Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

A função φ de Euler e a expansão periódica de frações na base b

Marcionei Rech

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2015

A função φ de Euler e a expansão periódica de frações na base b

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Marcionei Rech e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 27 de março de 2015.

Prof. Dr. Martinho da Costa Araújo
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Martinho da Costa Araujo
Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos
Prof. Dr. Daniel Carlos Leite

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

R296f Rech, Marcionei.
A função Phi de Euler e a expansão periódica de frações na base b / Marcionei Rech. -- 2015
43 f. ; 30 cm.

Orientador: Martinho da Costa Araujo.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2015.
Inclui bibliografia.

1. Dízimas periódicas. 2. Bases numéricas. 3. Números racionais. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Dissertação de Mestrado defendida em 27 de Março de 2015 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Martinho da Costa Araujo

Prof. Dr. José Ivan da Silva Ramos

Prof. Dr. Daniel Carlos Leite

Dedico este trabalho à minha esposa Ivete, minha eterna companheira, que sempre me apoiou em todas as minhas empreitadas e a minha filha Gabriela.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela proteção e sabedoria.

Agradeço também à minha família em especial à minha esposa Ivete pelo amor, apoio e pela paciência.

Aos meus professores em especial ao meu orientador, Professor Martinho, pelas contribuições e pela experiência partilhada no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus colegas de curso pelos inesquecíveis momentos que passamos juntos, fazendo com que nos tornássemos mais do que colegas de curso mas sim amigos e companheiros de jornada.

À direção e coordenação do IFMT-Campus Sorriso pelos apoio e tolerância durante esses dois anos.

Muito obrigado a todos.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo explorar o comportamento da expansão das frações ordinárias, o comprimento da parte não periódica, bem como do período se ela for uma dízima infinita, com o auxilio da função φ de Euler. Além das expansões decimais que são as mais comuns, exploraremos as expansões em uma base b qualquer, ou seja, em outro sistema de numeração, buscando assim, generalizar alguns resultados que são facilmente observados no sistema de numeração decimal. Retomaremos alguns conceitos sobre: sistemas de numeração, números primos, a função φ de Euler e o Teorema de Euler, importantes para fundamentarmos nossas discussões. Apresentaremos alguns exemplos de expansões de frações ordinárias para diferentes bases numéricas gerando dízimas finitas, como também, dízimas periódicas simples e compostas.

Palavras chave: Dízimas periódicas, bases numéricas, números racionais.

Abstract

This study aims to explore the behavior of the expansion of common fractions, the length of the non-periodic part and the period if it is an infinite tithe, with the aid of φ Euler function. Besides the decimal expansions, which are the most common, we will explore the expansions using any base b, or another numbering system, in order to generalize some results that are easily observed in the decimal number system. We shall resume some concepts: number systems, prime numbers, the function φ of Euler and Euler's Theorem, which are important to base our discussions. We will show some examples of expansion of common fractions for different numerical bases resulting in finite decimals, and simple and composite periodic decimals.

Keywords: Periodic decimal, numerical bases, rational numbers.

Sumário

Introdução

"Então disse Deus: $\pi, i, 0, e, 1$ e fez-se o universo".
(Leonhard Euler)

Geralmente, no início do primeiro ano do ensino médio, são apresentados aos alunos os diferentes conjuntos numéricos, dentre eles o conjunto dos números racionais que é definido como todos os números que podem ser escritos na forma de uma fração entre números inteiros e com denominador diferente de zero. Porém, ao efetuar a expansão dessas frações os alunos se deparam com dízimas finitas e dízimas infinitas e periódicas, nestas últimas, os números que se repetem são chamados de período da expansão. Identificar o comportamento de uma expansão parece ser uma tarefa fácil quando tratamos de expansões relativamente pequenas, basta uma simples divisão, mas em alguns casos o comprimento da parte finita ou até mesmo do período, caso ela seja infinita e periódica, não cabe em uma simples calculadora e os alunos ficam com a impressão que ele não existe. Além das expansões decimais queremos neste trabalho expandí-las para uma base numérica qualquer e generalizar alguns resultados que são facilmente visíveis no sistema de numeração decimal, construindo assim alguns critérios para que possamos discernir como se comporta uma expansão em um sistema de numeração qualquer.

O sistema de numeração universalmente mais utilizado pelas pessoas é o sistema de numeração decimal posicional, ele é uma variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônicos 1700 anos antes de Cristo e foi desenvolvido na China e na Índia. Segundo Hefez (2006): "A introdução do sistema decimal na Europa foi tardia por causa dos preconceitos da Idade Média.[...] O sistema começou a ter maior difusão na Europa a partir de 1202, quando foi publicado o livro Liber Abacci, de Fibonacci".

Atualmente existem outros sistemas de numeração em uso, como os sistemas binários ou em base 2, que são aplicados na computação pois são utilizados apenas os valores 0 e 1 (para facilitar a representação de tensões). A quantidade de algarismos disponíveis num sistema de numeração designa-se por base, podemos dizer que o sistema de numeração posicional de base b, tem b dígitos diferentes, pois o algarismo que representa a base é sempre formado pelo dígito que representa o primeiro número (1) mais o dígito marcador do vazio (0), e uma característica comum entre esses sistemas de numeração é o fato de serem todos sistemas posicionais, ou seja, o valor atribuído a um símbolo depende da posição em que ele se encontra.

Os estudos sobre expansões nos remontam para o início do século 18, vários matemáticos observaram regularidades nas expansões decimais de frações comuns, dentre eles destacamos: John Wallis [1657, 1685], Samuel Cunn [1714] e John Marsh [1742] . Algumas regras foram criadas, mas foi só a partir de 1760 em diante, que as primeiras tentativas para estabelecer uma teoria coerente de frações decimais periódicas apareceram. Johann Heinrich Lambert [1728, 1777] foi o primeiro a dedicar dois ensaios para o tema.

> "A observação que ele fez foi a seguinte: Se uma fração tem um denominador que é igual a 2 ou 5, ou um produto de fatores desses dois números, então, a fração decimal é finita; se não, a fração decimal é infinita e periódica. Em um artigo publicado na Acta Helvetica, Lambert mostrou que, dado uma fração decimal periódica $0,a_1a_2a_3\cdots a_n$ (onde $a_1a_2\cdots a_n$ é um dígito decimal), a fração gerada por esse período é $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{99\cdots 9}$, ou o equivalente $\dfrac{a_1a_2\cdots a_n}{10^n-1}$ "(Bullynck (2009), pg 138).

Para fazer o caminho inverso, isto é, dada uma fração ordinária $\dfrac{p}{q}$ para encontrar o período decimal, o seu comprimento, e os dígitos, sem proceder a uma divisão completa, é um problema mais difícil. Em 1758, Lambert deu apenas algumas regras engenhosas de ouro para atacar este problema inverso. Por várias razões, o comportamento das frações decimais fascinou Lambert e seus contemporâneos, eles chamavam o comportamento infinito e periódico de "lokale Ordnun" (ordem local), já o comportamento infinito e não periódico (como por exemplo, a sequência numérica de $\sqrt{2}$) de "geset-zliche Ordnung" ou "zufällige Ordnung" (ordem regida por uma lei global ou por acaso). Em 1801 Johann Carl Friedrich Gauss provou um teorema importante relacionado com a determinação do comprimento de dízimas periódicas no sistema de numeração decimal.

Atualmente muitas propriedades que se aplicam a expansões decimais já estão estabelecidas e demonstradas, a informática se tornou uma importante ferramenta na busca de padrões na teoria dos números. Nesse contexto, surgiu a curiosidade de verificar o comportamento da expansão de uma fração ordinária em uma base b qualquer, o comprimento da parte não periódica, o período se a expansão for infinita, bem como a sua composição e verificar se as mesmas propriedades percebidas no sistema de numeração decimal também valem em outras bases numéricas.

A função φ de Euler será uma ferramenta indispensável nos processos de obtenção das expansões, ela simplificará os cálculos e nos permitirá obter conclusões imediatas sobre o comportamento das dízimas finitas ou infinitas e periódicas.

Na primeira seção deste trabalho faremos uma revisão de alguns conteúdos de aritmética como: divisibilidade, sistemas de numeração, o teorema fundamental da aritmética, a aritmética dos restos chamada de congruência e os Teoremas de Euler e o Pequeno Teorema de Fermat. Na segunda seção abordaremos as expansões de frações ordinárias analisando o seu comportamento, se geram dízimas finita, dízimas periódicas simples ou compostas.

Capítulo 1

Bases Matemáticas

Neste capítulo faremos uma breve fundamentação teórica, enunciando resultados da área da aritmética que serão úteis no capítulo seguinte. Para esta fundamentação utilizamos os seguintes autores: Rosa e Silva (2007), Dolisi (1973), Domingues (2003), Santos (2011), Hefez (2013), Lima et al. (2006), Lima (1987).

1.1 Divisibilidade

Definiremos neste trabalho como números naturais o seguinte conjunto: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$.

Dados dois números naturais a e b, dizemos que a divide b e denotamos por $a \mid b$, quando existir um $c \in \mathbb{N}$ tal que $b = ac$. Neste caso dizemos que a é um divisor ou um fator de b, ou ainda que b é múltiplo de a.

1.1.1 Propriedades

Algumas propriedades seguem diretamente da definição:

i) Se $a \mid b$ e $b \mid c$ então $a \mid c$.

ii) Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid b \pm c$.

iii) Se $a \mid b$ então $a \mid bz$, para todo $z \in \mathbb{Z}$.

iv) Se $a \mid b$ e $a \mid c$ então $a \mid (bz + ct)$ para quaisquer $z, t \in \mathbb{Z}$.

Destacamos aqui também outras propriedades importantes que seguem:

Propriedade 1 *: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ com a e c diferentes de 0, se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $a.c \mid b.d$.*

Demonstração: Se $a \mid b$ e $c \mid d$, existe $x, y \in \mathbb{Z}$, $b = x.a$ e $d = y.c$. Portanto $bd = (xy).(ac)$, logo $a.c \mid b.d$.

Propriedade 2 *: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$ com $a \neq 0$, tais que $a \mid (b \pm c)$, então $a \mid b \Leftrightarrow a \mid c$.*

Demonstração: Suponha que $a \mid (b + c)$. Logo existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $b + c = xa$. Agora, se $a \mid b$, temos que existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ya$. Juntando as duas igualdades acima, temos

$$ya + c = xa$$

logo $c = (x - y)a$, então $a \mid c$. A implicação contrária é análoga. Por outro lado se $a \mid (b - c)$ e $a \mid b$, pelo caso anterior, temos que $a \mid -c$, o que implica que $a \mid c$.

Propriedade 3 *: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$, tais que $a \mid b$, então $|b| \geq |a|$.*

Demonstração: De fato, se $a \mid b$, existe $x \in \mathbb{Z}$, tal que $b = x.a$. Tomando módulos temos que $|b| = |x.a| = |x| \,.\, |a|$. Como $b \neq o$, temos que $x \neq 0$, logo $1 \leq |x|$ e consequentemente $|a| \leq |a|\,|x| = |b|$.

1.2 Sistemas de numeração

Um numeral é um símbolo ou grupo de símbolos que representa um número em um determinado instante da evolução do homem. Tem-se que, numa determinada escrita ou época, os numerais diferenciaram-se dos números do mesmo modo que as palavras se diferenciaram das coisas a que se referem. Os símbolos “11”, “onze” e “XI” são numerais diferentes, representativos do mesmo número, apenas escrito em idiomas e épocas diferentes.

Um sistema de numeração, é um sistema em que um conjunto de números são representados por numerais de uma forma consistente. Pode ser visto como o contexto que permite ao numeral "11" ser interpretado como o numeral romano para dois, o numeral binário para três ou o numeral decimal para onze.

O sistema de numeração mais utilizado no mundo hoje é o sistema decimal posicional, onde todo número inteiro é representado por uma sequência formada pelos algarismos:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,$$

acrescidos do símbolo 0 (zero), que representa a ausência do algarismo. Este sistema é chamado posicional, pois cada algarismo além de seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa, nesse caso sempre em potências de dez, esse peso varia da seguinte forma:

O algarismo da extrema direita tem peso um; o seguinte, sempre da direita para a esquerda, tem peso dez; o seguinte tem peso cem; o seguinte mil e assim por diante. Por exemplo, o número 13047, na base 10 é a representação de

$$1.10^4 + 3.10^3 + 0.10^2 + 4.10 + 7$$

Além do sistema de numeração posicional decimal existem outros sistemas em diferentes bases constantes. Estamos tão habituados com o sistema decimal, que nos parece estranho pensar que qualquer outra base poderia representar (algumas vezes com vantagem) os números. As bases 11 ou 12, por exemplo, teriam sido talvez escolhas melhores, a primeira pelo fato de 11 ser primo e a segunda pelo fato de que o número 12 possui mais divisores que o 10. Em sistemas posicionais, é possível representar qualquer número, por maior que seja, com uma quantidade finita de símbolos. Além disso, os números representados por meio deles se prestam a realização das quatro operações aritméticas básicas. Todos os sistemas de numeração posicional baseiam-se no seguinte teorema:

Teorema 1 : *Sejam dados os números inteiros a e b, com $a > 0$ e $b > 0$. Existem números inteiros $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, tais que $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n$.*

Prova: Vamos demonstrar o teorema por indução completa sobre a. Se $0 < a < b$, basta tomar $n = 0$ e $r_0 = a$. A unicidade da escrita é clara nesse caso.

Suponhamos o resultado válido para todo natural menor do que a, onde $a \geq b$. Vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r, únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < b$$

Como $0 < q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números inteiros $n' \geq 0$ e $r_1, \cdots, r_{n'+1}b^{n'}$, com $r_{n'+1} \neq 0$, univocamente determinados, tais que

$$q = r_1 + r_2 b + \cdots + r_{n'+1} b^{n'}.$$

Levando em conta as igualdades acima destacadas, temos que

$$a = bq + r = b(r_1 + r_2 b + \cdots + r_{n'+1} b^{n'}) + r$$

Donde o resultado segue pondo $r_0 = r$ e $n = n' + 1$.

A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa a base b. Por exemplo, quando $b = 10$, chamamos de expansão decimal, quando $b = 8$, chamamos de expansão octal, quando $b = 16$, chamamos de expansão hexadecimal.

1.2.1 Mudança de Base

O algoritmo a seguir determina a expansão de um número qualquer a em uma base b qualquer. Trata-se de aplicar, sucessivamente a divisão euclidiana, como segue:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0, \quad r_0 < b, \\ q_0 &= bq_1 + r_1, \quad r_1 < b, \\ q_1 &= bq_2 + r_2, \quad r_2 < b, \end{aligned}$$

e assim por diante. como $a > q_0 > q_1 > \cdots$, deveremos, em um certo ponto, ter $q_{n-1} < b$, e portanto, de

$$q_{n-1} = bq_n + r_n$$

decorre que $q_n = 0$, o que implica, $0 = q_n = q_{n+1} = q_{n+2} = \cdots$, e, portanto $0 = r_{n+1} = r_{n+2} = \cdots$.

Temos, então, que

$$a = r_0 + r_1 b + \cdots + r_n b^n.$$

Exemplo 1 : *Vamos representar o número* 235 *na base* 3.

Por divisões euclidianas sucessivas, temos:

$$\begin{aligned}
235 &= 78.3+1,\\
78 &= 26.3+0,\\
26 &= 8.3+2,\\
8 &= 2.3+2,
\end{aligned}$$

Portanto $235 = 78.3+1 = (26.3+0).3+1 = (8.3+2).3^2+0.3+1 = (2.3+2).3^3+2.3^2+0.3+1 = 2.3^4+2.3^3+2.3^2+0.3+1$ e, consequentemente, $(235)_{10} = (22201)_3$.

Exemplo 2 : *Vamos representar o número* 10949 *na base* 16.

Por divisões euclidianas sucessivas, temos:

$$\begin{aligned}
10949 &= 684.16+5,\\
684 &= 42.16+12,\\
42 &= 2.16+10.
\end{aligned}$$

Portanto $10949 = 684.16+5 = (42.16+12).16+5 = 42.16^2+12.16+5 = (2.16+10).16^2+12.16+5 = 2.16^3+10.16^2+12.16+5$, como a base 16 é maior do que 10, devemos acrescentar novos símbolos, que denotaremos por A=10, B=11, C=12, D=13, E=14 e F=15. Logo:

$(10949)_{10} = (1AC5)_{16}$.

1.3 Teorema fundamental da aritmética

No início desta seção faremos um pequeno estudo sobre os números primos, um dos conceitos mais importantes de toda a matemática.

Um número natural maior do que 1 que só possui como divisores 1 e ele mesmo é chamado de número primo. Euclides foi o primeiro a demonstrar que os números primos são infinitos. Sua demonstração é considerada, por muitos, a mais elegante da matemática.

Teorema 2 : *Existem infinitos números primos.*

Prova (Euclides): Suponhamos que exista somente um número finito r de números primos, a saber, $p_1, p_2, \cdots, p_r$. Consideramos agora o número $N = p_1p_2 \cdots p_r + 1$. Se N for primo temos uma contradição, já que supomos existir somente r números primos e N evidentemente não é um deles. Se N não for primo, então existe um número primo p que divide N, Mas esse número primo p não pode ser nenhum dos números p_i com $(i = 1, \cdots, r)$, pois se fosse, dividiria o produto $p_1p_2 \cdots p_r$ e portanto dividiria o número 1, o que é um absurdo. Em ambos os casos, conclui-se a existência de mais números primos do que a quantidade suposta inicialmente. Logo, a suposição de que existe um número finito de números primos é falsa.

Se um número maior do que 1 não é primo, então ele é composto, ou seja, existirá um divisor natural n_1 de n tal que $1 < n_1 < n$. Logo existirá um número natural n_2 tal que $n = n_1n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$.

Por exemplo 2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17 são números primos enquanto que 4, 6, 8, 10 e 12 são compostos. Da definição de números primos decorrem os seguinte fatos:

Dados dois números primos p e q e um número inteiro a, temos que:

I) Se $p \mid q$, então $p = q$.

Demonstração: De fato, como $p \mid q$ e sendo q primo, temos que $p = 1$ ou $p = q$. Sendo p primo, tem-se que $p > 1$, logo $p = q$.

II) Se $p \nmid a$, então $mdc(p, a) = 1$.

Demonstração: De fato, se $(p, a) = d$, temos que $d \mid p$ ou $d \mid a$. Portanto $d = p$ ou $d = 1$.Mas $d \neq p$, pois $p \nmid a$ e, consequentemente, $d = 1$.

Outro importante resultado envolvendo os primos, já conhecido desde o tempo de Euclides, apesar de não constar explicitamente em Os Elementos, é o de que os números primos são os blocos de construção dos números naturais, isto é, somente usando números primos como "tijolos" e a operação de multiplicação como a "massa" que os une, podemos construir todos os números naturais, exceto a unidade. De fato, esse resultado é tão importante, que recebeu o nome de Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema 3 : *(Fundamental da Aritmética). Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (exceto pela ordem dos fatores) como um produto de* *números primos.*

Prova: Se n for primo, ele é sua própria decomposição, a qual, portanto, existe. Suponhamos n composto. Tomemos $p_1 > 1$ o menor dos divisores naturais de n. Temos que p_1 é primo, pois caso contrário, existiria p natural $(1 < p < p_1)$, com $p \mid p_1$ e portanto $p \mid n$, contradizendo a escolha de p_1. Assim podemos escrever $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo, novamente a prova está completa. Se n_1 é composto, tomemos p_2 como o menor fator de n_1. Pelo mesmo argumento, temos que p_2 é primo e portanto $n = p_1 p_2 n_2$.

Se repetirmos esse procedimento obteremos uma sequência decrescente de números naturais $n_1, n_2, \cdots, n_r$, como todos eles são inteiros maiores do que 1, esse processo deve terminar. Nesse momento teremos uma sequência $p_1, p_2, \cdots, p_k$ de números primos não necessariamente distintos, logo n terá a forma

$$n = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.P_3^{\alpha_3} \cdots P_k^{\alpha_k}.$$

que é a decomposição de n em fatores primos.

A unicidade é mostrada usando indução sobre n. Para $n = 2$, a afirmação é verdadeira trivialmente. Assumimos que ela se verifica para todos os naturais maiores do que 1 e menores do que n. Vamos provar que ela também é válida para n.

Se n é primo, não há nada a provar. Suponhamos n composto e que n possua duas decomposições, ou seja,

$$n = p_1 p_2 \cdots p_s = q_1 q_2 \cdots q_r.$$

onde os $p_i (i = 1, \cdots, s)$ e os $q_j (j = 1, \cdots, r)$ são números primos. Temos que provar que $s = r$ e que cada p_i é igual a algum q_j . Podemos escrever:

$$p_2 \cdots p_s = \frac{q_1 q_2 \cdots q_r}{p_1}$$

Da igualdade anterior, temos que p_1 divide algum dos fatores q_j (que são todos primos). Sem perda de generalidade, podemos supor que $p_1 \mid q_1$. Como ambos são primos, isto implica que $p_1 = q_1$. Logo:

$$1 < p_2 \cdots p_s = q_2 \cdots q_r < n$$

e aqui a hipótese de indução nos diz que as duas decomposições são idênticas, isto é, $s = r$ e, exceto pela ordem, as decomposições $p_1 p_2 \cdots p_s$ e $q_1 q_2 \cdots q_r$ são iguais.

1.4 A função φ de Euler

A função φ de Euler, também conhecida como função Totiente, é definida, para um número natural n, como sendo a quantidade de números menores ou igual a n, co-primos com n. Matematicamente, definiremos:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$\varphi(n) = \sharp\{k \in \mathbb{N}/1 \leq k \leq n \;\text{ e }\; mdc(k,n) = 1\}$$

Na tabela a seguir são dados os valores de $\varphi(n)$ dos primeiros números naturais:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10

Exemplo 3 : *Vamos calcular o valor de* $\varphi(12)$, $\varphi(28)$ *e* $\varphi(19)$

Veja que os números x, tal que $mdc(x, 12) = 1$, são $\{1, 5, 7, 11\}$. Logo $\varphi(12) = 4$. Os números x, tal que $mdc(x, 28) = 1$, são $\{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 27\}$. Logo $\varphi(28) = 12$. E por fim os números x, tal que $mdc(x, 19) = 1$, são $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$. Logo $\varphi(19) = 18$.

Este processo de enumerar os elementos do conjuntos e depois contá-los é fácil apenas se n for relativamente pequeno. Essa tarefa torna-se difícil, por exemplo, se calcularmos $\varphi(2592)$.

Vamos fazer algumas observações e enunciar alguns teoremas que facilitarão nosso trabalho.

A primeira observação é que se p for primo positivo, segue direto da definição de números primos e da função φ que $\varphi(p) = p - 1$, pois todos os inteiros positivos menores que p são primos relativos com ele, como acabamos de observar ao calcular $\varphi(19)$.

Outra observação importante nessa discussão é se o número é uma potência de um número primo.

Teorema 4 : *Seja p um primo e α um inteiro positivo, temos que* $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$

Prova: Pela definição da função φ sabemos que $\varphi(p^\alpha)$ é o número de inteiros positivos não superior a p^α e relativamente primos com p^α. Mas os únicos números não primos com p^α e menores do que ou iguais a p^α são aqueles divisíveis por p. Como os múltiplos de p

não superiores a p^α são, em número, $p^{\alpha-1}$, o resultado segue.

Através desse teorema podemos calcular facilmente o valor de $\varphi(1024)$, já que $\varphi(1024) = \varphi(2^{10}) = 2^{10} - 2^9 = 512$. Para calcularmos o valor de $\varphi(n)$ de um número inteiro positivo qualquer, vamos nos apoiar no teorema que diz que esta função é multiplicativa, ou seja, $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n)$. Este fato não é evidente e precisa ser demonstrado, para isso vamos enunciar antes a seguinte proposição.

Proposição 5 : *Dados os inteiros positivos k, a e b, com $mdc(a, b) = 1$, então os restos das divisões dos inteiros $k, k+b, k+2b, \cdots, k+(a-1)b$ por a, são todos diferentes.*

Prova: Seja a desigualdade $0 \leq s, t < a$. Suponhamos, por absurdo, que $k + sb$ e $k + tb$ deixem o mesmo resto na divisão por a. Assim $k + sb = aq + r$ e $k + tb = aq' + r$. Então, a divide o produto $(s - t)b$, pois

$$(k + sb) - (k + tb) = (aq + r) - (aq' + r) \Longrightarrow (s - t)b = a(q - q') \Longrightarrow q - q' = \frac{(s - t)b}{a}$$

Mas por hipótese, $mdc(a, b) = 1$, logo, a divide $(s-t)$, o que é impossível porque foi posto que $0 \leq s, t < a$. Concluímos então que os restos são todos diferentes.

Teorema 6 : *A função φ de Euler é multiplicativa para m, n inteiros positivos com $mdc(m, n) = 1$, ou seja, $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n)$.*

Prova: Vamos dispor os números de 1 até mn da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & m+1 & 2m+1 & ... & (n-1)m+1 \\
2 & m+2 & 2m+2 & ... & (n-1)m+2 \\
3 & m+3 & 2m+3 & ... & (n-1)m+3 \\
 & & & \vdots & \\
\mathrm{m} & 2m & 3m & ... & nm
\end{array}$$

Se na linha r, onde estão os termos $r, m + r, 2m + r, \cdots, (m - 1)n + r$, tivemos $mdc(m, r) = d > 1$, então nenhum termo nesta lista será primo com mn, uma vez que estes termos, sendo da forma $km + r, 0 \leq k \leq n - 1$, são todos divisíveis por d que é o máximo divisor comum de m e r. Logo, para encontrarmos os inteiros desta tabela que são primos com mn, devemos olhar na linha r somente se $(m, r) = 1$. Portanto temos

$\varphi(m)$ linhas onde todos os elementos são primos com m. Devemos, pois, procurar em cada uma dessas $\phi(m)$ linhas, quantos elementos são primos com n, uma vez que todos são primos com m. Como $(m, n) = 1$, os elementos $r, m+r, 2m+r, \cdots, (n-1)m+r$, pela proposição 5, deixam restos diferentes quando divididos por n. Logo, cada uma dessas linhas tem $phi(n)$ elementos primos com n, e portanto como eles são primos com m, eles são primos com mn. Isso nos garante que $\varphi(m.n) = \varphi(m).\varphi(n)$.

Assim temos a seguinte generalização:

Se $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, p_3^{\alpha_3}, \cdots, p_r^{\alpha_r}$ são primos entre si, dois a dois, então:
$\varphi(p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.p_3^{\alpha_3}...p_r^{\alpha_r}) = \varphi(p_1^{\alpha_1}).\varphi(p_2^{\alpha_2}).\varphi(p_3^{\alpha_3})...\varphi(p_r^{\alpha_r})$.

Agora sabendo que a função φ de Euler é multiplicativa estamos em condições de calcular $\varphi(n)$ para um inteiro positivo relativamente grande. Veja:

Exemplo 4 *: Vamos calcular* $\varphi(10584)$*:*

Primeiro vamos fazer a decomposição do número 10584 em fatores primos: $n = 10584 = 2^3.3^3.7^2$. Como $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, então:

$\varphi(2^3) = 2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$
$\varphi(3^3) = 3^3 - 3^2 - 27 - 9 = 18$
$\varphi(7^2) = 7^2 - 7 = 42$

Então, concluímos que: $\varphi(10584) = \varphi(2^3.3^3.7^2) = 4.18.42 = 3024$. Ou seja o número 10584 possui 3024 números menores que ele mesmo e que são coprimos com ele.

1.5 Congruências lineares

Nesta seção, apresentaremos uma parte importante da aritmética apresentada por Gauss no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, de 1801. Trata-se de uma aritmética realizada com os restos da divisão Euclidiana por um números fixado.

Seja m um número natural. Dizemos que os números inteiros a e b são *congruentes* módulo m se, e somente se, a e b possuem o mesmo resto na divisão deles por m. Denotaremos isso por:

$$a \equiv b \bmod m$$

Por exemplo, $51 \equiv 18 \bmod 11$, já que os restos da divisão de 51 e 18 por 11 são igual a 7.

1.5.1 Propriedades

Sejam a, b, c, d e m inteiros com $m > 0$. Temos:

(i) $a \equiv a \bmod m$

(ii) se $a \equiv b \bmod m$, então $b \equiv a \bmod m$

(iii) se $a \equiv b \bmod m$ e $b \equiv c \bmod m$, então $a \equiv c \bmod m$

(iv) $a \equiv b \bmod m$, se e somente se, $m \mid b - a$

(v) se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a + c \equiv b + d \bmod m$

(vi) se $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a.c \equiv b.d \bmod m$

As propriedades (i), (ii) e (iii), seguem diretamente da definição, já (v) e (vi), das propriedades da divisibilidade.

Vamos demonstrar a propriedade (iv):
Seja $a = mq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < m$ e $b = mq_2 + r_2$, com $0 \leq r_2 < m$, as divisões euclidianas de a e b por m, respectivamente. Logo,

$$b - a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1).$$

Portanto se $a \equiv b \bmod m$ temos que, $r_1 = r_2$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $b - a = m(q_2 - q_1)$ e vem que $m \mid (b - a)$.

Se $m \mid (b - a)$ então $m \mid [b - a - m(q_2 - 1)] = r_2 - r_1$. Mas $|r_2 - r_1| < m$ nos diz que $r_1 - r_2 = 0 \Leftrightarrow r_1 = r_2 \Leftrightarrow a \equiv b \bmod m$.

Uma ultima propriedade das congruências que queremos relacionar, talvez a mais utilizada em nosso trabalho, deriva diretamente da propriedade (vi) acima citada, se $a \equiv b$

mod m, aplicando a propriedade (vi) $k-1$ vezes, temos:

$$\text{k congruências} = \begin{cases} a \equiv b \mod m \\ a \equiv b \mod m \\ \vdots \\ a \equiv b \mod m \end{cases} \Longrightarrow a^k \equiv b^k \text{mod m}$$

Vamos enunciá-la então:

(vi) Seja $a \equiv b$ mod m e k um inteiro positivo, então $a^k \equiv b^k$ mod m.

Vejamos um exemplo de aplicação:

Exemplo 5 : *Determine o resto da divisão de* 37^{88} *por 4.*

Veja que $37 \equiv 1$ mod 4. Assim, usando a propriedade (vi), temos que:
$37^{88} \equiv 1^{88}$ mod 4, como $1^{88} = 1$, segue que
$37^{88} \equiv 1$ mod 4, e portanto o resto é dessa divisão é 1.

1.6 O pequeno teorema de Fermat

O pequeno teorema Fermat de é uma das pérolas da aritmética e foi demonstrado por Pierre de Fermat no século XVII.

Teorema 7 : *Dado um primo p e $a \in \mathbb{Z}$ de tal maneira que $p \nmid a$. Então:*

$$a^{p-1} \equiv 1 \ mod \ p$$

Prova: Dados p e a com $p \nmid a$, consideremos os conjuntos:

$$\{1, 2, 3, ..., (p-1)\} \text{ e } \{a, 2a, 3a, ..., (p-1)a\}.$$

Temos que $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a \not\equiv 0$ mod p.
Se $i, j \in \{1, 2, 3, ..., (p-1)\}$ e $i.a \equiv j.a$ mod p, concluímos que $i \equiv j$ mod p, já que $mdc(a, p) = 1$. Então, temos $i = j$, pois $0 \leq |i - j| < p$. Isto significa que os números $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ são incongruentes entre si módulo p. Logo os inteiros $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ são congruentes, em alguma ordem, aos inteiros $1, 2, 3, ..., (p-1)$. Podemos concluir então que:

$$(p-1)! = 1.2.3...(p-1) \equiv a.2a.3a...(p-1)a, \text{ ou seja,}$$
$$(p-1)! \equiv a^{p-1}.(p-1)! \bmod p.$$

Como $mdc(p,(p-1)!) = 1$, cancelamos $(p-1)!$, e obtemos

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

1.7 O teorema de Euler

Nesta seção mostraremos o Teorema de Euler que é uma generalização do pequeno teorema de Fermat.

Teorema 8 : *Sejam $m, a \in \mathbb{Z}$ com $m > 1$ e $mdc(a,m) = 1$. Então:*

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \; mod \; m$$

Prova: Seja $r_1, r_2, ..., r_{\varphi(m)}$ um sistema reduzido de resíduos módulo m, ou seja, são todos os restos não nulos possíveis na divisão por m , tal que $mdc(r_i, m) = 1$. Logo, $a.r_1, a.r_2, ..., a.r_{\varphi(m)}$, também formam um sistema reduzido de resíduos módulo m. Portanto,

$$ar_1.ar_2...ar_{\varphi(m)} = a^{\varphi(m)}.r_1.r_2...r_{\varphi(m)} \equiv r_1.r_2...r_{\varphi(m)} \bmod m.$$

Como $(r_1.r_2...r_{\varphi(m)}, m) = 1$, segue que:

$$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \bmod m$$

Capítulo 2

Expansões de frações ordinárias

2.1 Dízimas finitas e infinitas

Usualmente, no ensino fundamental em nossas escolas, um número racional é apresentado como um número real que tem uma representação decimal finita ou infinita periódica. Se a representação for infinita e periódica, a repetição pode ocorrer imediatamente após a vírgula ou após algumas casas decimais. Vejamos alguns exemplos de expações decimais:

$$
\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} = 0,5 & \frac{1}{8} = 0,125 & \frac{1}{14} = 0,0\overline{714285} \\
\frac{1}{3} = 0,\overline{3} & \frac{1}{9} = 0,\overline{1} & \frac{1}{15} = 0,0\overline{6} \\
\frac{1}{4} = 0,25 & \frac{1}{10} = 0,1 & \frac{1}{16} = 0,0625 \\
\frac{1}{5} = 0,2 & \frac{1}{11} = 0,\overline{09} & \frac{1}{17} = 0,\overline{0588235294117647} \\
\frac{1}{6} = 0,1\overline{6} & \frac{1}{12} = 0,08\overline{3} & \frac{1}{19} = 0,\overline{052631578947368421} \\
\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} & \frac{1}{13} = 0,\overline{076923} & \frac{1}{4096} = 0,000244140625
\end{array}
$$

Note que na fração $\frac{1}{2}$ temos uma representação finita, já na fração $\frac{1}{3}$ a representação é infinita, porém os números começam a se repetir imediatamente após a vírgula, diferentemente da fração $\frac{1}{6}$ em que os números começam a se repetir uma casa após a vírgula. Aos números que se repetem damos o nome de período da dízima periódica, para facilitar a notação podemos escrever o período apenas uma vez, com um traço na parte superior, isso indica que aquele conjunto de números se repete infinitas vezes. Exemplo:

$\frac{1}{9} = 0,111... = 0,\bar{1}$

$\frac{1}{72} = 0,0138888... = 0,013\overline{8}$

$\frac{1}{22} = 0,0454545... = 0,0\overline{45}$

As dízimas periódicas são classificadas como:

Dízimas periódicas simples: são as dízimas em que o período aparece imediatamente após a vírgula.

Dízimas periódicas compostas: são as dízimas em que aparecem outros valores entre a vírgula e o período.

2.2 Comprimento da parte finita

Quando nos deparamos com uma fração ordinária irredutível $\frac{p}{q}$ podemos nos perguntar: Quando a expansão decimal é finita ou infinita? Qual é o comprimento da dízima?

Nesta seção e nas próximas queremos responder a essas perguntas e isso faremos considerando a expansão em um sistema de numeração posicional em uma base b qualquer, para isso optamos pelos seguintes resultados:

Teorema 9 *: Seja* $\frac{p}{q}, q \neq 0$ *uma fração ordinária irredutível, possui representação finita no sistema posicional de base* b *se, e somente se, o denominador* q *não possui fatores primos que não sejam fatores de* b.

Prova 1: A fração $\frac{p}{q}, q \neq 0$ possui representação finita no sistema posicional de base b se, e somente se, existir um expoente $\alpha \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{b^{\alpha}.p}{q}$ é um número natural. Logo $q \mid b^{\alpha}.p$. Como $(p, q) = 1$, então $q \mid b^{\alpha}$, portanto q não possui fatores primos que não sejam fatores de b^{α}.

Reciprocamente, se q não possui fatores primos que não sejam fatores de b, então $q \mid b^{\alpha}$ para um expoente α suficientemente grande, portanto $q \mid b^{\alpha}.p$ e $\dfrac{b^{\alpha}.p}{q} \in \mathbb{N}$ então $\dfrac{p}{q}$ possui representação finita no sistema posicional de base b.

Prova 2: De fato, como $\dfrac{p}{q} = p.\dfrac{1}{q}$, vamos considerar a fração $\dfrac{1}{q}$, sendo sua expansão com k dígitos, ou seja, $\dfrac{1}{q} = 0,d_1d_2d_3\cdots d_k, \quad 0 \leq d_k < b$. Logo temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{q} &= \frac{d_1}{b} + \frac{d_2}{b^2} + \frac{d_3}{b^3} + \cdots + \frac{d_k}{b^k}\\ &= \frac{1}{b^k}\big(d_1.b^{k-1} + d_2.b^{k-2} + d_3.b^{k-3} + \cdots + d_k\big)\end{aligned}$$

Agora, tomamos $M = d_1.b^{k-1} + d_2.b^{k-2} + d_3.b^{k-3} + \cdots + d_k$, logo temos que:

$$\frac{1}{q} = \frac{M}{b^k} \quad \Leftrightarrow \quad Mq = b^k \quad \Rightarrow \quad q \mid b^k.$$

Logo q não tem fatores primos que não sejam fatores de b.

Reciprocamente, se q não tem fatores primos que não sejam fatores de b, seja $b = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.P_3^{\alpha_3}\cdots P_k^{\alpha_k}$.

Então vale que:

$$q = (P_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{\beta_3}\cdots(P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}, com\ \beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_k \geq 0.$$

Seja $w = \text{máx}(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_k)$, segue que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{q}.b^w &= ((P_1^{\alpha_1})^w.(P_2^{\alpha_2})^w\cdots(P_k^{\alpha_k})^w).\frac{1}{(P_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{\beta_3}\cdots(P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}} =\\ &= (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3}\cdots(P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}\end{aligned}$$

Seja $M = (P_1^{\alpha_1})^{w-\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{w-\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{w-\beta_3}\cdots(P_k^{\alpha_k})^{w-\beta_k}$, então:
$\dfrac{b^w}{q} = M$ o que significa que $M < b^w$.
E assim podemos escrever:
$M = a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_2.b^2 + a_1.b + a_0 = a_{w-1}a_{w-2}\cdots a_2a_1a_0$

Logo temos que se:

$$
\begin{aligned}
\frac{b^w}{q} = M \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} &= \frac{M}{b^w} \\
&= \frac{a_{w-1}.b^{w-1} + a_{w-2}.b^{w-2} + \cdots + a_2.b^2 + a_1.b + a_0}{b^w} \\
&= \frac{a_{w-1}}{b} + \frac{a_{w-2}}{b^2} + \cdots + \frac{a_2}{b^{k-2}} + \frac{a_1}{b^{k-1}} + \frac{a_0}{b^k} \\
&= 0, \underbrace{a_{w-1}a_{w-2}\cdots a_2a_1a_0}_{w \text{ dígitos}}
\end{aligned}
$$

C.Q.D.

Como podemos perceber pelo Teorema 9, para que a dízima seja finita em um sistema de numeração posicional de base b, basta que os fatores primos do denominador sejam também fatores primos de b. No caso específico do sistema de numeração decimal, para que a dízima seja finita, é preciso que o denominador não tenha fatores primos diferentes de 2 ou 5 e, ainda, a quantidade de dígitos é o maior entre os expoente dos fatores 2 e 5. Vejamos alguns exemplos no sistema de numeração decimal:

Exemplo 6 *: Vamos determinar o comprimento das expansões decimais de* $\frac{1}{50}, \frac{1}{8}$ *e* $\frac{7}{80}$.

Como $50 = 2.5^2$, a expansão terá duas casas depois da vírgula, pois o $\textit{máx}(1,2) = 2$. Temos: $\frac{1}{50} = \frac{2}{100} = \frac{0}{10} + \frac{2}{10^2} = 0,02$.

Já que $8 = 2^3$, a expansão terá três casas depois da vírgula, pois o maior expoente é 3. Temos:

$$\frac{1}{8} = \frac{125}{1000} = \frac{100+20+5}{1000} = \frac{100}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{1}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 0,125.$$

E por fim como $80 = 2^4.5$, a expansão terá 4 casas depois da vírgula, pois o $\textit{máx}(4,1) = 4$.

Temos:

$$\frac{7}{80} = \frac{875}{10.000} = \frac{800+70+5}{10.000} = \frac{800}{10.000} + \frac{70}{10.000} + \frac{5}{10.000} = \frac{0}{10} + \frac{8}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{5}{10^4} = 0,0875.$$

Exemplo 7 *: Determinar a expansão de* $\frac{5}{18}$ *na base 6.*

Observe que $18 = 2.3^2$ como o 18 não tem fatores primos diferentes dos fatores do 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx(1,2) = 2.$, veja:

$$\frac{5}{18} = \frac{10}{36} = \frac{6+4}{36} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6^2} = (0,14)_6.$$

Exemplo 8 : *Determinar a expansão de* $\frac{7}{48}$ *na base 6.*

Observe que $48 = 2^4.3$. Como o 48 não tem fatores primos diferentes dos fatores do 6 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx(4,1) = 4$, vejam:

$$\frac{7}{48} = \frac{189}{1296} = \frac{5.36+1.6+3}{1296} = \frac{5.6^2}{6^4} + \frac{1.6}{6^4} + \frac{3}{6^4} == \frac{0}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{3}{6^4} = (0,0513)_6$$

Exemplo 9 : *Determinar a expansão de* $\frac{3}{98}$ *na base 14.*

Observe que $98 = 2.7^2$. Como o 98 não tem fatores primos diferentes dos fatores do 14 que é a base, então a expansão será finita e o comprimento será o $máx(1,2) = 2$, vejamos:

$$\frac{3}{98} = \frac{6}{196} = \frac{0}{14} + \frac{6}{14^2} = (0,06)_{14}$$

2.3 Comprimento do período da dízima periódica

Pelo teorema 9 podemos verificar quando uma fração ordinária possui expansão finita e determinamos o comprimento desta expansão em uma base b qualquer. Nesta seção analisaremos as dízimas periódicas simples bem como o comprimento de seus períodos também em uma base b qualquer. Para isso, demonstraremos os seguintes resultados:

Teorema 10 : *O comprimento do período da expansão de* $\frac{1}{q}$, *com* $q \neq 0$, *no sistema de numeração posicional de base* b, *é de no máximo* $q-1$.

Prova: Seja $q = P_1^{\alpha_1}.P_2^{\alpha_2}.P_3^{\alpha_3} \cdots P_k^{\alpha_k}$. Temos que:

(a) Se q não tem fatores primos que não sejam fatores de b, então a expansão é finita.

(b) Se q tem fatores primos diferentes dos fatores de b, então $q \neq b^k$ para algum k natural e $k \geq 0$.

Seja $t \in \mathbb{N}$, tal que $b^t < q < b^{t+1}$, pelo algoritmo da divisão:

$$\begin{aligned}
b^{t+1} &= d_1.q + r_1 \\
b.r_1 &= d_2.q + r_2 \\
b.r_2 &= d_3.q + r_3 \\
b.r_3 &= d_4.q + r_2 \\
&\vdots \\
b.r_{k-1} &= d_k.q + r_k \\
b.r_k &= d_{k+1}.q + r_{k+1}
\end{aligned}$$

Note que:

$d_k.q = b.r_{k-1} - r_k \leq r_{k-1}$, e como $r_{k-1} < q$, temos que: $d_k.q \leq b.r_{k-1} < b.q$

Agora, tomando:

$br_k = d_{k+1}.q + r_{k+1}$, dividindo ambos os membros por bq, temos:

$$\frac{r_k}{q} = \frac{d_{k+1}}{b} + \frac{r_{k+1}}{bq} \ (1).$$

Veja que para $k = 1$, temos:

$$\frac{r_1}{q} = \frac{d_2}{b} + \frac{r_2}{bq}$$

Dividindo agora $b^{t+1} = d_1.q + r_1$ por $(b^{t+1}.q)$, obtemos:

$$\frac{1}{q} = \frac{b_1}{b^{t+1}} + \frac{r_1}{b^{t+1}.q} \ (2)$$

Substituindo agora (1) em (2), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{d_1}{b^{t+1}} + \frac{1}{b^{t+1}}.\left(\frac{d_2}{b} + \frac{r_2}{b.q}\right) \\
&= \frac{d_1}{b^{t+1}} + \frac{d_2}{b^{t+2}} + \frac{r_2}{b^{t+2}.q} \\
&= \frac{d_1}{b^{t+1}} + \frac{d_2}{b^{t+2}} + \frac{1}{b^{t+2}}.\left(\frac{d_3}{b} + \frac{r_3}{bq}\right) \\
&= \frac{d_1}{b^{t+1}} + \frac{d_2}{b^{t+2}} + \frac{d_3}{b^{t+3}} + \frac{r_3}{b^{t+3}.q} \\
&\vdots \\
&= \frac{d_1}{b^{t+1}} + \frac{d_2}{b^{t+2}} + \frac{d_3}{b^{t+3}} + \cdots + \frac{d_k}{b^{t+k}} + \frac{r_k}{b^{t+k}.q} + \cdots
\end{aligned}$$

Observe que $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_k$ são os dígitos da expansão de $\dfrac{1}{q}$ na base b.

Se $r_k = 0$, para algum k, então a expansão será finita, contrariando a hipótese de que $q \neq b^k$.

Agora, se $r_k \neq 0$, para todo k, então cada resto poderá assumir valores $1, 2, 3, 4, \cdots, (q-1)$, ou seja, a expansão se repete com um período menor ou igual a $q - 1$.

Teorema 11 *: Sendo* $\dfrac{p}{q}, q \neq 0$ *uma fração ordinária irredutível, a expansão de* $\dfrac{p}{q}$ *na base* b *é uma dízima periódica simples se* $mdc(b, q) = 1$ *e terá período com* r *dígitos, sendo* r *a menor solução inteira positiva da equação* $b^r \equiv 1 \mod q$.

Prova: Se $b^r \equiv 1 \mod q \quad \Rightarrow \quad q \mid b^r - 1 \quad \Rightarrow \quad b^r - 1 = qk$, com $K \in \mathbb{Z}$.

Mas $K < b^r$, daí K na base b é:

$K = d_{r-1}.b^{r-1} + d_{r-2}.b^{r-2} + \cdots + d_2 b^2 + d_1.b^1 + d_0$

$K = (d_{r-1} d_{r-2} \cdots d_2 d_1 d_0)_b$ onde $0 \leq d_k < b$ para cada $k = 0, 1, 2, 3, ..., r - 1$

Logo:

$$
\begin{aligned}
b^r - 1 = q.K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b^r - 1}{K} = q \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q} \quad &= \quad \frac{K}{b^r - 1} \\
&= \quad \frac{k}{b^r}.\frac{1}{1 - b^{-r}} \\
&= \quad \frac{k}{b^r}.\left(1 + \frac{1}{b^r} + \frac{1}{b^{2r}} + \frac{1}{b^{3r}} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

Pois a soma desta Progressão geométrica infinita $\left(1 + \dfrac{1}{b^r} + \dfrac{1}{b^{2r}} + \dfrac{1}{b^{3r}} + \cdots\right)$ é:

$S = \dfrac{a_1}{1 - q} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{b^r}} = \dfrac{1}{1 - b^{-r}}$

Então:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \left(\frac{d_{r-1}.b^{r-1}+d_{r-2}.b^{r-2}+\cdots+d_2b^2+d_1.b^1+d_0}{b^r}\right).\left(1+\frac{1}{b^r}+\frac{1}{b^{2r}}+\frac{1}{b^{3r}}+\cdots\right)\\
&= \left(\frac{d_{r-1}.b^{r-1}+d_{r-2}.b^{r-2}+\cdots+d_2b^2+d_1.b^1+d_0}{b^r}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}.b^{r-1}+d_{r-2}.b^{r-2}+\cdots+d_2b^2+d_1.b^1+d_0}{b^{2r}}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}.b^{r-1}+d_{r-2}.b^{r-2}+\cdots+d_2b^2+d_1.b^1+d_0}{b^{3r}}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}.b^{r-1}+d_{r-2}.b^{r-2}+\cdots+d_2b^2+d_1.b^1+d_0}{b^{4r}}\right)+\cdots\\
&= \left(\frac{d_{r-1}}{b}+\frac{d_{r-2}}{b^2}+\cdots+\frac{d_2}{b^{r-2}}+\frac{d_1}{b^{r-1}}+\frac{d_0}{b^r}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}}{b^{1+r}}+\frac{d_{r-2}}{b^{2+r}}+\cdots+\frac{d_2}{b^{2r-2}}+\frac{d_1}{b^{2r-1}}+\frac{d_0}{b^{2r}}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}}{b^{1+2r}}+\frac{d_{r-2}}{b^{2+2r}}+\cdots+\frac{d_2}{b^{3r-2}}+\frac{d_1}{b^{3r-1}}+\frac{d_0}{b^{3r}}\right)+\\
&+ \left(\frac{d_{r-1}}{b^{1+3r}}+\frac{d_{r-2}}{b^{2+3r}}+\cdots+\frac{d_2}{b^{4r-2}}+\frac{d_1}{b^{4r-1}}+\frac{d_0}{b^{4r}}\right)+\cdots\\
&= \left(\frac{d_{r-1}}{b}+\frac{d_{r-2}}{b^2}+\cdots+\frac{d_2}{b^{r-2}}+\frac{d_1}{b^{r-1}}+\frac{d_0}{b^r}\right)+\\
&+ \left(\frac{0}{b}+\frac{0}{b^2}+\cdots+\frac{0}{b^{r-2}}+\frac{0}{b^{r-1}}+\frac{0}{b^r}+\frac{d_{r-1}}{b^{1+r}}+\frac{d_{r-2}}{b^{2+r}}+\cdots+\frac{d_2}{b^{2r-2}}+\frac{d_1}{b^{2r-1}}+\frac{d_0}{b^{2r}}\right)+\\
&+ \left(\frac{0}{b}+\frac{0}{b^2}+\cdots+\frac{0}{b^{r-2}}+\frac{0}{b^{r-1}}+\frac{0}{b^r}+\frac{0}{b^{1+r}}+\frac{0}{b^{2+r}}+\cdots\right.
\end{aligned}
$$

$$\cdots \; + \frac{0}{b^{2r-2}} + \frac{0}{b^{2r-1}} + \frac{0}{b^{2r}} + \frac{d_{r-1}}{b^{1+2r}} + \frac{d_{r-2}}{b^{2+2r}} + \cdots + \frac{d_2}{b^{3r-2}} + \frac{d_1}{b^{3r-1}} + \left.\frac{d_0}{b^{3r}}\right) +$$

$$+ \quad \left(\frac{0}{b} + \frac{0}{b^2} + \cdots + \frac{0}{b^{r-2}} + \frac{0}{b^{r-1}} + \frac{0}{b^r} + \frac{0}{b^{1+r}} + \frac{0}{b^{2+r}} + \cdots\right.$$

$$\cdots \; + \frac{0}{b^{2r-2}} + \frac{0}{b^{2r-1}} + \frac{0}{b^{2r}} + \frac{0}{b^{1+2r}} + \frac{0}{b^{2+2r}} + \cdots + \frac{0}{b^{3r-2}} + \frac{0}{b^{3r-1}} + \frac{0}{b^{3r}} + \frac{d_{r-1}}{b^{1+3r}} +$$

$$+ \quad \frac{d_{r-2}}{b^{2+3r}} + \cdots + \frac{d_2}{b^{4r-2}} + \frac{d_1}{b^{4r-1}} + \left.\frac{d_0}{b^{4r}}\right) + \cdots$$

$$= \quad 0,d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_2d_1d_0 + 0,\underbrace{00\cdots0}_{r\ \text{zeros}}d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_2d_1d_0 +$$

$$+ \quad 0,\underbrace{00\cdots0}_{2r\ \text{zeros}}d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_2d_1d_0 + 0,\underbrace{00\cdots0}_{3r\ \text{zeros}}d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_2d_1d_0 + \cdots$$

$$= \quad (0,\underbrace{\overline{d_{r-1}d_{r-2}\cdots d_2d_1d_0}}_{\textit{Período com } r \textit{ dígitos}})_b$$

Logo o período de $\dfrac{1}{q}$ tem no máximo r dígitos.

Agora, supomos que o período de $\dfrac{1}{q}$ é s, isto é:

$\dfrac{1}{q} = 0,\overline{l_{s-1}l_{s-2}\cdots l_2l_1l_0}$ onde l_i para $i = 0, 1, 2, \cdots, s-1$ são inteiros com $0 \leq l_i < b$.

Por definição de período de uma expansão , sabemos que $s \leq r$.

Mas:

$$\frac{1}{q} = 0,\overline{l_{s-1}l_{s-2}\cdots l_2l_1l_0} = \frac{l_{s-1}l_{s-2}\cdots l_2l_1l_0}{b^s}.\left(1 + \frac{1}{b^s} + \frac{1}{b^{2s}} + \frac{1}{b^{3s}} + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{l_{s-1}l_{s-2}\cdots l_2l_1l_0}{b^s}\left(\frac{1}{1-b^{-s}}\right) \quad \Rightarrow \quad q \mid b^s - 1$$

Ou seja, $b^s \equiv 1 \bmod q$ e como $b^s \equiv 1 \bmod q$, segue que $r \leq s$. Portanto $r = s$.

C.Q.D.

Observação 1:

O número inteiro r é chamado de ordem de b módulo q, e escrevemos como $r = ord_q^b$.

Podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 12 *: Se $mdc(b,q) = 1$. então o período da expansão de $\dfrac{1}{q}$ na base b terá r dígitos onde $r = ord_q^b$.*

Prova: A demonstração deste teorema segue da observação 1 e do teorema 11.

Vamos agora enunciar um teorema que nos ajudará a encontrar a ord_q^b, através dele podemos diminuir significativamente os possíveis valores de r, reduzindo-o a um conjunto menor.

Teorema 13 *: Se $r = ord_q^b$ e $b^h \equiv 1$ mod q, então $r \mid h$.*

Prova: Como $h \geq r$. Pelo algorítmo da divisão Euclidiana, existem $Q, R \in \mathbb{Z}$, $0 \leq R < r$, tal que: $h = Qr + R$.
Desta forma temos:

$$b^r \equiv 1 \text{ mod } q \Longrightarrow$$
$$(b^r)^Q \equiv 1 \text{ mod } q \Longrightarrow$$
$$(b^r)^Q.b^R = b^h \equiv b^R \text{ mod } q$$

Acabamos de mostrar que $b^R \equiv 1 \text{ mod } q$. Sendo $R < r$, R deve ser zero pois r é, por definição, o menor valor o qual $b^r \equiv 1 \text{ mod } q$. Portanto $R = 0$ e $h = qr$, o que prova que $r \mid h$.

Vamos agora aplicar os teoremas acima enunciados para realizar algumas expansões:

Exemplo 10 *: Determinar o período da expansão decimal de $\dfrac{1}{33}$ e sua expansão decimal:*

Como o $mdc(10,33) = 1$ e $\varphi(33) = \varphi(3).\varphi(11) = 2.10 = 20$, o período $r = ord_{33}^{10} \mid \varphi(33)$, portanto $r \in \{1,2,4,5,10,20\}$. Fazendo a verificação:
Note que $10^2 \equiv 1$ *mod* 33, logo $r = 2$, isso implica que:
$10^2 - 1 = 33.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui dois dígitos. Logo $k = 03$. Assim temos que:

$$\frac{1}{33} = \frac{k}{10^2 - 1} = \frac{03}{10^2 - 1} = \frac{03}{10^2}.\frac{1}{(1 - 10^{-2})} = \frac{03}{10^2}.\frac{1}{(1 + 10^2 + 10^4 + 10^6 + \cdots)}$$

Desta forma segue que:
$\dfrac{1}{33} = 0,03 + 0,0003 + 0,000003 + 0,00000003 + \cdots$

$= 0,0303030303... = 0,\overline{03}.$

Veremos agora alguns exemplos de aplicação do *teorema 11*, onde encontraremos o período da expansão de algumas frações ordinárias irredutíveis $\frac{p}{q}$ para uma base numérica diferente da decimal.

Exemplo 11 : *Determinar o período da expansão de* $\frac{1}{33}$ *na base 4, bem como a sua expansão:*

Como o $mdc(4,33) = 1$ e $\varphi(33) = \varphi(3).\varphi(11) = 2.10 = 20$, $r = ord_{33}^{4} \mid \varphi(33)$, portanto $r \in \{1,2,4,5,10,20\}$. Fazendo a verificação:

Temos que:

$4^1 \equiv 4 \ mod \ 33$

$4^2 \equiv 16 \ mod \ 33$

$4^4 \equiv 25 \ mod \ 33$

$4^5 \equiv 1 \ mod \ 33$, logo $r = 5$, isso implica que o período da expansão terá 05 dígitos. Mas como $4^5 \equiv 1 \ mod \ 33$, isso implica que:

$4^5 - 1 = 33.k$, com $k \in \mathbb{N}$, Logo $k = 31$.

Vamos escrever 31 na base 4:

$31 = 7.4 + 3 = (1.4 + 3).4 + 3 = 1.4^2 + 3.4 + 3 \quad \Rightarrow (31)_{10} = (133)_4$, como temos cinco dígitos na dízima periódica, podemos escrever $31 = 0.4^4 + 0.4^3 + 1.4^2 + 3.4 + 3$ daí:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{33} &= \frac{k}{4^5 - 1} = \frac{0.4^4 + 0.4^3 + 1.4^2 + 3.4 + 3}{4^5 - 1} \\
&= \frac{0.4^4 + 0.4^3 + 1.4^2 + 3.4 + 3}{4^5} . \frac{1}{(1 - 4^{-5})} \\
&= \frac{0.4^4 + 0.4^3 + 1.4^2 + 3.4 + 3}{4^5} . \frac{1}{(1 + 4^5 + 4^{10} + 4^{15} + \cdots)} \\
&= \left(\frac{0}{4} + \frac{0}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^5} \right) . \frac{1}{(1 + 4^5 + 4^{10} + 4^{15} + \cdots)} \\
&= \frac{0}{4} + \frac{0}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{3}{4^5} + \frac{0}{4^6} + \frac{0}{4^7} + \frac{1}{4^8} + \frac{3}{4^9} + \frac{3}{4^{10}} + \frac{3}{4^{11}} + \cdots \\
&= (0,001330013300133\cdots)_4 = (0,\overline{00133})_4
\end{aligned}$$

Exemplo 12 *: Determine o período da expansão de* $\frac{1}{25}$ *na base 6.*

Como o $mdc(6,25) = 1$ e $\varphi(25) = \varphi(5^2) = 5^2 - 5 = 20$, $r = ord_{25}^{6} \mid \varphi(25)$, portanto $r \in \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$. Fazendo a verificação:

Temos que:

$6^1 \equiv 6 \ mod \ 25$

$6^2 \equiv 11 \ mod \ 25$

$6^4 \equiv 11^2 \equiv 121 \equiv 21 \ mod \ 25$

$6^5 \equiv 21.6 \equiv 126 \equiv 1 \ mod \ 25$

logo $r = 5$, isso implica que o período da expansão terá 05 dígitos. Mas como $6^5 \equiv 1 \ mod$ 25, temos que:

$6^5 - 1 = 25.k$, com $k \in \mathbb{N}$, Logo $k = 311$.

Vamos escrever 311 na base 6:

$$\begin{aligned} 311 &= 51.6 + 5 = (8.6 + 3).6 + 5 = 8.6^2 + 3.6 + 5 = (1.6 + 2).6^2 + 3.6 + 5 \\ &= 1.6^3 + 2.6^2 + 3.6 + 5 \quad \Rightarrow (311)_{10} = (1235)_6 \end{aligned}$$

Como temos cinco dígitos na dízima periódica, logo podemos escrever:

$k = 311 = 0.6^4 + 1.6^3 + 2.6^2 + 3.6 + 5$, logo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} &= \frac{k}{6^5 - 1} = \frac{0.6^4 + 1.6^3 + 2.6^2 + 3.6 + 5}{6^5 - 1} \\ &= \frac{0.6^4 + 1.6^3 + 2.6^2 + 3.6 + 5}{6^5} . \frac{1}{(1 - 6^{-5})} \\ &= \frac{0.6^4 + 1.6^3 + 2.6^2 + 3.6 + 5}{6^5} . \frac{1}{(1 + 6^5 + 6^{10} + 6^{15} + \cdots)} \\ &= \left(\frac{0}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \frac{5}{6^5} \right) . \frac{1}{(1 + 6^5 + 6^{10} + 6^{15} + \cdots)} \\ &= \frac{0}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{2}{6^3} + \frac{3}{6^4} + \frac{5}{6^5} + \frac{0}{6^6} + \frac{1}{6^7} + \frac{2}{6^8} + \frac{3}{6^9} + \frac{5}{6^{10}} + \frac{5}{6^{11}} + \frac{5}{6^{12}} + \cdots \\ &= (0, \overline{01235})_6 \end{aligned}$$

Exemplo 13 *: Determine o período da expansão de* $\frac{2}{7}$ *na base 4.*

Como o $mdc(7,4) = 1$ e $\varphi(7) = 7-1 = 6$, $r = ord_7^4 \mid \varphi(7)$, portanto $r \in \{1,2,3,6\}$. Fazendo a verificação:

$4^1 \equiv 4 \ mod\ 7$

$4^2 \equiv 2 \ mod\ 7$

$4^3 \equiv 2.4 \equiv 8 \equiv 1 \ mod\ 7$

Logo $r = 3$, isso implica que o período da expansão terá 03 dígitos. Mas como $4^3 \equiv 1$ $mod\ 7$, temos que:

$7 \mid 4^3 - 1 \quad \Rightarrow \quad 4^3 - 1 = 7.k$, com $k \in \mathbb{N}$, Logo $k = 9$. Então:
$\frac{2}{7} = \frac{2k}{4^3-1} = \frac{2.9}{4^3-1} = \frac{18}{4^3-1}$. Vamos escrever 18 na base 4.
$18 = 4.4+2 = (1.4+0).4+2 = 1.4^2+0.4+2 \quad \Rightarrow (18)_{10} = (102)_4$, logo podemos escrever $2k = 18 = 1.4^2+0.4+2$, então vale que:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{7} &= \frac{2k}{4^3-1} = \frac{1.4^2+0.4+2}{4^3-1} = \frac{1.4^2+0.4+2}{4^3}.\frac{1}{(1-4^{-3})} \\
&= \frac{1.4^2+0.4+2}{4^3}.\frac{1}{(1+4^3+4^6+4^9+\cdots)} \\
&= \left(\frac{1}{4}+\frac{0}{4^2}+\frac{2}{4^3}\right).\frac{1}{(1+4^3+4^6+4^9+\cdots)} \\
&= \frac{1}{4}+\frac{0}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{0}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\frac{1}{4^7}+\frac{0}{4^8}+\frac{2}{4^9}+\cdots \\
&= (0,102102102102\cdots)_4 = (0,\overline{102})_4
\end{aligned}$$

Observação 2:

Note que reciprocamente:
$(0,\overline{102})_4 = \frac{1}{4}+\frac{0}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{0}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\cdots =$

$$= 1.\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{4^7}+\cdots\right)+0.\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{4^8}+\cdots\right)+2.\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{4^9}+\cdots\right) =$$

$$= 1.\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{64}}\right)+2\left(\frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{64}}\right) = \left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{64}}{\frac{63}{64}}\right) = \frac{18}{63} = \frac{2}{7}$$

Exemplo 14 : *Determine o período da expansão de* $\dfrac{5}{168}$ *na base 11.*

Como o $mdc(168,11) = 1$ e $\varphi(168) = \varphi(2^3.3.7) = \varphi(2^3).\varphi(3).\varphi(7) = (2^3 - 2^2).2.6 = 48$, $r = ord_{168}^{11} \mid \varphi(168)$, portanto $r \in \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$.

Fazendo a verificação:

$11^1 \equiv 11 \ mod\ 168$

$11^2 \equiv 121 \ mod\ 168$

$11^3 \equiv 155 \ mod\ 168$

$11^3.11^3 = 11^6 \equiv 155.155 \equiv 24025 \equiv 1 \ mod\ 168$

Logo $r = 6$, isso implica que o período da expansão terá 06 dígitos. Mas como $11^6 \equiv 1$ mod 168, temos que:

$168 \mid 11^6 - 1 \quad \Rightarrow \quad 11^6 - 1 = 168.k$, com $k \in \mathbb{N}$, Logo $k = 10545$.

Então:

$\dfrac{5}{168} = \dfrac{5k}{11^6-1} = \dfrac{5.10545}{11^6-1} = \dfrac{52725}{11^6-1}$.

Vamos escrever 52725 na base 11.

$$\begin{aligned}
52725 &= 4793.11 + 2 \\
&= (435.11 + 8)11 + 2 \\
&= 435.11^2 + 8.11 + 2 \\
&= (39.11 + 6).11^2 + 8.11 + 2 \\
&= 39.11^3 + 6.11^2 + 8.11 + 2 \\
&= (3.11 + 6).11^3 + 6.11^2 + 8.11 + 2 \\
&= 3.11^4 + 6.11^3 + 6.11^2 + 8.11 + 2
\end{aligned}$$

Mas como o período $r = 6$, então podemos escrever $5k = (52725)_{10} = (036682)_{11} = 0.11^5 + 3.11^4 + 6.11^3 + 6.11^2 + 8.11 + 2$.

Dado que:

$11^6 - 1 = 168.k \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{168} = \dfrac{k}{11^6-1}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{168} &= \frac{5k}{11^6-1} = \frac{0.11^5+3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6-1} \\
&= \frac{0.11^5+3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6}.\frac{1}{(1-11^{-6})} \\
&= \frac{0.11^5+3.11^4+6.11^3+6.11^2+8.11+2}{11^6}.\frac{1}{(1+11^6+11^{12}+11^{18}+\cdots)} \\
&= \left(\frac{0}{11}+\frac{3}{11^2}+\frac{6}{11^3}+\frac{6}{11^4}+\frac{8}{11^5}+\frac{2}{11^6}\right).\frac{1}{(1+11^6+11^{12}+11^{18}+\cdots)} \\
&= \frac{0}{11}+\frac{3}{11^2}+\frac{6}{11^3}+\frac{6}{11^4}+\frac{8}{11^5}+\frac{2}{11^6}+\frac{0}{11^7}+\frac{3}{11^8}+\frac{6}{11^9}+\frac{6}{11^{10}}+\frac{8}{11^{11}}+\cdots \\
&= (0,\overline{036682})_{11}
\end{aligned}
$$

2.4 Generalização das expansões

Vimos nas seções anteriores como realizar a expansão de uma fração ordinária no caso de esta gerar uma dízima finita ou uma dízima periódica simples. Dada uma fração ordinária $\frac{p}{q}$, se q tem fatores primos diferentes dos fatores da base pela qual se deseja a expansão, e também fatores iguais ao da base então teremos uma dízima periódica composta. O teorema a seguir generaliza como será o comportamento dessa expansão.

Teorema 14 *: Seja* $\frac{p}{q}, q \neq 0$ *uma fração ordinária irredutível, e uma base* $b = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_r^{\alpha_r}$ *com* P_i *primos e os inteiros* $\alpha_i \geq 0$ *e* $q = m_0.(P_1^{\alpha_1})^{\beta_1}.(P_2^{\alpha_2})^{\beta_2}.(P_3^{\alpha_3})^{\beta_3} \cdots (P_k^{\alpha_k})^{\beta_k}$*, com* $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_k\} \in \mathbb{N}$*, sendo* m_0 *um inteiro positivo tal que mdc*$(m_0, q) = 1$*, a expansão de* $\frac{p}{q}$ *na base* b *será uma dízima periódica composta com período de* r *dígitos, sendo* r *a menor solução inteira da equação* $b^r \equiv 1$ *mod* m_0 *e anteperíodo de* w *dígitos, onde* w*=máx*$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_k\}$*.*

Prova: A demonstração da primeira parte deste teorema segue do *teorema 11*, já a segunda parte segue do *teorema 9*.

Exemplo 15 *: Determine o comprimento da parte não periódica, o período, bem como a expansão decimal de* $\dfrac{9}{2200}$*:*

Vamos calcular o comprimento da parte não periódica da expansão:

$\dfrac{9}{2200} = \dfrac{3^2}{2^3.5^2.11}$, como os fatores primos da base 10 são o 2 e o 5, então o comprimento será: $máx\{3,2\} = 3$. Por outro lado,

$$\frac{9}{2200} = \frac{3^2.5}{2^3.5^3.11} = \frac{3^2.5}{10^3.11} = \frac{45}{10^3.11} = \frac{4.11+1}{10^3.11} = \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{1}{11}.$$

Vamos agora descobrir o período da expansão. Como o $mdc(10,11) = 1$ e $\phi(11) = 10$, $r = ord_{11}^{10} \mid \varphi(11)$, portanto $r \in \{1,2,5,10\}$. Fazendo a verificação:
Note que $10^2 \equiv 1 \ mod \ 11$, logo $r = 2$, ou seja, o período da expansão e 2. Temos que: $10^2 - 1 = 11.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui dois dígitos. Logo $k = 09$. Se $10^2 - 1 = 11.k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{11} = \dfrac{k}{10^2 - 1}$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{9}{2200} &= \frac{45}{10^3.11} = \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{1}{11} = \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{9}{10^2-1} \\
&= \frac{4}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\left[\frac{9}{10^2}.\left(\frac{1}{1-10^{-2}}\right)\right] \\
&= \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^5}.\left(\frac{1}{1+10^2+10^4+10^6+\cdots}\right) \\
&= \frac{4}{10^3} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^7} + \frac{9}{10^9} + \frac{9}{10^{11}} + \cdots \\
&= \frac{0}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{4}{10^3} + \frac{0}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{0}{10^6} + \frac{9}{10^7} + \frac{0}{10^8} + \cdots \\
&= 0,004090909\cdots = 0,004\overline{09}
\end{aligned}$$

Exemplo 16 *: Determine o comprimento da parte não periódica, o período bem como a expansão decimal de* $\dfrac{11}{56}$*:*

Vamos calcular o comprimento da parte não periódica da expansão:
$\dfrac{11}{56} = \dfrac{11}{2^3.7}$, como os fatores primos da base 10 são o 2 e o 5, então o comprimento será: $máx\{3,0\} = 3$. Por outro lado, temos:

$$\frac{11}{56} = \frac{11.5^3}{2^3.5^3.7} = \frac{1375}{10^3.7} = \frac{196.7+3}{10^3.7} = \frac{196}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{3}{7}.$$

Vamos agora descobrir o período da expansão decimal, como o $mdc(10,7) = 1$, o período $r = ord_7^{10}$, como $\phi(7) = 6$, assim temos que $r \mid \varphi(7)$, portanto $r \in \{1,2,3,6\}$. Fazendo a verificação:

$10^1 \equiv 10 \ mod\ 7$

$10^2 \equiv 2 \ mod\ 7$

$10^3 \equiv 6 \ mod\ 7$

$10^6 \equiv 10^3.10^3 \equiv 6.6 \equiv 1 \ mod\ 7$

Com isso concluímos que $r = 6$, ou seja, o período da expansão e 6. Mas se: $10^6 \equiv 1 mod\ 7 \quad \Rightarrow \quad 10^6 - 1 = 7.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui seis dígitos. Logo $k = 142857$. Se $10^6 - 1 = 7.k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{7} = \dfrac{k}{10^6 - 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{3}{7} = \dfrac{3k}{10^6-1}$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{11}{56} &= \frac{11.5^3}{2^3.5^3.7} = \frac{1375}{10^3.7} = \frac{196.7+3}{10^3.7} = \frac{196}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{3}{7} = \frac{196}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{3k}{10^6-1} \\
&= \frac{196}{10^3} + \frac{1}{10^3}.\frac{428571}{10^6-1} = \frac{196}{10^3} + \frac{1}{10^3}\left[\frac{428571}{10^6}.\left(\frac{1}{1-10^{-6}}\right)\right] \\
&= \frac{196}{10^3} + \frac{428571}{10^9}.\left(\frac{1}{1+10^6+10^{12}+10^{18}+\cdots}\right) \\
&= \frac{196}{10^3} + \frac{428571}{10^9} + \frac{428571}{10^{15}} + \frac{428571}{10^{21}} + \frac{428571}{10^{27}} + \cdots \\
&= \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \frac{1}{10^9} + \frac{4}{10^{10}} + \frac{2}{10^{11}} + \cdots \\
&= 0,196428571428571428571 4\cdots = 0,196\overline{428571}.
\end{aligned}$$

Exemplo 17 *: Determine o comprimento da parte não periódica, o período, bem como a expansão de* $\dfrac{5}{84}$ *na base* 6*:*

Vamos calcular o comprimento da parte não periódica da expansão:

$\frac{5}{84} = \frac{5}{2^2.3.7}$, como os fatores primos da base 6 são o 2 e o 3, então o comprimento será:

$máx\{2,1\} = 2$. Por outro lado:

$$\frac{5}{84} = \frac{5.3}{2^2.3^2.7} = \frac{15}{6^2.7} = \frac{2.7+1}{6^2.7} = \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2}.\frac{1}{7}.$$

Vamos agora descobrir o período da expansão na base 6, como o $mdc(6,7) = 1$ e $\varphi(7) = 6$, $r = ord_7^6 \mid \varphi(7)$, portanto $r \in \{1,2,3,6\}$. Fazendo a verificação:

$6^1 \equiv 6 \ mod \ 7$

$6^2 \equiv 1 \ mod \ 7$

Com isso concluímos que $r = 2$, ou seja, o período da expansão e 2. Mas se:

$6^2 \equiv 1 \ mod \ 7 \quad \Rightarrow \quad 6^2 - 1 = 7.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui dois dígitos. Logo $k = 05$.

Se $6^2 - 1 = 7.k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} = \frac{k}{6^2-1}$. Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{84} &= \frac{5}{84} = \frac{5.3}{2^2.3^2.7} = \frac{15}{6^2.7} = \frac{2.7+1}{6^2.7} = \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2}.\frac{1}{7} = \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2}.\frac{k}{6^2-1} \\
&= \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2}.\left[\frac{05}{6^2}.\left(\frac{1}{1-6^{-2}}\right)\right] \\
&= \frac{2}{6^2} + \frac{1}{6^2}.\left[\frac{05}{6^2}.\left(\frac{1}{1+6^2+6^4+6^6+\cdots}\right)\right] \\
&= \frac{0}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{0}{6^3} + \frac{5}{6^4} + \frac{0}{6^5} + \frac{5}{6^6} + \frac{0}{6^7} + \cdots \\
&= (0,02050505\cdots)_6 = (0,02\overline{05})_6
\end{aligned}$$

Observação 3:

Note que reciprocamente:

$(0,02\overline{05})_6 = \frac{0}{6} + \frac{2}{6^2} + \frac{0}{6^3} + \frac{5}{6^4} + \frac{0}{6^5} + \frac{5}{6^6} + \frac{0}{6^7} + \cdots =$

$$= \frac{2}{36} + 5.\left(\frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{6^8} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{2}{36} + 5.\left(\frac{\frac{1}{6^4}}{1 - \frac{1}{6^2}}\right) = \frac{2}{36} + 5.\left(\frac{\frac{1}{6^4}}{\frac{6^2-1}{6^2}}\right) = \frac{2}{36} + 5.\left(\frac{1}{6^4 - 6^2}\right)$$

$$= \frac{2}{36} + \frac{5}{1260} = \frac{70+5}{1260} = \frac{5}{84}$$

Exemplo 18 *: Determine o comprimento da parte não periódica, o período bem como a expansão de* $\frac{35}{3744}$ *na base* 12*:*

Vamos inicialmente calcular o comprimento da parte não periódica da expansão:
$\frac{35}{3744} = \frac{5.7}{2^5.3^2.13}$, como a base 12 decomposta em fatores primos é $2^2.3$, então:

$\frac{35}{3744} = \frac{5.7.2}{2^6.3^2.13} = \frac{570}{(2^2)^3.3^2.13}$ e o comprimento será: $máx\{3,2\} = 3$. Por outro lado:

$$\frac{35}{3744} = \frac{5.7}{2^5.3^2.13} = \frac{5.7.2.3}{2^6.3^3.13} = \frac{210}{12^3.13} = \frac{16.13+2}{12^3.13} = \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\frac{2}{13}.$$

Vamos agora descobrir o período da expansão na base 12, como o $mdc(12,13) = 1$ e $\varphi(13) = 12$, $r = ord_{13}^{12} \mid \varphi(13)$, portanto $r \in \{1,2,3,4,6,12\}$. Fazendo a verificação:

$12^1 \equiv 12 \ mod \ 13$

$12^2 \equiv 1 \ mod \ 13$

Com isso concluímos que $r = 2$, ou seja, o período da expansão é 2. Mas se:

$12^2 \equiv 1 \ mod \ 13 \quad \Rightarrow \quad 12^2 - 1 = 13.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui três dígitos. Logo:

$$k = 011. \text{ Se } 12^2 - 1 = 13.k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{13} = \frac{k}{12^2-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{13} = \frac{2k}{12^2-1}. \text{ Ou seja:}$$

$$\begin{aligned}
\frac{35}{3744} &= \frac{210}{12^3.13} = \frac{16.13+2}{12^3.13} = \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\frac{2}{13} = \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\frac{2k}{12^2-1} \\
&= \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\frac{022}{12^2-1} = \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\left[\frac{022}{12^2}.\left(\frac{1}{1-12^{-2}}\right)\right] \\
&= \frac{16}{12^3} + \frac{1}{12^3}.\left[\frac{022}{12^2}.\left(\frac{1}{1+12^2+12^4+12^6\cdots}\right)\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{12^3} + \frac{22}{12^5}.\left(\frac{1}{1+12^2+12^4+12^6\cdots}\right)$$

$$= \frac{16}{12^3} + \frac{22}{12^5} + \frac{22}{12^7} + \frac{22}{12^9} + \frac{22}{12^{11}} + \cdots$$

$$= \frac{12.1+4}{12^3} + \frac{12.1+10}{12^5} + \frac{12.1+10}{12^7} + \frac{12.1+10}{12^9} + \frac{12.1+10}{12^{11}} + \cdots$$

$$= \frac{12.1}{12^3} + \frac{4}{12^3} + \frac{12.1}{12^5} + \frac{10}{12^5} + \frac{12.1}{12^7} + \frac{10}{12^7} + \frac{12.1}{12^9} + \frac{10}{12^9} + \frac{12.1}{12^{11}} + \cdots$$

$$= \frac{0}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{4}{12^3} + \frac{1}{12^4} + \frac{10}{12^5} + \frac{1}{12^6} + \frac{10}{12^7} + \frac{1}{12^8} + \frac{10}{12^9} + \frac{1}{12^{10}} + \cdots$$

$$= (0,0141A1A1A1A\cdots)_{12} = (0,014\overline{1A})_{12}$$

Exemplo 19 *: Determine o comprimento da parte não periódica, o período bem como a expansão hexadecimal de* $\frac{398131}{5591040}$*:*

Vamos inicialmente calcular o comprimento da parte não periódica da expansão para isso devemos decompor o numerador e o denominador em fatores primos, observe que:

$\frac{398131}{5591040} = \frac{339.1109}{2^{12}.3.5.7.13}$, como a base 16 decomposta em fatores primos é 2^4, então:

$\frac{398131}{5591040} = \frac{339.1109}{(2^4)^3.3.5.7.13} = \frac{339.1109}{16^3.3.5.7.13}$ e o comprimento da parte não periódica será: $máx\{3\} = 3$.

Por outro lado,

$$\frac{398131}{5591040} = \frac{398131}{16^3.1365} = \frac{291.1365+916}{16^3.1365} = \frac{291.1365}{16^3.1365} + \frac{916}{16^3}.\frac{1}{1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{1}{1365}.$$

Vamos agora descobrir o período da expansão de $\frac{1}{1365}$ na base 16, como o $mdc(16, 1365) = 1$, o período $r = ord_{1365}^{16}$.

Para calcular essa ordem devemos encontrar o $\varphi(1365)$, Temos que:

$\varphi(1365) = \varphi(3.5.7.13)$, como o $mdc(3,5) = mdc(5,7) = mdc(7,13) = 1$, então $\varphi(1365) = \varphi(3).\varphi(5).\varphi(7).\varphi(13) = 2.4.6.12 = 576$ assim temos que $r \mid \varphi(1365)$, portanto $r \in$

$\{1,2,3,4,6,8,9,12,16,18,24,32,36,48,64,72,96,144,192,288,576\}$. Fazendo a verificação:

$16^1 \equiv 16 \ mod \ 1365$

$16^2 \equiv 256 \ mod \ 1365$

$16^3 \equiv 4096 \equiv 1 \ mod \ 1365$

Com isso concluímos que $r = 3$, ou seja, o período da expansão é 3. Mas se: $16^3 \equiv 1 \ mod \ 1365 \quad \Rightarrow \quad 16^3 - 1 = 1365.k$, com $k \in \mathbb{N}$, onde este k possui três dígitos. Logo $k = 003$. Se $16^3 - 1 = 1365.k \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{1365} = \dfrac{k}{16^3 - 1}$. Ou seja:

$$
\begin{aligned}
\frac{398131}{5591040} &= \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{1}{1365} = \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\frac{3}{16^3 - 1} \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\left[\frac{3}{16^3}.\left(\frac{1}{1 - 16^{-2}}\right)\right] \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{916}{16^3}.\left[\frac{3}{16^3}.\left(\frac{1}{1 + 16^3 + 16^6 + 16^9 + \cdots}\right)\right] \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6}.\left(\frac{1}{1 + 16^3 + 16^6 + 16^9 + \cdots}\right) \\
&= \frac{291}{16^3} + \frac{2748}{16^6} + \frac{2748}{16^9} + \frac{2748}{16^{12}} + \frac{2748}{16^{15}} + \frac{2748}{16^{18}} + \cdots
\end{aligned}
$$

Mas devemos expandir os numeradores para a base 16:

Observe que:

$291 = 18.16 + 3 = (16.1 + 2).16 + 3 = 1.16^2 + 2.16 + 3$

$2748 = 171.16 + 12 = (10.16 + 11).16 + 12 = 10.16^2 + 11.16 + 12$

Logo:

$(291)_{10} = (123)_{16}$ e

$(2748)_{10} = (ABC)_{16}$

Ou seja:

$$\begin{aligned}
\frac{398131}{5591040} &= \frac{1.16^2+2.16+3}{16^3}+\frac{10.16^2+11.16+12}{16^6}+\frac{10.16^2+11.16+12}{16^9}+\\
&+ \frac{10.16^2+11.16+12}{16^{12}}+\frac{10.16^2+11.16+12}{16^{15}}\cdots\\
&= \frac{1.16^2}{16^3}+\frac{2.16}{16^3}+\frac{3}{16^3}+\frac{10.16^2}{16^6}+\frac{11.16}{16^6}+\frac{12}{16^6}+\frac{10.16^2}{10^9}+\frac{11.16}{16^9}+\\
&+ \frac{12}{16^9}+\frac{10.16^2}{16^{12}}+\frac{11.16}{16^{12}}+\frac{12}{16^{12}}+\cdots\\
&= \frac{1}{16}+\frac{2}{16^2}+\frac{3}{16^3}+\frac{10}{16^4}+\frac{11}{16^5}+\frac{12}{16^6}+\frac{10}{10^7}+\frac{11}{16^8}+\frac{12}{16^9}+\frac{10}{16^{10}}+\\
&+ \frac{11}{16^{11}}+\frac{12}{16^{12}}+\frac{10}{16^{113}}+\cdots\\
&= (0,123ABCABCABCABC...\cdots)_{16}=(0,123\overline{ABC})_{16}
\end{aligned}$$

Podemos perceber nos exemplos mostrados acima, que o *teorema 13* é um importante aliado na busca do período das expansões. Em alguns casos a $ord_q^b < \varphi(q)$ e nesses casos o teorema nos diz que a ord_q^b é um divisor de $\varphi(q)$, em outros casos a $ord_q^b = \varphi(q)$, nesses casos dizemos que b é uma raiz primitiva módulo q.

Finalmente, se $\frac{1}{q}$ gera uma dízima periódica simples de comprimento $q-1$ então outro fato bastante interessante pode ser notado. Se k é um número inteiro positivo, tal que $1 < k < q$, então, o período da expansão de $\frac{k}{q}$ em uma base b tem exatamente os mesmos algarismos ciclicamente permutados. Observe a expansão decimal de frações cujo denominador é 7, que contém 6 dígitos.

$$\frac{1}{7}=0,\overline{142857},\quad \frac{2}{7}=0,\overline{285714},\quad \frac{3}{7}=0,\quad \overline{428571},\quad \frac{1}{7}=0,\overline{571428}$$

Eles têm os mesmos dígitos permutados ciclicamente. Devemos ter cuidado, no entanto, para lembrar que o período deve conter $q-1$ dígitos, como mencionado acima. Veja que na expansão decimal de: $\frac{1}{13}=0,\overline{076923}$ e $\frac{3}{13}=0,\overline{230769}$ temos os mesmos dígitos permutada ciclicamente em seus períodos, mas isto não vale para todos os k tal que

$1 < k < q$. Por exemplo, $\frac{5}{13} = 0,\overline{384615}$.

Teorema 15 : *Se* $\frac{1}{q}$ *é uma fração, cujo período contém* $q-1$ *dígitos, e* b *uma base numérica, tal que* $mdc(b,q) = 1$*, então o período da expansão na base* b *da fração* $\frac{k}{q}$*, em que* $1 < k < q$*, tem os mesmos algarismos ciclicamente permutados.*

Prova: De fato, uma condição necessária para o período da fração $\frac{1}{q}$ conter $q-1$ dígitos, é que cada número inteiro positivo inferior q apareça uma, e apenas uma vez, nos primeiros $q-1$ passos da divisão. Assim, k é um desses restos obtidos na divisão de 1 por q. O numerador k influi apenas para saber qual o primeiro algarismo periódico, depois que o primeiro ocorrer os demais se sucedem na mesma ordem cíclica.

C.Q.D.

Exemplo 20 : *Determinar a expansão das frações* $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ *e* $\frac{5}{7}$ *na base 12.*

Como o $mdc(7,12) = 1$ e $\varphi(7) = 6$, $r = ord_7^{12} \mid \varphi(7)$, portanto $r \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Fazendo a verificação:

Temos que:

$12^1 \equiv 5 \ mod \ 7$

$12^2 \equiv 4 \ mod \ 7$

$12^3 \equiv 6 \ mod \ 7$

$12^4 \equiv 2 \ mod \ 7$

$12^5 \equiv 3 \ mod \ 7$

$12^6 \equiv 1 \ mod \ 7$

Logo $r = 6$, isso implica que o período da expansão terá 06 dígitos.

Mas como $12^6 \equiv 1 \ mod \ 7$, temos que:

$12^6 - 1 = 7.k$, com $k \in \mathbb{N}$. Logo $k = 426569$. Mas se $12^6 - 1 = 7.k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{7} = \frac{k}{12^6 - 1}$.

Vamos escrever 426569 na base 12:

$$\begin{aligned} 426569 &= 35547.12 + 5 \\ &= (2962.12 + 3).12 + 5 \\ &= 2962.12^2 + 3.12 + 5 \\ &= (246.12 + 10).12^2 + 3.12 + 5 \\ &= 246.12^3 + 10.12^2 + 3.12 + 5 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (20.12+6).12^3+10.12^2+3.12+5\\
&= 20.12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5\\
&= (1.12+8).12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5\\
&= 1.12^5+8.12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5
\end{aligned}
$$

Então concluimos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{7} &= \frac{k}{12^6-1} = \frac{1.12^5+8.12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5}{12^6-1}\\
&= \frac{1.12^5+8.12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5}{12^6}.\frac{1}{(1-12^{-6})}\\
&= \frac{1.12^5+8.12^4+6.12^3+10.12^2+3.12+5}{12^6}.\frac{1}{(1+12^6+12^{12}+12^{18}+\cdots)}\\
&= \left(\frac{1}{12}+\frac{8}{12^2}+\frac{6}{12^3}+\frac{10}{12^4}+\frac{3}{12^5}+\frac{5}{12^6}\right).\frac{1}{(1+6^5+6^{10}+6^{15}+\cdots)}\\
&= \frac{1}{12}+\frac{8}{12^2}+\frac{6}{12^3}+\frac{10}{12^4}+\frac{3}{12^5}+\frac{5}{12^6}+\frac{1}{12^7}+\frac{8}{12^8}+\frac{6}{12^9}+\frac{10}{12^{10}}+\frac{3}{12^{11}}+\cdots\\
&= (0,\overline{186A35})_{12}
\end{aligned}
$$

Da mesma forma temos que se: $\dfrac{1}{7}=\dfrac{426569}{12^6-1} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{2}{7}=\dfrac{853138}{12^6-1}$.
Vamos escrever 853138 na base 12:

$$
\begin{aligned}
853138 &= 71094.12+10\\
&= (5924.12+6).12+10\\
&= 5924.12^2+6.12+10\\
&= (493.12+8).12^2+6.12+10\\
&= 493.12^3+8.12^2+6.12+10\\
&= (41.12+1).12^3+8.12^2+6.12+10\\
&= 41.12^4+1.12^3+8.12^2+6.12+10\\
&= (3.12+5).12^4+1.12^3+8.12^2+6.12+10
\end{aligned}
$$

$$= \quad 3.12^5 + 5.12^4 + 1.12^3 + 8.12^2 + 6.12 + 10$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{7} &= \frac{3.12^5 + 5.12^4 + 1.12^3 + 8.12^2 + 6.12 + 10}{12^6 - 1} \\
&= \frac{3.12^5 + 5.12^4 + 1.12^3 + 8.12^2 + 6.12 + 10}{12^6} . \frac{1}{(1 - 12^{-6})} \\
&= \frac{3.12^5 + 5.12^4 + 1.12^3 + 8.12^2 + 6.12 + 10}{12^6} . \frac{1}{(1 + 12^6 + 12^{12} + 12^{18} + \cdots)} \\
&= \left(\frac{3}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \frac{8}{12^4} + \frac{6}{12^5} + \frac{10}{12^6} \right) . \frac{1}{(1 + 6^5 + 6^{10} + 6^{15} + \cdots)} \\
&= \frac{3}{12} + \frac{5}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \frac{8}{12^4} + \frac{6}{12^5} + \frac{10}{12^6} + \frac{3}{12^7} + \frac{5}{12^8} + \frac{1}{12^9} + \frac{8}{12^{10}} + \frac{6}{12^{11}} + \cdots \\
&= (0, \overline{35186A})_{12}
\end{aligned}$$

Seguindo exatamente o mesmo raciocínio, se: $\dfrac{1}{7} = \dfrac{426569}{12^6 - 1} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{5}{7} = \dfrac{2132845}{12^6 - 1}$. Vamos escrever 2132845 na base 12:

$$\begin{aligned}
2132845 &= 177737.12 + 1 \\
&= (14811.12 + 5).12 + 1 \\
&= 14811.12^2 + 5.12 + 1 \\
&= (1234.12 + 3).12^2 + 5.12 + 1 \\
&= 1234.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1 \\
&= (102.12 + 10).12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1 \\
&= 102.12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1 \\
&= (8.12 + 6).12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1 \\
&= 8.12^5 + 6.12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1
\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\frac{5}{7} &= \frac{8.12^5 + 6.12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1}{12^6 - 1} \\
&= \frac{8.12^5 + 6.12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1}{12^6} . \frac{1}{(1 - 12^{-6})} \\
&= \frac{8.12^5 + 6.12^4 + 10.12^3 + 3.12^2 + 5.12 + 1}{12^6} . \frac{1}{(1 + 12^6 + 12^{12} + 12^{18} + \cdots)} \\
&= \left(\frac{8}{12} + \frac{6}{12^2} + \frac{10}{12^3} + \frac{3}{12^4} + \frac{5}{12^5} + \frac{1}{12^6} \right) . \frac{1}{(1 + 6^5 + 6^{10} + 6^{15} + \cdots)} \\
&= \frac{8}{12} + \frac{6}{12^2} + \frac{10}{12^3} + \frac{3}{12^4} + \frac{5}{12^5} + \frac{1}{12^6} + \frac{8}{12^7} + \frac{6}{12^8} + \frac{10}{12^9} + \frac{3}{12^{10}} + \frac{5}{12^{11}} + \cdots \\
&= (0, \overline{86A351})_{12}
\end{aligned}$$

Percebemos então que a expansão de $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$ *e* $\frac{5}{7}$ na base 12, resultou em $(0, \overline{186A35})_{12}$, $(0, \overline{35186A})_{12}$ e $(0, \overline{86A351})_{12}$ e que os dígitos do período são os mesmos porém aparecem em posições diferentes.

Considerações finais

Neste trabalho procuramos fazer um estudo aprofundado sobre expansão de frações ordinárias. Normalmente os alunos do ensino médio, ao estudarem os conjuntos numéricos, se deparam com o conjunto dos números racionais e naturalmente com as dízimas periódicas, percebem que esses números podem ser escritos na forma de fração entre dois inteiros com o denominador diferente de zero, porém notamos, em nossa experiência docente, que normalmente os livros didáticos abordam este assunto de forma superficial preocupando-se mais com a forma fracionária do número do que com sua expansão decimal.

O leitor deve ter percebido que através de alguns recursos da aritmética foi possível explicar de forma clara, não somente a expansão decimal das frações ordinárias, como também a expansão para uma base numérica qualquer. Alguns resultados que eram conhecidos para o sistema de numeração decimal foram generalizados.

A primeira observação é de que dada uma fração $\frac{p}{q}$, o numerador p não define se a expansão será finita ou infinita e nem o comprimento da parte finita ou do período da dízima periódica, isso depende apenas do denominador q, independente de para qual base você deseja expandi-la. A fração terá uma expansão finita se, e somente se, o denominador q não possui fatores primos diferentes dos fatores de base numérica para a qual se deseja a expansão, caso contrário, a expansão será infinita e periódica. O fato de obrigatoriamente ela ter que ser periódica pode ser explicado facilmente aos alunos através da divisão Euclidiana, ou seja, ao efetuarmos a divisão de p por q a quantidade máxima de restos que podemos obter é $q-1$, depois disso, obrigatoriamente, um deles deverá se repetir gerando assim a dízima periódica.

Se o denominador q possui fatores primos diferentes dos fatores da base em que se deseja a expansão, então teremos uma dízima periódica, com comprimento máximo $q-1$, ou um divisor deste. Nessa tarefa de determinação do comprimento do período é que entra a função φ de Euler. Se queremos expandir nossa fração $\dfrac{p}{q}$ para uma base b, chamaremos o produto dos fatores primos de q que não são fatores de b de m_0, então, o comprimento do período será exatamente a $ord^b_{m_0}$. A ordem será o próprio $\varphi(m_0)$ ou um de seus divisores, ou seja, o conjunto que deverá ser verificado fica restrito a poucos elementos, como no exemplo 19, onde possuíamos 1364 possíveis candidatos para o comprimento do período, porém, ao aplicarmos a função φ de Euler, esse conjunto ficou reduzido a 21 elementos.

Enfim, esperamos que este trabalho, tenha aprimorado a visão do assunto que o leitor previamente possuía, preenchendo algumas lacunas, mas principalmente, criando novas, estimulando a curiosidade que deve acompanhar sempre todo estudante de matemática.

Referências Bibliográficas

Bullynck, M. (2009). Decimal periods and their tables: A german research topic (1765-1801). *ScienceDirect:Historia Mathematica*, 36:137–160.

Dolisi, E. E. (1973). *Periodic Decimal Fractions*. Tese de Doutorado, Teachers College of Emporia, Emporia/Kansas State, USA.

Domingues, H. (2003). O pequeno teorema de fermat e as dízimas periódicas. *Revista do professor de matemática*, 52:8–16.

Hefez, A. (2006). *Elementos da aritmética*. SBM., Rio de Janeiro.

Hefez, A. (2013). *Aritmética*. SBM, Rio de Janeiro.

Lima, E. (1987). Voltando a falar sobre dízimas. *Revista do professor de matemática*, 10:10–15.

Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E., e Morgado, A. (2006). *A Matemática do Ensino Médio*, volume 1. SBM, Rio de Janeiro.

Rosa, A. e Silva, J. N. (2007). História de fracções. *Gazeta da Matemática*, 153:24–31.

Santos, J. (2011). *A introdução a Teoria dos Números*. SBM, Rio de Janeiro.

Apêndice: Material adicional

A tabela a seguir mostra o comprimento do período da expansão decimal das frações com denominadores primos menores que 500:

Fração	Comprimento do período	Fração	Comprimento do período
1/3	1	1/131*	130
1/7*	6	1/137	8
1/11	2	1/139	46
1/13	6	1/149*	148
1/17*	16	1/151	75
1/19*	18	1/157	78
1/23*	22	1/163	81
1/29*	28	1/167*	166
1/31	15	1/173	43
1/37	3	1/179*	178
1/41	5	1/181*	180
1/43	21	1/191	95
1/47*	46	1/193*	192
1/53	13	1/197	98
1/59*	58	1/199	99
1/61*	60	1/211	30
1/67	33	1/223*	222
1/71	35	1/227	113
1/73	8	1/229*	228
1/79	13	1/233*	232
1/83	41	1/239	7
1/89	44	1/241	30
1/97*	96	1/251	50
1/101	4	1/257*	256
1/103	34	1/263*	262
1/107	53	1/269*	268
1/109*	108	1/271	5
1/113*	112	1/277	69
1/127	42	1/281	28
1/131*	130	1/283	141

Fração	Comprimento do período	Fração	Comprimento do período
1/293	146	1/401	200
1/307	153	1/409	204
1/311	155	1/419*	418
1/313*	312	1/421	140
1/317	79	1/431	215
1/331	110	1/433*	432
1/337*	336	1/439	219
1/347	173	1/443	221
1/349	116	1/449	32
1/353	32	1/457	152
1/359	179	1/461*	460
1/367*	366	1/463	154
1/373	186	1/467	233
1/379*	378	1/479	239
1/383*	382	1/487*	486
1/389*	388	1/491*	490
1/397	99	1/499*	498

*Indica os primos p em que o comprimento do período da expansão decimal é igual a $p-1$.