2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

O MÉTODO DE NEWTON E FRACTAIS

Marcelo Moura Teodoro [1]
Juan Carlos Zavaleta Aguilar[2]

Resumo:

O presente trabalho trata sobre o Método de Newton como ferramenta para aproximar raízes de equações. Estuda-se a formulação do método, a convergência e o problema da aproximação inicial. Outro assunto abordado nesse trabalho são as bacias de atração, as quais com a ajuda de recursos computacionais, mostram que a extensão do Método de Newton para o plano complexo sugere a formação de alguns tipos de fractais.

Palavras-chave:

Método de Newton, Convergência, Bacias de atração, Fractais.

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2013
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: djmarcelomoura@oi.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: jaguilar@ufsj.edu.br

1 - INTRODUÇÃO

Resolver uma equação do tipo $f(x) = 0$ é um dos problemas mais antigos da Matemática. Quando se trata de um polinômio de grau 1 ou 2, são conhecidos métodos desde 2000 a.C., por exemplo para resolver uma equação do 2º grau ($ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$), podemos usar a fórmula de Báskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Em 1545 a forma de resolução das equações cúbicas (3º grau) e das quádricas (4º grau) tornam-se conhecidas com a publicação de Ars Magna de Girolamo Cardano[**1**]. A publicação dessa obra causou tal impacto que esse ano é frequentemente considerado como marco inicial do período moderno da matemática. Deve-se frisar que Cardano (ou Cardan) não foi o descobridor original das soluções quer das cúbicas, quer das quádricas. A sugestão para resolver as cúbicas, ele afirma, lhe tinham sido dadas por Niccolo Tartaglia. A solução das quádricas tinha sido descoberta pelo seu antigo aluno, Ludovico Ferrari. O que Cardano deixou de mencionar em Ars Magna foi o solene juramento que havia feito a Tartaglia de não revelar o seu segredo, pois este pretendia firmar sua reputação publicando a solução das cúbicas, até então desconhecida, em um tratado sobre álgebra.

Apesar de existirem algumas fórmulas fechadas para polinômios de ordem menor ou igual a quatro, uma pergunta é: como fazemos para resolver uma equação do tipo $f(x) = 0$, se $f(x)$ for um polinômio de grau maior ou igual a 5, ou, se $f(x)$ não for uma equação linear?

O Método de Newton é um método numérico usado para aproximar soluções de equações, ou equivalentemente, aproximar raízes, ou zeros de funções. Este método consiste em escolher adequadamente um aproximação inicial, ou também chamado de "chute" inicial, x_0 e, em seguida , através de um processo iterativo, encontramos uma sequência de números x_0, x_1, x_2, x_3, ... que, sob certas condições, convergem para um número real x_n, tal que $f(x_n) \approx 0$, ou seja x_n é uma solução aproximada. Mais tarde veremos que a raiz para o qual o Método de Newton converge, depende da boa escolha do "chute" inicial x_0. Quando o Método de Newton é generalizado para o plano complexo, pode-se construir belas imagens com a ajuda de recursos computacionais.

A primeira parte desse trabalho é voltado ao estudo do Método de Newton, onde deriva-se a sua fórmula de recorrência, os casos onde este método não funciona e processo de convergência. A segunda parte do trabalho, trata do estudo das bacias de atração e a extensão do Método de Newton para o plano complexo, onde serão dados exemplos, nos quais pode-se visualizar as bacias de atração na forma de fractais.

2 - DERIVANDO O MÉTODO DE NEWTON

O Método de Newton consiste na aproximação de uma raiz de uma equação a partir de um “chute” inicial x_0. As aproximações seguintes x_1, x_2, x_3, ... são geradas em função da aproximação anterior, utilizando-se uma fórmula de recorrência. Entretanto, escolhido o ponto x_0 há várias maneiras de se proceder para encontrar o ponto x_1. Por exemplo, pode-se utilizar a reta tangente em x_0. A reta tangente fornece a melhor aproximação linear para a função $f(x)$ no ponto x_0, assim, estamos implicitamente assumindo que a reta vai cruzar o eixo x perto da raiz desejada. Esta hipótese parece ser válida com base na Figura 1. Posteriormente será discutido como essa suposição procede sob certas circunstâncias.

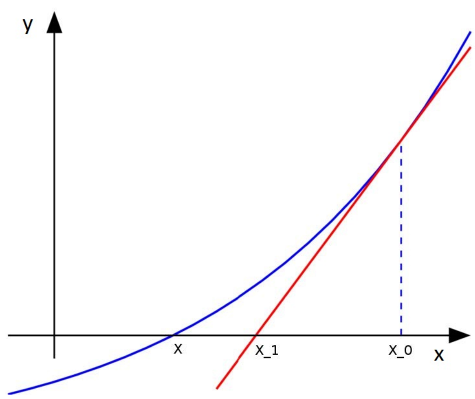

Figura 1: Primeira aproximação do Método de Newton[**5**].

Agora, suponha que $f(x)$ seja uma função diferenciável em um intervalo $[a, b]$ e que nesse intervalo existe uma única raiz, para a qual deseja-se encontrar uma aproximação. A partir da localização da raiz, utilizando, por exemplo, algum recurso gráfico, especifica-se o ponto inicial (x_0,0). Para determinar a próxima estimativa (x_1,0), traça-se a reta tangente em (x_0,$f(x_0)$). O ponto em que a reta tangente intercepta o eixo x é (x_1,0). Algebricamente, a equação da reta tangente em (x_0,$f(x_0)$) é dada pela fórmula:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Para entender a interceptação no eixo x considera-se $y = 0$ e substituindo-se na função temos:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$x - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)}$$

e finalmente

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

O x encontrado é a nova aproximação, ou uma estimativa para encontrar x_1. Assim teremos $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Para encontrar x_2, repete-se o processo, mas desta vez começa-se pelo ponto $(x_1, 0)$ e encontra-se o ponto $(x_2, 0)$. Repetindo este processo encontra-se uma sequência de valores x_0, x_1, x_2, ... e assim tem-se uma fórmula geral:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, com f'(x_k) \neq 0$$

Nesse trabalho, considera-se o Método de Newton através da expressão [**5**]:

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Assim

$$x_1 = N(x_0),$$

$$x_2 = N(x_1) = N(N(x_0)) = N^2(x_0)$$

logo, tem-se:

$$x_n = N^n(x_0)$$

onde a notação N^n significa que N foi aplicado n vezes.

3 - QUANDO O MÉTODO DE NEWTON FALHA

Uma pergunta natural que se coloca é se o Método de Newton sempre converge para uma raiz. Para responder essa pergunta, observam-se os seguintes casos:

i) Considera-se o caso em que x é um ponto crítico de $f(x)$. A partir da equação $f(x) = 0$, defini-se o processo iterativo de Newton como:

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, f'(x) \neq 0$$

Pela definição, percebe-se que $N(x_0)$ não existirá se $f'(x) = 0$. Em geral, isto mostra que se para algum k, temos que $f'(x_k) = 0$, o Método de Newton não irá convergir para uma raiz. A Figura 2, correspondente ao gráfico da função $f(x) = x^3 + 1$, na qual observa-se que sendo o ponto inicial $x = 0$, o método não iria convergir, uma vez que a reta tangente neste ponto nunca intercepta o eixo x. O "chute" inicial $x = 0$, coincide com o ponto crítico.

ii) Um outra situação em que o Método de Newton irá falhar é se a função não tiver raízes a serem encontradas. Considere o gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$ mostrado na Figura 3. A função $f(x) = x^2 + 1$ nunca intercepta o eixo x, e, portanto $f(x) = 0$ não tem uma solução (real) possível.

iii) Uma terceira situação em que o Método de Newton não irá convergir é se o "chute" inicial ou alguma interação coincide com um ciclo. Por exemplo, considera-se a função $f(x) = x^3 - 2x + 2$ e usa-se como "chute" inicial $x_0 = 1$, como mostrado na Figura 4. Adotando $x_0 = 1$, vê-se que:

$$x_1 = N(x_0) = 1 - \frac{1^3 - 2.1 + 2}{3.1^2 - 2} = 1 - 1 = 0,$$

e então

$$x_2 = N(x_1) = 0 - \frac{0^3 - 2.0 + 2}{3.0^2 - 2} = 0 - (-1) = 1$$

Este exemplo é de um ciclo com período dois. Em muitos casos, este problema pode ser evitado escolhendo o nosso "chute"inicial corretamente e, olhando-se para as derivadas da função a ser aproximada. Geralmente é recomendável representar graficamente a função $f(x)$, se possível, antes de usar o método de Newton.

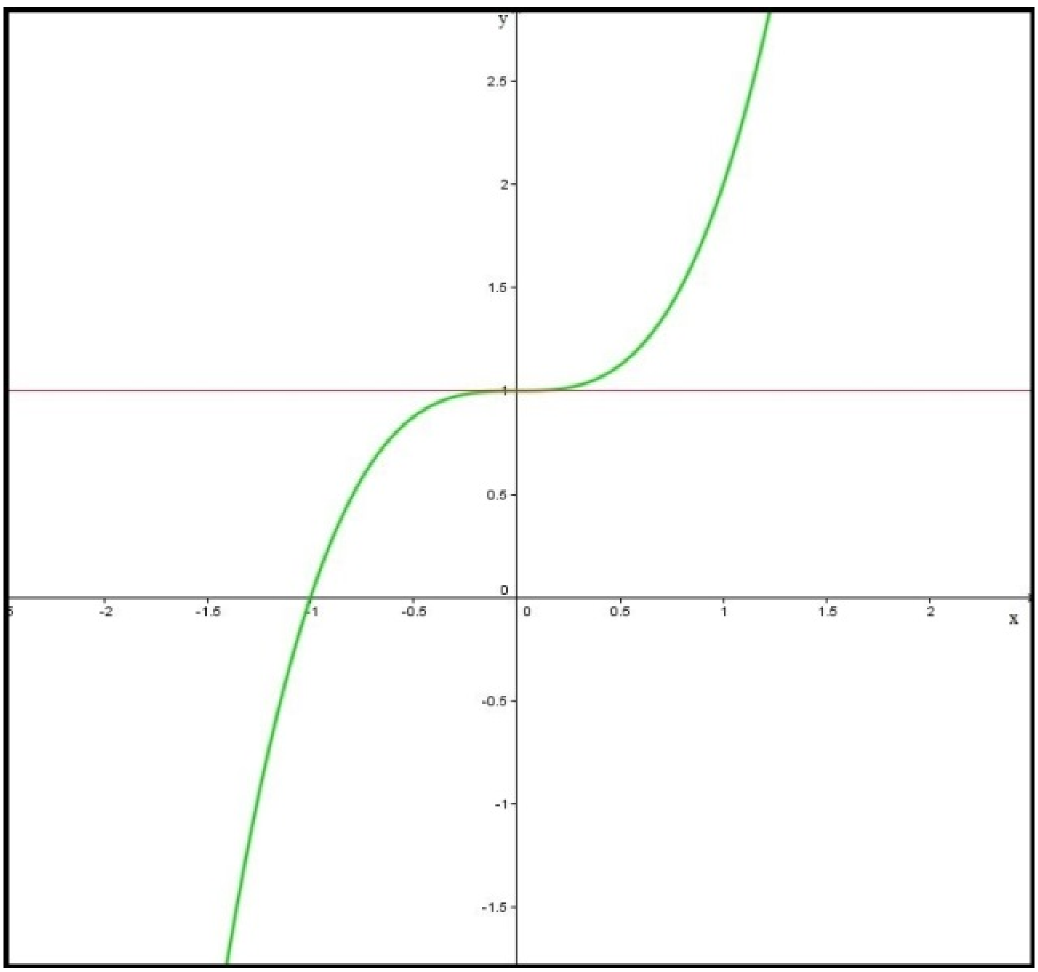

Figura 2: Gráfico da função $f(x) = x^3 + 1$.

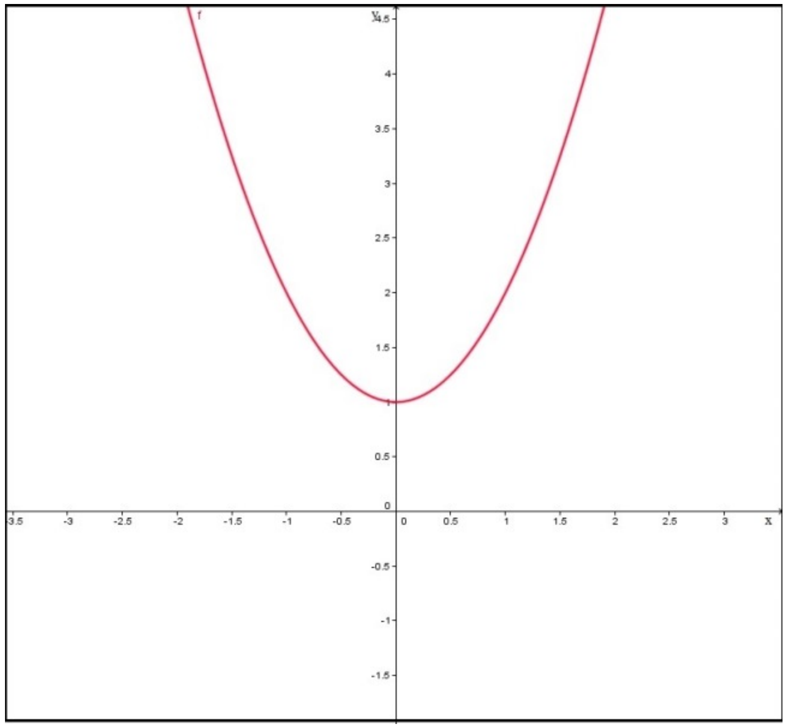

Figura 3: Gráfico da função $f(x) = x^2 + 1$. (Raiz inexistente).

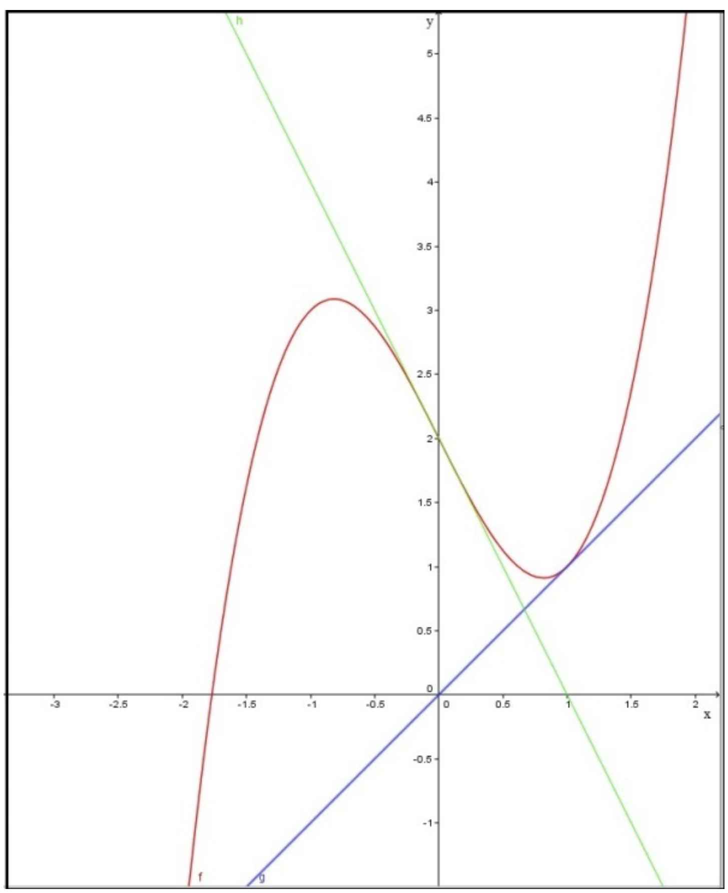

Figura 4: Gráfico das funções $f(x) = x^3 - 2x + 2$, $g(x) = x$ e $h(x) = -2x + 2$. Um ciclo de período 2.

4 - CONVERGÊNCIA

Uma questão natural é o problema da convergência do método numérico. Quando pode-se ter certeza que o Método de Newton converge para uma raiz? Para responder esta pergunta, começaremos dando algumas definições.

Definição 4.1

A raiz r da equação $f(x) = 0$ tem multiplicidade k se $f(r) = 0, f'(r) = 0, ..., f^{(k-1)}(r) = 0$, mas $f^k(r) \neq 0$. O termo $f^k(r)$ representa a k-ésima derivada de f avaliada em $x = r$.

Por exemplo, 0 é uma raiz de multiplicidade 2 para a função $f(x) = x^2 + x^3$ e multiplicidade 1 para a função $f(x) = x + x^3$.

Definição 4.2

Um ponto x_0 é um ponto fixo de uma função $f(x)$ se e somente se $f(x_0) = x_0$. Além disso, o ponto x_0 é chamado de ponto fixo de atração se $|f'(x_0)| < 1$.

Observação: Se a raiz é um ponto fixo de atração de $N(x)$, então o método de Newton converge para este ponto.

Teorema 4.1 - Se r é uma raiz de multiplicidade k de uma função $f(x) = 0$, então $f(x)$ pode ser escrito da forma:

$$f(x) = (x - r)^k G(x), \ \ quando \ \ G(x) \neq 0.$$

Demonstração

Vamos considerar a Fórmula de Taylor de uma função $f(x)$ centralizada sobre a raiz r.

$$f(x) = f(r) + f'(r)(x - r) + \frac{f''(r)}{2!}(x - r)^2 + \frac{f'''(r)}{3!}(x - r)^3 + ...$$

Agora, vamos supor que a raiz r tem uma multiplicidade k. A partir da definição da multiplicidade temos,

$$f(x) = 0 + 0(x - r) + \frac{0}{2!}(x - r)^2 + ... + \frac{f^k(r)}{k!}(x - r)^k + O.S. = \frac{f^k(r)}{k!}(x - r)^k + O.S.$$

Onde o termo $O.S.$ agrupa todos os termos de ordem maior ou igual a $k + 1$. De cada um termo de ordem superior que podemos fatorar $(x - r)^k$, por isso temos $f(x) = (x - r)^k G(x)$ onde $G(x) = \frac{f^k(r)}{k!} + O.S1.$ e $G(x)$ é uma função que não tem raiz igual a r, isto é, $G(x) \neq 0$. Se f for um polinômio a multiplicidade de qualquer raiz é sempre finita.

Um exemplo, considere o polinômio $P(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8$. Este polinômio admite duas raízes: -2 (raiz tripla) e -1 (raiz simples), e pode ser escrito da seguinte forma: $P(x) = (x + 2)^3(x + 1)$.

Teorema 4.2 (Teorema do ponto fixo de Newton)

Suponha que f seja uma função e N seja a sua função iterativa do Método de Newton associada. Então, r será uma raiz de f com multiplicidade $k > 0$, se e somente se r for um ponto fixo de N. Além disso, pontos fixos estão sempre se atraindo [6].

Para ficar mais claro as implicações de que pontos fixos estão sempre se atraindo, considera-se a seguinte problema. Suponha que deseja-se encontrar os pontos fixos da função $f(x) = x^3$. Para isso, usa-se a definição de ponto fixo para resolver, ou seja, quando $x^3 = x$. Resolvendo a equação, encontra-se as raízes -1, 0 e 1. Estes são os pontos fixos da função $f(x) = x^3$. Podemos verificar isso calculando o seguinte:

$$f(0) = 0^3 = 0, f(1) = 1^3 = 1, f(-1) = (-1)^3 = -1.$$

Estes pontos são chamados de pontos fixos da função $f(x) = x^3$, porque à medida que itera-se a função nestes pontos, a sequência gerada é constante.
Ao calcular a derivada e substituindo os pontos fixos desta função, vê-se que:

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(0) = 0$$

$$f'(1) = 3$$

$$f'(-1) = 3.$$

Agora, uma vez que $|f'(x_0)| < 1$ sabemos, por definição, que 0 é um ponto fixo de atração da função $f(x) = x^3$. Isto quer dizer que, escolhendo-se um ponto bem próximo de 0, por exemplo 0,5. Pode-se observar que a função irá convergir para 0, conforme a iteração abaixo:

$$f(0,5) = (0,5)^3 = 0,125$$

$$f(0,125) = (0,125)^3 = 0,001953125$$

$$f(0,001953125) = (0,001953125)^3 \cong 0,00000000745$$

O Método de Newton é apenas uma forma de iteração do ponto fixo. O Método de Newton é projetado para que a função iterativa de Newton $N(x)$ atraía pontos fixos para as raízes de $f(x)$. Isto é, quando iteramos $N(x)$, a sequência de pontos convergirá para as raízes de $f(x)$.

Suponha que $f(r) = 0$, mas $f'(r) \neq 0$, isto é, a raiz r tem multiplicidade 1. Logo, a partir da definição de $N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, tem-se que $N(r) = r$. Assim r é um ponto fixo de N. Reciprocamente, se $N(r) = r$, tem-se que $f(r) = 0$.

Para ver que r está atraindo um ponto fixo, usa-se a regra do quociente para calcular:

$$N'(x) = \frac{f(x).f"(x)}{(f'(x))^2}$$

Novamente assumindo que $f(r) = 0$ e que $f'(r) \neq 0$, vê-se que $N'(r) = 0$. Como $N'(r) < 1$, pela definição 3.2, r, é ponto fixo de atração. Isso prova o teorema, supondo que $f'(r) \neq 0$.

Agora, considere $f'(r) = 0$ e suponha que a raiz tem multiplicidade $k > 1$, de modo que a derivada $(k-1)$ de f se anule em r, mas o termo k não. Assim pode-se escrever:

$$f(x) = (x-r)^k.G(x),$$

onde G é uma função que satisfaz $G(r) \neq 0$. Então têm-se:

$$f'(x) = k(x-r)^{k-1}G(x) + (x-r)^k G'(x)$$

$$f"(x) = k(k-1)(x-r)^{k-2}G(x) + 2k(x-r)^{k-1}G'(x) + (x-r)^k G"(x).$$

Portanto, depois de alguns cancelamentos, têm-se:

$$N(x) = x - \frac{(x-r)G(x)}{kG(x) + (x-r)G'(x)},$$

logo $N(r) = r$, o que mostra que as raízes de f correspondem aos pontos fixos de N, quando r tem multiplicidade k. Finalmente, calcula-se:

$$N'(x) = \frac{k(k-1)G(x)^2 + 2k(x-r)G(x)G'(x) + (x-r)^2 G(x)G"(x)}{k^2 G(x)^2 + 2k(x-r)G(x)G'(x) + (x-r)^2 G'(x)^2}$$

(Note que o termo $(x-r)^{2k-2}$ foi simplificado). Agora se $G(r) \neq 0$, então:

$$N'(r) = \frac{k-1}{k} < 1$$

Assim, r é um ponto fixo de atração de N.

Em resumo, o Teorema do Ponto Fixo de Newton nos diz que os pontos fixos da função N são as raízes de $f(x)$. Além disso, pelo fato de que as raízes de $f(x)$ são pontos fixos de atração de N, iterando N, geramos uma sequência de pontos: x_0, $x_1 = N(x_0)$, $x_2 = N(x_1)$, $x_3 = N(x_2)$, ..., que irão convergir para a raiz de $f(x)$.

5 - UM EXEMPLO DO MÉTODO DE NEWTON

Neste exemplo, procura-se uma solução aproximada da equação: $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$. Para termos uma ideia de quantas raízes reais tem a função, e para escolher a aproximação inicial, constrói-se o gráfico da função, a qual é dada na Figura 5. Neste gráfico, pode-se observar claramente que existe uma única raiz no intervalo [1,2]. A função de Newton para $f(x)$ é:

$$N(x) = x - \frac{x^3 - x - 1}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3 + 1}{3x^2 - 1}$$

Escolhe-se com um "chute" inicial $x_0 = 1$, por existir uma raiz no intervalo [1,2]. Logo, os resultados encontrados na iteração da função de Newton são:

$x_0 = 1$
$x_1 = 1,5$
$x_2 = 1,34...$
$x_3 = 1,3252...$
$x_4 = 1,3247181...$
$x_5 = 1,324717957244789...$
$x_6 = 1,32471795724474602596091...$
$x_7 = 1,32471795724474602596091...$

A partir de x_6 e x_7 obtém-se um resultado com precisão até a 23ª casa decimal. Curiosamente observa-se o seguinte: x_2 a x_3, com 1 casa decimal; x_3 a x_4, com 2 casas decimais, x_4 a x_5 com 5 casas, x_5 a x_6 com 13 casas e x_6 a x_7 com 23 casas decimais. Esta duplicação aproximada é característica de convergência quadrática.

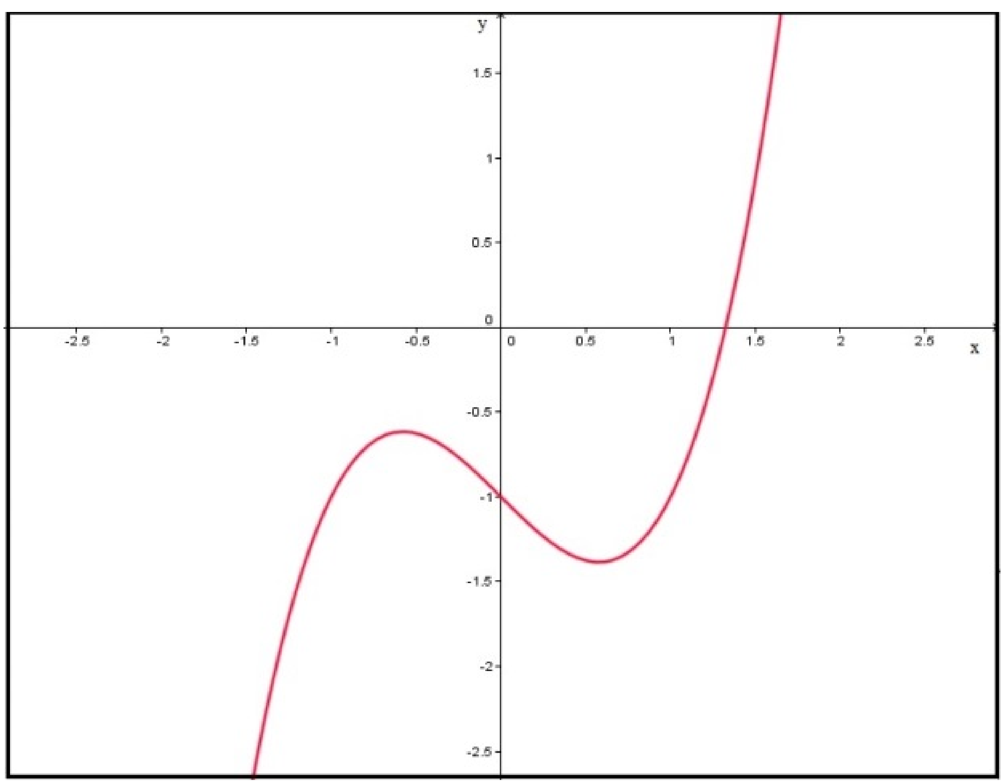

Figura 5: Gráfico da função $f(x) = x^3 - x - 1$.

5.1 - Convergência quadrática.
Para haver convergência no Método de Newton é necessário que o intervalo [a,b], analisado seja suficientemente pequeno e contenha uma raiz apenas sendo necessárias as seguintes observações [**2**]:

I - Se $f(a).f(b) > 0$ ou existirá um número par de raízes reais (contando suas multiplicidades) ou não existirá nenhuma raiz real no intervalo [a,b];
II - Se $f(a).f(b) < 0$ existirá um número ímpar de raízes reais (contando suas multiplicidades) no intervalo [a,b];
III - Se $f'(a).f'(b) > 0$ então, no intervalo especificado [a,b], a função ou será crescente ou será apenas decrescente jamais se alternando;
IV - Se $f'(a).f'(b) < 0$ então, no intervalo especificado [a,b], a função se alternará entre crescente e decrescente;
V - Se $f''(a).f''(b) > 0$, então a concavidade da função no intervalo [a,b] especificado não se inverterá;
VI - Se $f''(a).f''(b) < 0$, então a concavidade da função no intervalo [a,b] especificado se inverterá.

Sendo assim, a partir da análise dos critérios acima pontuados fica evidente que para haver convergência à uma raiz determinada no intervalo [a,b] obrigatoriamente:

$$f(a).f(b) < 0, f'(a).f'(b) > 0\, e f''(a).f''(b) < 0$$

Definição 5.1 (Convergência Quadrática) - Se uma sequência p_n converge para p, com $p_n \neq p$ e se existem números positivos λ e α tal que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^\alpha} = \lambda$$

onde p_n converge para p na ordem α. Isto é se $\alpha = 2$, então a convergência é quadrática.

Antes de demonstrar a convergência quadrática do Método de Newton, enunciaremos o seguinte Teorema.

Teorema 5.1 (Teorema de Taylor com resto) - Seja x e x_0 números reais, e f $(k+1)$ vezes continuamente diferenciável no intervalo entre x e x_0. Então, existe um número c entre x e x_0 tal que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f"(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + ... + f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} + f^{(k+1)}(c)\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

Lema 5.2 (Convergência quadrática do Método de Newton) - Se $N'(r) = 0$, então o Método de Newton converge quadraticamente.

Demonstração:
Se $N'(r) = 0$, então do Teorema 5.1 temos:

$$N(x) = N(r) + N'(r)(x - r) + N"(c)\frac{(x_n - r)^2}{2}$$

onde c está entre x e r. Simplificando e substituindo x_n por x temos:

$$N(x_n) - N(r) = N"(c)\frac{(x_n - r)^2}{2}$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|^2} = \frac{|N"(c)|}{2}$$

Portanto, da definição 5.1 temos que o Método de Newton converge quadraticamente.

Se r é uma raiz de multiplicidade 1 e $N'(r) = 0$ o Método de Newton converge quadraticamente, mas se $N'(r) \neq 0$, o Método de Newton pode convergir apenas linearmente, como no seguinte lema.

Lema 5.3 (Convergência linear do Método de Newton) - *Se $N'(r) \neq 0$, então o Método de Newton irá convergir linearmente.*

Demonstração

Se a raiz de $f(x)$ não é uma raiz simples, então $N'(r) \neq 0$

$$N(x) = N(r) + N'(c)(x - r)$$

Organizando os termos e tomar o limite de $n \to \infty$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - r|}{|x_n - r|} = |N'(c)|$$

Logo, pela definição 5.1, o Método de Newton converge linearmente.

Observação: Caso se tenha convergência linear do Método de Newton para raízes de multiplicidades maiores que um, existe uma modificação do Método de Newton na qual o Método Modificado garante convergência quadrática **[3]**.

6 - BACIAS DE ATRAÇÃO

Bacias de atração ou de convergência de uma raiz r de f é o conjunto de pontos iniciais x_0 para os quais a sequência (x_k) gerada pelo Método de Newton converge para r. Nesse capítulo estamos interessados em funções com múltiplas raízes. Considere a função $f(x) = x^3 - 2x$.

A função de Newton de $f(x)$ é $N(x) = x - \frac{x^3-2x}{3x^2-2}$. Se escolhemos $x_0 = 1$ como "chute" inicial obtém-se a seguinte sequência de pontos:
$x_0 = 1$
$x_1 = 2$
$x_2 = 1,6$
$x_3 = 1,442253521...$
$x_4 = 1,415010637...$
$x_5 = 1,414214235...$
$x_6 = 1,414213562...$
$x_7 = 1,414213563...$
A série é convergente. Agora vamos pegar a mesma função $f(x)$, e vamos começar com $x_0 = 0,7$. Isto resulta na seguinte sequência de pontos:
$x_0 = 0,7$
$x_1 = -1,294339623...$
$x_2 = -1,433222702...$
$x_3 = -1,414585178...$
$x_4 = -1,414213709...$
$x_5 = -1,414213563...$
$x_6 = -1,414213563...$
$x_7 = -1,414213563...$

Observe o gráfico abaixo:

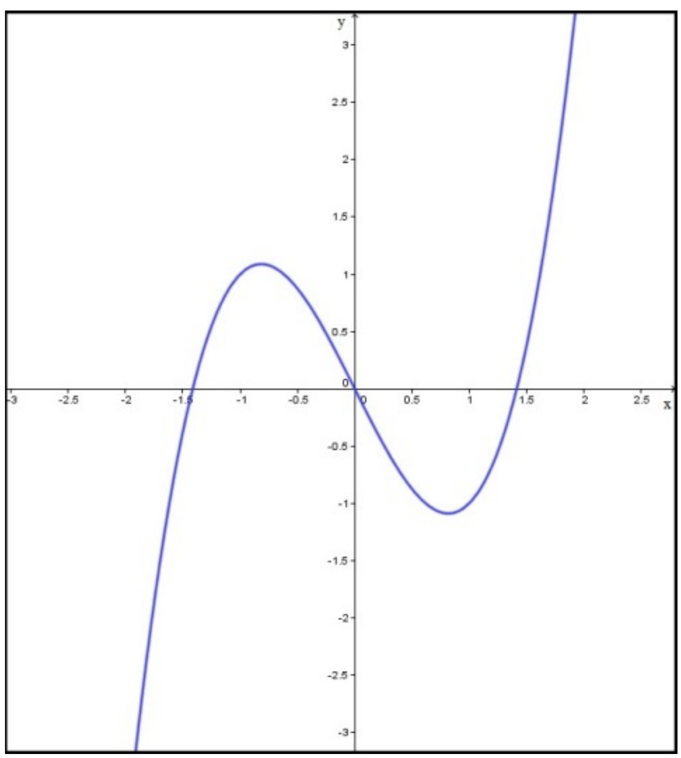

Figura 6: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x$.

A série está convergindo para uma raiz diferente. Mesmo que escolhendo pontos iniciais relativamente próximos, os resultados convergiram para raízes completamente diferentes (Figura 6). Isso nos leva a supor que o "chute" inicial determina a raiz para o qual o Método de Newton converge. Para formalizar esta hipótese, primeiro precisamos de uma definição.

Definição 6.1: Se r é uma raiz de $f(x)$, a bacia de atração de r, é o conjunto de números de x_0 tal que o Método de Newton, a partir de x_0 converge para r.
Em termos de conjunto:

$$B(r) = \{x_0/x_n = N^n(x_0) \ \ converge \ \ para \ \ r\}.$$

Para ilustrar as bacias de atração, como exemplo, considera-se o problema de encontrar as bacias de atração para a função $f(x) = x^3 - x$.

Observa-se que $f(x)$ tem raízes em $-1, 0$ e 1. Em primeiro lugar, vamos confirmar que estes pontos são, na verdade, pontos fixos de atração. Segundo a definição 4.2, r é um ponto fixo de $N(x)$ se $N(r) = r$. Além disso, pontos fixos de $N(x)$ estão sempre atraindo pontos fixos. Calculando a função de Newton de $f(x)$ temos, $N(x) = x - \frac{x^3-x}{3x^2-1}$. Substituindo $-1, 0$ e 1 pode-se observar que as raízes estão, na verdade atraindo pontos fixos de $N(x)$.

Para encontrar as bacias de atração primeiro devemos olhar para o gráfico de $f(x)$ na Figura 7. A partir do gráfico, vemos que, se $x_0 \geq 1$, x_n converge para 1. Ou seja, $[1, \infty) \subset B(1)$. Além disso, se x_0 entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ e 1 a primeira iteração de x_1 será superior a 1, assim x_n irá convergir para 1. Por isso temos $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty) \subset B(1)$. Finalmente, se $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o Método de Newton falha porque 1 é um ponto crítico de $f(x)$. O intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$ é o maior intervalo aberto acima de 1; chamamos este intervalo de bacia local de atração ou a maior bacia de atração para o ponto x=1. Neste caso particular, as bacias locais de atração são simétricas; $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \subset B(-1)$, por causa da simetria da função. Notamos isso por um argumento semelhante, como acaba de ser apresentado para $x_0 \leq 1$ e, em seguida, para um outro ponto crítico x_0 entre $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e -1.

Finalmente , consideramos a última raiz de $f(x)$ em $x = 0$. Cuidadosamente olhando para o gráfico da Figura 7 ou através da iteração dos pontos próximos de 0 , notamos que os pontos parecem oscilar em torno de 0, se $x_0 > 0$, então $N(x_0) < 0$. Por exemplo, se $x_0 = 0,3$ obtemos a seguinte sequência:
x_0 = 0,3
x_1 = -0,0739726027...
x_2 = 0,00082305938...
x_3 = -0,0000000011151....

Essa oscilação de valores positivos para negativos sugere a formação de um ciclo de período dois em $N(x)$. Um ciclo de período dois é um ponto tal que x de $N^2(x)$=x. Observe que $f(x)$ é uma função ímpar. Isto é $f(-x) = -f(x)$. Como $f(x)$ é ímpar então $N(x)$ também é uma função ímpar. Essa simetria simplifica muito, quando queremos encontrar pontos periódicos de $N(x)$. Desde que $N^2(x) = N(N(x))$, temos :

$$N(N(x)) = N(-x) = x.$$

Isso é o que precisamos resolver , quando $N(x) = -x$. Portanto temos,

$$-x = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}, 5x^3 - x = 0, x = 0, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

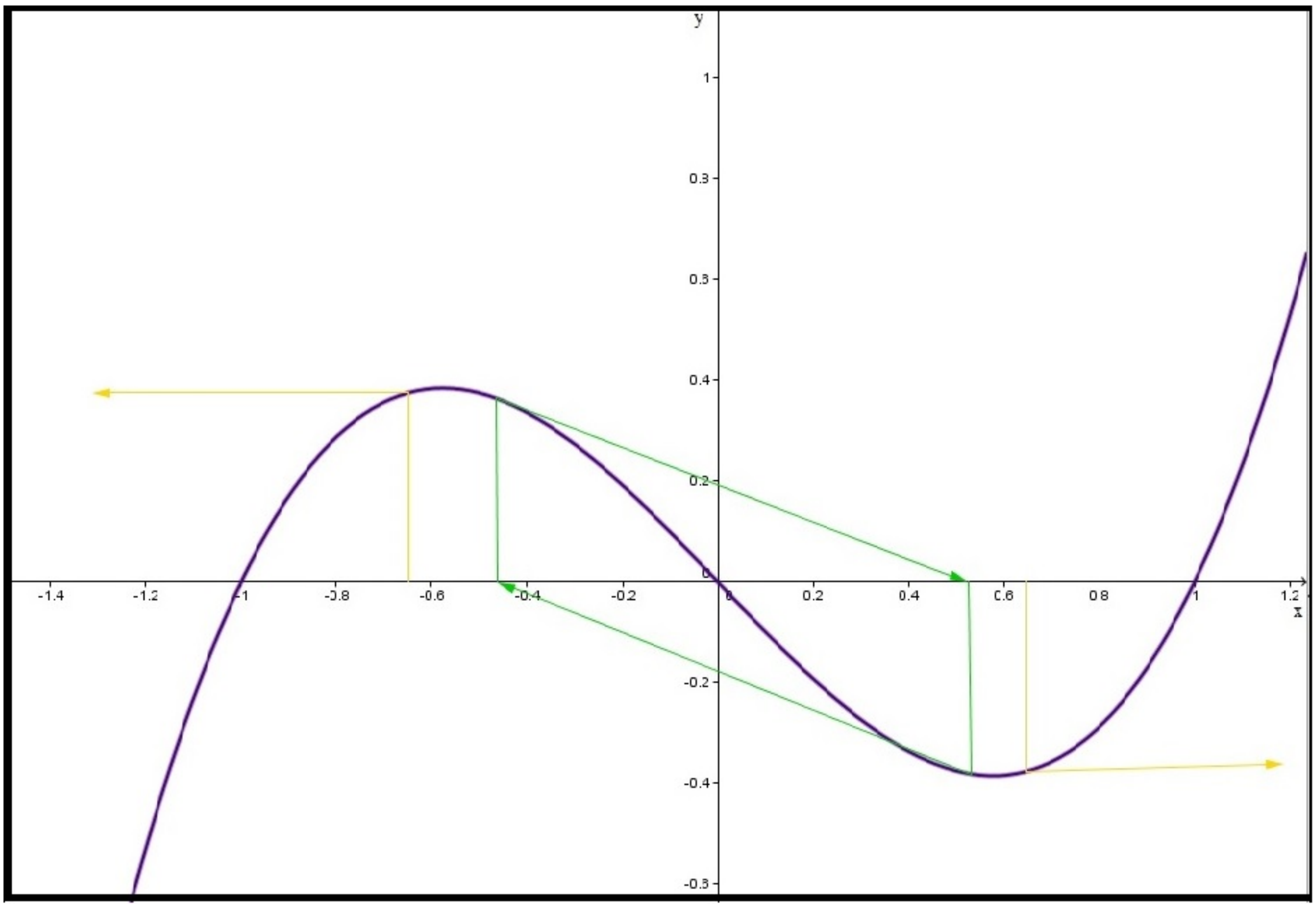

Figura 7: Gráfico da função $f(x) = x^3 - x$

Sabe-se que 0 não é um ponto periódico, porque é um ponto fixo. Assim, pode-se concluir que $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$ são pontos periódicos de período de dois. Assim, verificamos que a bacia local de atração para 0 é $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. Em resumo, a bacia local de atração para o ponto crítico -1 está no intervalo $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. A bacia local de atração para o ponto crítico 0 está no intervalo $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. E, finalmente, a bacia local de atração para o ponto crítico 1 está no intervalo $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.

Observe que não discutimos os intervalos $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Nestes intervalos o Método de Newton tem um comportamento radicalmente diferente. De acordo com a primeira análise, se $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ percebemos que, $N(x_0)$ não existe porque a linha tangente em x_0 tem declividade zero. Se x_0 é um número ligeiramente inferior a $\frac{1}{\sqrt{3}}$ percebemos, que a linha tangente intercepta o eixo $-x$, em algum número negativo bem grande. Isto é, $N(x_0)$ é um grande número operatório negativo e, assim, x_0 está em $B(-1)$. Se continuarmos diminuindo x_0 para algum número pequeno, temos que x_0 permanece no $B(-1)$ até $N(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Neste ponto crítico a inclinação da linha tangente é igual a zero, e se $N(N(x_0))$ não existe. Assim, encontra-se um pequeno intervalo que está contido na bacia de -1. Pode-se aproximar o intervalo resolvendo as equações $N(x) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $N(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ para x . Fazendo isso, pode-se verificar que o intervalo é de aproximadamente $(0,465601\ ;\ 0,577350)$. Por simetria, sabe-se que o outro intervalo é $(-0,577350\ ; -0,465601)$ está contido em $B(1)$. Agora deve-se continuar diminuindo x_0 para um valor arbitrariamente pequeno abaixo 0,465601 tal que $x_1 = N(x_0)$ seja superior a $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. A reta tangente em x_1 intercepta o eixo x em um grande positivo e $N(x_1)$ é um grande número positivo, então $N(x_1) \subset B(1)$. À medida que continua-se tentando diminuir x_0 para um valor menor que 0,465601, x_1 se torna ainda maior que $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $x_2 = N(x_1)$ diminui em direção $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Quando x_2=$N(x_1)$=$\frac{1}{\sqrt{3}}$ percebe-se que a inclinação da reta tangente tende novamente a zero e $N(N(x_0))$ não existe. Aproximando $N(x)$=$-0,465601$ para x, encontra-se $x_0 \approx 0,450202$. Assim, o intervalo $(0,450202\ , 0,465601) \subset B(1)$. Em geral,ver Tabela 1, o que se encontra é uma sequência de números $b_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$>b_1≈0,465601>b_2≈0,450202>b_3>... tal que:

$(b_k, b_{k-1}) \subset B(-1)$ quando k é antigo,

e

$(b_k, b_{k-1}) \subset B(1)$ quando é novo.

Os números b_k são determinados pela resolução de equações sucessivamente $N(b_k) = b_{k-1}$. Na tabela 1, são descritos: os valores dos primeiros b_k, os comprimentos dos intervalos (b_k, b_{k-1}) e as proporções dos comprimentos dos intervalos sucessivos. Cada $B(-1)$ e $B(1)$ consiste de um número de intervalos infinitos, cujos comprimentos diminuem, aproximadamente, numa taxa geométrica. Um movimento arbitrariamente pequeno de x_0 para a esquerda de $\frac{1}{\sqrt{5}}$ causa convergência alternada entre 1 e -1 infinitas vezes.

Tabela 1 - Tabela dos comprimentos de intervalos e relações de comprimentos nos intervalos sucessivos.

k	b_k	$b_k - b_{k-1}$	$\frac{b_k - b_{k-1}}{b_{k+1} - b_k}$
0	0,577350		
1	0,465601	0,11749	7,26
2	0,4502020	0,015399	6,18
3	0,4477096	0,0024924	6,03
4	0,4472962	0,0004134	6,01
5	0,44722736	0,00006884	6,00
6	0,44721589	0,00001147	6,00
7	0,44721398	0,00000191	6,00
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	0,447213595		

7 - O MÉTODO DE NEWTON NO PLANO COMPLEXO

7.1 - O Método de Newton no plano complexo

Se $N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$, onde z é variável complexa, as iterações de $N^n(z_0)$, geralmente convergem de forma quadrática para uma raiz de $f(z)$. Considere o polinômio complexo $f(z) = z^2 + 1$, como o da Figura 3, que corresponde à função $f(x) = x^2 + 1$. Sabe-se que esta função não possui raízes reais. Porém, ao contrário de $f(x) = x^2 + 1$, a função complexa correspondente tem duas raízes, $z = i$ e $z = -i$ como solução. Se escolhermos z_0 no eixo real (que é y=0), então as interações de $N(z)$ se comportam exatamente como fazem para a função $f(x)$=$x^2 + 1$, isto é, se comportam de uma maneira caótica. No entanto, se escolhermos z_0 fora do eixo real, o Método de Newton converge.

$z_0 = 1 + 0,5i$	$z_0 = 0,5 - i$
$z_1 = 0.1 + 0,4500i$	$z_1 = 0,500 - 0,9000i$
$z_2 = -0,1853 + 1,2838i$	$z_2 = -0,0058 - 1,0038i$
$z_3 = -0,0376 - 1,0234i$	$z_3 = -i$
$z_5 = i$	

Agora vamos considerar as bacias de atração para polinômios complexos.

7.2 - **Bacias de atração complexas**

As bacias de atração complexas foram analisadas inicialmente por Arthur Cayley, e em 1879 ele publicou o seguinte teorema:

Teorema 7.2.1 (Teorema de Cayley)
Seja a função polinomial quadrática e complexa $f(z) = az^2 + bz + c$ com raízes α e β no plano complexo. Seja L a mediatriz do segmento que liga as raízes α e β. Então quando o Método de Newton é aplicado para $f(z)$, os semi-planos que L divide no plano complexo são exatamente $B(\alpha)$ e $B(\beta)$, as bacias de atração de α e β.

Dessa forma, o Teorema de Cayley descreve exatamente as bacias de atração para o plano complexo, utilizando o Método de Newton quando aplicado à polinômios quadráticos complexos. A partir de um ponto z_0 complexo, o Método de Newton converge exatamente para α quando $|z_0 - \alpha| < |z_0 - \beta|$. No, entanto, se z_0 está na mediatriz L, o Método de Newton pode não convergir e ter um comportamento caótico.

Mais uma vez considera-se a função quadrática $f(z) = z^2 + 1$, que possui raízes complexas i e $-i$, pode-se observar que a mediatriz do segmento que liga as duas raízes é o eixo real. Aplicando o Teorema de Cayley, percebe-se que os pontos acima do eixo real irão convergir para a raiz i e os pontos abaixo do eixo real irão convergir para a raiz $-i$. Como o eixo real é a mediatriz, qualquer valor inicial escolhido nesse eixo não irá convergir. Na Figura 8 pode-se visualizar as bacias de atração da função quadrática complexa $z^2 + 1$.

Cayley também considerou funções cúbicas complexas, mas não conseguiu uma divisão óbvia para as bacias de atração. Somente mais tarde, no início do século 20 que os matemáticos

Fatou e Julia começaram a compreender a natureza dos polinômios cúbicos complexos. E no início dos anos 80's, utilizando recursos computacionais, os matemáticos foram capazes de finalmente criar imagens das bacias de atração de funções complexas cúbicas, os fractais.

7.3 - **Fractais**

Nos últimos anos, diferentes definições de fractais têm surgido. No entanto, a noção que serviu de fio condutor a todas as definições foi introduzida por Benoît Mandelbrot através do neologismo Fractal, que surgiu do latino fractus, que significa irregular ou quebrado, como ele próprio disse: Eu cunhei a palavra fractal do adjetivo em latim fractus. O verbo em latim correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, é contudo sabido e como isto é apropriado para os nossos propósitos que, além de significar quebrado ou partido, fractus também significa irregular. Os dois significados estão preservados em fragmento. Os fractais são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita. Mandelbrot, constatou ainda que todas estas formas e padrões, possuíam algumas características comuns e que havia uma curiosa e interessante relação entre estes objetos e aqueles encontrados na natureza. Um fractal é gerado a partir de uma fórmula matemática, muitas vezes simples, mas que aplicada de forma iterativa, produz resultados fascinantes e impressionantes. Uma 1ª definição, pelo próprio Mandelbrot, diz que: "Um conjunto é dito fractal se a dimensão Hausdorff deste conjunto for maior do que a sua dimensão topológica". Contudo, no decorrer do tempo ficou bastante claro que esta definição era muito restrita, embora apresentasse algumas motivações pertinentes. Existem duas categorias de fractais: os geométricos, que repetem continuamente um modelo padrão e os aleatórios, que são feitos através dos computadores. Além de se apresentarem como formas geométricas, os fractais representam funções reais ou complexas e apresentam determinadas características: auto semelhança, a dimensionalidade e a complexidade infinita. Uma figura é auto semelhante se uma parte dela é semelhante a toda a figura [4].

8 - IMAGENS GERADAS COM RECURSOS COMPUTACIONAIS

Na Figura 9 temos a imagem da função $f(z) = z^3 - z$. As raízes de $f(z) = z^3 - z$ são $z = -1$, 0 e 1. A Figura 10 é um pedaço ampliado da Figura 9. As cores representam as diversas raízes. Nas Figuras 9 e 10 os pontos que convergem para a raiz $z = 0$ são de cor azul, enquanto as raízes $z = -1$ e $z = 1$ são de cor vermelha e verde, respectivamente. Os tons de cores diferentes representam a quantidade de iterações necessárias para que o ponto particular converge.

A Figura 11 mostra as bacias de atração para $f(z) = z^3 - 1$. As raízes de $f(z) = z^3 - 1$ são $z = 1$, $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, e $z = -\frac{1}{2}$ - $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observe que os tons das cores é difícil de perceber nessa figura. No entanto, ampliando a parte central da imagem (como da Figura 12), somos capazes de ver que os tons estão de fato presentes. Isto é porque todos os pontos vistos convergem muito rapidamente para as suas respectivas raízes.

As Figuras 13 e 14 representam bacias de atração para funções complexas polinomiais de grau 4.

A Figura 13 mostra as bacias de atração para $f(z) = z^4 - 1$. As raízes de $f(z) = z^4 - 1$ são $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ e $z = -i$ e estão coloridas de verde, vermelho, azul e azul-petróleo respectivamente.

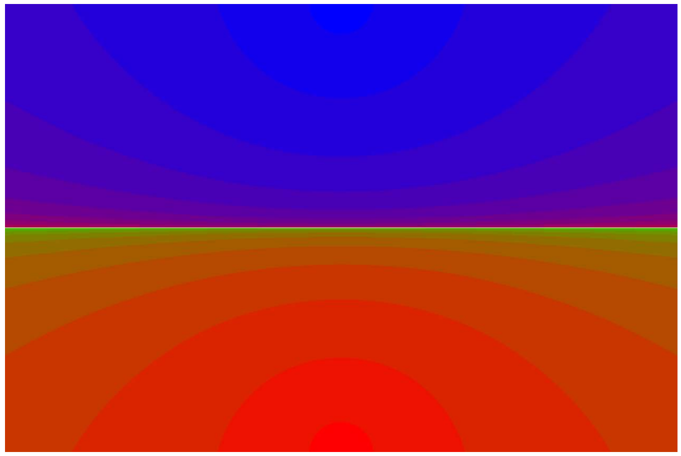

Figura 8: A bacia de atração para $z^2 + 1$ [5].

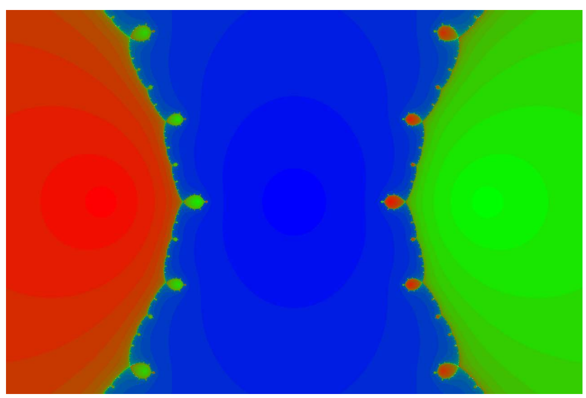

Figura 9: As bacias de atração para $z^3 - z$ [5].

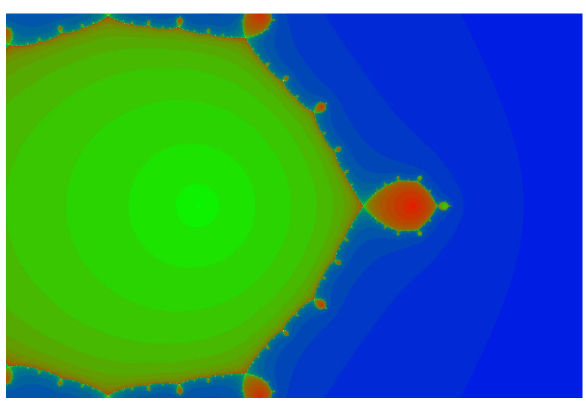

Figura 10: Ampliação de um pedaço da Figura 9 [5].

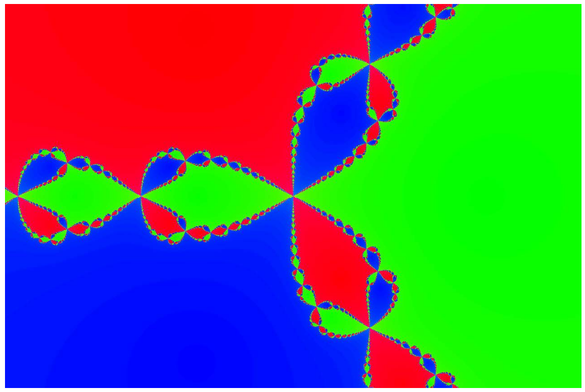

Figura 11: As bacias de atração para $z^3 - 1$ [5].

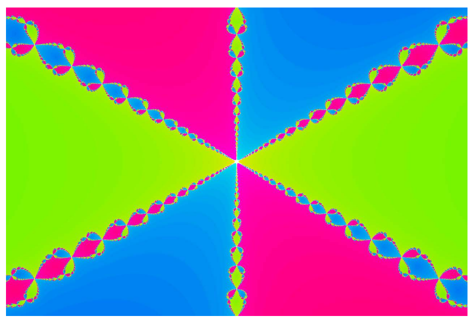

Figura 12: Ampliação da parte central de $f(z) = z^3 - 1$ [5].

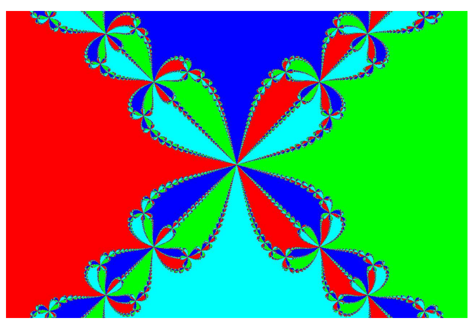

Figura 13: As bacias de atração para $f(z) = z^4 - 1$ [5].

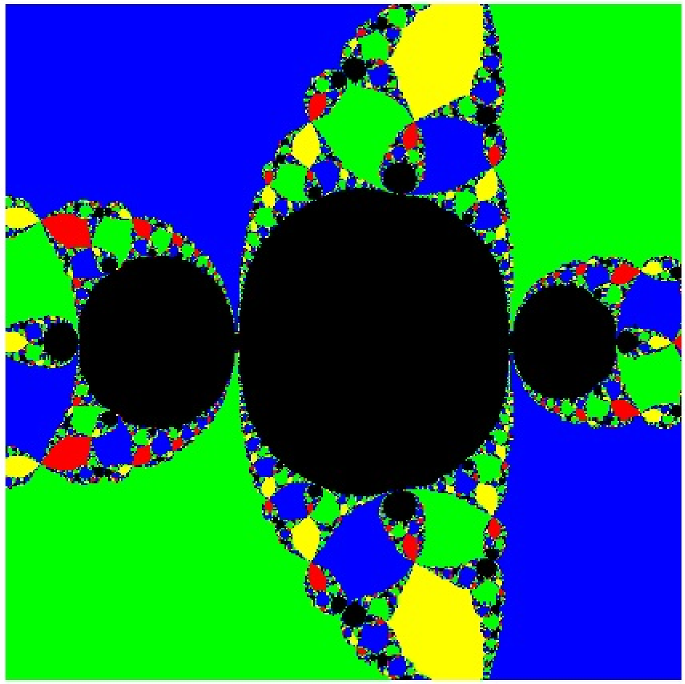

Figura 14: As bacias de atração para $f(z) = (z-1)(z+1)(z-0,4i)(z+0,4i)$.

Os gráficos apresentados mostram que, os fractais possuem propriedades bem interessantes e particulares. Atualmente a geometria fractal possui diversas aplicações científicas, como por exemplo em estudos de batimentos cardíacos, estudos climáticos, entre outros.

9 - CONCLUSÕES

O Método de Newton é uma excelente ferramenta para se encontrar raízes aproximadas de equações. O processo é rápido se a escolha do "chute"inicial for feita de forma correta. Estendendo o método para o plano complexo e com a ajuda de recursos computacionais pode-se observar os gráficos das bacias de atração, os quais obtém-se belos fractais, quando se trata de funções complexas de ordem maior ou igual a três.

Os Números Complexos e Equações Polinomiais são abordados, independentemente, na 3ª série do Ensino Médio. Como professor desta série, pude observar que os alunos não encontram facilmente aplicações e tampouco nexo destes conteúdos. Avalio que, o assunto dos fractais e sua relação com os números complexos e a solução de equações polinomiais, possam de alguma forma, contribuir com a motivação e o aprendizado dos alunos.

10 - AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a DEUS, por tudo que me concedeu até o presente momento.

Quero também agradecer ao meu Orientador Juan Carlos Zavaleta Aguilar, pela dedicação, competência profissional e pela paciência que teve comigo, compartilhando seus conhecimentos e sempre me motivando de forma amigável a finalizar meu trabalho.

Aos docentes do curso PROFMAT, muito obrigado pelos conhecimentos repassados, que com certeza contribuirão muito para o meu crescimento profissional.

A todos os meus amigos do curso PROFMAT, que me ajudaram neste Mestrado, peço a DEUS que os ilumine, guiando seus passos com muita paz, amor, saúde e prosperidade.

E por fim ao meu Pai José Teodoro, que sempre me apoiou e me incentivou a nunca desistir.

Referências

[1] $http://www.grupoescolar.com/pesquisa/a-solucao-das-equacoes-de-terceiro-e-quarto-grau.html$ Acesso em: 02 Fev. 2015.

[2] $http://www.fara.edu.br/sipe/index.php/renefara/article/download/153/137$ Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia. Acesso em 03 de Fev. 2015

[3] $https://sites.google.com/site/driverssystem/3-5-el-metodo-de-newton-modificado$

[4] $http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/nocoes.htm$ Acesso em 17 Mar. 2015.

[5] Burton, A. *Newton's method and fractais*, Technical manuscript, Whitman College, 2009.