrica e harmônica

Proposição 2 *Para quaisquer $n>1$ números reais positivos $x_1,x_2,...,x_n$ tem-se;*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}\leqslant\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}$$

ou seja, $H\leqslant G$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,$x_1=x_2=...=x_n$.

Demonstração: Como $x_1,x_2,...,x_n$ são números reais positivos segue que os números reais $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},...,\frac{1}{x_n}$ também são. Agora, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos;

$$\frac{1}{G}=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot...\cdot\frac{1}{x_n}}\leqslant\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}}{n}$$

Logo,

$$\frac{1}{G}\leqslant\frac{1}{H}\Longrightarrow H\leqslant G$$

A igualdade ocorre se, e somente se,

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2}=...=\frac{1}{x_n}\Longleftrightarrow x_1=x_2=...=x_n.$$

3.3 Desigualdade entre as médias aritmética e quadrática

Proposição 3 *Para quaisquer $n>1$ números reais positivos $x_1,x_2,...,x_n$ tem-se;*

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$$

ou seja, $A\leqslant Q$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1=x_2=...=x_n$.

Lema 2. (Desigualdade de Cauchy - Schwarz). *Dados $x_1, x_2, ..., x_n$ e $y_1, y_2, ..., y_n$ números reais tem-se*

$$|x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n| \leqslant \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2} \cdot \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_n}^2}$$

Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real λ, tal que $x_i = \lambda \cdot y_i$ para todo natural $1 \leqslant i \leqslant n$.

Demonstração: Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(v) = (x_1 v - y_1)^2 + (x_2 v - y_2)^2 + ... + (x_n v - y_n)^2$$

Podemos reescrever a expressão como segue

$$f(v) = ({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)v^2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)v + ({y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_n}^2)$$

onde representa uma função quadrática em que cada parcela $(x_i v - y_i)$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ é não-negativa. Logo, $f(v) \geqslant 0$ para todo v real se e somente se, $\Delta \leqslant 0$, isto é,

$$4(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2 - 4({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_n}^2) \leqslant 0$$

$$\Longleftrightarrow (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2 \leqslant ({x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_n}^2)$$

$$\Longleftrightarrow |x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n| \leqslant \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2} \cdot \sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + ... + {y_n}^2}$$

A igualdade ocorre, se somente se, $\Delta = 0$, isto é, a função admite uma raiz real α. Para isto, cada uma parcela $(x_i \cdot \alpha - y_i)^2$ deve ser nula, ou equivalentemente para $x_i = \dfrac{y_i}{\alpha}$ com $1 \leqslant i \leqslant n$.

Usando o **Lema 2** para os números reais positivos $x_1, x_2, .., x_n$ e $1, 1, ..., 1$ uma sequência de n números iguais a 1, temos

$$|x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + ... + x_n \cdot 1| \leqslant \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + ... + {x_n}^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + ... + 1^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{|x_1 + x_2 + ... + x_n|}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Como $|x_1 + x_2 + ... + x_n| = x_1 + x_2 + ... + x_n$, vem

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n}}$$

Portanto, $A \leqslant Q$.

Concluimos que dada uma lista de n números reais positivos $x_1, x_2, ..., x_n$ é sempre verdade

$$m \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q \leqslant M,$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

3.4 Desigualdade entre as médias de potência

Faremos a generalização de médias para uma lista de n números reais positivos e em seguida provaremos a desigualdade estabelecida entre duas dessas médias. Desta forma, estenderemos a desigualdade entre as médias para potências $p > 2$. Para provar a desigualdade entre as médias, utilizaremos o Teste da Derivada Segunda para cálculo de máximos ou mínimos de funções reais.

Definição 5 *Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência de números reais positivos e $p \neq 0$ um número real. A média de potência $M_p(x)$, de ordem p é*

$$M_p(x) = \left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + ... + {x_n}^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposição 4 *Sejam $a = (x_1, x_2, ..., x_n)$ uma sequência de números reais positivos, p e q números reais positivos tais que $p \leq q$ então $M_p(x) \leq M_q(x)$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = ... = x_n$.*

Demonstração: Sejam $x > 0$ e $f(x) = px^q + (p - q) - qx^p$. Notemos que f tem um mínimo absoluto em $x = 1$, pois

$$f'(x) = pqx^{q-1} - pqx^{p-1} \Longrightarrow f'(1) = 0 \;\text{ e }\; f''(1) = pq(q - p) > 0$$

Observe ainda que $f(1) = 0$, portanto, $f(x) = px^q + (q - p) - qx^p \geq 0$. Logo,

$$px^q + (q - p) \geq qx^p$$

ocorrendo a igualdade quando $x = 1$.

Seja $T = \left(\dfrac{{a_1}^p + {a_2}^p + ... + {a_n}^p}{n}\right)^{\frac{1}{p}}$. Fazendo $x_i = \dfrac{a_i}{T}$ para $i = 1, 2, ..., n$ e substituindo, tem-se;

$$p\left(\frac{a_1}{T}\right)^q + (q - p) \geq q\left(\frac{a_1}{T}\right)^p$$
$$p\left(\frac{a_2}{T}\right)^q + (q - p) \geq q\left(\frac{a_2}{T}\right)^p$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p\left(\frac{a_n}{T}\right)^q + (q - p) \geq q\left(\frac{a_n}{T}\right)^p$$

Somando, obtemos:

$$p\left[\left(\frac{a_1}{T}\right)^q + \left(\frac{a_2}{T}\right)^q + ... + \left(\frac{a_n}{T}\right)^q\right] + (nq - np) \geq \left[\left(\frac{a_1}{T}\right)^p + \left(\frac{a_2}{T}\right)^p + ... + \left(\frac{a_n}{T}\right)^p\right]$$

Logo,

$$p\left[\frac{{a_1}^q + {a_2}^q + ... + {a_n}^q}{T^q}\right] + nq - np \geq q\left[\frac{{a_1}^p + {a_2}^p + ... + {a_n}^p}{T^p}\right]$$

Como $T^p = \dfrac{{a_1}^p + {a_2}^p + ... + {a_n}^p}{n}$, obtemos;

$$p\left[\frac{{a_1}^q + {a_2}^q + ... + {a_n}^q}{T^q}\right] + nq - np \geq qn \Longrightarrow \left[\frac{{a_1}^q + {a_2}^q + ... + {a_n}^q}{T^q}\right] \geq n$$

e

$$\left[\frac{{a_1}^q + {a_2}^q + ... + {a_n}^q}{n}\right] \geq T^q = \left[\frac{{a_1}^p + {a_2}^p + ... + {a_n}^p}{n}\right]^{\frac{q}{p}}$$

Portanto, $M_p(a) \leq M_q(a)$. A igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

De posse desses resultados, ilustraremos no próximo capítulo , a aplicação das desigualdades das médias em alguns tipos de problemas, para uma lista qualquer de n números reais positivos.

Capítulo 4

Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos vários problemas resolvidos por meio da aplicação das desigualdades das médias. A idéia fundamental é perceber quais os números e como devemos organizá-los para serem aplicados nas desigualdades a ser analisadas. Algumas vezes, se faz necessário aplicar combinações de diversas idéias diferentes na tentativa de modelar uma expressão capaz de solucionar o problema.

Para a abordagem de problemas algébricos , sugerimos as referências Cvetkovski (2012), Hardy et al. (1934) e Shklarsky et al. (1993) que apresentam vários problemas resolvidos pelo uso das desigualdades das médias. Vamos também utilizar algumas propriedades das desigualdades das médias para aproximação de raízes quadradas , buscando demonstrar a aplicação e eficiência desse método.

4.1 Problemas diversos

Problema 1 *Encontre o valor mínimo da função g definida pela lei*

$$g(x,y) = \frac{32}{x} + \frac{54}{y} + xy$$

onde x e y são reais positivos.

Solução: Observe que a expressão da função g é composta por três parcelas e aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica ($A \geqslant G$) nelas, obtemos

$$g(x,y) = \frac{32}{x} + \frac{54}{y} + xy \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{32}{x} \cdot \frac{54}{y} \cdot xy} = 12 \Longleftrightarrow g(x,y) \geqslant 3 \cdot 12 = 36$$

Logo, $g(x,y) \geqslant 36$. Portanto, o valor mínimo de g é 36.

Problema 2 *(Noruega- 99) Prove que, quaisquer que sejam os números reais positivos a, b, c, d e e, a desigualdade $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$ é válida.*

Solução: Note que podemos reescrever a expressão como segue

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = \left(\frac{a^2}{4}+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+d^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}+e^2\right)$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, vem

$$\left(\frac{a^2}{4}+b^2\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot b^2} = a\cdot b \qquad \left(\frac{a^2}{4}+c^2\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot c^2} = a\cdot c$$

$$\left(\frac{a^2}{4}+d^2\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot d^2} = a\cdot d \qquad \left(\frac{a^2}{4}+e^2\right) \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot e^2} = a\cdot e$$

Somando estas desigualdades obtemos

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geqslant a(b+c+d+e)$$

Problema 3 *Uma área retangular em uma fazenda será cercada por um rio e nos outros três lados por uma cerca elétrica formada de um fio. Com $800m$ de fio à disposição, qual é a maior área que você pode cercar e quais são as suas dimensões?*

Solução: Sejam l e A o comprimento da cerca e a área em função das dimensões a e b da região retangular , temos

$$l = 2a+b \qquad e \qquad A = ab$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, vem

$$\frac{800}{2} = \frac{l}{2} = \frac{2a+b}{2} \geqslant \sqrt{2ab} \Longleftrightarrow 400 \geqslant \sqrt{2ab} = \sqrt{2A}$$

Logo,

$$160000 \geqslant 2A \Longrightarrow 80000 \geqslant A$$

Portanto, a área máxima é 80000 m, ocorrendo se, e somente se, $2a = b$, isto é,

$$2a + b = 800 \Longleftrightarrow 2b = 800 \Longleftrightarrow b = 400\ m$$

e substituindo temos $a = 200\ m$.

Problema 4 *Se* 48000 cm^2 *de material estiverem disponíveis para confeccionar uma caixa com base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.*

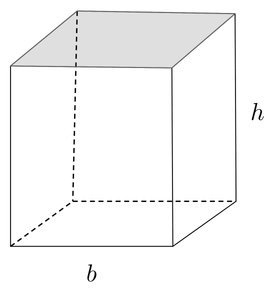

Figura 4.1: Caixa de base quadrada sem tampa

Solução: Considere S, a área da superfície lateral e V o volume da caixa. Logo, as expressões de S e V em função da altura h e da aresta da base b são,

$$S = b^2 + 4bh = 4800 \quad e \quad V = b^2h$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\frac{4800}{3} = \frac{b^2 + 2bh + 2bh}{3} \geqslant \sqrt[3]{b^2 \cdot 2bh \cdot 2bh} = \sqrt[3]{4 \cdot (b^2h)^2} = \sqrt[3]{4 \cdot V^2}$$

Logo,

$$4V^2 \leqslant 1600^3 \Rightarrow V \leqslant 32.000$$

Temos também que o volume máximo da caixa ocorre exatamente na igualdade, isto é, $b^2 = 2bh$. Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} b^2 = 2bh \\ b^2 + 4bh = 4800 \end{cases}$$

cuja solução é $b = 40cm$ e $h = 20cm$. Concluímos assim que o volume máximo, $V = 32.000\ cm^3$, ocorre para esses valores.

Problema 5 *Deve-se construir uma caixa, com uma folha de cartolina que é um quadrado de lado $2y$, retira-se a partir dos vértices pequenos quadrados de lados x, de maneira a formar a caixa da Figura 4.2. Determine o valor de x que torna o volume da caixa máximo.*

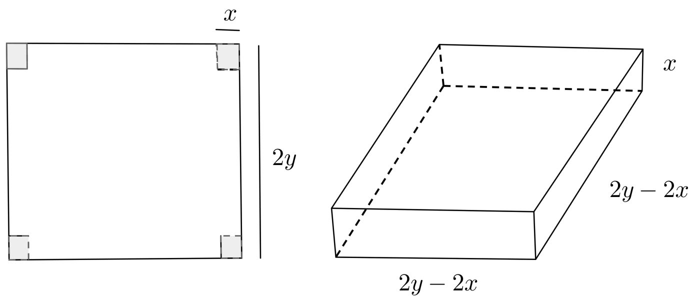

Figura 4.2: Esboço da caixa

Solução: O volume V da caixa é dado por $V = x(2y-2x)^2 = 4x(y-x)^2$, com $0 < x < y$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$\frac{4x + 2(y-x) + 2(y-x)}{3} \geqslant \sqrt[3]{4x \cdot 2(y-x) \cdot 2(y-x)}$$

$$\iff \frac{4y}{3} \geqslant \sqrt[3]{4V} \iff \frac{64y^3}{27} \geqslant 4V \iff \frac{16y^3}{27} \geqslant V$$

Portanto, o volume máximo é $\dfrac{16y^3}{27}$, ocorrendo se, e somente se, $4x = 2(y-x)$, isto é, $x = \dfrac{y}{3}$.

Problema 6 *Se uma lata de zinco de volume $32\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilíndro circular reto, determine a altura e o raio do cilíndro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.*

Solução: Considere h a altura, r o raio da base e S a área da superfície total do cilindro. Então, temos;

$$r^2h = 32 \quad e \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\frac{S}{3} = \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\pi rh \cdot \pi rh \cdot 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2h)^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (32)^2} = 8\pi\sqrt[3]{4}$$

Logo, $S \geq 8\pi\sqrt[3]{4}$ e S será mínima quando a igualdade ocorrer, ou seja, quando $\pi rh = 2\pi r^2$. Assim temos o sistema:

$$\begin{cases} \pi rh = 2\pi r^2 \\ r^2 h = 32 \end{cases}$$

cuja solução é $h = 4\sqrt[3]{2}\ cm \quad e \quad r = 2\sqrt[3]{2}\ cm$ o que de fato, temos o mínimo para S que é $8\pi\sqrt[3]{4}\,cm^2$ e que ocorre para esses valores.

Problema 7 *(Wagner-1995) Em um trapézio de bases x e y, determinar o comprimento l de um segmento paralelo às bases que divida esse trapézio em dois outros de mesma área.*

Solução: Considere a Figura 4.3 abaixo que ilustra o enunciado do problema.

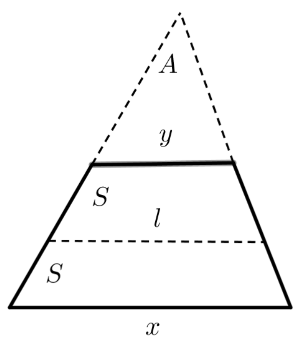

Figura 4.3: Trapézio do enunciado

Prolongando os lados não- paralelos do trapézio para formar três triângulos semelhantes, sendo o menor de área A e base y, um outro de área $A+S$ e base l, e o maior de área $A+2S$ e base x. Como as áreas de figuras semehantes são proporcionais aos quadrados dos segmentos homólogos, temos:

$$\frac{A}{y^2} = \frac{A+S}{l^2} = \frac{A+2S}{x^2}$$

Utilizando a seguinte propriedade elementar das proporções;

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

concluímos que,

$$\frac{S}{x^2-l^2} = \frac{S}{l^2-y^2} \Longrightarrow x^2 - l^2 = l^2 - y^2 \Longrightarrow 2l^2 = x^2 + y^2 \Longrightarrow l = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Portanto, o segmento paralelo as bases de um trapézio que divide-o em dois outros de mesma área é a média quadrática de x e y.

Notemos que a base média do trapézio tem comprimento $\dfrac{x+y}{2}$. Sendo $x > y$,

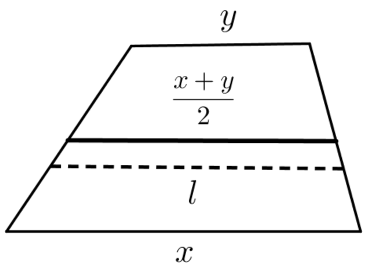

Figura 4.4: Desigualdade entre as médias aritmética e quadrática no trapézio

temos que o trapézio de bases $\dfrac{x+y}{2}$ e y , tem área menor que o trapézio de bases $\dfrac{x+y}{2}$ e x. Então, o segmento l certamente está abaixo da base média do trapézio, conforme a Figura 4.4. Assim, obtemos o seguinte resultado

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Essa é a desigualdade entre a média aritmética e a média quadrática de x e y.

Problema 8 *Determine as dimensões de um retângulo de área máxima, com lados paralelos aos eixos coordenados, inscrito numa elipse cuja equação é dada por* $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

Solução: Tomemos um ponto (x_0, y_0) como vértice do retângulo como mostra a Figura 4.5. Consequentemente, esse ponto está sobre a elipse, isto é $\dfrac{{x_0}^2}{a^2}+\dfrac{{y_0}^2}{b^2}=1$

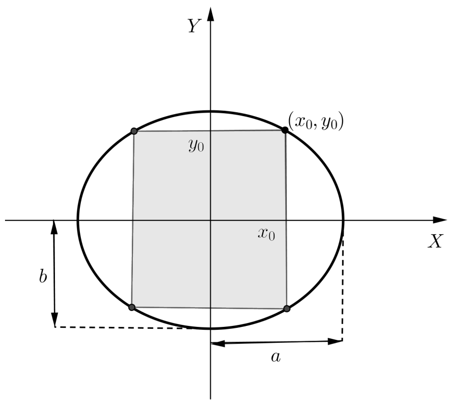

Figura 4.5: Elipse centrada na origem

Aplicando a desigludade entre as médias geométrica e quadrática aos números $\frac{x_0}{a}$ e $\frac{y_0}{b}$, segue

$$\sqrt{\frac{x_0}{a} \cdot \frac{y_0}{b}} \leqslant \sqrt{\frac{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \iff 2x_0 \cdot y_0 \leqslant ab$$

A área do retângulo é dada por $A = (2x_0) \cdot (2y_0) = 4x_0 \cdot y_0$, logo

$$\frac{A}{2} \leqslant ab \iff A \leqslant 2ab$$

Assim, a área máxima do retângulo é $2ab$, ocorrendo se e somente se, $\frac{x_0}{a} = \frac{y_0}{b}$, isto é,

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \iff 2.\frac{{x_0}^2}{a^2} = 1 \iff x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Substituindo, temos $y_0 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, as dimensões máximas do retângulo são $x_0 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $y_0 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Problema 9 *Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}^+$, então*

$$3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$$

Solução: Para resolver este problema utilizaremos os seguintes resultados obtidos por meio da aplicação da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, como segue;

$$a^3 + 2b^3 = a^3 + b^3 + b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot b^3} = 3\sqrt[3]{a^3 \cdot b^6} = 3ab^2$$

e

$$2a^3 + 5b^3 = 2a^3 + b^3 + 4b^3 \geqslant 3\sqrt[3]{2a^3 \cdot b^3 \cdot 4b^3} = 3\sqrt[3]{8a^3 \cdot b^6} = 6ab^2$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$a^3 + 2b^3 + 2a^3 + 5b^3 \geqslant 3ab^2 + 6ab^2$$

$$3a^3 + 7b^3 \geqslant 9ab^2$$

Problema 10 *(Teste Seleção Cone Sul - 94) Se* $a, b \in \mathbb{R}^+$, *então*

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant a^3+b^3+c^3+15abc$$

Solução: Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) &= 2a^3+2b^3+2c^3+2(ab^2+a^2b+ac^2+bc^2+b^2c)\\
&= a^3+b^3+c^3+(a^3+b^3+c^3)+2(ab^2+a^2b+ac^2+bc^2+b^2c)\\
&= a^3+b^3+c^3+(a^3+bc^2+b^2c)+(b^3+ac^2+a^2c)\\
&+ (c^3+ab^2+a^2b)+(ab^2+a^2c+bc^2)+(a^2b+ac^2+b^2c)
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$a^3+bc^2+b^2c \geqslant 3\sqrt[3]{a^3bc^2b^2c} = 3abc$$

$$b^3+ac^2+a^2c \geqslant 3\sqrt[3]{b^3ac^2a^2c} = 3abc$$

$$c^3+ab^2+a^2b \geqslant 3\sqrt[3]{c^3ab^2a^2b} = 3abc$$

$$ab^2+a^2c+bc^2 \geqslant 3\sqrt[3]{ab^2a^2cbc^2} = 3abc$$

$$a^2b+ac^2+b^2c \geqslant 3\sqrt[3]{a^2bac^2b^2c} = 3abc$$

Somando estas desigualdades:

$$2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant a^3+b^3+c^3+15abc$$

Problema 11 *(Cvetkovski- 2012) Sejam* a, b *e* c *números reais positivos. Prove que*

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \leq 3(a^3+b^3+c^3)^2$$

Solução: Utizando a desigualdade entre as médias de potência para a, b e c , temos

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

Elevando a sexta em ambos os membros da desigualdade, obtemos

$$\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)^2,$$

que resulta,

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \leq 3(a^3+b^3+c^3)^2$$

Problema 12 *Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as suas arestas é 24.*

Solução: Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo, logo sua diagonal d é dada por

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Como a soma de todas as arestas é 24, temos

$$4a+4b+4c = 24 \Longrightarrow a+b+c = 6$$

Aplicando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética, obtemos

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{(a+b+c)}{3} = 2 \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 12$$

Portanto, d será mínimo se, e somente se, $a = b = c = 2$, isto é, um cubo de aresta 2 e diagonal medindo $2\sqrt{3}$.

Problema 13 *(Cvetkovski - 2012) Sejam a e b reais positivos tais que $a+b=1$. Prove que*

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

Solução: Aplicando a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética , temos

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\right)^2}{4}$$

Como $a+b=1$ segue que

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{ab}\right)^2$$

Daí, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Longrightarrow a \cdot b \leq \frac{1}{4}$$

Logo,

$$\frac{1}{a \cdot b} + 1 \geq 5$$

Portanto,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{1}{2}(5)^2 = \frac{25}{2}$$

Problema 14 *Mostre que se* $0 < b < 2a$*, então*

$$16b(2a-b)^3 \leqslant 27a^4$$

Solução: Note que $0 < b < 2a$, tem-se $2a - b > 0$.

Como $6a = (2a-b) + (2a-b) + (2a-b) + 3b$,

aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$6a = (2a-b) + (2a-b) + (2a-b) + 3b \geqslant 4\sqrt[4]{(2a-b)\cdot(2a-b)\cdot(2a-b)\cdot 3b}$$

Logo,

$$3a \geqslant 2\sqrt[4]{(2a-b)^3 \cdot 3b} \Longrightarrow 81a^4 \geqslant 16[(2a-b)^3 \cdot 3b]$$

Portanto,

$$27a^4 \geqslant 16b(2a-b)^3$$

Problema 15 *Prove que para todo* $n > 1$,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) < n^n$$

Solução: Utilizando a fórmula da soma de uma progressão aritmética para os n primeiros números ímpares obtemos

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$$

Agora, aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$n = \frac{n^2}{n} = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n} > \sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)}$$

$$\iff \sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1)} < n$$

Portanto,

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2n-1) < n^n.$$

Problema 16 *Mostre que se* $0 < b < a$, *então*

$$a + \frac{1}{(a-b)b} \geqslant 3.$$

Solução: Fazendo $x = a - b > 0$, temos que $a = x + b$ e substituindo na expressão a seguir resulta :

$$a + \frac{1}{(a-b)b} = x + b + \frac{1}{(x+b-b)b} = x + b + \frac{1}{xb}$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos

$$x + b + \frac{1}{xb} \geqslant 3\sqrt[3]{xb\frac{1}{xb}} = 3$$

Portanto $a + \dfrac{1}{(a-b)b} \geqslant 3$, como queríamos mostrar.

Problema 17 *(Cvetkovski - 2012) Sejam* a, b *e* c *números reais positivos tais que* $a+b+c=6$. *Prove que*

$$\sqrt[3]{ab+bc} + \sqrt[3]{bc+ca} + \sqrt[3]{ca+ab} \leq 6$$

Solução: Podemos utilizar a desigualdade entre as médias de potência como segue

$$\left(\frac{(ab+bc)^{\frac{1}{3}} + (bc+ca)^{\frac{1}{3}} + (ca+ab)^{\frac{1}{3}}}{3}\right)^3 \leq \left(\frac{(ab+bc)^1 + (bc+ca)^1 + (ca+ab)^1}{3}\right)^1$$

assim,

$$\frac{(ab+bc)^{\frac{1}{3}} + (bc+ca)^{\frac{1}{3}} + (ca+ab)^{\frac{1}{3}}}{3} \leq \sqrt[3]{\frac{(ab+bc)+(bc+ca)+(ca+ab)}{3}}$$

logo,

$$\sqrt[3]{ab+bc}+\sqrt[3]{bc+ca}+\sqrt[3]{ca+ab} \leq \sqrt[3]{18(ab+bc+ca)}$$

Observe ainda que $ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$, onde resulta

$$ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

Portanto,

$$\sqrt[3]{ab+bc}+\sqrt[3]{bc+ca}+\sqrt[3]{ca+ab} \leq \sqrt[3]{18 \cdot 12} = 6,$$

a igualdade ocorre se $a=b=c=2$.

Problema 18 *(Silva e Gomes -2010) Mostre que para cada $a>0$*

$$\frac{a^4+9}{10a} \geqslant \frac{4}{5}$$

Solução: Observe que podemos escrever

$$\frac{a^4+9}{10a} = \frac{a^3}{10}+\frac{4}{10a}+\frac{4}{10a}+\frac{1}{10a}$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, obtemos

$$\frac{\frac{a^3}{10}+\frac{4}{10a}+\frac{4}{10a}+\frac{1}{10a}}{4} \geqslant \sqrt[4]{\frac{a^3}{10}\cdot\frac{4}{10a}\cdot\frac{4}{10a}\cdot\frac{1}{10a}} = \frac{1}{5}$$

Portanto, $\dfrac{a^4+9}{10a} \geqslant \dfrac{4}{5}$

Problema 19 *(Silva e Gomes -2010) Sejam a, b e c são números positivos, qual o valor mínimo da expressão*

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)?$$

Solução. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, obtemos;

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Longrightarrow (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

Portanto, o valor mínimo assumido pela expressão é 9, ocorrendo quando $a=b=c$.

Problema 20 *(Bielorussia - 99) Sejam a, b, e c números reais positivos e $a^2+b^2+c^2=3$. Prove que* $\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ac}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

Solução. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica segue

$$\frac{(1+ab)+(1+bc)+(1+ac)}{3}\geqslant\frac{3}{\dfrac{1}{1+ab}+\dfrac{1}{1+bc}+\dfrac{1}{1+ac}}$$

$$\iff(3+ab+bc+ac)\left(\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\right)\geqslant 9$$
$$\iff\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geqslant\frac{9}{ab+bc+ac+3}$$

Observe os seguintes resultados

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,\qquad a^2+c^2\geqslant 2ac,\qquad b^2+c^2\geqslant 2bc$$

Somando essas desigualdades, temos $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$ e como $a^2+b^2+c^2=3$ segue

$$ab+bc+ac\leqslant 3$$

e obtemos

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geqslant\frac{9}{ab+bc+ac+3}\geqslant\frac{9}{3+3}=\frac{3}{2}$$

Problema 21 *Mostre que para cada $a\geq 0$ e cada inteiro $n\geqslant 1$, temos que*

$$\frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{2n}}\leqslant\frac{1}{2n+1}$$

Solução. Inicialmente observe que uma soma de 0 até $2n$ possue $2n+1$ parcelas e que

$$1+2+3+...+2n=\frac{(1+2n)(2n)}{2}=(2n+1)n$$

Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e harmônica, segue

$$\begin{aligned}\frac{1+a+a^2+...+a^{2n}}{2n+1} &\geqslant \sqrt[2n+1]{1\cdot a\cdot a^2\cdot ...\cdot a^{2n}}\\ &= \sqrt[2n+1]{a^{1+2+3+...+2n}}\\ &= \sqrt[2n+1]{a^{(2n+1)n}} = a^n\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1+a+a^2+...+a^{2n}}{2n+1} \geqslant a^n \Longrightarrow \frac{1}{2n+1} \geqslant \frac{a^n}{1+a+a^2+...+a^{2n}}$$

Problema 22 *(Banco IMO 2009) Sejam* a, b *e* c *reais positivos tais que* $a+b+c = \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. *Prove que*

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{3}{16}$$

Solução: Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, segue

$$(2a+b+c) = (a+b)+(a+c) \geq 2\sqrt{(a+b)(a+c)} \Longrightarrow \frac{1}{(2a+b+c)^2} \leq \frac{1}{4(a+b)(a+c)}$$

Analogamente, tem-se

$$\frac{1}{(a+2b+c)^2} \leq \frac{1}{4(a+b)(b+c)} \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{1}{4(a+c)(b+c)}$$

Assim,

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(a+b+2c)^2} \leq \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(a+c)}$$

Observe que

$$\begin{aligned}9(a+b)(b+c)(a+c) &= 9(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c)+18abc\\ &= 8(ab+bc+ac)(a+b+c)+(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+a^2c-6abc)\\ &\geq 8(ab+bc+ac)(a+b+c)\end{aligned}$$

Pois, pela desigualdade entre entre as médias aritmética e geométrica, tem-se

$$a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + a^2c \geq 6\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = 6abc$$

Logo, obtemos

$$9(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8(ab+bc+ac)(a+b+c) \Longrightarrow \frac{1}{(a+b)(b+c)(a+c)} \leq \frac{9}{8(ab+bc+ac)(a+b+c)}$$

e ainda

$$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2\sqrt{a^4b^2c^2} = 2a^2bc \quad e \quad a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c \quad e \quad a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$$

Somando essas desigualdades, obtemos

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geq a^2bc + ab^2c + abc^2 \Longrightarrow (ab+bc+ac)^2 \geq 3abc(a+b+c)$$

Como $a + b + c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \Longrightarrow 3abc(a+b+c) = (ab+bc+ac)$, temos

$$(ab+bc+ac) \geq 3 \Longrightarrow \frac{1}{(ab+bc+ac)} \leq \frac{1}{3}$$

Portanto,

$$\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(a+c)} \leq \frac{9(a+b+c)}{16(ab+bc+ac)(a+b+c)} = \frac{9}{16(ab+bc+ac)} \leq \frac{9}{16 \cdot 3} = \frac{3}{16}$$

Problema 23 *(Cvetkovski - 2012) Sejam a, b e $c \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$. Prove que*

$$a^n + b^n + c^n \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n$$

Solução: Pela desigualdade entre as médias de potência para $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e número natural com $n \geq 1$, temos

$$\frac{a^n + b^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^n$$

Logo, resulta que

$$\frac{a^n + b^n + b^n}{3} \geq \left(\frac{a+b+b}{3}\right)^n = \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n$$

Analogamente, obtemos

$$\frac{b^n + c^n + c^n}{3} \geq \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n \quad \text{e} \quad \frac{c^n + a^n + a^n}{3} \geq \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n$$

Portanto,

$$a^n + b^n + c^n = \frac{a^n + b^n + b^n}{3} + \frac{b^n + c^n + c^n}{3} + \frac{c^n + a^n + a^n}{3} \geq \left(\frac{a+2b}{3}\right)^n + \left(\frac{b+2c}{3}\right)^n + \left(\frac{c+2a}{3}\right)^n$$

A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem como consequência as seguintes afirmações:

I) Se o produto de n números positivos for constante, então a soma será mínima se todos os números forem iguais.

II) Se a soma de n números for constante, então o produto será máximo quando todos forem iguais.

4.2 Aproximando raízes quadradas

Podemos constatar várias aplicações das desigualdades das médias para resolver diversos problemas, principalmente aqueles relacionados a otimização. Para isto, o uso delas se mostrou eficiente e uma forma alternativa de resolver problemas que normalmente são resolvidos por meio do cálculo diferencial, isto é, o emprego de derivadas que é um assunto estudado no ensino superior.

Uma idéia muito interessante proposta por Carneiro (2001), consiste basicamente empregar as desigualdades das médias para aproximação de raízes quadradas. Este método é muito eficiente para se chegar numa aproximação por falta ou excesso de um número. Faremos em exemplo dessa método e também mostraremos a válidade do procedimento geral.

Considere dois números reais positivos x_1 e x_2. Assim, suas médias aritmética(A), geométrica (G) e harmônica (H) têm as seguintes propriedades.

(i) $H = \dfrac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \leq G = \sqrt{x_1x_2} \leq A = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, *ocorrendo a igualdade, se e somente se,* $x_1 = x_2$.

(ii) $\sqrt{HA} = G$.

De fato, a propriedade (i) já foi demonstrada no Capítulo 2 . Por outro lado, a afirmação (ii) é fácil de verificar como segue

$$\sqrt{HA} = \sqrt{\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{x_1+x_2}{2}} = \sqrt{x_1x_2} = G$$

É possível usar estas propriedades para calcular, por exemplo, aproximações racionais de $\sqrt{7}$. Como 7=1.7, tomando $x_1 = 1$ e $x_2 = 7$, tem-se pela propriedade (i),

$$\frac{14}{8} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 7}{1+7} < \sqrt{1 \cdot 7} < \frac{1+7}{2} = 4$$

Pela propriedade (ii), a média geométrica destas duas novas frações continua sendo igual a $\sqrt{7}$, segue que

$$\frac{56}{23} = \frac{2 \cdot \frac{14}{8} \cdot 4}{\frac{14}{8} + 4} < \sqrt{\frac{14}{8} \cdot 4} < \frac{\frac{14}{8} + 4}{2} = \frac{23}{8}$$

Iterando mais uma vez o processo temos,

$$\frac{2576}{977} = \frac{2 \cdot \frac{56}{23} \cdot \frac{23}{8}}{\frac{56}{23} + \frac{23}{8}} < \sqrt{\frac{56}{23} \cdot \frac{23}{8}} < \frac{\frac{56}{23} + \frac{23}{8}}{2} = \frac{977}{368}$$

Aplicando sucessivamente o mesmo procedimentos,obtemos

$$\frac{14}{8} < \sqrt{7} < 4 \Longleftrightarrow 1,75 < \sqrt{7} < 4$$

$$\frac{56}{23} < \sqrt{7} < \frac{23}{8} \Longleftrightarrow 2,43478... < \sqrt{7} < 2,875$$

$$\frac{2576}{977} < \sqrt{7} < \frac{977}{368} \Longleftrightarrow 2,636642... < \sqrt{7} < 2,654891...$$

Observa-se que como $2576/977 = 2,636642...$ e $977/368 = 2,654891...$, este método de aproximação é bastante eficiente, já que $\sqrt{7} \cong 2,645751...$, isto significa que é possível conseguir uma boa aproximação com duas casas decimais em apenas três iterações.

De maneira geral, sejam H_n e A_n as médias harmônica e aritmética na iteração n, tem-se:

$$H_n = \frac{2H_{n-1}A_{n-1}}{H_{n-1}+A_{n-1}}, \qquad A_n = \frac{H_{n-1}+A_{n-1}}{2} \qquad \text{para } n = 1, 2, ...$$

Se desejamos calcular a raiz quadrada do número $N > 1$, e pelas propriedades das médias, temos

$$H_n < \sqrt{H_n A_n} = \sqrt{H_{n-1}A_{n-1}} = ... = \sqrt{N} < A_n$$

logo,

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\frac{H_{n-1}+A_{n-1}}{2}}{A_{n-1}} = \frac{\frac{H_{n-1}}{A_{n-1}}+1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1 \Longrightarrow A_n < A_{n-1}$$

e

$$\frac{H_n}{H_{n-1}} = \frac{A_{n-1}}{A_n} > 1 \Longrightarrow H_n > H_{n-1}$$

Portanto, a sequência formada por H_n é crescente e limitada superiormente por $\sqrt{N}$, enquanto a sequência formada por A_n é decrescente e limitada inferiormente por $\sqrt{N}$. Se tivermos H_n convergindo para l_1 e A_n convergindo para l_2 então,

$$A_n - H_n = \frac{H_{n-1}+A_{n-1}}{2} - \frac{2H_{n-1}A_{n-1}}{H_{n-1}+A_{n-1}} = \frac{(H_{n-1}+A_{n-1})^2 - 4H_{n-1}A_{n-1}}{2(H_{n-1}+A_{n-1})} = \frac{(A_{n-1}-H_{n-1})^2}{4A_n}$$

Assim, usando a idéia de limite, tem-se:

$$l_2 - l_1 = \frac{(l_2 - l_1)^2}{4l_2},$$

Se $l_2 \neq l_1$, então $l_2 - l_1 = 4l_2$, o que acarretaria $3l_2 = -l_1$, o que é impossível, pois l_1 e l_2 são positivos. Logo, $l_1 = l_2 = \sqrt{N}$.

Portanto, as sequências H_n e A_n são aproximações por falta e excesso de $\sqrt{N}$ cada vez melhores para $n = 1, 2, ...$ quanto quisermos.

$$H_1 \quad > \quad H_2 > \cdots H_n \cdots \sqrt{N} \cdots < A_n \cdots < A_2 \quad < \quad A_1$$

Considerações finais

No contexto do ensino superior os problemas de otimização costumam ser resolvidos por meio do cálculo diferencial, enquanto que no ensino médio a maioria deles conduz a uma função polinomial do segundo grau, que contemplam somente problemas elementares que se enquadram naquela situação. Neste trabalho priviligiamos a resolução de problemas através da aplicação das desigualdades das médias.

Assim, o uso delas mostra-se eficiente na resolução de alguns problemas que envolvem otimização e desigualdades. Em cada problema resolvido é necessário um pouco de prática e criatividade para descobrir os termos que devem formar a desigualdade a ser aplicada.

Dedicamos uma seção para tratar da desigualdade entre as médias de potência, que seria uma generalização das desigualdades das médias para potências reais positivas, bem como apresentamos alguns problemas que podem ser resolvido aplicando essa desigualdade. Este fato, é que o diferencia dos outros trabalhos apresentados e consultados sobre o assunto.

Portanto, acredito que este trabalho contribuiu para o meu conhecimento, de forma a servir como alternativa em ensinar alguns assuntos , como alguns problemas de otimização que geralmente são resolvidos pela aplicação de derivadas, que sejam acessíveis a estudantes do ensino médio. E também a lidar com problemas de olímpiadas de matemática que posssuem um nível maior de dificuldades para resolver.

Referências Bibliográficas

Araújo, E. H. A. (2011). Médias e problemas de otimizacao. *Revista do Professor de Matemática*, 76:27–29.

Carneiro, J. (2001). Raiz quadrada utilizando médias. *Revista do Professor de Matemática*, 45:21–28.

Cvetkovski, Z. (2012). *Inequalities -theorems, techniques and selected problems.* Verlag, Springer.

Hardy, G., Littlewood, J., e Polya, G. (1934). *Inequalities.* Cambridge University Press, London.

Lima, E. (2006). *Meu Professor de Matemática e outras histórias.* Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática.

Lima, E., Carvalho, P. C., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2006). *A Matemática do Ensino Médio.* Rio de Janeiro: vol. 2, Sociedade Brasileira de Matemática.

Shklarsky, D., Chentzov, N., e Yaglom, I. (1993). *USSR Olympiad Problem Book.* Inc. Dover Publications, New York.

Silva, C. A. G. e Gomes, J. M. (2010). *Tópicos de Matemática - IME - ITA- Olímpiadas.* Fortaleza-CE, vol. 1, Ed. Vestseller.

Wagner, E. (1995). A desigualdade de cauchy-schwarz. *Revista do Professor de Matemática*, 27:16–21.