Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Marcel Luiz Silva Brum

A distribuição do ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio: uma proposta na contramão do ensino tradicional

Juiz de Fora

2015

Marcel Luiz Silva Brum

A distribuição do ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio: uma proposta na contramão do ensino tradicional

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche

Juiz de Fora

2015

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Brum, Marcel.
A distribuição do ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio : uma proposta na contramão do ensino tradicional / Marcel Luiz Silva Brum. – 2015.
60 f. : il.

Orientador: Sandro Rodrigues Mazorche
Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

1. Números Complexos. 2. Ensino Médio. 3. Ensino Diferenciado. I. Mazorche, Sandro Rodrigues, orient. II. Título.

Marcel Luiz Silva Brum

A distribuição do ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio: uma proposta na contramão do ensino tradicional

Dissertação apresentada ao PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 02 de março de 2015

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Sandro Rodrigues Mazorche - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Rogério Casagrande
Universidade Federal de Juiz de Fora

Professor Dr. Anderson Luís Albuquerque de Araújo
Universidade Federal de Viçosa

Dedico este trabalho à minha amada esposa, Lívia, e à minha filha, Luiza, que juntas são a minha grande fonte de motivação e inspiração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por ter me permitido alcançar mais essa conquista!

Ao Prof. Dr. Sandro Mazorche pelo seu trabalho de orientador, conduzindo-me à conclusão dessa tão almejada dissertação.

À minha esposa, Lívia, que durante todo tempo esteve ao meu lado e nos momentos em que estive ausente cuidou de nossa filha e de nossos interesses familiares de uma forma que me trouxe tranquilidade para eu me dedicar à minha formação. E, mesmo não sendo da área, trouxe contribuições significativas para a construção desse trabalho.

À minha amada filha, Luiza, que deu sentido a todo esse processo. Filha, seu sorriso, suas "baguncinhas" e sua intensa curiosidade em conhecer o mundo ao seu redor são essenciais...

Aos meus pais, Marília Silva Brum – sempre presente em meu coração – e Iracildo Lopes Brum, que me transformaram na pessoa que sou hoje. Minha mãe e meu pai, não faltaram exemplos e atitudes para direcionar minha caminhada.

Aos meus irmãos, Iramar, Liamar, Susane, Marília, Iracildo, Christiano e Sarah que são a maior herança deixada pelos nossos pais! E à toda a família Brum que através de vocês está crescendo e se tornando mais especial e essencial em minha vida!

A todos os Corrêa Netto, em especial à minha querida sogra, Regina, que doou seu tempo para nos auxiliar com o cuidado para com a Luiza. Não poderia esquecer também da minha amiga e cunhada, Layla, sempre pronta para uma palavra de carinho e motivação!

À professora da Universidade de Brasília, Dra. Sarah Silva Brum que trouxe destacadas contribuições para a elaboração dessa pesquisa.

Ao meu amigo e professor, Marcelo Rinco que trouxe contribuições significativas no processo de construção dessa dissertação.

Às escolas, Escola Cenecista Monteiro Lobato, Escola Internacional Saci, Colégio Estadual Moacyr Padilha que, representadas pelos seus diretores e coordenadores, me incentivaram a fazer esse mestrado, demonstrando uma preocupação com a necessidade de qualificação de seus professores.

A todos os meus alunos, e ex-alunos, que também me motivaram na construção dessa dissertação.

Aos professores convidados a comporem a banca examinadora, Prof. Dr. Rogério Casagrande e Prof. Dr. Anderson Luís Albuquerque de Araújo.

Ao Programa de Mestrado – PROFMAT, à coordenação e aos professores que representaram de forma tão competente seu papel de educadores.

E a todos os demais que contribuíram de forma direta ou indireta para que essa caminhada se concretizasse.

Obrigado!

Marcel

O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos de raiz imaginária da unidade negativa.

(Leibniz)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo ser um instrumento para agregar recursos que proporcione um processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos eficaz para alunos do Ensino Médio. Assim, a presente proposta consiste em diluir o estudo dessa temática nos três anos do Ensino Médio respeitando os pré-requisitos pertinentes a cada série. Além disso, para ampliar a visão dos discentes no que diz respeito às diversas aplicações dos Complexos e orientar os docentes do seu papel na construção desse saber, são sugeridas: uma forma de introdução à temática que utiliza a História da Matemática como um objeto de contextualização; a definição geométrica que atribui significado aos Números Complexos; atividades diferenciadas e comentadas; além de trazer uma associação dos Números Complexos com a Trigonometria – através de demonstrações de fórmulas trigonométricas fundamentais e da fórmula de De Moivre. Cabe destacar que a motivação principal das propostas existentes nessa dissertação é oferecer aos estudantes a oportunidade de desenvolver um conhecimento acerca desse assunto dentro de um tempo hábil para que os alunos possam vislumbrar o potencial aplicativo dos Números Complexos não só dentro da Matemática, mas nas ciências afins.

Palavras-chave: Números Complexos. Ensino Médio. Ensino Diferenciado.

ABSTRACT

This work aims to be a tool to add features that provide a teaching and learning process of Complex Numbers effective for secondary school students. Thus, this proposal is to dilute the study of this theme in the three years of secondary schoolrespecting the requirements of each year. In addition, to extend the vision of students regarding the various applications of Complexes Numbers and guide the teachers of their role in the construction of this knowledge are suggested: a form of introduction to the theme that uses the history of mathematics as a context object ; the geometric definition that assigns meaning to Complex Numbers; driven differentiated activities; moreover to bring an association of the Complex Numbers with Trigonometry - through demonstrations of basic trigonometric formulas and De Moivre formula. It should be noted that the main motivation of the proposals in this dissertation is to offer students the opportunity to develop an understanding of this subject in a timely manner so that students can glimpse the potential application of Complex Numbers not only in mathematics, but in similar sciences.

Key-words: Complex Numbers. Secondary School. Differentiated Education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Para iniciar o presente trabalho e apontar um cenário que foi o motivador da elaboração dessa discussão, é necessário recorrer à História da Matemática para entender o início do que se tornou um fator primordial no caminho que tomou a construção do processo de ensino dos Números Complexos no Ensino Médio das escolas brasileiras.

Como parte dessa História aparecem os Números Complexos, cujo próprio nome já anuncia o quanto foi "complexa" sua evolução dentro desse processo, pois não se pode esquecer que a Matemática se desenvolveu na busca por resolver problemas concretos, algo que inicialmente não é inerente a esses números. Nasce, assim, junto com os primeiros aparecimentos dos Complexos, uma resistência que durante séculos retardou ainda mais o desenvolvimento de uma estrutura algébrica para esse novo objeto.

Encontra-se, nas notas históricas de Carvalho (p. 109-110, apud CARMO, MORGADO e VAGNER, 2001), grandes matemáticos que contribuíram de forma direta ou indireta para a estruturação da Teoria dos Números Complexos, mas, mesmo assim, construiam junto dessa teoria um estigma de que esse assunto era um complemento – sem o sentido real – que justificava a construção de outros conhecimentos.

Uma fala que traduz essa ideia são as palavras de Girard *"pode-se perguntar: para que servem essas soluções impossíveis (raízes complexas). Eu respondo: para três coisas – para a validez das regras gerais, devido à sua utilidade e por não haver outras soluções".*

Em suma, como será mostrado adiante no capítulo 2, no que se refere à história desses números, sabe-se que essa teoria levou cerca de dezenove séculos para ser desenvolvida – em sua maioria quase sempre vinculada aos estudos das equações polinomiais – sendo que a verdadeira importância da utilização desses números só veio a ser destacada no final desse período por Gauss.

Pensando no ensino tradicional dos Números Complexos, o que se percebe é que o estigma histórico negativo teve mais peso na construção do processo atual de ensino dessa temática do que o que foi iniciado por Gauss e outros grandes matemáticos.

Recorrendo a Carneiro,

> quem consultar os livros do Ensino Médio ou ouvir os testemunhos de professores e alunos, vai constatar que a maneira mais comum de introduzir os números complexos é por meio da seguinte definição: "Um número complexo é um objeto da forma $a+bi$, onde $\{a,b\} \subset \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, e permanecem válidas as leis da Álgebra" [...]. Dois comentários sobre a definição citada. Em primeiro lugar, depois que nós realmente entendermos o que é um número complexo, sabemos que esta definição não contém nada de errado. Todavia, introduzir os complexos por esta definição é análogo a introduzir as frações, [...] "uma fração é um objeto da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b

> são inteiros (sendo $b \neq 0$), com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, e que seguem as seguintes leis da Álgebra: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad+bc}{bd}$ e $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ac}{bd}$ ". Em seguida, passamos aos exercícios [...]. Também não haveria absolutamente nada de errado com esta definição e ela também permitiria resolver todas as contas usuais com frações (2004, p. 2).

Ao final dessa explanação, o referido autor se questiona se alguém, em plena posse do seu bom senso e com um mínimo de compaixão com seus alunos, faria essa barbaridade. Pois, acredita ele, que é mais ou menos isto que é feito com os Números Complexos. Em outras palavras, se está diante de um ensino que conduz o aluno a um processo excessivamente algebrista, mecânico e de repetição de conhecimento.

É relevante trazer o que foi destacado por Teles (2004, apud BRUM, 2013),

> se houve um desenvolvimento tardio da Álgebra registrado na História da Matemática e na própria estruturação do saber científico, parece dar indícios para o estudo em Educação Matemática da existência de dificuldades conceituais importantes, subjacentes à construção deste campo do conhecimento matemático. Se houve esta dificuldade na história da Matemática, muita chance existe que haja também para o aluno (p.07).

Esse pensamento diz respeito ao desenvolvimento da Álgebra como um todo no passar do tempo. Agrega-se a isso o que já foi relatado até o momento sobre os Complexos, e, assim, começa a ficar claro a realidade que se passa nas escolas no que diz respeito à construção desses conhecimentos que tem ido na contramão de um processo de ensino e aprendizagem ideal.

Dessa forma, para concretizar o cenário atual do ensino do assunto em questão, agrega-se o fato de esse ser dado no último ano do Ensino Médio, ficando, portanto, compartimentado e com o foco principal de ser pré-requisito para o ensino de polinômios. Dessa maneira, o aluno não tem um suporte correto do processo de ensino e o agravante de não ter um tempo hábil para se construir um conhecimento de qualidade. Associado a isso, observa-se que algumas universidades já retiraram o conteúdo em questão de seus programas e, até mesmo, não se observa nas provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) a presença de questões que incentivem os alunos a estudarem Números Complexos.

Assim, questiona-se como despertar o interesse por um assunto que já vem rotulado com o nome de “Números Complexos”; que possui uma parte imaginária (passando uma ideia prematura de que não pode ser usada na vida real) e que precisou de séculos para ser desenvolvido? Como atingir um processo de ensino e aprendizagem que alcance um índice satisfatório e que proporcione ao discente um entendimento “real” (e não imaginário) do assunto? Como possibilitar que o aluno tenha uma visão da necessidade de agregar esse novo conhecimento e não simplesmente associá-lo como um pré-requisito para a aprendizagem de polinômios? Pois sabe-se que é exatamente assim que a maioria dos docentes e livros didáticos conduzem o ensino dos Números Complexos, apresentando-o de forma isolada, com um objetivo maior de criar um pré-requisito para respaldar o estudo de polinômios. Esse fato é respaldado por meio de uma análise feita pelo autor no capítulo dois de importantes livros didáticos que aparecem nas bibliografias dos principais concursos e exames.

A proposta do presente trabalho é tentar responder a esses e outros questionamentos, não de forma estática, criando apenas métodos alternativos que contextualizem e atraiam mais a atenção dos alunos – sem aqui menosprezar a importância e a necessidade dos mesmos, pois de acordo com os próprios PCN's – Parâmetros Curriculares Nacionais – está registrado que

> a aprendizagem significativa pressupõe a existência de um referencial que permita aos alunos identificar e se identificar com as questões propostas. Essa postura não implica permanecer apenas no nível de conhecimento que é dado pelo contexto mais imediato, nem muito menos pelo senso comum, mas visa a gerar a capacidade de compreender e intervir na realidade, numa perspectiva autônoma e desalienante (BRASIL, 1997, p.22).

Além disso, pode-se encontrar nos PCN's que a aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.

A presente proposta, portanto, diz respeito à introdução do ensino dos Números Complexos antecipadamente. Ou seja, nas séries iniciais do Ensino Médio, claro que de forma responsável, respeitando todos os pré-requisitos necessários.

Sendo assim, tal proposta será apresentada na íntegra no terceiro capítulo que, em suma, consiste em: no 1º ano, trazer uma introdução contextualizada através da História da Matemática; um significado concreto para os Complexos através de uma abordagem geométrica e a formalização da temática em questão através da forma algébrica. Já no 2º ano, trabalhar a forma trigonométrica até à fórmula de De Moivre – em que é apontada a grande afinidade existente entre a própria Trigonometria e os Números Complexos. E no 3º ano acontecerá a culminância desse processo.

Cabe destacar que será trabalhado um roteiro diferenciado de ensino, com a apresentação inicial histórica e, em seguida, a introdução geométrica do assunto para dar significado aos Números Complexos, e em cada etapa (séries) serão apresentadas demonstrações e atividades com sugestões de resolução e comentários do autor que servirão como roteiro para que os docentes construam um processo de ensino e aprendizagem que faça jus ao universo de aplicações dos Complexos.

Por sua vez, no capítulo seguinte – Considerações Finais – são apresentadas conclusões, sem a intenção de esgotar a discussão do tema em questão.

Ressalta-se que o interesse do autor pela temática está associado à sua longa experiência de docência a partir da qual vem observando que os alunos perdem a oportunidade de usufruir da teoria dos Números Complexos na resolução de diferentes problemas, além do fato de saber sua importância não só na Matemática, mas em outras ciências afins.

Com base nesse panorama, fica evidente a necessidade de uma mudança na metodologia de ensino, ansiada pelo autor em virtude da sua experiência enquanto professor, que venha possibilitar uma desmistificação do assunto e, por consequência, que seja proporcionado um processo de ensino e aprendizagem ideal, através de uma proposta diferenciada.

2 DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS AO PROCESSO DE ENSINO CONTEMPORÂNEO

2.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS E SUA HISTÓRIA

Existem evidências arqueológicas que registram que o processo de contagem já existia há cerca de cinquenta mil anos a. C., pois a motivação era causada por necessidades práticas como, por exemplo, a noção de maior ou menor quantidade no que diz respeito ao rebanho (VIEIRA E SOUZA, s/d, pg).

Com base no que foi citado acima, pode-se concluir que a concretização do estudo dos Números Complexos vem num processo de evolução de milhares de anos sendo efetivada por volta do século XIX e XX, através da Geometria, que será utilizada nas propostas dessa dissertação, e da Álgebra com base na evolução da Teoria dos Conjuntos, em que através de métodos axiomáticos, os conjuntos dos números naturais ($\mathbb{N}$), dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), dos números racionais ($\mathbb{Q}$), dos números reais ($\mathbb{R}$) e dos Números Complexos ($\mathbb{C}$) passam a ficar bem definidos.

Em suma, recorrendo a Álgebra, sabe-se que o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é fechado para as operações de adição e multiplicação, sendo ambas associativas e comutativas, em que a multiplicação é distributiva em relação à adição. Além disso, possui o 1 como elemento básico, onde $n + 1 \neq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Já o conjunto $\mathbb{Z}$ estende $\mathbb{N}$, fechando a operação de subtração – dado um par de números naturais, a operação de subtração resulta em um número positivo ou negativo. Por sua vez, o conjunto $\mathbb{Q}$ amplia $\mathbb{Z}$, fechando a operação de divisão – dado um par de números inteiros, o quociente resulta em um número racional. No que diz respeito ao conjunto $\mathbb{R}$, pode-se defini-lo como um corpo que amplia e fecha o conjunto dos racionais, segundo a operação de radiciação[1].

Para reforçar o entendimento de que $\mathbb{R}$ é um corpo, tem-se que

> $\mathbb{R}$ é corpo porque estão definidas as quatro operações: adição, subtração, multiplicação e divisão, com todas as suas propriedades. É um corpo ordenado por que existe a relação de ordem $x < y$, está interligada com a adição e a multiplicação. E finalmente, é completo, pois está em relação bijetiva com a reta real. É a completude de $\mathbb{R}$ que garante a existência de $\sqrt[n]{a}$ e, mais geralmente, de a^x para todo $a > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}$ (Lima, 2006, p. 58).

Fechando, assim, esta pequena explanação sobre os principais conjuntos numéricos, o sistema numérico dos Números Complexos $\mathbb{C}$ amplia o corpo $\mathbb{R}$, dando solução para a

[1] Neste momento, vale a pena citar o axioma da completude que diz que toda subsequência limitada de números racionais converge para um número real.

equação $x^2 + 1 = 0$.

O diagrama da figura 01, muito utilizado nos livros didáticos, proporciona uma ideia mais concreta e simplificada do que foi resumido acima.

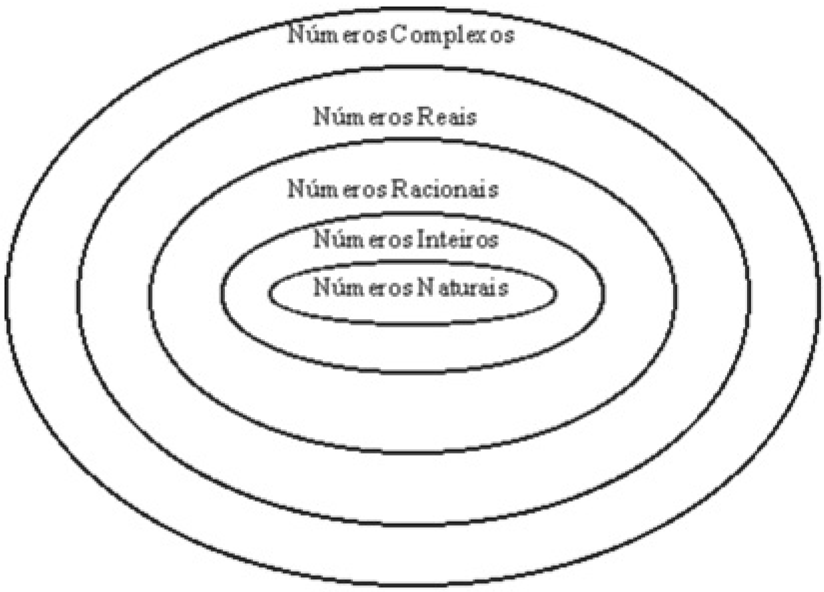

Figura 1 – Diagrama representativo dos conjuntos numéricos

Sabe-se que o desenvolvimento do conceito de número não ocorreu na ordem citada acima. Segundo Carvalho (p.109, apud CARMO, MORGADO E WAGNER, 2001), quando Gauss divulgou a sua interpretação geométrica dos Números Complexos no século XIX ainda existiam matemáticos que discutiam a existência dos números negativos.

O intuito de proporcionar uma visão geral dos conjuntos numéricos e de expor a evolução conceitual, conforme aparece em várias referências textuais (números naturais, inteiros, racionais, reais e, por fim, complexos), é reforçar a ideia de que todos os números conhecidos são Números Complexos e que existem Números Complexos que não são reais. Pois é sabido, para um público significativo, que quando se classifica um número como Número Complexo, esses indivíduos interpretam erroneamente que o número em questão tem que possuir, necessariamente, parte imaginária.

A partir desse momento, pode-se destacar que o foco histórico que será dado adiante permeará principalmente os números que completam o corpo dos reais. Ou seja, aqueles que possuem parte "imaginária", palavra esta, que junto com o título "Números Complexos" são estandartes que anunciam aos estudantes do Ensino Médio um estigma negativo atribuído a esse assunto tão importante para a concretização dos conhecimentos matemáticos e das ciências a ele interligadas.

Assim, iniciando nossa trajetória pela história, recorre-se a Lorenzato (2006) para dizer que a própria história da matemática

> mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo o desenvolvimento do pensamento matemático se deu por necessidade do homem, diante do contexto da época. Tal desenvolvimento ocorreu em diversas culturas e, portanto, através de diferentes pontos de vista (p. 107).

Dessa maneira, é importante destacar que dentro da História da Matemática os primeiros registros de utilização de equações estavam associados à resolução de problemas práticos, reais, ou seja, concretos, como está registrado em documentos arqueológicos da Mesopotâmia, milhares de anos antes da era cristã.

Devido a um grau de simplicidade significativo dos problemas existentes naquele período, em que eram utilizadas as equações, e a falta de um estudo mais aprofundado, tais civilizações não consideravam soluções com radicais de números negativos.

Heron (10 d.C. - 70 d.C.), famoso nos livros de Matemática do Ensino Médio pela fórmula utilizada no cálculo da área de triângulos em função das medidas dos seus lados que levou seu nome, proporcionou historicamente o primeiro exemplo registrado da negação à tentativa de operar com raízes negativas.

De acordo com Silva (2011, p.80), ao calcular $\sqrt{81-144}$, cálculo esse que foi necessário devido ao desenho de uma pirâmide que aparece em sua obra intitulada *Estereometria*, Heron simplesmente troca o cálculo por $\sqrt{144-81}=\sqrt{63}$ e apresenta o resultado como, aproximadamente $7\frac{15}{16}$.

Mais adiante, segundo Eves (2004), aproximadamente no ano 275 d.C., Diofanto, no livro *Arithmetica*, considera o seguinte problema:

"Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados."

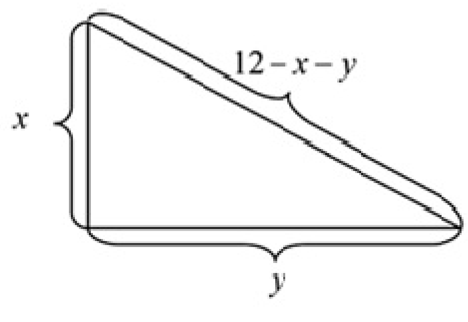

Figura 2 – Triângulo Retângulo que esquematiza o problema de Diofanto

Resolução:

Através da fórmula de área de um triângulo retângulo $A = \dfrac{cateto_1 \cdot cateto_2}{2}$, chega-se em $\dfrac{xy}{2} = 7$, onde $y = \dfrac{14}{x}$ (i). Pelo Teorema de Pitágoras, tem-se $x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$ (ii). Substituindo i por ii, obtém-se $24x^2 - 172x + 336 = 0$, cujas raízes são $\dfrac{43 - \sqrt{-167}}{12}$ e $\dfrac{43 + \sqrt{-167}}{12}$.

Mas Diofanto escreveu que essa equação teria solução se $(\dfrac{172}{2})^2 \geqslant 24 \cdot 336$, o que em linguagem atual é o mesmo que afirmar que $\Delta \geqslant 0$, pois, sendo $\Delta = b^2 - 4ac$, tomando $a = 24$, $b = 172$ e $c = 336$, então, $\Delta = 172^2 - 4 \cdot 24 \cdot 336$, se $\Delta \geqslant 0$, implica em $172^2 \geqslant 4 \cdot 24 \cdot 336$. Como ambos os membros da desigualdade são positivos, pode-se dividi-los por 4, e substituindo $\dfrac{172}{4}$ por $(\dfrac{172}{2})^2$ no primeiro membro, verifica-se o que foi registrado por Diofanto, deixando concluir que ele acreditava que a solução desta equação estava associada à raízes reais.

> Ainda no primeiro milênio da era cristã, alguns grandes matemáticos contribuíram para que houvesse uma evolução nos conceitos trabalhados por Diofanto. A matemática não era produto apenas da Europa, já que a Índia também produziu grandes matemáticos, como Brahmagupta (cerca de 630 d.C.) e Bhaskara (1114–1185). O nome desse último é conhecido até hoje, mesmo por qualquer aluno da Educação Básica, por ter uma fórmula conhecida para resolver equações do segundo grau. No entanto, essa fórmula geral foi encontrada cerca de um século antes de Bhaskara, pelo matemático hindu Sridhara (cerca de 991 d.C.), e publicada em uma obra que não chegou até nós. Bhaskara percebeu a necessidade de obter duas raízes a partir de uma equação do segundo grau, em que o discriminante é positivo, mas o problema das raízes quadradas de números negativos continuou sendo um obstáculo: "O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado" (SILVA, 2011, p. 81).

Continuando com os registros históricos, destacam-se a partir desse momento alguns dos principais matemáticos que contribuíram na construção da teoria dos Números Complexos, segundo a linha do tempo[2] indicada pela figura 3.

[2] Camargo (2012, s/p.)

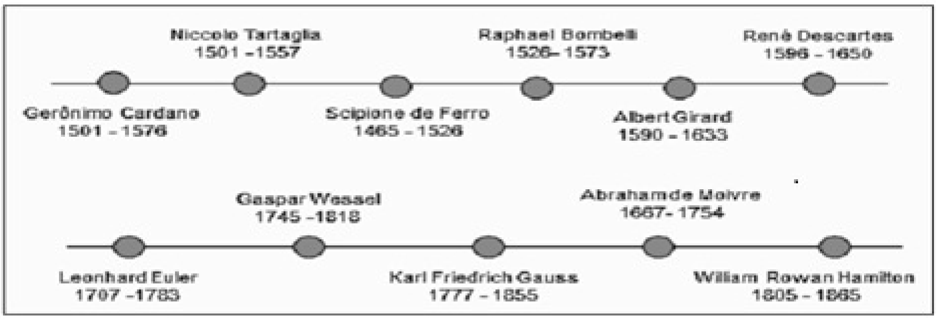

Figura 3 – Linha do tempo

Gerônimo Cardano nasceu em Pávia, Itália, e faleceu em Roma. Apesar de ser um grande matemático da época, era médico de profissão. Entre as suas obras destaca-se a *Ars magna*, primeiro grande tratado em latim consagrado unicamente à Álgebra. Nessa obra, é apresentado o famoso problema que se estuda na história dos Números Complexos e que se tornou o primeiro registro histórico de uma operação realizada com Números Complexos não reais. A descrição do problema seria a seguinte:

"*Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes, tal que o produto delas seja igual a 40*".

Resolução:

Tomando uma parte do segmento com medida x e a outra de $10 - x$, obtém-se a equação $x(10 - x) = 40$, então, $x^2 - 10x + 40 = 0$. Completando quadrado tem-se que $(x-5)^2 - 25 + 40 = 0$, donde $(x - 5) = \pm\sqrt{-15}$, o que leva as raízes $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$.

Recorrendo novamente a Carvalho, o autor traz um dizer de Cardano que, após encontrar as raízes indicadas acima, afirmou que

> deixando de lado toda tortura mental envolvida, multiplique $(5 + \sqrt{-15})$ por $(5 - \sqrt{-15})$. O produto é $25 - (-15) = 40$ (...). Assim progride a sutileza aritmética cujo objetivo, como afirmado, é tão refinado quanto inútil (p.109-110, apud CARMO; MORGADO; WAGNER, 2001).

Neste instante deve-se destacar que, através de registros históricos, tendo como referencial o período de Heron, quando se depara com a primeira oposição de operar com raízes negativas, diversos matemáticos também o fizeram e permaneceram sustentado essa linha de raciocínio, direta ou indiretamente – destacando aqui Diofanto (275 d.C.), Sridhara (cerca de 991 d.C.), Bhaskara (1114-1185), Omar Kahyyam (1044-1123), Fibonacci (1170-1250) e Pacioli (1445-1517).

Dessa forma, uma lacuna de mais de mil e quinhentos anos se estendeu adiante, não permitindo que a teoria dos números que existe nos tempos atuais se fechasse, adiando o importante papel que viria exercer nas conquistas dos conhecimentos matemáticos e suas aplicações.

Faz-se necessário trazer para essa discussão a famosa disputa entre os italianos Cardano (1501-1576) e Niccoló Fontana (1499-1557) – apelidado como Tartáglia – no que diz respeito às conquistas das resoluções das equações de 3º grau. É nesse momento que se percebe a insuficiência dos conjuntos dos Números reais para o desenvolvimento algébrico em questão, criando a necessidade de destinar maior atenção e trazer o *status* de "número" aqueles que seriam chamados de Números Complexos.

Para se entender melhor essa rixa, deve-se recorrer ao ano de 1510 quando o matemático Scipione Del Ferro deduziu uma fórmula geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, mas, por ironia do destino, ele faleceu sem publicar a sua descoberta. Seu aluno, Maria Fior, que conhecia o trabalho, apoderou-se da conquista de seu mestre e, com o intuito de ganhar respeito entre os seus, resolveu propor um desafio a Tartáglia que na época já era um matemático em ascensão. Tartáglia, mesmo não tendo conhecimento do método de resolução desse tipo de equação, aceitou o desafio e, além de deduzir um método para encontrar a solução das equações da forma $x^3 + px + q = 0$, ele também achou a forma de resolver as equações do tipo $x^3 + px^2 + q = 0$, humilhando Fior e se destacando ainda mais como um grande matemático.

Antes de continuar com a história que levou à disputa épica introduzida nos parágrafos anteriores, cabe recorrer aos conhecimentos algébricos populares até a atualidade para se entender melhor o processo de resolução das equações de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$, obtido por Tartaglia.

Recorrendo à forma geral de uma equação do 3º grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e dividindo ambos os seus membros por a, obtém-se $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$.

Tomando $a = 1$ e $x = y - \frac{b}{3}$, então, $(y - \frac{b}{3})^3 + b(y - \frac{b}{3})^2 + c(y - \frac{b}{3}) + d = 0$, ou seja, $y^3 + (c - \frac{b}{3})^2 y + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0$ que é uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$, justificando assim o estudo das equações dessa forma.

Para sua resolução basta considerar $x = A + B$, dando $(A+B)^3 + p(A+B) + q = 0$, então, $A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 + p(A + B) + q = 0$ que após alguns arranjos pode ser escrita como $A^3 + B^3 + (3AB + p)(A + B) + q = 0$.

Compete, agora, mostrar que $x = A + B$ é raiz da equação, para isso tem-se que encontrar os valores de A e B.

Observa-se que $A^3 + B^3 = -q$ e $A \cdot B = -\frac{p}{3}$, o que implica que $A^3 + B^3 = -q$ e

$A^3 \cdot B^3 = -\dfrac{p^3}{27}$.

Como A^3 e B^3 são raízes da equação do 2º grau $y^2 + qy - \dfrac{p^3}{27} = 0$, então, pela fórmula de Bhaskara, $A^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ e $B^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$, o que conduz a $A = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$ e $B = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$.

Dessa forma, pode-se concluir que $x = A+B = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}$ é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Agora, com o objetivo de ampliar o presente estudo, será discriminado o radicando das raízes quadradas acima como $\Delta = \dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}$. Nessa etapa, será mostrado que se $\Delta > 0$, a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, se $\Delta = 0$, a equação possui três raízes reais, sendo uma repetida e se $\Delta < 0$, a equação possui três raízes reais distintas. Para tanto, se recorrerá ao Cálculo.

Se for considerada a função $f(x) = x^3 + px + q = x^3(1 + \dfrac{p}{x^2} + \dfrac{q}{x^3})$, definida nos reais, e observar que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, e não descartar o fato de que essa função é polinomial, o que implica que ela é contínua, pode-se concluir que f possui pelo menos uma raiz real.

Respaldando-se no Teorema Fundamental da Álgebra – que garante, nesse caso, a existência de três raízes – e o Teorema das Raízes Imaginárias – que garante a existência de uma segunda raiz com parte imaginária, caso exista outra, também com parte imaginária, em que esta segunda será a conjugada da primeira – será utilizado o teste da derivada primeira e o teste da derivada segunda para se analisar a natureza dos zeros dessa função.

Tomando a derivada primeira de f, tem-se $f^{'}(x) = 3x^2 + p$, sendo assim, se $p > 0$, então, $f^{'}(x) > 0$, o que implica que f é crescente para todo o seu domínio. Concluindo, dessa forma, que existe uma raiz real e duas complexas e conjugadas.

Por outro lado, se $p = 0$, então, a equação é equivalente a $x^3 + q = 0$, em que se $q \neq 0$, tem-se uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, e se $q = 0$, implica em uma equação e que o zero é uma raiz real tripla.

Agora falta considerar o caso em que $p < 0$. Se for tomado $p = -3k^2$, com $k > 0$, $f^{'}(\pm k) = 0$. Recorrendo a derivada segunda, onde $f^{''}(x) = 6x$, então, $x = -k$ é ponto de máximo e $x = k$ é ponto de mínimo. Sendo assim, se $f^{'}(-k) \cdot f^{'}(k) > 0$, tem-se uma raiz real e duas complexas e conjugadas, se $f^{'}(-k) \cdot f^{'}(k) = 0$, tem-se três raízes reais, sendo uma delas dupla e, por fim, se $f^{'}(-k) \cdot f^{'}(k) < 0$, pode-se concluir que $x^3 + px + q = 0$ possui três raízes reais simples.

Sendo $f'(k) \cdot f'(-k) = (q - 2k^3)(q + 2k^3) = q^2 - 4k^6 = q^2 - \frac{4}{27}p^3 = 4\Delta$, onde foi considerado $p = -3k^2$. Portanto, Δ, definido no início desse estudo como $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, ao assumir valores positivo, nulo ou negativo pode, de início, já definir a natureza das raízes das equações de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$.

A partir do estudo encerrado acima, pode-se dar continuidade aos relatos históricos presentes nesse capítulo.

Assim, após saber do feito de Tartaglia, Cardano o procurou diversas vezes pedindo que ele revelasse a forma de resolução dessas equações do 3º grau, mas Tartaglia tornava-se resistente a essa revelação, pois pretendia publicá-la em uma obra de sua autoria. Porém, Cardano, após muita insistência e sob o juramento de somente publicá-la atribuindo-lhe a autoria, fez com que Tartaglia revelasse o seu feito e agindo de maneira desonesta – peculiar a seu caráter, segundo a história – a publicou em sua famosa obra *Ars magna* (1545), sem atribuir o mérito ao verdadeiro autor.

O destaque desse episódio é que, a partir desse estudo da resolução de equações de 3º grau, os matemáticos famosos passaram a entender a necessidade de um estudo adequado para atingir uma formalização matemática no que diz respeito aos números “sofísticos”[3].

Segundo Cerri e Monteiro (2001), o que levou os matemáticos à descoberta dos Números Complexos foi o problema a seguir:

Qual a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?

A resolução desse problema gerou a seguinte equação: $x^3 - 15x - 4 = 0$ que aplicando a fórmula de resolução de Cardano (na verdade, Tartaglia), chega-se a solução $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$. Cardano interpretou que essa equação não tinha raízes reais, pois o número encontrado envolvia a raiz quadrada de um número negativo, além da complexidade desse número fazer parte do radicando de uma raiz cúbica.

Recorrendo ao nosso estudo prévio para a continuação dessa história, observa-se que

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-15)^3}{27} = 4 - 125 = -121 < 0.$$

Sendo assim, a partir desse momento, se deparou com uma equação que possui três raízes reais simples, constatado acima pelo valor negativo de Δ, e que para obtê-las é

[3] Números sofísticos é a terminologia utilizada inicialmente por Bombelli (1526-1572) para se referir aos números que apresentavam raízes quadradas de números negativos.

necessário trabalhar com raiz quadrada de números negativos e raiz cúbica desses números desconhecidos.

Realmente esse fato teria que servir como um gatilho, como assim o foi, para que estudos mais sérios sobre os Números Complexos fossem acontecendo, como será mostrado a partir de agora.

Raphael Bombelli (1526-1573), discípulo de Cardano, foi um matemático que fez história no que diz respeito ao desenvolvimento do estudo dos Números Complexos.

Bombelli observou algo que seu mentor não havia observado. Ele notou que $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$, ou seja, que 4 era uma raiz real da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Segundo Silva (2011), motivado por essa verificação, ele imaginou a existência de dois números nas formas $a + b\sqrt{-1}$ e $a - b\sqrt{-1}$, tal que $(a + b\sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}$ e $(a - b\sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}$, $a > 0$ e $b > 0$. Sendo assim, através da propriedade do oposto, concluiu que $x = 2 + \sqrt{-121} + 2 - \sqrt{-121} = 4$.

Nas palavras do próprio Bombelli (FELTRINELLI, 1966, apud MILIES, 1993) encontra-se o seguinte

> Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... Isto pode parecer muito sofisticado, mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i. e. geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos (p. 8-9).

Percebendo a importância de sua descoberta, aprofundou-se no estudo e, segundo o autor supracitado,

> ele utilizou a expressão *più di meno* para se referir ao que conhecemos hoje como $+i$, a unidade imaginária, e *meno di meno*, para $-i$. Como se não bastassem todas essas novas e revolucionárias contribuições, também enunciou regras operatórias criadas por ele (p. 9).

Deve-se concluir, portanto, que Bombelli foi o primeiro a concretizar regras para trabalhar com os Complexos. Dessa forma, cabe a ele o mérito de contribuir de forma efetiva para o seu desenvolvimento.

O que foi referido na citação acima está resumido em seguida.[4]

[4] Tabela disponível em http://www.educ.fc.ul.pt, acessado em 10/01/2015.

REGRAS OPERATÓRIAS CRIADAS POR BOMBELLI	LINGUAGEM ATUAL
Più via più di meno, fa più di meno	+ (+i) = + i
Meno via più di meno, fa meno di meno	– (+i) = – i
Più via meno di meno, fa meno di meno	+ (– i) = – i
Meno via meno di meno, fa più di meno	– (– i) = +i
Più di meno via più di meno, fa meno	(+i) (+i) = –1
Più di meno via meno di meno, fa più	(+i) (– i) = +1
Meno di meno via più di meno, fa più	(– i) (+i) = +1
Meno di meno via meno di meno, fa meno	(– i) (– i) = – 1

Figura 4 – Tabela das Regras Operatórias formalizadas por Bombelli

Entra-se, então, numa fase da História da Matemática que, apesar de muita resistência por parte de grandes matemáticos, os Números Complexos começam a ocupar o seu lugar no desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos. Como descreve bem Carneiro,

> este sucesso levantou a suspeita de que talvez estes monstros existissem mesmo. Que eram úteis, já se começava a perceber. Mas fariam sentido? Durante muito tempo, trabalhou-se com números complexos, permanecendo sobre eles esta nuvem de obscuridade. Os complexos eram usados de forma envergonhada, e acompanhados de nomes ofensivos, que permaneceram até hoje na nossa nomenclatura - como “imaginários” - mas ainda assim eram cada vez mais utilizados (2004, p.4).

Leonhard Euler (1707-1783), um dos grandes matemáticos de todos os tempos, desenvolveu muito a álgebra dos Complexos. Foi ele que representou $\sqrt{-1}$ por i, estudou números da forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Formulou, ainda, a igualdade $e^{ix} = \cos x + i\,\mathrm{sen} x$. Contudo, apesar de toda essa dedicação, não contribuiu muito para esclarecer o sentido desses números, aparentemente “imaginários”.

Recorrendo novamente a Carneiro, pode-se relembrar que na virada do século XVIII para o século XIX,

> (...) um agrimensor norueguês, Wessel (1798), e um obscuro matemático suíço, Argand (1806), foram, aparentemente, os primeiros a compreender que os complexos não têm nada de “irreal”. São apenas os pontos (ou vetores) do plano que se somam através da composição de translações, e que se multiplicam através da composição de rotações e dilatações (na nomenclatura atual) (2004, p.4).

Entretanto, como o próprio autor aponta, as ações empreendidas por Wessel e Argand não ecoaram. Todavia, dentro desse mesmo período histórico, Gauss (1777-1855) – com toda sua excelência no domínio do conhecimento matemático – captou o uso dos Números Complexos na obtenção de diversos resultados acerca da Geometria Plana e sobre os números inteiros, inclusive, fazendo a assimilação do conjunto dos Complexos com o plano. Ademais, foi Gauss – a quem se referiam como o “Príncipe da Matemática” – que determinou dentre os polígonos regulares quais eram possíveis ser construídos com régua e compasso e, até mesmo que números inteiros podem ser escritos como soma de dois quadrados. Dentre grandes descobertas de Gauss, se atribui a ele o correspondente ao Teorema Fundamental da Álgebra, a partir de sua demonstração geométrica – partindo da utilização do plano complexo – de que todo polinômio de coeficientes reais pode ser decomposto em fatores de grau máximo dois.

A partir dessa síntese da História da Matemática, verifica-se, portanto – no que diz respeito à concretização dos Números Complexos – que essa história veio se desenvolvendo de forma lenta por séculos devido à dificuldade dos estudiosos que a construíram de entenderem esse “novo número” e, principalmente, perceberem que esse poderia proporcionar uma relevância real nas conquistas de novos conhecimentos no campo científico.

Por fim, cabe destacar nesse momento que Gauss, na busca por dar “sentido” aos Números Complexos, desenvolveu trabalhos de relevância matemática que foram além do simples estudo desses números. Sendo assim, fica aqui resgitrado, fato que não apenas a História da Matemática confirma e sim a História da Humanidade, que a busca por respostas sempre foi a motivaçao da evolução humana e que essa busca vai além dos objetos motivadores, desenvolvendo assim uma sequência de construção de respostas – conhecimentos – que é a essência do desenvolvimento de todas as áreas científicas.

Avança-se, portanto, para o item a seguir em que se pretende abordar de maneira suscinta acerca do ensino contemporâneo dos Números Complexos no Ensino Médio nas escolas.

2.2 O ENSINO CONTEMPORÂNEO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Inicialmente é importante ter ciência de que o ensino do conteúdo em questão ocorre no 3º ano do Ensino Médio na maioria das escolas, ou seja, no último ano do Ensino Básico.

Para se ter um maior alcance do que será relatado, recorrer-se-á aos autores Carneiro e Wanderley (s/d) que apontam que

> permanece como maneira mais comum de introduzir os números complexos a abordagem puramente algébrica e formal: “Um número complexo é um objeto da forma $a + bi$, onde a e b são reais,

> $i^2 = -1$, e permanecem válidas as leis operatórias básicas da Álgebra". Esta definição (correta) permite começar logo a operar com números complexos sem dificuldade, mas este enfoque perde a magnífica oportunidade de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, e a experiência de aula nos mostra que muitas vezes esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece a "forma trigonométrica". O iniciante permanece com uma visão excessivamente formal e algebrizante, e não lhe ocorre aplicar conhecimentos de números complexos a problemas de Geometria, como se faz desde Gauss. (p.67).

Atualmente, se vive em um período em que o conhecimento é globalizado, o acesso à internet se torna cada vez mais fácil e escolas que não imaginavam a possibilidade de possuir um laboratório de informática em funcionamento já estão vislumbrando isso acontecer. O acesso a novas tecnologias associado, inclusive, com o incentivo governamental, pode proporcionar aos professores – tal como o autor do presente trabalho – a oportunidade de se qualificarem e produzir pesquisas que estão modificando o processo de ensino e aprendizagem respaldados pelos próprios PCN's.

Contudo, na contramão desse processo, existe ainda, na maioria das instituições de Ensino Médio, a necessidade de recorrer aos livros didáticos de forma quase exclusiva. Isso ocorre devido ao fato de que o livro já está compartimentado de forma conveniente com todos os conteúdos e com os respectivos exercícios envolvendo questões de Enem e vestibular de diferentes instituições. Deste modo, é facilitado para que o conjunto docente e discente consiga abordar o máximo de conteúdos cobrados nesses exames.

Sendo assim, o processo de ensino e aprendizagem fica refém dos autores de tais livros, no que diz respeito à maneira de se apresentar e direcionar a construção do conhecimento.

Para corroborar com esse argumento, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, no volume que se destina a tratar sobre "Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias", afirmam que

> percebe-se que a escola de hoje não pode ficar mais restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica. De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio, deve-se considerar um amplo espectro de competências e habilidades a serem desenvolvidas no conjunto das disciplinas (BRASIL, 2006,p.69).

Para sintetizar o que foi tratado até o momento e afunilando novamente para a temática a que se destina este trabalho, é proposta uma breve análise dos livros didáticos de três grandes autores que frequentemente são citados em bibliografias para concursos de Ensino Médio. E, além disso, mostrar a estagnação no tocante à apresentação do conteúdo dos Números Complexos nesses livros. Para tanto, serão analisados três livros, fazendo um panorama de dez anos, sendo eles: uma versão de Luiz Roberto Dante (2003) – Matemática, Contexto e aplicações, Volume 3; outra de Manoel Paiva (2010) – Matemática, Volume 3; e a terceira de Gelson Iezzi (2013) – Fundamentos de Matemática Elementar, Volume 6.

Em relação ao livro didático de Dante (2003), o autor inicia o capítulo afirmando que os Números Complexos podem ser somados e multiplicados e, também, possibilitam a extração da raiz quadrada de números negativos. Afirma, como algo lógico, que o conjunto dos números reais precisa ser um subconjunto desse novo conjunto, pois as operações de adição e multiplicação nos reais devem ser as mesmas no conjunto dos Complexos para que o conjunto dos reais seja um subconjunto dos Complexos. Percebe-se que o primeiro contato do aluno com esse novo conteúdo é meramente impositivo, obviamente se não houver uma intervenção qualitativa do professor. O autor chega no parágrafo seguinte a citar Gauss alegando que uma boa forma de entender a ideia de Números Complexos seria imaginá-los como um conjunto de pares ordenados de números reais em que estão definidas:

- Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Nesse momento, o autor perde a oportunidade de apresentar os Números Complexos geometricamente – apresentação essa que demorou centenas de anos para ser desenvolvida e que proporcionou um entendimento concreto dos Complexos – permitindo que o aluno venha a ter uma ideia equivocada da teoria "apadrinhada" por Gauss.

Num próximo passo, as propriedades operatórias são definidas. Em seguida, já é apresentada a forma algébrica. Numa etapa seguinte é mostrado o plano de Argand-Gauss com o foco na definição de afixo, conjugado, módulo, argumento, forma trigonométrica e todos os complementos conteudistas que a envolve e termina com a apresentação da fórmula de De Moivre.

Agregado a esses conteúdos existe um universo de 115 (cento e quinze) exercícios, muitos com letras, incluindo também os testes de vestibulares. Nesse volume de atividades 9 (nove) envolvem resolução de equações reduzidas a uma equação de 2º grau e apenas 4 (quatro) com aplicações mais práticas que tiram o foco algebrista e de pré-requisito para resolução de equações polinomiais.

Já no que concerne à obra de Paiva (2010), observa-se na sua essência as mesmas abordagens de Dante (2003) no decorrer da deliberação do conteúdo. O que se deve destacar, como um ponto positivo, é que o autor inicia a sua abordagem ao assunto em questão evitando uma interpretação equivocada de um entendimento histórico. O autor introduz o assunto, utilizando a História da Matemática, citando nomes como Tartaglia, Cardano e Bombelli, mostrando que a motivação para o estudo dos Números Complexos não partiu do desenvolvimento das equações do 2º grau e, sim, das equações de grau 3.

Um dos pontos negativos é que o livro, de início, já apresenta a matéria argumentando sobre a insuficiência dos reais e, sendo assim, de acordo com o livro, os matemáticos ampliaram o conceito de números, definindo o número i, que será chamado de unidade imaginária, onde $i^2 = i \cdot i = -1$ e define Número Complexo como todo número da forma $a + bi$ onde $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária.

Dessa forma, o autor já introduz a forma algébrica e prossegue com o assunto produzindo um processo de ensino e aprendizagem quantitativo, proporcionando ações meramente "mecânicas" por parte do aluno. Portanto, não cria condições favoráveis para que este construa um conhecimento verdadeiro e que possa, futuramente, subsidiá-lo nas resoluções de problemas.

E, por fim, Iezzi (2013) que inicia a sua abordagem com um capítulo denominado "Operação com pares ordenados" em que traz a igualdade, a adição e a multiplicação de pares ordenados apresentadas no livro de Dante (2003). Em seguida, no capítulo seguinte já apresenta o conjunto dos Números Complexos como um conjunto de pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações relacionadas acima. A partir daí, a apresentação do assunto é muito semelhante a dos dois livros anteriores – principalmente ao de Dante – dando ênfase excessiva à parte algébrica, e em nenhum momento recorrendo à abordagem geométrica como um instrumento que explique de forma efetiva os conceitos iniciais dos Números Complexos, o que poderia tornar a aprendizagem da continuidade do assunto mais significativa e produtiva, de acordo com o que o autor desta dissertação acredita.

Logo, conclui-se – como já foi apontado inicialmente e respaldado pela análise dos livros dos renomados autores – que os Números Complexos são apresentados, de forma geral, conduzindo a um algebrismo excessivo, o que implica um processo de ensino e aprendizagem em que o discente passa a ser um repetidor do que está sendo cobrado. Além disso, também é apresentado de maneira isolada, tendo como foco principal a função de pré-requisito para a aprendizagem de polinômios no que diz respeito às suas raízes complexas.

Portanto, pode-se afirmar que a geração de estudantes que está sendo criada possui uma formação demasiada algebrista da temática em questão, e não tem o alcance necessário para entender acerca do verdadeiro significado e utilização dos Números Complexos, tal como sua aplicação nos problemas relacionados à Geometria, não apenas no campo matemático, mas também em outras áreas científicas que necessitam da contribuição desse conhecimento para seu desenvolvimento.

3 O ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS: UMA AÇÃO EFETIVA PARA UMA PROPOSTA DIFERENCIADA

A partir do cenário descrito até esse instante em que se procurou mostrar a real atmosfera que permeia o ensino dos Números Complexos no Ensino Médio das escolas brasileiras, onde se está diante de um "carma" histórico que teve um desenvolvimento registrado de mais de dezoito séculos – indo de Heron a Gauss, e outros após este último – em que a herança maior associada à essa temática é sua destacada utilização nas equações polinomiais.

Tal associação criou uma limitação no processo de ensino desenvolvido pelos educadores ao longo de décadas que é aplicado no Ensino Médio, onde a grande maioria das escolas do nosso país, guiada pelo sistema educacional, apresenta a seus discentes esse conteúdo apenas no 3º ano do Ensino Médio já com o intuito de que ele cumpra o seu "estigma histórico" para respaldar o ensino dos polinômios.

Portanto, este assunto fica isolado, compartimentado, por conta da metodologia de ensino atual que não cria subsídios para que os estudantes possam utilizar os Números Complexos como um facilitador na resolução de problemas, permitindo-os apenas recorrer a eles para cumprir tal "estigma".

Sendo assim, o autor desta dissertação que também é professor de matemática de todas as séries do Ensino Médio, motivado por sua inquietude e incentivado pelo processo de qualificação, vem se ajuntar à fileira de educadores para propor um método e atitudes que auxiliem no processo atual de ensino dos Números Complexos que proporcionem aos alunos uma captação desse conhecimento de tal forma que possam enxergar novas aplicações para o mesmo.

Pois, como se lê em Faro,

> o ensinar e o aprender caminham juntos. Mais do que ensinar conteúdos, ser ensinante está atrelado a abrir caminhos. Não se transmite conhecimento, mas, sim, sinais deste, para que o outro possa fazer uso dele e transformá-lo de forma subjetiva (s/d, s/p.).

Para tanto, tal metodologia será respaldada nos conhecimentos do que já foi desenvolvido até o momento; em pesquisas e referências para a apresentação dos Números Complexos; e, inclusive, nas ideias dos PCN's – no que diz respeito à contextualização e aplicações que sejam facilitadoras para que o aluno se encontre inserido no universo do qual faz parte.

Para reforçar tal argumentação, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam que

> de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o ensino médio tem como finalidades centrais não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (BRASIL, 2006, p.69).

Assim, a presente proposta não é uma mudança estática. Na verdade, além de propor uma abordagem embasada na História da Matemática, menos algebrista e de aplicação mais ampla e contextualizada no trato com o assunto em questão - através da apresentação de atividades diferenciadas, dando uma atenção especial àquelas que envolvem Geometria - propõem-se diluir o ensino dos Números Complexos nos três anos do Ensino Médio.

A proposta é ministrar todo o conteúdo de Números Complexos no 1º e 2º anos do Ensino Médio, tendo no 3º ano alunos já com uma ideia formada da temática. É nesse ano que o discente e o docente irão culminar o processo de ensino e aprendizagem do conjunto dos Números Complexos, podendo o professor se disponibilizar a trabalhar esse assunto de forma mais profunda, otimizando, assim, a absorção do conhecimento por parte dos alunos.

Dá-se início, portanto, à apresentação do que está sendo proposto pelo autor.

3.1 1º ANO DO ENSINO MÉDIO: A INTRODUÇÃO DOS NÚMEROS COMPLEXOS – DA ABORDAGEM HISTÓRICA E GEOMÉTRICA À FORMA ALGÉBRICA

No primeiro ano do Ensino Médio é revisada a teoria de todos os conjuntos numéricos, quando tradicionalmente termina-se no conjunto dos reais falando sobre a relação biunívoca de seus elementos com os pontos de uma reta e reforçando a ideia da reta numérica. A partir daí, parte-se para o estudo de intervalos reais e suas operações, introduzindo em continuidade a ideia de funções e prosseguindo com os conteúdos obrigatoriamente ministrados nesse referido ano.

Sabe-se que no Ensino Fundamental, entre outros conteúdos, os alunos devem ter contato com os seguintes conteúdos, quais sejam: as propriedades de potenciação e radiciação; operações com polinômios; resolução de equações polinomiais do 1º e 2º graus, incluindo as biquadradas, as irracionais e algumas de grau maior que dois que podem ser reduzidas através da fatoração à equações quadráticas; além de sistemas lineares e aqueles que envolvem equações quadráticas; pares ordenados, sistema de coordenadas cartesianas; incluindo, também, um conhecimento significativo de Geometria e as relações trigonométricas no triângulo retângulo.

Baseando-se no fato de que os alunos já tenham tais pré-requisitos, propõem-se a abordagem a seguir, imediatamente após serem ministrados os assuntos relacionados ao conjunto dos reais.

Em um primeiro momento o professor fará uma breve explanação histórica do surgimento dos Números Complexos dando ênfase ao momento da história em que surgiram os primeiros estudos sobre os Complexos, que aconteceu durante o estudo das equações do 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$. Assim, não pode deixar de citar os nomes de Tartaglia, Cardano e Bombelli. Ainda nesse momento o professor deverá apresentar a fórmula para encontrar soluções de equações da fórmula apresentada acima.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Assim, o professor deve sugerir a resolução de algumas equações, da forma $x^3 + px + q = 0$, que aceitem soluções reais e que durante o processo resolutivo não apareça Números Complexos, de tal modo que os alunos utilizem a fórmula mencionada anteriormente. Nesse momento aconselha-se, de preferência, que a turma esteja disposta em pequenos grupos.

Abaixo alguns possíveis exemplos a serem usados.

Atividade 1:

Encontre um numero real que seja solução das equações de 3º grau, que estão relacionadas abaixo, utilizando a fórmula resolutiva: $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$

a)$x^3 - 3x - 2 = 0$*; Resposta: Tomando* $p = -3$ *e* $q = -2$*, tem-se* $x = 2$.

b)$x^3 + 4x = -39$*; Resposta: Tomando* $p = 4$ *e* $q = 39$*, tem-se* $x = -3$.

Em seguida, deve-se apresentar aos alunos o suposto problema que motivou Bombelli a iniciar a primeira formalização dos Números Complexos.

Atividade 2:

Qual a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?"

a) Elabore uma equação de 3º grau reduzida que represente a situação problema acima.

Resposta: Os alunos deverão encontrar a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

b) Mostre que $x = 4$ *é a solução da equação.*

c) Aplique a fórmula de Cardano/Tartaglia e verifique que a solução fornecida pela fórmula é: $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$.

d) Discuta com seus colegas o que parece estar errado nessa solução.

Com essa atividade, recorrendo mais uma vez à História da Matemática, o professor começará a introduzir a ideia dos Números Complexos, como será visto abaixo.

Após um tempo julgado necessário para que os alunos resolvam as questões, o professor deve iniciar a correção, sempre os estimulando a participarem com as suas conclusões.

Com esse exercício eles poderão perceber, com o auxílio do professor, que 4 é uma solução real da equação encontrada, mas a fórmula criada por Tartaglia conduz a uma raiz quadrada de número negativo e, até aquele momento, esse tipo de número não existirá para eles, pois o universo máximo de números conhecidos pelos mesmos é o conjunto dos números reais.

Para completar este estado de inquietude que deverá ser gerado nos estudantes, caso não seja trazido por eles próprios, o professor deve dizer que ainda tem um agravante para tornar esse número mais estranho, ou seja, a raiz quadrada de um número negativo constando dentro dos radicandos de duas raízes cúbicas que fazem parte de uma soma. Além do mais, os alunos, através das atividades anteriores, já saberão que a fórmula funciona, mas que para esse exercício ela não estava sendo satisfatória.

Com essa atmosfera favorável, o professor deve agregar à discussão a ideia de Rafael Bombelli e destacar mais uma vez que foi a partir daí que, historicamente, o conjunto dos Números Complexos passou a tomar forma.

Destaca-se nesse momento uma Álgebra mais detalhada que retrata a ideia em questão que não foi mostrada na parte histórica do capítulo 1 e que deverá ser apresentada aos alunos.

Um processo que descreve a ideia em questão e que é muito utilizado para a obtenção da raiz 4 consiste em:

Tomando $(\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}})^3 = (a + b\sqrt{-1})^3 = a^3 + 3a^2\sqrt{-1} + 3ab^2(\sqrt{-1})^2 + b^3(\sqrt{-1})^3$, então, $2 + \sqrt{-121} = a(a^2 - 3b^2) + b(3a^2 - b^2)\sqrt{-1}$. Trabalhando, a princípio, que $\sqrt{-121} = \sqrt{(-1) \cdot 121} = 11\sqrt{-1}$, tem-se que $a(a^2 - 3b^2) = 2$ e $b(3a^2 - b^2) = 11$, considerando a e b inteiros, implica que o possível valor para a é 1 ou 2 e para b é 1 ou 11.

Portanto, os valores, após fácil verificação, são $a = 2$ e $b = 1$. Conclui-se, então, que $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$. Logo, $x = 2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1} = 4$.

É nesse momento que o professor aproveitará esse terreno fértil para chegar a uma definição geométrica de Números Complexos, explicando para os alunos que tal definição demorou séculos para ser desenvolvida através da contribuição de grandes matemáticos, como Wessel, Argand e Gauss. Sendo essa a definição que realmente deu um verdadeiro sentido para os Números Complexos.

Antes da apresentação da definição é necessário que se faça algumas observações:

1ª – A forma $a+b\sqrt{-1}$ veio sendo trabalhada por outros matemáticos, sendo Euler quem deu a forma final, substituindo $\sqrt{-1}$ por i, ficando formalizada a forma $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, forma esta que é trabalhada até os dias de hoje e que recebe o nome de forma algébrica, como será visto mais à frente.

2ª – As operações adição e multiplicação obedecem às mesmas propriedades conhecidas nos reais, pois já se percebe que esses números formam uma extensão dos reais, como será demonstrado nesse momento.

3ª – O professor pode recorrer à Geometria dinâmica, proporcionada por programas como o Geogebra ou o Régua e Compasso, caso a escola tenha um suporte digital adequado, como um laboratório de informática viável ou um *datashow* e um computador que possa ser levado para sala de aula. Dessa forma, as representações geométricas que serão mostradas abaixo ficarão muito mais atraentes para os discentes.

Recorrendo a Iezzi (2013), a definição em questão diz que o conjunto dos Números Complexos, o qual é representado por $\mathbb{C}$, é um conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas as operações abaixo:

- Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$
- Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Cabe, nesse instante, esclarecer aos alunos que é mais uma forma de escrever os Complexos, mas que tem uma ligação direta com a forma algébrica, pois basta entender que $z = a + bi = (a, b)$. Além disso, as operações mostradas são facilmente verificadas quando se trabalha na forma algébrica e serão esplanadas mais à frente.

Para explicar a grandeza dessa definição, o docente relembra aos estudantes um assunto que já terá sido visto pouco antes, ou seja, a relação entre os elementos dos conjuntos dos números reais e os pontos de uma reta, onde para cada ponto dessa reta está associado um único número real e vice-versa (relação biunívoca). Essa associação cria a reta numérica ou reta real, conforme a ilustração da figura 5.

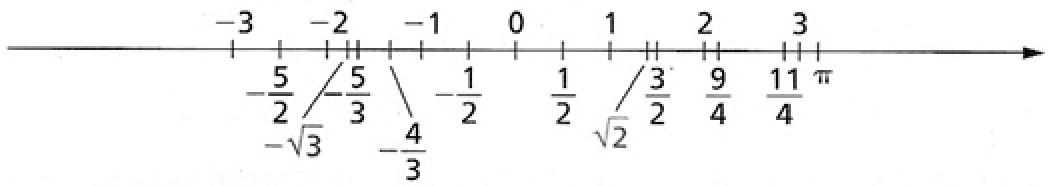

Figura 5 – Reta numérica

A partir daí, cada número passa a ser a coordenada de um ponto dessa reta, onde o ponto que está associado ao zero será chamado de origem da reta real e que essa visão geométrica é unidimensional.

Após essa pequena revisão, o professor deverá fazer a seguinte pergunta para a turma:

"Se pensarmos em duas dimensões, bastaria um número real para representar as coordenadas de um ponto?"

Depois de um tempo, com a orientação do professor, e baseado no fato que eles já estudaram plano de coordenadas cartesianas no Ensino Fundamental II, a resposta será **não**, pois seriam necessárias duas coordenadas para representar esse ponto no plano. Por exemplo, imaginando-se a reta real como o eixo x do sistema de coordenadas cartesianas, os pontos associados aos números $-3, 1$, $\sqrt{2}$ e $\dfrac{11}{4}$ teriam que ser representados pelos pares ordenados $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ e $(\dfrac{11}{4}, 0)$, respectivamente, e o ponto que representa a origem que tinha a coordenada 0 passaria a ter essas coordenadas representadas pelo par ordenado $(0, 0)$.

Chega-se, então, à hora certa de passar aos estudantes a ideia de que da mesma forma que existia uma associação entre os pontos de uma reta e os números reais quando se pensa em uma dimensão, baseada na definição apresentada do conjunto dos Números Complexos, pensando-se em duas dimensões, a associação agora será que para cada Número Complexo, pode-se associar um único ponto de um plano e vice-versa. Essa associação traz um entendimento concreto dos Complexos e recebe o nome de plano de Argand-Gauss que nada mais é do que o plano cartesiano, onde o eixo das abscissas recebe o nome de eixo real e os das ordenadas, de eixo imaginário, conforme ilustração da figura 6.

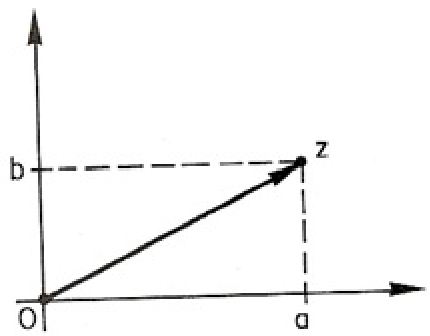

Figura 6 – Plano de Argand-Gauss

Destaca-se que o vetor que aparece na figura com extremidades na origem e no ponto no qual z representa será utilizado futuramente para definir diversos conceitos sobre a temática em questão.

Agora, o próximo passo deve ser dado para explicar aos alunos que quando forem trabalhar na forma algébrica com o número $i = 0+1\cdot i$, que dentro da definição apresentada, consiste no par ordenado $(0,1)$ – que será utilizada com mais frequência nesse ano letivo – irá aparecer uma afirmação que vai na contramão do conhecimento que os mesmos possuem até então no que diz respeito ao conjunto dos reais, em que é considerado que toda potência de base real e expoente par representa um número positivo.

Essa afirmação a que se faz menção é que $i^2 = -1$. Portanto, será utilizada agora a representação geométrica para concluir que cada vez que se multiplica um Número Complexo por i, o novo número obtido, ou seja, iz, passa a representar um ponto que é uma das extremidades de um novo vetor perpendicular ao vetor anterior, confirmado pela aplicação da regra de multiplicação explicitada acima, onde considerando-se $z = (a,b)$, tem-se $iz = (0,1)\cdot(a,b) = (-b,a)$, conforme a representação gráfica da figura 7.

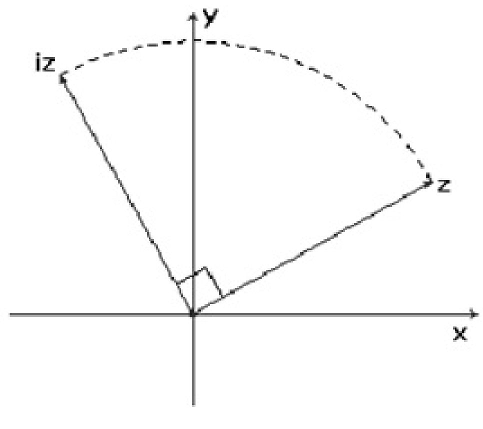

Figura 7 – Rotação ocorrida após a multiplicação de um Complexo z por i

Repetindo o processo com o número iz obtém-se novamente um Número Complexo, ou seja, i^2z, que são as coordenadas de um ponto que é extremidade de um terceiro vetor perpendicular ao segundo, conforme a figura 8.

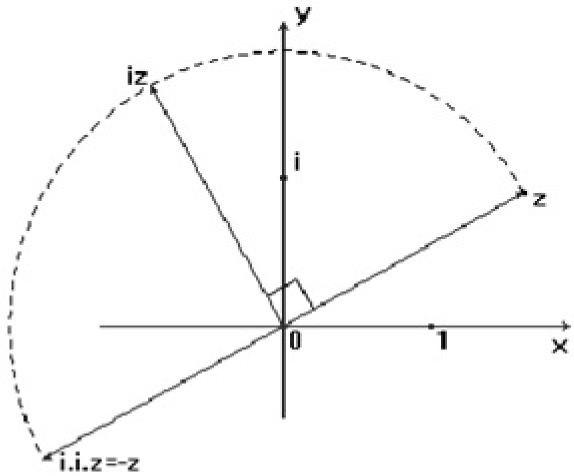

Figura 8 – Rotação ocorrida após a multiplicação de um Complexo z por i^2

Nesse instante fica claro para os alunos que $i^2 = -1$, pois $i^2z = i \cdot i \cdot z = (0,1) \cdot (-b,a) = (-a,-b) = -z = -1 \cdot z$, sendo assim, pode-se concluir que $i^2 = -1$.

Enfatiza-se, novamente, que o que foi apresentado acima terá um efeito mais "intenso" na proposta em questão se for utilizada uma Geometria dinâmica, como foi indicado outrora.

Além disso, é sensato reforçar que uma das críticas dessa dissertação diz respeito a uma abordagem algébrica excessiva que se vê no ensino dos Números Complexos – em hipótese nenhuma, desmerecendo o importante papel do desenvolvimento algébrico desempenhado nessa temática.

Baseado nisso, com muita segurança da clareza, a proposta é que seja trabalhado apenas com a forma algébrica no 1º ano do Ensino Médio, por ser uma abordagem mais simples e que está extremamente mais próxima da Álgebra trabalhada até o momento. Dessa forma, acredita-se que o processo de ensino e aprendizagem ocorrerá de forma mais natural.

Sendo assim, o próximo passo dado pelo docente é apresentar para a turma outra definição para Números Complexos que envolve a forma algébrica, como elucidado por Paiva (2010)

> a insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em $\mathbb{R}$, raízes quadradas, quartas, sextas, ... de números

> negativos. Para que a radiação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número i, não real, que chamaram de **unidade imaginária** e, que satisfaz a seguinte condição: $i^2 = i \cdot i = -1$. A partir da unidade imaginária, define-se **Número Complexo** como todo o número de forma $a + bi$, em que $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e i é a unidade imaginária [...] O conjunto dos Números Complexos é indicado por $\mathbb{C}$, isto é $\mathbb{C} = \{a + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ (p. 237-238).

Por conseguinte, ao enfatizar para o aluno que a $\sqrt{-1}$ foi substituída por i – conforme fez Euler em seus estudos – o aluno poderá associar essa nova definição como uma evolução da ideia apresentada por Bombelli. Cabendo destacar que a forma algébrica $a + bi$ possui a como a parte real e b como a parte imaginária.

A partir daí, o professor explica que todos os números reais podem ser escritos nessa forma, considerando $b = 0$, utilizando exemplos como os que se seguem.

a)$-2 = -2 + 0i$

b)$\dfrac{7}{3} = \dfrac{7}{3} + 0i$

c)$\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$

Após os exemplos – que é uma forma de enfatizar a definição que está apresentada na citação acima – é interessante que o professor apresente o diagrama trabalhado no primeiro capítulo para se ter uma visão do que está acontecendo.

Neste momento, o professor pode apresentar as operações elementares, destacando que elas foram definidas como extensões das operações em $\mathbb{R}$, desse modo, são conservadas as propriedades operatórias em $\mathbb{R}$. Tais operações são adição e multiplicação em que são conservadas as propriedades distributivas de multiplicação em relação à adição.

Considerando $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, tem-se:

I. Adição:

- Elemento neutro é o número 0, ou seja, $0 + 0i$.

- O oposto de $z = a + bi$ é $-z = -a - bi$.

II. Multiplicação:

- Elemento neutro é o número 1, ou seja, $1 + 0i$.

- O inverso de $z = a + bi$ é $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$.

A propriedade distributiva, tomando $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $\{a, b, c, d\} \subset \mathbb{R}$, aponta que:

- $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$ Observa-se que fica claro o porquê $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$ e, analogamente, o terceiro tópico justifica a operação $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$

- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

- $z_1 \div z_2 = z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$, com $z_2 \neq 0$

O professor deve aproveitar o ensejo e já definir que $z_1 = z_2$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Ainda para fechar o ciclo, já se fala em conjugado de um Número Complexo $z = a + bi$, como $\overline{z} = a - bi$. Destacando o fato que quando um número é real, tem-se $b = 0$, logo este não possui conjugado. Isso pode ser mostrado utilizando exemplos como os que se seguem.

a) $7 + 3i$ tem como conjugado $7 - 3i$;

b) $-2i$ tem como conjugado $2i$;

c) 5 não tem conjugado.

A partir desse momento, o professor deve formalizar o conteúdo no que se refere à forma algébrica, como as propriedades dos conjugados e as potências da forma i^n, onde $n \in \mathbb{N}$, para que os alunos consigam entender que os valores obtidos variam entre $-i$, -1, i e 1.

Como um primeiro estágio e de forma gradativa, o professor apresentará aos estudantes – baseando-se na sua experiência e no perfil da turma – exercícios de aplicação direta de conteúdos, sem cometer o erro do exagero, para tirar o foco algebrista tão comum no ensino dessa matéria.

É importante deixar claro que, apesar do detalhamento feito até o momento, devido à preocupação do autor com a introdução do conteúdo no 1º ano do Ensino Médio, seguindo as diretrizes preconizadas nesse trabalho, o objetivo não é criar um material semelhante a uma apostila ou a partes de livros didáticos, e, sim, apontar caminhos que levem aos discentes uma aprendizagem realmente ampla da temática, como já vem sendo referenciada em todo o contexto dessa dissertação.

Sendo assim, como segundo estágio, no que diz respeito às atividades, sugere-se que o docente ofereça aos seus alunos um conjunto de exercícios que os faça recorrer a conhecimentos que não estão ligados diretamente com a matéria, como as atividades sugeridas abaixo.

Atividade proposta 1 (Iezzi, 2011):

Os Números Complexos z *e seu conjugado, tais que* $z + \overline{z} = 4$ *e* $z \cdot \overline{z} = 13$ *são representados no plano de Argand-Gauss, respectivamente, pelos pontos* A *e* B. *Qual é a área do triângulo* AOB, *sendo* O *a origem do plano?*

Resolução:

Considerando $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, *tem-se:*

Sendo $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 4$, *então,* $2a = 4$, *o que implica* $a = 2$. *Por outro lado,* $z \cdot \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 13$, *então,* $a^2 + b^2 = 13$, *o que implica* $b = \pm 3$. *Assim,* $z = 2 + 3i$ *e* $A(2, 3)$ *ou* $z = 2 - 3i$ *e* $B(2, -3)$.

Dessas informações obtém-se o gráfico da figura 9: Sendo assim, conclui-se que a área procurada é $A_{AOB} = \dfrac{6 \cdot 2}{2} = 6$ *U.A.*

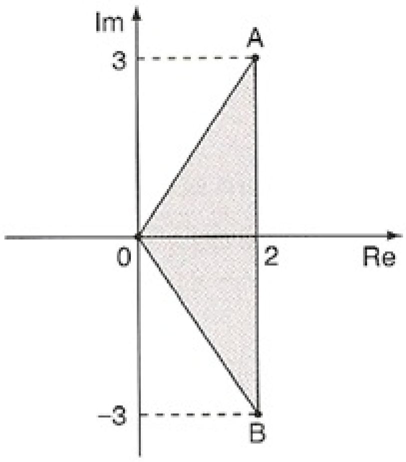

Figura 9 – Triângulo AOB com os vértices na origem do Plano de Argand-Gauss

Observação 1: Essa atividade fixa a ideia de conjugado – mostrando que a soma e o produto de um complexo com o seu conjugado (quando existir) resulta em um número real

– e do plano de Argand-Gauss. Conduz à oportunidade de revisar sistemas que envolvem equações quadráticas; produto notável; distância de pontos que possuem a mesma ordenada que forma um segmento paralelo ao eixo das ordenadas (eixo imaginário), sendo assim, perpendicular ao eixo das abscissas (eixo real); distância de pontos que possuem a mesma ordenada; e, por fim, área de triângulo que foi obtida pela fórmula tradicional, sendo que a altura em questão só pode ser obtida baseada na perpendicularidade citada.

Atividade proposta 2:

Considere a equação $x^2+4x+5=0$ *e determine o seu conjunto solução considerando:*

a) o seu conjunto universo sendo o conjunto dos reais;

b) o seu conjunto universo sendo o conjunto dos complexos;

Resolução do item b:

$$\Delta = -4 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-1)\cdot 4}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} \Rightarrow x = 2 \pm i$$

Logo, o conjunto solução procurado é $S = \{2+i, 2-i\}$.

Observação 2: É importante calcular o descriminante da equação separadamente para que os alunos entendam que no item a, onde o universo é o conjunto dos reais, impera a regra que caso ele seja positivo, nulo ou negativo, a equação possuirá, respectivamente, duas raízes reais distintas, duas raízes reais iguais ou não possuirá raízes reais. Nesse caso, a solução é um conjunto vazio. Já no item b, como o universo é o conjunto dos Complexos, essa regra mudará, pois quando o discriminante for positivo ou negativo, a equação possuirá duas raízes complexas distintas e quando o discriminante for nulo, a equação possuirá duas raízes reais iguais.

Atividade proposta 3:

Do estudo de espelhos planos na disciplina de Física sabe-se que o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão de um raio luminoso sobre um espelho plano são iguais em relação a uma reta perpendicular ao espelho no ponto onde o raio incide. Considerando um espelho plano E contido em um eixo vertical, e a reta normal ao espelho no ponto de incidência N coincidente em um eixo horizontal, pode-se usar um plano complexo com origem no ponto de incidência, onde o eixo vertical passa a ser o eixo imaginário e a reta horizontal sendo o eixo real. O raio refletido aparece como o simétrico do raio incidente em relação à normal. As direções dos raios incidente e refletido são dadas pelos vetores determinados pelos Números Complexos z e $\overline{z}$, no plano indicado na figura 10.

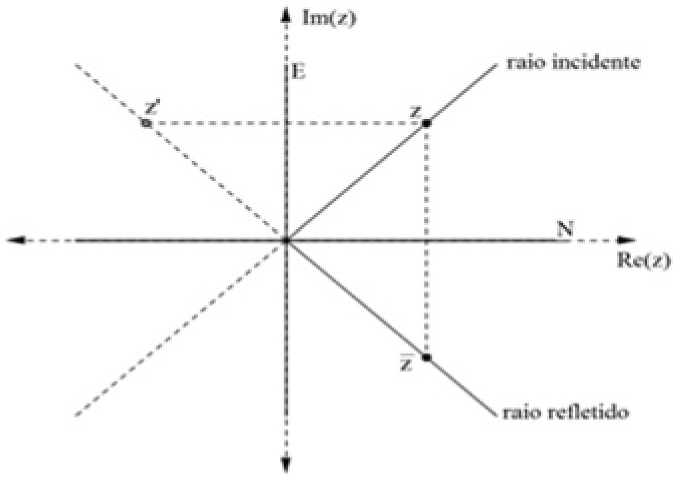

Figura 10 – Reflexão no espelho E (Fonte: Caon, 2013.)

Com base nas informações que podem ser obtidas acima, se for considerado o Número Complexo $z = (3, 2)$, qual será a forma algébrica de $\overline{z}$ e z'?

Resolução:

Fica a critério do professor.

Os Números Complexos procurados são $\overline{z} = 3 - 2i$ e $z' = 3 + 2i$.

Observação: Um dos pontos importantes dessa atividade é trazer para o aluno que essa teoria pode ser aplicada em outras disciplinas, mostrando uma das várias aplicações concretas dos Números Complexos. Redirecionando novamente com a Matemática, nesse momento, pode-se fazer a resolução utilizando congruência de triângulos – que foi estudado no 8º ano do Ensino Fundamental.

3.2 2º ANO DO ENSINO MÉDIO: DA FORMA TRIGONOMÉTRICA ÀS FÓRMULAS DE DE MOIVRE

No 1º ano do Ensino Médio os alunos terão tido o primeiro contato com os Números Complexos, quando se pretende destacar a História da Matemática, trazer uma introdução teórica do assunto de forma geométrica e apresentar a forma algébrica como a maneira inicial de se manipular os Complexos. Lembrando que esse processo consiste em proporcionar, já no início dessa etapa, maneiras de utilizá-los em problemas que pedem aplicações diretas e em outros em que podem ser mais um caminho para se alcançar a solução.

A seguir, no 2º ano do Ensino Médio, após esgotar todo o conteúdo de Trigonometria que deve ser trabalhado até essa série, o professor dará continuidade à temática do conjunto dos Números Complexos. É nesse tempo, pautado no material didático que este irá construir para orientar suas aulas, que iniciará a jornada para mostrar aos alunos qual é o significado de afixo, módulo e o argumento desses números. E, a partir daí, deduzir a forma trigonométrica e prosseguir com todo o processo de ensino até as fórmulas de De Moivre.

Cabe destacar a importância de se iniciar nessa série, e no momento sugerido, essa parte da teoria dos Números Complexos, pois está sendo criada a oportunidade de mostrar aos alunos como os conhecimentos matemáticos se "entrelaçam" e que essa ciência, de maneira nenhuma, pode ser estudada de forma compartimentada.

Todo educador Matemático tem a missão de produzir um processo de ensino e aprendizagem que proporcione ao discente a capacidade de entender e de efetuar a verdade que "conhecimento gera conhecimento", então, tudo que se aprende em sala de aula de um ano para o outro está interligado.

Aproximando novamente da discussão em questão, já se destaca uma premissa que respalda de forma concisa a necessidade de ensinar a parte trigonométrica de Números Complexos nessa etapa supracitada, pois esses assuntos estão extremamente interligados, mas não em um único sentido – Trigonometria para Números Complexos – como se vê no ensino atual, mas sim uma "via de mão dupla" em que uma teoria autentica a outra.

Retomando o caminho almejado e com o objetivo de concretizar o que foi escrito acima, destacando-se também o fato de acrescentar mais subsídios ao professor para a construção de suas estratégias de aula, o autor percebe a necessidade de agregar a essa discussão uma interpretação geométrica da operação de multiplicação de Complexos.

Para isso recorre-se a Carmo, Morgado e Wagner (2001) que oferecem um caminho diferenciado do significado dessa operação.

Inicialmente três observações devem ser destacadas:

1ª - Será considerado $|z| = r$.

2ª- Quando se referir a Complexo unitário, será aquele que possui módulo 1, sendo assim a sua forma trigonométrica será $(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$.

3ª - Se x é um número qualquer, lembre-se que $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\text{sen}x$ e $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2} = \cos x)$.

Em primeiro plano é mostrado o significado da multiplicação de um Complexo unitário por i, dando mais um caminho, agora trigonométrico, além do que já foi abordado anteriormente.

I- Sendo $w = \cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta$, então, $i \cdot w = i \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta)$, o que implica $i \cdot w = -\text{sen}\theta + i \cdot \cos\theta = \cos(\theta + \dfrac{\pi}{2}) + i \cdot \text{sen}(\theta + \dfrac{\pi}{2})$. Mostrando, assim, que multiplicar um Número Complexo unitário por i é efetuar no ponto w uma rotação de $\dfrac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário, onde o ponto encontrado pertence à mesma família de pontos que constituem uma circunferência unitária.

II- Segue-se tomando dois Complexos unitários, $w_1 = \cos\theta_1 + i \cdot \text{sen}\theta_1$ e $w_2 = \cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2$, então, $w_1 \cdot w_2 = (\cos\theta_2 + i \cdot \text{sen}\theta_2) \cdot w_1 = \cos\theta_2 w_1 + \text{sen}\theta_2 \cdot iw_1$. É importante observar que $w_1 \cdot w_2$ resulta na extremidade de um vetor que é a soma dos vetores perpendiculares (diagonal do paralelogramo) $\cos\theta_2 w_1$ e $\text{sen}\theta_2 \cdot iw_1$ – recorrendo a **I**, percebe-se que são perpendiculares, pois são múltiplos de w_1 e iw_1, respectivamente. Assim, tomando um sistema de coordenadas adequado (plano de Argand-Gauss) xOy, onde $w_1 \in Ox$, obtém-se que o ângulo de w_1 com $w_1 \cdot w_2$ é θ_2.

Conclui-se de **II**, que multiplicar dois Complexos unitários consiste em dar a um deles uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo cuja medida equivale ao argumento do outro.

Seguindo o que é proposto, no caso dos Números Complexos não serem unitários e tomando $z_1 = r_1 w_1$ e $z_2 = r_2 \cdot w_2$, então, $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \cdot w_1 w_2$ (os vetores definidos por $z_1 \cdot z_2$ e $w_1 w_2$ são múltiplos), ou seja, o produto de dois Complexos quaisquer é obtido pelo produto de dois Complexos unitários correspondentes pelo número real $r_1 r_2$.

Essa explanação sobre o significado geométrico da multiplicação de dois Complexos pode ser bem ilustrada pela figura 11.

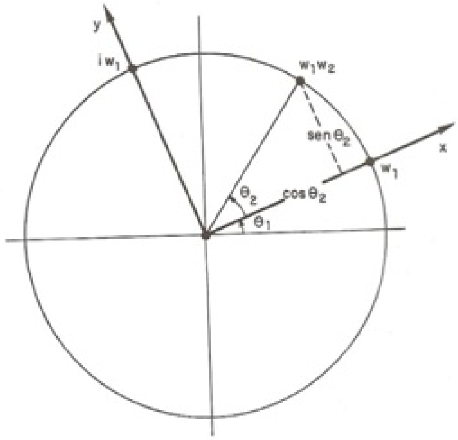

Figura 11 – Processo de multiplicação de Números Complexos

A partir dessa interpretação geométrica demonstram-se fórmulas importantes da Trigonometria e a fórmula de De Moivre, como serão vistas a seguir.

⧫ Fórmulas da adição de arcos

Sendo dois números reais α e β, tal que $\{\alpha, \beta\} \subset [0, 2\pi]$. Prove que $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \text{sen}\beta \cos\alpha$ e $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$.

Demonstração:

I. Tomando dois Números Complexos $z_1 = r_1(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)$ *e* $z_2 = r_2(\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$*, com* $r_1 = r_2 = 1$*, tem-se que* $z_1 z_2 = [\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta)]$.

II. Mas, por outro lado, $z_1 z_2 = (\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\alpha)(\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)$*, então, após alguns arranjos do segundo membro dessa igualdade, chega-se em* $z_1 z_2 = (\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta) + i \cdot (\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha)$.

De I e II, obtém-se:

$$\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta) = (\cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\cos\beta) + i \cdot (\text{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\beta \cdot \cos\alpha).$$

Logo, pela propriedade da igualdade de dois Números Complexos, $\text{sen}(\alpha+\beta) = \text{sen}\alpha\cos\beta + \text{sen}\beta\cos\alpha$ *e* $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta$.

Uma observação importante é que essa regra é válida para qualquer α e β reais. Considerando $\alpha + 2k\pi = x$ e $\beta + 2t\pi = y$, com $\{k, t\} \in \mathbb{Z}$, tem-se $\text{sen}\alpha = \text{sen}x, \cos\alpha = \cos x$, $\text{sen}\beta = \text{sen}y$ e $\cos\beta = \cos y$.

Logo $\text{sen}(x+y) = \text{sen}x\cos y + \text{sen}y\cos x$ e $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \text{sen}x\,\text{sen}y$, para todo x e y pertencentes ao conjunto dos reais.

Uma fórmula de grande relevância que é estudada durante a aprendizagem dos Números Complexos é a Fórmula de De Moivre que é apresentada como $z^n = |z|^n[\cos(nx) + i \cdot \text{sen}(ny)]$, com $n \in \mathbb{Z}$.

Essa fórmula é uma consequência imediata da interpretação geométrica da operação de multiplicação de dois Números Complexos, mostrada anteriormente. Com isso, tomando-se um Complexo unitário, podem-se demonstrar facilmente as fórmulas de arco duplo.

⧫ Fórmula do cosseno e o seno do arco duplo

Sendo x *um número real, prove que o* $sen2x = 2\,senx\cos x$ *e* $\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$.

Demonstração:

Tomando-se um Complexo unitário $z = \cos x + i \cdot \, senx$ *e recorrendo à fórmula de De Moivre, obtém-se:*

$$(z)^2 = (\cos x + i \cdot \, \text{sen} x)^2 = \cos^2 x + 2i \cdot \cos x \cdot \, \text{sen} x - \, \text{sen}^2 = \cos(2x) + i \cdot \, \text{sen}(2x) \Rightarrow$$
$$\cos 2x + i \cdot \, \text{sen} 2x = (\cos^2 x - \, \text{sen}^2 x) + i \cdot 2 \cos x \cdot \, \text{sen} x.$$

Logo, pelo princípio da equivalência de Números Complexos, mostra-se que $\cos 2x = \cos^2 x - \, sen^2 x$ *e* $sen2x = 2 \, senx \cos x$.

Destaca-se que, tomando um Complexo unitário, podem-se demonstrar facilmente as fórmulas de arco duplo, e estendendo o raciocínio, as fórmulas da forma $\cos(nx)$ e $\text{sen}(nx)$. Dependendo da complexidade do produto notável envolvido, pode-se recorrer à teoria do Binômio de Newton.

Uma das utilizações da fórmula de De Moivre é na radiciação de Números Complexos

⧫ Fórmula de De Moivre para trabalhar na radiciação de Complexo

Encontre, através da fórmula de De Moivre, as raízes n-ésimas do Número Complexo $z = a + bi$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$. *Em seguida, verifique que os argumentos desses números formam uma progressão aritmética. Por fim, conclua que as n raízes de z são vértices de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio* $\sqrt[n]{|z|}$.

Demonstração – Adaptado de Paiva (2010):

Primeiro escreve-se na forma trigonométrica, o que implica $z = |z|(\cos \alpha + i \cdot \, sen\alpha)$. *Deseja-se encontrar um Complexo* $w = |w|(\cos \alpha' + i \cdot \, sen\alpha')$, *tal que* $(w)^n = z$. *Como, pela fórmula de De Moivre* $(w)^n |w|[\cos(n\alpha') + i \cdot \, sen(n\alpha')]$, *então,* $|w|^n[\cos(n\alpha') + i \cdot \, sen(n\alpha')] = |z|(\cos \alpha + i \cdot \, sen\alpha)$, *implica que* $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ *e* $n\alpha' = \alpha + 2k\pi$, *o que implica* $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ *e* $\alpha' = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}$. *Logo, a fórmula desejada é* $w_k = \sqrt[n]{|z|}[\cos \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot \, sen\dfrac{\alpha + 2k\pi}{n}]$, *com k pertencendo aos inteiros não-negativos.*

I - *Os possíveis valores de k são:*

- $w_0 = \sqrt[n]{|z|}[\cos \dfrac{\alpha}{n} + i \cdot \, \text{sen}\dfrac{\alpha}{n}]$

- $w_1 = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi}{n})i \cdot \, \text{sen}(\dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{2\pi}{n})]$

- $w_2 = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n})i \cdot \text{sen}(\frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n})]$

$$\vdots$$

- $w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})i \cdot \text{sen}(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n})]$
- $w_n = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n})i \cdot \text{sen}(\frac{\alpha}{n} + \frac{2n\pi}{n})] = \sqrt[n]{|z|}[\cos(\frac{\alpha}{n})i \cdot \text{sen}(\frac{\alpha}{n})]$

Sendo assim, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$*. Logo, todas essas n raízes representam Números Complexos cujos afixos fazem parte de uma família de pontos que pertencem à uma circunferência de raio* $\sqrt[n]{|z|}$*.*

II *– Observando o tópico* ***I****, é fácil constatar que os argumentos dos Complexos que representam as n raízes n-ésimas formam uma progressão aritmética de n termos, onde o primeiro termo é* $\frac{\alpha}{n}$ *e a razão é* $\frac{2\pi}{n}$*.*

De ***I*** *e* ***II*** *conclui-se que os pontos nos quais as raízes n-ésimas de z no plano complexo são vértices de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência de raio* $\sqrt[n]{|z|}$ *e centrada na origem desse plano de Argand-Gauss.*

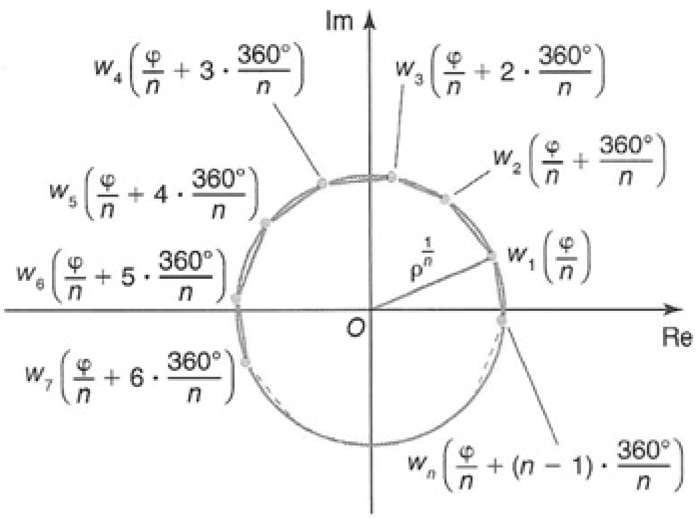

Figura 12 – Representação geométrica das raízes de um Número Complexo

A próxima demonstração foi retirada de Carmo, Morgado e Wagner (2001) com algumas adaptações do autor da presente dissertação.

⧫ Lei do Cosseno

Prove que em um triângulo A, B, C qualquer, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$*, onde a, b e c são as medidas dos lados opostos aos vértices A, B e C, respectivamente.*

Demonstração:

Primeiro é importante tomar o plano de Argand-Gauss de forma adequada, tal que o vértice A do triângulo coincida com a origem desse sistema de coordenadas, conforme a ilustração 13.

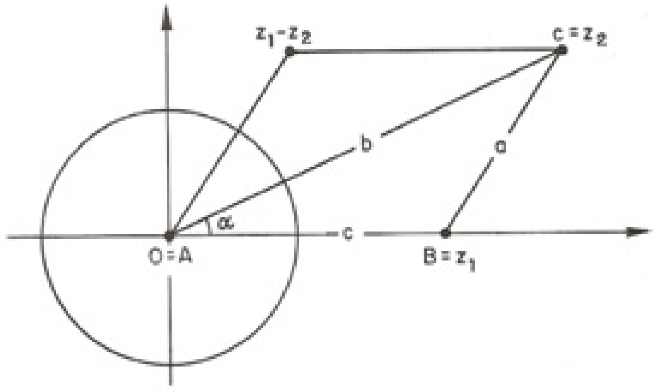

Figura 13 – Demonstração da Lei do Cosseno

É importante, nesse momento, relembrar, geometricamente, que a subtração de dois Números Complexos produz um terceiro Complexo que compõe um vetor que é o resultado da diferença vetorial dos vetores correspondentes aos dois números que formam essa subtração, conforme figura 11 desse capítulo.

Sendo $z_1 = c$ *e* $z_2 = |z_2|(\cos\alpha + i \cdot sen\alpha)$*, onde* $|z_2| = b$*. Conforme o que foi relembrado acima,* $|z_1 - z_2| = a$*, então,* $|z_1 - z_2|^2 = a^2$*, dessa forma obtém-se:*

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2) = z_1 \cdot \overline{z}_1 + z_2 \cdot \overline{z}_2 - (z_2 \cdot \overline{z}_1 + z_1 \cdot \overline{z}_2)$$

Como $z_1 \cdot \overline{z}_1 = c^2$, $z_2 \cdot \overline{z}_2 = |z_2|^2 = b^2$, $|z_1 - z_2|^2 = a^2$ *e* $z_2 \cdot \overline{z}_1 + z_1 \cdot \overline{z}_2 = 2\cos \hat{A}$*, logo* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$.

A segunda parte dessa etapa diz respeito às sugestões de modelos de atividades, como foi feito na seção 2.1. É nesse momento que o presente trabalho busca trazer para o docente mais algumas diretrizes, no que diz respeito ao conjunto de exercícios que serão selecionados para a turma, de tal forma que as ideias sugeridas nessa dissertação não se percam no momento de efetivação do processo educativo em questão.

Atividade proposta 1 – Dante (2003)

Dado $\overline{AB}$, lado de um triângulo equilátero ABC, com $A(2,1)$ e $B(6,3)$, obtenha as coordenadas do vértice C desse triângulo, sabendo que ele pertence ao 1º quadrante.

Resolução 1:

Observe a figura 14.

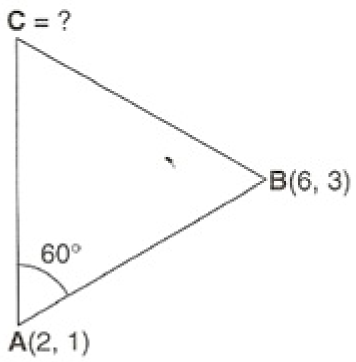

Figura 14 – Triângulo equilátero de Vértices denominados ABC

É necessário que se faça uma rotação do lado $\overline{AB}$ em torno de A, girando-se 60º no sentido anti-horário para se obter o ponto C. O Complexo unitário responsável por essa rotação é $\cos 60^o + i \cdot sen 60^o = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Se forem consideradas as coordenadas de A como o Número Complexo $z_1 = 2 + i$ *e as coordenadas de B como* $z_2 = 6 + 3i$, *o Número Complexo* z_3 *que corresponde às coordenadas procuradas de* C, *pode ser calculado da seguinte forma:*

Lembrando o que foi destacado na terceira demonstração, o Complexo w que representa AB é dado por $z_2 - z_1 = (6 + 3i) - (2 + i)$, *então,* $w = 4 + 2i$. *Sendo assim, para efetuar a rotação desejada, basta fazer a operação* $w' = (4 + 2i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = (2 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$.

Logo, as coordenadas de C procuradas são dadas por $z_3 = z_1 + w' = (4 - \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} + 2)i = (4 - \sqrt{3}, 2\sqrt{3} + 2)$.

Observação 1: O que se percebe nesse problema é algo de extrema relevância para se ampliar o conceito de Números Complexos. Se está diante de uma situação que, se for bem demonstrada para o aluno, ele poderá entender que problemas que envolvem coordenadas de um ponto podem ser trabalhados, se for conveniente, com os conceitos aprendidos na teoria dos Números Complexos. Esse problema, além da geometria, reforça um importante papel que a multiplicação de Números Complexos exerce que se refere à rotação de coordenadas no plano.

Nessa atividade é necessário deixar claro o roteiro abaixo para facilitar o entendimento por parte dos alunos quando a rotação acontecer sob um segmento ou vetor que não possuem a sua extremidade na origem do plano cartesiano (plano de Argand-Gauss).

1º- com a medida do ângulo de rotação, definir o vetor unitário.

2º- com o vetor unitário definido, obter um Complexo que é o produto desse unitário com a diferença dos Complexos que representam as extremidades do segmento ou o vetor.

3º- somar o Complexo obtido com o produto descrito acima com a extremidade oposta àquela que foi a base da rotação.

Atividade proposta 2:

Utilizando a teoria dos Números Complexos, deduza uma fórmula para $sen3x$ *e* $\cos 3x$*, em função de* $senx$ *e* $\cos x$*, sendo* x *um número.*

Resolução 2:

Tomando-se um Complexo unitário $z = \cos x + i \cdot senx$ *e recorrendo à fórmula de De Moivre, obtém-se:*

I - $(z)^3 = (\cos x + i \cdot \text{sen}x)^3$

II - *Pela fórmula de De Moivre, tem-se* $(z)^3 = \cos(3x) + i \cdot \text{sen}(3x)$.

Igualando os segundos membros de ***II*** e ***I****, chega-se em:*

$\cos(3x) + i\,\text{sen}(3x) = (\cos x + i\,\text{sen}x)^3 = \cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot i\,\text{sen}x + 3\cos x \cdot i^2\,\text{sen}^2 x + i^3\,\text{sen}^3 x$, *então,* $\cos(3x) + i \cdot \text{sen}(3x) = (\cos^3 x - 3\cos x \cdot \text{sen}x) + i \cdot (3\cos^2 x\,\text{sen}x - \text{sen}^3 x)$.

Logo, pelo princípio da equivalência de Números Complexos, mostra-se que x *e* $\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \cdot \text{sen}x$ *e* $\text{sen}3x = \cos^2 x\,\text{sen}x - \text{sen}^3 x$.

Observação 2: Nessa atividade fica claro de que forma os Números Complexos podem ser utilizados, como um facilitador, nos problemas de Trigonometria. Estreitando a análise, esse exercício mostra uma aplicação mais ampla e menos mecânica da fórmula de De Moivre.

Atividade proposta 3:

Considere um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo centro O possui as coordenadas $(0,0)$ *em um plano cartesiano. Sabendo que os vértices desse polígono são representados pelas raízes sextas de um Número Complexo z, responda:*

a) Se $w = 3(\cos\frac{\pi}{9} + i \cdot sen\frac{\pi}{9})$*, quais são as outras raízes sextas de z?*

b) Qual é o valor do apótema desse hexágono?

c) Qual é o valor do perímetro e da área desse hexágono regular?

Resolução 3:

a) Sabe-se que os argumentos dos Complexos procurados formam uma P.A. de seis termos, onde pode considerar o primeiro termo como $\frac{\pi}{9}$*, que é uma 1ª determinação positiva do primeiro quadrante, e a razão* $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Por outro lado, todos possuem o mesmo argumento igual a 3. Sendo assim, as raízes sextas procuradas são:

$$w_0 = 3(\cos\frac{\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{9})$$

$$w_1 = 3(\cos\frac{4\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{4\pi}{9})$$

$$w_2 = 3(\cos\frac{7\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{7\pi}{9})$$

$$w_3 = 3(\cos\frac{10\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{10\pi}{9})$$

$$w_4 = 3(\cos\frac{13\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{13\pi}{9})$$

$$w_5 = 3(\cos\frac{16\pi}{9} + i \cdot \text{sen}\frac{16\pi}{9})$$

Dos dados acima, obtém-se a figura 15 a seguir.

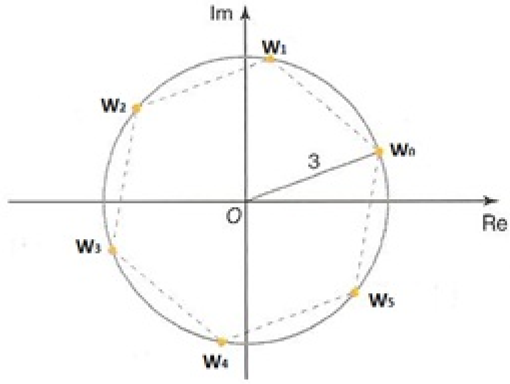

Figura 15 – Representação das raízes sextas do Plano de Argand-Gauss

b) Em primeiro lugar conclui-se que as raízes sextas em questão representam uma família de pontos que constituem uma circunferência de raio 3 unidades de comprimento, pois o módulo das raízes é 3. O hexágono está inscrito nessa circunferência e os seis triângulos equiláteros da forma $w_{n-2}Ow_{n-1}$ *possuem lados com a mesma medida do raio dessa circunferência. Com isso, pode-se concluir que o apótema mede* $m = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$*, que é altura de um triângulo equilátero.*

c) Com o que foi relatado no item b, conclui-se que o perímetro procurado é $2p = \dfrac{6 \cdot 6}{2} = 18$ *u.c. e a área, trabalhando com a fórmula* $A = p \cdot m$*, é* $A = 9 \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 27\sqrt{3}$ *u.a.*

Observação 3: A resolução desse problema conduz a um verdadeiro entendimento da fórmula de De Moivre utilizada na radiciação. Para ampla compreensão do item a, o aluno tem que entender todo processo de construção da demonstração dessa fórmula feita anteriormente. No que diz respeito aos itens b e c, a turma tem a oportunidade de revisar tópicos de geometria plana que são pré-requisitos para a geometria espacial – assunto que é trabalhado no 2º ano do Ensino Médio.

3.3 3º ANO DO ENSINO MÉDIO: REVENDO E APRIMORANDO OS CONCEITOS DE NÚMEROS COMPLEXOS

Chega-se à etapa final da presente proposta. Nesse momento, o professor regente dessa série estará diante de uma turma que, em sua maioria, já conhece a teoria dos Números Complexos que tem que ser estuda no Ensino Médio.

Diante dessa realidade, os estudantes estarão com pré-requisitos básicos para que o regente possa trabalhar atividades que conduzam a um "polimento" do conhecimento previamente adquirido por eles e, quem sabe, dentro da realidade do grupo, o docente possa somar novos conhecimentos a seus instruídos.

Inicialmente, o professor fará uma revisão de todo o conteúdo, trazendo para os seus alunos um conjunto de atividades com graus diferentes de dificuldades, mas que continuem promovendo uma visão ampla das aplicações dos Complexos, para que a turma não perca, em seu último ano de Ensino Médio, o que terá sido construído até aquele momento.

Já em outra fase, após a revisão do conteúdo, o docente aproveitará a otimização que foi dada ao tempo – que era destinado para ministrar esse conteúdo nos moldes tradicionais – para trabalhar atividades que concretizem a capacidade dos alunos de utilizarem esse conhecimento a seu favor e que essa geração não veja mais os Números Complexos como um assunto inútil e "complexo", mas, sim, como um objeto matemático poderoso que pode ser utilizado na resolução de problemas variados.

A partir de agora, como foi proposto para as etapas do 1º e 2º anos do Ensino Médio, serão apresentadas, também, atividades e uma demonstração que possam auxiliar o professor a entender o que se pretende construir até esse momento com o trabalho.

Atividade proposta 1:

(IME 79/80). Um velho manuscrito descreve a localização de um tesouro enterrado: Há somente duas árvores, A e B, em um terreno plano, e um canteiro de tomates. A é uma mangueira, e B é uma jabuticabeira. A partir do centro K do canteiro, meça a distância em linha reta até a mangueira. Vire 90º à esquerda e percorra a mesma distância até o ponto C. Volte ao centro do canteiro. Meça a distância em linha reta até a jabuticabeira. Vire 90º à direita e percorra a mesma distância até o ponto D. O tesouro está no ponto médio T do segmento CD. Um aventureiro achou o manuscrito, identificou as árvores, mas como o canteiro desapareceu com o passar do tempo, não conseguiu localizá-lo, e desistiu da busca. O aluno Sá Bido, do IME, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro. Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de T em função das coordenadas de $A(5,3)$ e $B(8,2)$.

Resolução 1 – Proposta por Almeida (2013):

De acordo com os dados, tem-se a figura 16.

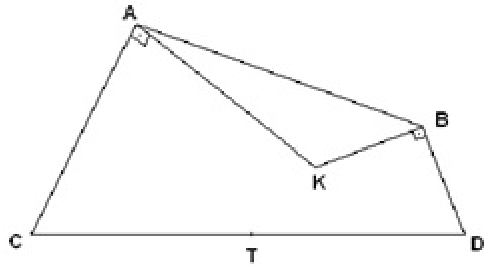

Figura 16 – Esquematização geométrica da atividade proposta 1 – Seção. 3.3

O ponto $A(5,3)$ *do plano é uma representação do Número Complexo* $5+3i$. *Já o ponto* $B(8,2)$ *representa o Número Complexo* $8+2i$. *Considere o sistema de coordenadas como um plano complexo. Da perpendicularidade e o sentido de rotação dos vetores, pode-se escrever:*

$$\overrightarrow{KA}\cdot i=\overrightarrow{AC}\Rightarrow(A-K)\cdot i=C-A\Rightarrow C=A(1+i)-k\cdot i$$

e

$$\overrightarrow{KB}\cdot(-i)=\overrightarrow{BD}\Rightarrow(K-B)\cdot(-i)=D-B\Rightarrow D=B(1+i)+k\cdot i.$$

O manuscrito diz que T *é o ponto médio de* C *e* D. *Então, das expressões acima, pode-se escrever:*

$$T=\frac{C+D}{2}=\frac{A(1+i)-k+B(1-i)+k\cdot i}{2}=\frac{A(1+i)+B(1-i)}{2}$$

Observa-se que a posição de T *não depende de* K, *sendo assim,*

$$T=\frac{(5+3i)(1+i)+(8+2i)(1+i)}{2}=6+i.$$

Logo, o tesouro tem coordenadas $(6,1)$ *no mesmo referencial de* A *e* B.

Observação 1: Nessa atividade é revisado o sentido da multiplicação de um Número Complexo por i, trazendo a ideia que essa rotação passa a ser horária quando essa operação é feita com $-i$. Cabe destacar que o exercício proporciona a oportunidade de revisar o sentido da operação de subtração de Números Complexos que pode ser associada à subtração de vetores, além do fato de mostrar novamente que esse segmento orientado nem sempre possui a sua origem na origem do plano cartesiano (plano complexo).

Atividade proposta 2:

(Dante, 2003). Na Engenharia Elétrica, a utilização de circuito de corrente alternada, como, por exemplo, as elétricas residenciais, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos Números Complexos, o que facilita muito os cálculos. A relação $U = Ri$*, estudada na física do Ensino Médio em que se utilizam os números reais, tornou-se* $U = Zi$*, em que* U *é a tensão,* Z *é a impedância e* i *é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de Números Complexos. Para que não haja confusão entre* i*, símbolo de corrente elétrica, e* i*, unidade imaginária, os engenheiros elétricos determinaram* j *como unidade imaginária na representação algébrica* $a+bj$*. Além disso, usam a notação* $|w| < \theta$ *para a forma trigonométrica* $|w|(\cos\theta + i\, sen\theta)$ *do Número Complexo* w*.*

Baseado no texto acima, resolva o problema a seguir:

Uma fonte de tensão de valor eficaz $110 < 0^o$ *fornece uma corrente de* $i = 11 < 60^o$ *para alimentar uma carga. Qual é a impedância* Z *dessa carga?*

Resolução 2:

Tem-se que $U = Zi$*, então,* $Z = \frac{i}{U}$*. Para efetuar essa divisão é melhor que ambos estejam na forma trigonométrica, sendo assim, como já se tem* $U = 110 < 0^o$*,então,* $U = 110 < 0^o = 110(\cos 0^o + \, sen 0^o)$ *e* $i = 11 < 60^o = 11(\cos 60^o + \, sen 60^o)$*. Dessa forma,* $Z = \frac{U}{i} = \frac{110}{11}[\cos(0^o - 60^o) + i \cdot \text{sen}(0^o - 60^o)] = 10[\cos(-60) + i \cdot \text{sen}](-60)$ *,tem-se* $Z = 10(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 5 - 5\sqrt{3}i$.

Logo, deve-se concluir que a impedância dessa carga é $10 < -60^o$ *ou* $5 - 5\sqrt{3}i$.

Observação 2: O problema mostra uma contextualização dos Números Complexos sobre um assunto que é estudado em Física no 3º ano. Além disso, cria-se uma oportunidade de revisar a divisão de Números Complexos na forma trigonométrica, sendo que essa operação é facilmente resolvida na forma algébrica, escrevendo os Complexos no formato de uma fração e multiplicando ambos pelo conjugado que se encontra no "denominador" dessa "fração".

Um dos objetivos desse trabalho, como já foi intensamente reforçado, é proporcionar aos estudantes do Ensino Médio uma visão mais ampla das aplicações dos conhecimentos que estão associados aos Números Complexos. Assim, nesse momento, tem-se a tranquilidade de estimular o docente, de acordo com o seu planejamento, a apresentar uma demonstração de um teorema muito importante dentro do estudo dos polinômios que é intitulado como Teorema das raízes imaginárias de uma equação polinomial. Além do mais, os discentes terão subsídios para entendê-la e poderão compreender que tal aplicação virá para agregar ao conhecimento até então adquirido.

O teorema em questão é:

Se o número imaginário $z = a + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $b \neq 0$ é uma raiz de uma equação polinomial $p(x) = 0$, com coeficientes reais, então, o conjugado de z, ou seja, $\overline{z} = a - bi$, também é raiz dessa equação.

Demonstração:

Considerando um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$, onde a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0 são coeficientes reais. Tomando o Número Complexo $z = a+bi$ como uma das n raízes de $p(x)$, ou seja, $p(z) = 0$. Sendo assim, tem-se a igualdade $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0 = 0$, onde a_n, $a_{n-1}z^{n-1}$, $a_{n-2}z^{n-2}$, ..., $a_2 z^2$, $a_1 z^1$, a_0 e, partindo do fato que Complexos iguais tem conjugados iguais, também pode-se considerar a igualdade $\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z^1 + a_0} = \overline{0}$. Recorrendo-se à propriedade do conjugado de um Número Complexo, onde $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, obtém-se:

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_2 z^2} + \overline{a_1 z^1} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

Das propriedades $\overline{az} = \overline{a} \cdot \overline{z}$ e $\overline{a} = a$, sendo a um número real, tem-se:

$$\overline{a_n} \cdot \overline{z^n} + \overline{a_{n-1}} \cdot \overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}} \cdot \overline{z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_2} \cdot \overline{z^2} + \overline{a_1} \cdot \overline{z^1} + \overline{a_0} = \overline{0}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \cdot \overline{z^n} + a_{n-1} \cdot \overline{z^{n-1}} + a_{n-2} \cdot \overline{z^{n-2}} + \cdots + a_2 \cdot \overline{z^2} + a_1 \cdot \overline{z^1} + a_0 = 0$$

Tomando a propriedade $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, chega-se em: $a_n \overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + a_{n-2}\overline{z}^{n-2} + \cdots + a_2 \overline{z}^2 + a_1 \overline{z}^1 + a_0 = 0$, ou seja, $p(\overline{z}) = 0$, então, $\overline{z} = a - bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, é uma raiz do polinômio $p(x)$, como se queria demonstrar.

Cabe-se destacar que é uma oportunidade do professor trazer para os alunos uma aplicação concreta do conjugado de um Número Complexo em um teorema tão importante para o estudo dos polinômios.

Com o intuito de trazer um fechamento para essa etapa, importa frisar que ao alcançarem essa série os alunos já terão tido um contado sólido com um foco diferenciado do tradicional durante um período de dois anos, possibilitando o aparecimento de um conjunto de fatores necessários para que o processo de aprendizagem seja amadurecido e, dessa forma, os discentes consigam utilizar esse novo conhecimento como uma ferramenta efetiva na resolução de problemas que envolvem diversas áreas da Matemática, como Geometria, Trigonometria e outras ciências.

Assim, acredita-se que estudos como esse que possam comprovar a eficácia de métodos "não tradicionais" serão alavancas que poderão despertar nos educadores a motivação para reverem suas práticas pedagógicas em prol de mudanças. São ações como essas que irão gerar frutos em um futuro próximo, pois estarão sendo preparadas gerações de seres pensantes e não reprodutoras de conhecimento.

De acordo com Brum (2013, p. 17),

> visualiza-se nos PCN a direção apontada com o intuito de promover uma Educação Matemática de qualidade, um "ensino" que faça com que os conhecimentos adquiridos pelos nossos jovens cumpram o seu verdadeiro papel, que é proporcionar a esses a capacidade de compreender, interferir e contribuir com a evolução do universo no qual se inserem.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o processo de construção desse trabalho, verificou-se ao final de cada etapa a viabilidade da aplicação da presente proposta.

Na etapa do 1º ano do Ensino Médio foi proposto que o primeiro contato dos alunos com a temática se dê através de uma contextualização, utilizando um problema retirado da História da Matemática que motivou Bombelli a dar início à estruturação algébrica desse objeto matemático. Dessa forma, acredita-se que a mesma motivação histórica pode ser recriada dentro de sala de aula.

A partir daí vem a busca por um significado concreto para os Números Complexos, em que se recorre à uma definição geométrica – plano de Argand-Gauss – sendo mostrada de forma contextualizada e concreta a necessidade de se ampliar o conjunto dos números reais.

Seguindo o processo, é introduzida a definição algébrica, deixando bem especificada sua ligação direta com a definição geométrica. Repare que, a partir desse momento, a turma estará pronta para trabalhar problemas que envolvem coordenadas de plano e Geometria, além do fato de poder introduzir a resolução de equações do 2º grau com discriminante negativo, pois estará significativamente bem definida a possibilidade de trabalhar com raiz quadrada de número negativo.

Percebe-se, portanto, que não está sendo proposto nada que não seja viável para essa série, pois os requisitos estarão sendo respeitados e, ao mesmo tempo, será ofertado mais um conhecimento para a resolução de problemas.

Conclui-se, a partir do que foi relatado, que por meio dessa mudança já é possível construir uma nova visão desse conteúdo por parte dos alunos.

Ao chegar no 2º ano, a proposta é apresentar os Números Complexos de uma forma interligada à Trigonometria. Nesse momento são sugeridas atividades que, através dos Complexos, demonstram-se formas trigonométricas que por caminhos tradicionais ficariam mais “complexas”. Além do fato de desmistificar e incentivar a aplicação da fórmula de De Moivre nessas resoluções trigonométricas e também na sua demonstração e aplicação na potenciação e na radiciação de Números Complexos.

Percebe-se, então, mais uma vez que se está diante de algo extremamente viável, pois fica claro nessa construção, e na experiência do autor em sala de aula, que o que está sendo apresentado aos alunos através da teoria dos Números Complexos é mais um instrumento facilitador para seu desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos e também em outras áreas de conhecimento que possibilite a aplicação desse assunto.

Por sua vez, ao chegar ao 3º ano, todo educador sabe que quando tem a oportunidade de trabalhar com um conteúdo com o qual a turma já teve um primeiro contato e, nesse caso, com o foco na busca pela ampliação do conhecimento adquirido, torna-se mais eficaz desenvolver um processo de ensino de qualidade, pois terá tempo e pré-requisitos para aprofundar no assunto e conduzi-lo de acordo com a sua necessidade. Nesse caso, mostrando o quanto é importante conhecer verdadeiramente os Números Complexos, assim como qualquer outro conteúdo apresentado, haja vista que tudo está interligado, portanto, reforçar-se a ideia de que não se pode compartimentar o processo de ensino, como já apontado neste trabalho.

É importante destacar que o autor, como professor de escolas públicas e particulares, tem consciência de que há diversas realidades em que existem variações de turmas com excelente rendimento e outras que possuem uma deficiência significativa no que concerne aos pré-requisitos necessários para um desempenho satisfatório nessa etapa.

Com base no que foi supracitado, acredita-se que todo o modelo de ensino pode (e deve!) ser adequado dentro de cada realidade, o importante é que a essência seja mantida para que as mudanças possam ocorrer.

Conclui-se, portanto, embasado em tudo o que foi construído até esse momento, que o autor acredita que a proposta de adequação, fracionando o ensino dos Números Complexos nas séries do Ensino Médio, juntamente com uma abordagem que proporcione um alcance real acerca da importância desse conteúdo, é extremamente viável, pois tudo que foi apresentado aqui está acessível ao conjunto discente e docente.

Ademais, sem otimismo demasiado, acredita-se que quando existem mudanças concretas que aperfeiçoem o processo de ensino e aprendizagem pode-se contribuir na criação de uma geração formadora de conhecimentos – fato este que foi um dos motivadores que levou à construção desse trabalho.

REFERÊNCIAS

[1] ARGAND J. R. **Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques** (1806). Reimp. Blanchard: Paris, 1971. Disponível em www.gallica.bnf.fr Acessado em 07/01/2015.

[2] BOMBELLI, R. **L'Algebra**. (1972). G. Rossi. Bolonha, 1579.

[3] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio** (volume 2). Brasília: MEC/SEF, 2006.

[5] BRUM, Marcel Luiz Silva. **A História da Matemática e o Software Geogebra**: contribuições no processo de ensino e aprendizagem das equações do 2º grau na Educação Básica. Trabalho de Pós Graduação. UFF Instituto de Matemática e Estatística. LANTE – Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino. Rio de Janeiro: 2013.

[6] CAON, Fernanda. **Números Complexos**: inter-relação entre conteúdos e aplicações. Dissertação de Mestrado – PROFMAT. Universidade Estadual de Ponta Grossa, 2013.

[7] CARDANO, G. **Ars Magna**. Massachusetts Institute of Technology, 1968.

[8] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria - Números Complexos**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2001.

[9] CARNEIRO, José Paulo. **A Geometria e o Ensino dos Números Complexos**. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Universidade Federal de Pernambuco. Recife: 2004.

[10] CARNEIRO, José Paulo; WANDERLEY, A. **Os Números Complexos e a geometria dinâmica**. Disponível em www.ensino.univates.br/ chart/Materiais/complexo cabri pdf Acessado em 13/01/2015.

[11] CERRI, Cristina e MONTEIRO, Marta. **História dos Números Complexos**. USP – São Paulo, 2001.

[12] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto e aplicações. Volume 3. São Paulo: Ática, 2003.

[13] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp: Campinas, 2004.

[14] FARO, Cecília. **Uma reflexão sobre o aprender e o ensinar**. Disponível em www.educacional.com.br Acessado em 15/01/2015.

[15] IEZZI, Gelson (et al.). **Matemática**: Volume Único. São Paulo: Atual, 2011.

[16] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar**: complexos, polinômios, equações. Volume 6. São Paulo: Atual, 2013.

[17] LIMA, Elon Lages. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

[18] LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

[19] LORENZATO, Sérgio. **Para Aprender Matemática**. Coleção Formação de professores. Autores Associados. São Paulo, 2006.

[20] MILIES, César Polcino. **A emergência dos Números Complexos**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo, nº. 24, p. 5-15, 1993.

[21] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**: Paiva. Volume 3. São Paulo: Moderna, 2010.

[22] SILVA, Márcio Antônio da. **Da teoria à prática**: uma análise histórica do desenvolvimento conceitual dos Números Complexos e suas aplicações. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS. Revista Brasileira de História da Ciência, Rio de Janeiro, v. 4, n. 1, p. 79-91, jan - jun 2011.

[23] VIEIRA, Jefferson Alencar do Nascimento e SOUZA, Fabiana Conceição de. **Sistema Numérico Binário**: Da Matemática à Informática. Artigo final apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática das Faculdades Integradas de Ariquemes - FIAR. Disponível em www.mftecnologia.esy.es/download/Aritbin.pdf Acessado em 05/01/2015.