Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Maria da Paz Nunes de Amorim

UMA ABORDAGEM DA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NUMA TURMA DO 9ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Juazeiro-BA
2015

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Maria da Paz Nunes de Amorim

UMA ABORDAGEM DA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NUMA TURMA DO 9ºANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Felipe Wergete Cruz

Juazeiro – BA
2015

A524a

Amorim, Maria da Paz Nunes de.

Uma Abordagem da Generalização do Teorema de Pitágoras numa turma do 9°ano do Ensino Fundamental / Maria da Paz Nunes de Amorim. – Juazeiro, 2015.

70 f.: il.; 29 cm.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal do Vale do São Francisco, Campus Juazeiro - BA, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz.

1. Teorema de Pitágoras. 2. Demonstração - generalização. I. Título. II. Cruz, Felipe Wergete. III. Universidade Federal do Vale do São Francisco.

CDD 516.22

UNIVERSIDADE FEDERAL DO VALE DO SÃO FRANCISCO

Universidade Federal do Vale do São Francisco

Mestrado profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT/UNIVASF

PROFMAT

UMA ABORDAGEM DA GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS NUMA TURMA DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Por:

Maria da Paz Nunes de Amorim

Dissertação aprovada em 25 de março de 2015.

Felipe Wergete Cruz

Prof. Dr. Felipe Wergete Cruz
Orientador - UNIVASF

Lucília Batista Dantas Pereira

Profa. Dra. Lucília Batista Dantas Pereira
Examinadora Interna - Universidade de Pernambuco - UPE

Aníbal L. S. Netto

Prof. Dr. Aníbal Livramento da Silva Netto
Examinador Externo – CENMEC - UNIVASF

Juazeiro
2015

A Deus, aos meus pais, ao meu esposo, aos meus irmãos e amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a vida, a saúde e a perseverança para chegar até aqui.

Aos meus pais que me ensinaram tudo que sei e pelo apoio em todos os momentos.

Ao meu esposo que sempre esteve ao meu lado e que me amparou nos momentos mais difíceis.

Aos meus irmãos que sempre me apoiaram e acreditaram em mim.

Aos amigos que me incentivam a realizar os meus sonhos.

Ao professor Felipe Wergete que me orientou neste trabalho.

A Escola Municipal Quinze de Julho e toda a sua equipe, em especial a professora Francilma Pinheiro que disponibilizou sua turma para aplicação do projeto.

“Porque quando estou fraco então sou forte”.

São Paulo

RESUMO

O Teorema de Pitágoras é um conteúdo bastante intrigante e importante na Matemática, sendo apresentado pela primeira vez aos alunos no 9º ano do ensino fundamental e sendo abordado também nos anos subsequentes, com diversas aplicabilidade em outros conteúdos de Matemática e Física. Dentro da perspectiva de oferecer uma aprendizagem mais significativa para o educando este trabalho traz a proposta de demonstrar, generalizar e aplicar o Teorema de Pitágoras. A princípio outros conteúdos como: áreas, proporção e semelhança de figuras planas são abordados visando relembrar algumas definições e propriedades necessárias para aplicar nossa proposta. Estes conteúdos também foram apresentados aos alunos utilizando demonstrações. E também a história do Teorema de Pitágoras, desde os povos mais antigos, por exemplo, babilônicos, egípcios e chineses, que mesmo sem demonstrar, já faziam uso do teorema. Esta última estratégia foi utilizada como recurso para despertar a curiosidade e o instinto investigativo dos estudantes. Assim, para um bom desempenho da turma, foram elaboradas atividades com material concreto, problemas matemáticos e cotidianos que pudessem incentivar e ajudar os alunos na compreensão da proposta. Como resposta à realização do trabalho, percebeu-se que os alunos foram bastante receptivos as atividades, participando das aulas, realizando o que lhe era designado e conseguindo aplicar a fórmula com melhor desempenho na atividade a posteriori. Em suma, o trabalho apresentou um resultado satisfatório, pois estimulou a aprendizagem do aluno de maneira mais participativa e efetiva e os mostrou não apenas o resultado do Teorema de Pitágoras, mas as partes mais relevantes do caminho percorrido até se chegar a esse Teorema.

Palavras - chave: Teorema de Pitágoras. Demonstrar. Generalizar. Aplicar. Aprendizagem. Educando.

ABSTRACT

The Pythagorean Theorem is a very intriguing and important content in mathematics, first being presented to the students in the 9th grade of elementary school and also being addressed in subsequent years, with diverse applicability in other contents of Mathematics and Physics. From the perspective of offering a more meaningful learning for the student, this work brings the proposal of demonstrating, generalizing and applying the Pythagorean Theorem. At first, some different subjects, such as areas, proportion and similarity of plane figures, are addressed in order to recall some definitions and necessary properties for applying our proposal. These contents were also presented to students using demonstrations. And also the history of the Pythagorean theorem, from the most ancient peoples, for example, Babylonians, Egyptians and Chinese, that even without demonstrating, already made use of the theorem. This last strategy was applied as a resource to arouse curiosity and investigative instinct from students. For good performance of the group, activities have been prepared concrete material, mathematical and everyday problems that could encourage and help students in proposal's understanding. In response to completion of the work, one has been seen students activities were quite open, attending classes, doing what was assigned to him and getting to apply the formula with better performance in the activity afterwards. In short, the work presented a satisfactory result because it stimulated learning in a more participatory and effective way student and showed to them not only the result of the Pythagorean Theorem, but the most relevant parts of the path taken to get to this theorem.

Key - words: Pythagorean Theorem. Demonstrate. Generalize. Apply. Learning. Educating.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

De acordo com a vivência em sala de aula e com base nos resultados apresentados pelos educandos nos testes nacionais e internacionais, pode-se destacar a imensa deficiência dos alunos em Matemática.

Dentro dessa realidade, e percebendo como destaca Acosta (2011, p.2) que o Teorema de Pitágoras é um "dos teoremas mais importantes da geometria, se não o mais importante", e além disso tem uma aplicação muito significativa no dia a dia e em outros conteúdos matemáticos como: o raio da circunferência circunscrita a um triângulo, a diagonal do bloco retangular, a altura do triângulo, entre outros. Daí a preocupação de que esse teorema seja, pelo menos, instrumental para os educandos.

No entanto, temos nos deparado com uma educação matemática baseada em decorar fórmulas e aplicá-las de forma mecânica, o que limita a aprendizagem de grande parte dos alunos.

Percebe-se que os estudantes apresentam dificuldades em questões básicas, já que, muitas vezes, não conseguem nem identificar o triângulo retângulo e qual o ângulo reto. Isso torna-se muito claro, por exemplo, quando fazemos uma rotação no triângulo. Como enfatiza Santos e Viana (2010, p. 8) em sua pesquisa,

> Quanto às atividades sobre o Teorema de Pitágoras, era necessário que o aluno conseguisse reconhecer um triângulo retângulo. No entanto, nas respostas às questões do questionário, vinte e nove alunos não souberam reconhecer como triângulo retângulo aquele que estivesse com os catetos não paralelos à folha em que estavam impressos.

Essas deficiências estão relacionadas à maneira com que o conteúdo é abordado, pois como destaca Bressiani (2011, p. 9),

> Conversando com colegas que trabalham em outras escolas em relação aplicação deste conteúdo, pude perceber que, assim como eu, a grande maioria dos professores faz o uso somente da apresentação da fórmula e aplicação das atividades de fixação. Apenas uma professora, entre todos os profissionais que conversei, trabalha com a demonstração da fórmula fazendo a construção do triângulo retângulo com papel quadriculado, mostrando que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Portanto, compreender a relação entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo retângulo, é um ponto ainda muito distante. Esta deficiência impossibilita a ideia de relacionar os vários conceitos que estão ligados ao Teorema.

Diante disso, esse trabalho visa apresentar um real sentido para o Teorema de Pitágoras com o intuito de demonstrar, generalizar e aplicar este Teorema. Para isso, serão usadas algumas atividades que abordam e mostram o Teorema, facilitando assim suas demonstrações e aplicações e ainda explorando a forte relação existente entre os vários conteúdos de matemática.

Além disso, as atividades visam generalizar o Teorema, fazendo com que o aluno descubra que não são apenas a área dos quadrados que satisfazem a propriedade do Teorema, mas que quaisquer três figuras semelhantes que tenha um de seus lados sobre os lados do triângulo retângulo, também têm essa relação.

No capítulo 1 são abordados as definições, propriedades e demonstrações das áreas das figuras planas como: quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, trapézio.

No capítulo 2 são apresentados conceitos de proporcionalidade; semelhança, mais especificamente semelhança de triângulos e círculos e a razão entre as áreas de duas figuras planas semelhantes.

O capítulo 3 trabalha a parte histórica do Teorema de Pitágoras, mostrando os povos que já faziam uso do teorema antes mesmo de Pitágoras; também destaca a vida de Pitágoras e da escola pitagórica.

No capítulo 4 apresenta-se o enunciado do Teorema de Pitágoras, a representação geométrica do teorema, também são realizadas 4 demonstrações distintas do teorema, além da generalização e aplicação do teorema.

No capítulo 5 tem-se a metodologia explicando como a pesquisa foi aplicado com a turma do 9º do ensino fundamental.

No capítulo 6 são expostas as tabelas que demonstram os resultados dos alunos, que participaram da pesquisa, nas atividades propostas e é feita uma discussão sobre as principais dificuldades encontradas.

Por fim, é feita as considerações finais do trabalho apresentando seus pontos positivos e negativos e sua relevância para o ensino do Teorema de Pitágoras.

1. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

Segundo Lima et al. (2006.a), *área* é a medida da porção do plano ocupada por uma figura. Para medir essa porção necessitamos comparar a sua superfície com uma outra figura tomada como unidade e o resultado dessa comparação será um número que deverá exprimir quantas vezes a figura contém a unidade de área.

Esta figura, para a qual desejamos encontrar a área, é uma porção limitada que podemos definir da seguinte maneira: se temos três pontos não colineares, então forma-se um triângulo. Nesse caso, a região triangular correspondente é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos que unem os três pontos dois a dois.

1.1 DEFINIÇÃO DE POLÍGONO

Definição 1.1: Sejam $n \geq 3$ um natural e $A_1A_2 \dots A_n$ pontos distintos do plano. Definimos $A_1A_2 \dots A_n$ como um polígono convexo se, para $1 \leq i \leq n$, a reta $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$ não contém nenhum outro ponto A_j, porém deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina. (MUNIZ NETO, 2013)

Diante da definição dada, temos que a região poligonal correspondente $A_1A_2 \dots A_n$ é a região limitada do plano, delimitada pelos segmentos $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$.

A partir dessas definições de polígono, começamos a compreender a ideia de área. Para isso adotamos como unidade de área o quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ele será chamado de *quadrado unitário*. Então, como citado anteriormente, compararemos o polígono que se quer saber a área com este quadrado de lado 1.

Deste modo, podemos estabelecer a unidade de comprimento a ser usada (cm, m, km,..) de acordo com o polígono e teremos a unidade de área $(cm^2, m^2, km^2, \dots)$ correspondente.

A princípio, assim como Lima et al (2006, a), usaremos alguns exemplos e posteriormente comprovaremos com as demonstrações. Por exemplo, se temos um retângulo cuja base mede 6cm e a altura mede 4cm, teremos 6 colunas com 4 quadradinhos, totalizando 24 quadrados. Assim, neste retângulo, cabem 24 quadradinhos de $1\,cm^2$. Desta forma, concluímos intuitivamente que este retângulo tem área igual a $24\,cm^2$.

Logo se as medidas dos lados de um retângulo são números naturais *a* e *b*, sua área *S* é o produto desses números:

$$S_R = ab \tag{1}$$

Semelhantemente, como todo quadrado é um retângulo, se temos um quadrado com a medida lado n, com $n \in \mathbb{N}$, a sua área é igual a n^2.

Percebemos que para os valores de *a* e *b* naturais temos como área o produto dos lados. Mas, e quando essas medidas não forem inteiros positivos? Será que também poderemos encontrar área através da fórmula $S = ab$?

Vamos usar um exemplo para perceber o que acontece. Seja *R* um retângulo com lados 3,2 e $\frac{5}{2}$. Então, usando o mesmo raciocínio anterior, vamos descobrir quantos quadrados unitários cabem neste retângulo.

Primeiro, iremos escrever os lados do retângulo como frações de mesmo denominador:

$$3{,}2 = \frac{32}{10} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{2} = \frac{25}{10}$$

A partir de agora iremos dividir o quadrado unitário em pedaços de tamanho $\frac{1}{10}$. Traçando por cada ponto da divisão paralelas aos lados, teremos então, o quadrado unitário dividido em $10^2 = 100$ quadradinhos.

Logo, a área de cada quadradinho é $\frac{1}{100}$. Portanto, se cobrirmos o retângulo com esses quadradinhos teremos 32 quadradinhos de base e 25 quadradinhos na altura. Assim, no retângulo cabem 32 x 25 quadradinhos e sua superfície fica definida seguinte maneira:

$$S_R = 32.25.\frac{1}{100} = \frac{32}{10}.\frac{25}{10} = \frac{800}{100} = 8$$

Neste exemplo, podemos também perceber que $S = ab$ para $a, b \in \mathbb{Q}$ e mesmo usando apenas um exemplo a solução contém toda ideia da demonstração para retângulos de medidas racionais. (LIMA et al., 2006.a)

Agora, ampliando a ideia de área para outros polígonos, podemos a partir da definição da área do retângulo conhecer a área do paralelogramo.

1.2 ÁREA DO PARALELOGRAMO

Considerando um paralelogramo *ABCD* com base *AD* = *a* e altura *h,* podemos traçar a partir do ponto *B* uma perpendicular à reta que contém *AD* e denotar por M o pé da perpendicular (ou seja, o ponto de interseção), conforme mostra a figura 1. Da mesma maneira, traçamos um segmento de reta que parte de *C* e é perpendicular à reta que contém *AD* e denotamos por *N* o pé perpendicular. Portanto, uma vez que a região limitada pelos pontos *BCNM* tem seus lados paralelos iguais e seus ângulos internos todos iguais a 90º, concluímos que *BCNM* é um retângulo.

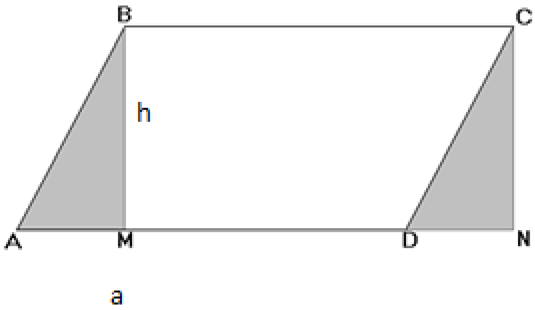


Figura 1 – Paralelogramo

Note que a área do paralelogramo *ABCD* é igual à área do retângulo *BCNM*, uma vez que os triângulos *ABM* e *DCN* são congruentes. Portanto, a área do paralelogramo é também igual ao produto da base pela altura:

$$S_P = ah \qquad (2)$$

1.3 ÁREA DO TRIÂNGULO

Sejam *A, B* e *C,* três pontos não colineares. Temos, então, um triângulo *ABC.* Escolhendo como base o lado *BC* = *b* na figura 2, podemos, através desse triângulo, construir uma figura na qual conhecemos a área para, a partir daí, encontrar a área do triângulo. Façamos o seguinte: pelo vértice *A* tracemos uma reta paralela ao lado *BC* e pelo vértice *C* uma reta paralela ao lado AB. Seja *D* o ponto de intersecção entre as duas paralelas traçadas, formando assim o paralelogramo *ABCD* com altura *h* (ver figura 2).

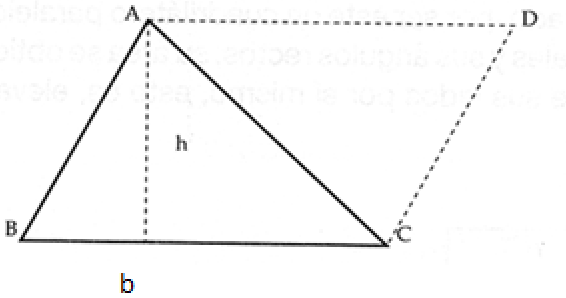


Figura 2 – Paralelogramo ABCD

Pela nossa construção, fica fácil perceber que o triângulo *ABC* é a metade do paralelogramo *ABCD*. Portanto, a área limitada pelo triangulo será igual a metade da área limitada pelo paralelogramo. Logo, como a área do paralelogramo é o produto da base pela altura, então a área do triângulo será:

$$S_T = \frac{bh}{2} \quad (3)$$

1.4 ÁREA DO TRAPÉZIO

Depois de definidas intuitivamente as áreas do paralelogramo e do triângulo, podemos encontrar a área do trapézio. Observando a figura 3 se percebe que ele pode ser particionado em duas outras no qual já conhecemos as áreas. Seja *ABCD* o trapézio com base maior *AB* = *b*, base menor *CD* = *a* e altura *h.* Se a partir do ponto *C* traçarmos um segmento *CE* paralelo ao lado *AD* dividiremos esse trapézio em um paralelogramo *AECD* de base *a* e altura *h* e um triângulo *BCE* de base $b - a$ e altura *h*.

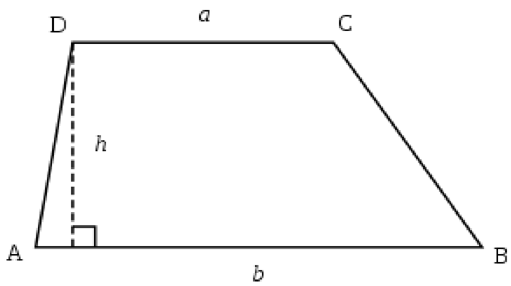


Figura 3 – Trapézio ABCD

Como o trapézio é a junção do paralelogramo e do triângulo sua área será a soma das áreas desses polígonos, ou seja:

$$S = S_P + S_T = ah + \frac{(b-a)h}{2} = \frac{2ah+bh-ah}{2} = \frac{(a+b)h}{2} \quad (4)$$

Portanto, a área do trapézio é igual ao produto da média aritmética das bases pela altura.

1.5 PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS

Quando tratamos de áreas de polígonos, mesmo que intuitivamente, algumas propriedades são utilizadas. As quatro propriedades seguintes são de Muniz Neto (2013, p. 222):

Propriedade 1.1: Polígonos congruentes têm mesma área;

Propriedade 1.2: Se um polígono convexo é dividido em um número finito de polígonos convexos, onde dois polígonos partilham somente um vértice ou uma aresta, então a área desse polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.

Propriedade 1.3: Se um polígono maior contém um outro menor em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.

Propriedade 1.4: A área de um quadrado de 1 cm é igual a $1cm^2$.

Veremos agora, de uma forma mais rigorosa, como calcular a área de um quadrado. De acordo com Lima (1991), para *n* natural a área já foi definida, mas quando a medida do lado quadrado *F* de área *A(F)* for $\frac{1}{n}$, onde *n* é um número natural, então podemos decompor o quadrado unitário usando paralelas aos seus lados, em n^2quadrados justapostos congruentes ao quadrado *F*. Estes n^2quadrados são congruentes e compõem o quadrado de área 1. Segue-se que a área de *F* deve satisfazer à condição $n^2.A(F) = 1$. Portanto, a área de *F* é:

$$A(F) = \frac{1}{n^2} \tag{5}$$

No geral, se o lado da figura *F* tem por medida o número racional $\frac{m}{n}$, então podemos decompor cada lado de *F* em *m* segmentos , cada um dos quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados de *F* a partir dos pontos de divisão, obtemos uma decomposição de *F* em m^2 quadrados, cada um dos quais tem lado $\frac{1}{n}$. Portanto, a área de cada um desses quadrados menores é $\frac{1}{n^2}$. Segue-se que a área de *F* deve ser

$$m^2\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ou seja,

$$A(F) = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Podemos, então concluir que a área do quadrado *F* com $a = \frac{m}{n}$ é:

$$A(F) = a^2 \qquad (6)$$

Para concluirmos, devemos observar o caso em que o lado da figura *F* tiver como medida um número irracional. Como explica Lima (1991), se temos um número $b < a^2$, podemos tomar um número racional *r*, inferior a a, mas tão próximo de a tal que $b < r^2 < a^2$, então tomamos um quadrado F', no interior de *F*, tendo esse novo quadrado lado igual a *r*. Sabendo que *r* é um número racional, a área desse quadrado é r^2. Sabendo que F' está dentro de *F*, concluímos que área de F' é menor do que a área de *F* . Logo r^2 é menor do que a área de *F* e *b* < r^2, ou seja *b* é menor do que a área de *F*. Portanto, todo número real menor que *b* é menor que a^2 e, consequentemente, é menor do que a área de *F*. Do mesmo modo, todo número real maior do que a^2, é maior que a área de *F*. Daí por exclusão, deve-se ter área de *A(F)* = a^2. De fato a área de um quadrado *F* cujo lado mede a, deve ser expressa pela fórmula 6, sendo a um número real qualquer.

2. PROPORCIONALIDADE

A princípio vamos entender o que é a razão entre dois segmentos. Chamamos de razão o resultado da divisão entre as medidas de dois segmentos, considerando uma mesma unidade de medida de comprimento. Quando a razão entre dois segmentos é igual a razão entre outros dois segmentos, dizemos que eles são proporcionais.

Segundo Lima et al. (2006.b, p. 104) "A proporcionalidade é, provavelmente, a noção matemática mais difundida na cultura de todos os povos e seu uso universal data de milênios".

Definição 3.1 (LIMA et al. 2006.a): Sejam *x* e *y* dois tipos de grandezas. Diz-se que *y* é proporcional a *x* quando:

1º As grandezas *x* e *y* estão relacionadas de maneira que a cada valor de *x* tem-se um valor bem determinado de *y*. Diz-se então que existe uma correspondência $x \to y$ e que *y* é função de *x*.

Quando se escreve $x \to y$ está querendo dizer que *y* é o valor que corresponde a *x*.

2º Quanto maior for *x*, maior será *y*. Em símbolos: $x \to y$ e $x' \to y'$ então $x < x'$ implica $y < y'$.

3º Se a um valor x_0 corresponde y_0 e *c* é um número qualquer, então o valor de *y* que corresponde a cx_0 é cy_0. Simbolicamente: $x_0 \to y_0$ então $cx_0 \to cy_0$.

Daí, concluímos que duas grandezas são diretamente proporcionais quando existe um *k*, que pode ser chamado fator ou constante de proporcionalidade, de forma que *y* = *kx*, ou ainda teremos que essas duas grandes são inversamente proporcionais quando $y = \frac{k}{x}$ com $x \neq 0$.

Como exemplo importante de proporcionalidade podemos destacar a famosa regra de três, que de acordo com Lima et al. (2006.a, p. 4), é enunciada da seguinte forma

> Na regra de três tem-se uma proporcionalidade $x \to y$, consideram-se valores específicos $x' \to y'$, $x'' \to y''$ da mesma, supõe-se que são conhecidos três dos números *x'*, *y'*, *x"*, *y"* e pede-se o quarto desses números.
> Sabendo que *y'*=*kx'* e *y"*=*kx"*, vem $\frac{y'}{y"} = \frac{x'}{x"}$. Esta proporção nos permite obter um dos números *x'*, *y'*, *x"*, *y"* quando os outros três são conhecidos.

Observa-se que nesse caso a constante de proporcionalidade não tem importância para o problema, isso também acontece nos problemas envolvendo o Teorema de Tales.

Um importante e curioso exemplo de proporção que podemos encontrar é a intrigante secção áurea, que se dá quando, a razão da medida de todo o segmento para a medida do maior segmento gerado é igual à razão da medida deste para a medida do menor segmento gerado, ou seja, se temos um segmento $\overline{AB}$ e um ponto $P \in \overline{AB}$ tal que $\overline{AP} > \overline{BP}$, então estes segmentos constituem uma secção áurea, se e somente,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \tag{7}$$

De acordo com Castro (2013, p.18) "Os gregos conheciam essa divisão como "divisão de um segmento em média e extrema razão". Atualmente ela é conhecida como "secção áurea" de um segmento, denominação criada por Kepler (1571-1630)". E ainda segundo Kepler (apud CASTRO 2013, p.18, 19), "A geometria tem dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo pode chamar de joia preciosa".

Assim, denotando $\overline{AB} = a$ e $\overline{AP} = x$, teremos $\overline{BP} = a - x$. Portanto, substituindo na equação 7, teremos

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Longrightarrow a(a-x) = x^2 \Longrightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4a^2}}{2} = \frac{-a \pm a\sqrt{5}}{2} = a.\left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) \tag{8}$$

Note que *a > x > 0*. Podemos concluir que independentemente do valor de *a*, *x* será um número irracional. Usando a raiz positiva da equação (8) temos,

$$x = a.\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \Longrightarrow \frac{x}{a} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \Rightarrow \frac{a}{x} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right).\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\right) \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{2.(\sqrt{5}+1)}{5-1} \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}61803398874984 \ldots$$

Como salienta Castro (2013, p.20) "geramos, então, o que hoje é chamado, número de ouro, ... Este número, assim como a secção áurea, aparece em diversos elementos da história, como, por exemplo, na arquitetura e nas artes".

O Partenon grego como mostra a figura 4 é um templo que representa o século de Pericles e contém a razão de ouro no retângulo da sua fachada (largura/altura). Segundo Belussi et al (2005, p.3) "Fídias foi o escultor e o arquiteto encarregado da construção do templo. A designação adaptada para o número de ouro é a inicial do nome deste arquiteto – a letra grega ϕ (Phi maiúsculo)”.

Figura 4 –Partenon

Nas pirâmides também pode-se encontrar a razão áurea, pois como enfatiza Belussi et al (2005, p.2) “no Egito as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro”, como mostra figura 5.

Figura 5 – Pirâmide

Na arte pode- se destacar a Mona Lisa, famosa pintura de Leonardo da Vinci, como mostra a figura 6, ainda segundo Belussi et al (2005, p.4)

> A Mona Lisa, que apresenta o retângulo de Ouro em múltiplos locais: (a) desenhando um retângulo à volta da face o retângulo resultante é um retângulo de Ouro; (b) dividindo este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro e (c) as dimensões do quadro também representam a razão de Ouro.

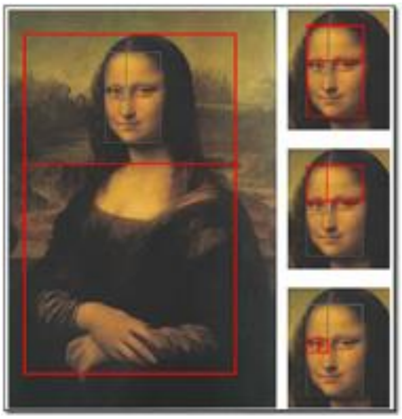


Figura 6 - Monalisa

Uma importante propriedade das grandezas é a seguinte:

Propriedade 2.1 (CASTRO, 2013): Se $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$, então $\frac{x}{y} = \frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w}$.

Podemos provar essa propriedade apenas observando que $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$ implica *xw=yz*. Acrescentando *zw* a ambos os lados da igualdade, temos *xw+zw* = *yz+zw.* Portanto, $w(x+z) = z(y+w)$, dai:

$$\frac{z}{w} = \frac{x+z}{y+w} \qquad (9)$$

Essa propriedade terá uma aplicação bastante interessante na seção 4.5 para generalizarmos o Teorema de Pitágoras.

2.1 SEMELHANÇA

A ideia intuitiva de semelhança é a ampliação ou redução de uma determinada figura conservando suas proporções. Mas, infelizmente, boa parte dos livros didáticos faz uso da seguinte definição: triângulos semelhantes têm ângulos iguais e lados homólogos proporcionais e esta definição ainda se estende literalmente para os polígonos. (LIMA, 1991)

A preocupação quanto a essa definição usada nos livros deve-se ao fato de que nem sempre as figuras possuem lados ou ângulos para serem comparados. É o que acontece com os círculos, além de outros exemplos do cotidiano. Por isso, adotaremos uma definição mais completa. (LIMA,1991, p. 33).

Se F e F' são duas figuras, do plano ou do espaço, e *r* um número real positivo.

Definição 2.1.1: Tem-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r, quando existir uma correspondência biunívoca $\sigma: F \to F'$, entre os pontos de F e pontos de F', com a seguinte propriedade segundo Lima (1991, p. 33).

Propriedade 2.1.1: Sejam *X* e *Y* dois pontos quaisquer de *F* e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ seus correspondentes em *F'*, então $\overline{X'Y'} = r\,\overline{XY}$.

Teorema 2.1.1: Uma semelhança $\sigma: F \to F'$, de razão r, transforma:

1. Qualquer segmento de reta contido em F num segmento de reta contido em F'.
2. Todo círculo de raio a, contido em F num círculo de raio $r.a$ contido em F'.
3. Os pontos interiores a F em pontos interiores a F'.
4. Todo ponto do contorno de F em pontos do contorno de F'.
5. Os vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos) (LIMA, 1991, p. 36).

2.1.1 Semelhança de Triângulos

De acordo com Muniz Neto (2013, p. 158)

> Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre o comprimento de lados correspondentes seja sempre a mesma.

Sejam *ABC* e $A'B'C'$ triângulos semelhantes com a seguinte correspondência entre os vértices: $A \leftrightarrow A', B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Então, os ângulos correspondentes serão iguais e sendo $k > 0$, temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = k \qquad (10)$$

O número *k* positivo representa a razão de semelhança entre os triângulos ABC e $A'B'C'$. Para indicar a semelhança entre eles escrevemos $ABC \sim A'B'C'$.

2.1.1.1 Critérios de Semelhança

Critério AA (ângulo, ângulo) – Dois triângulos são semelhantes se dois ângulos de um triângulo ABC são iguais a dois ângulos de outro triângulo $A'B'C'$.

Critério LLL (lado, lado, lado) – Dois triângulos são semelhantes se os lados de ABC são proporcionais aos lados do outro triângulo $A'B'C'$.

Critério LAL (lado, ângulo, lado) – Dois triângulos são semelhantes se possuem um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais.

2.1.2 Semelhança de Círculos

Definição 2.2.1: Se O é um ponto qualquer do plano e a um número real positivo. O círculo de centro O e raio a é o conjunto dos pontos do plano que estão a uma distância $\leq a$ do ponto O (LIMA, 1991, p. 46).

Teorema 2.2.1: Dois círculos quaisquer são sempre semelhantes e sua razão de semelhança é a razão entre seus raios (LIMA, 1991, p. 46).

2.1.3 Relação entre semelhança e área

Iniciamos essa seção com o enunciado do seguinte

Teorema 2.3.1: "A razão das áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança" (LIMA, 1991, p.49).

Usando o caso do retângulo podemos exemplificar esse teorema. Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois retângulos semelhantes. Como seus lados são proporcionais, existe $k > 0$ tal que $AB = kA'B'$, $BC = kB'C'$, $CD = C'D'$ e $DA = D'A'$. Portanto, tomando $A'B'$ como base e $B'C'$ como altura, temos que a área de $A'B'C'D'$ será:

$$S_1 = \overline{A'B'}.\overline{B'C'} \tag{11}$$

Da mesma forma, a área de $ABCD$ será:

$$S_2 = \overline{AB}.\overline{BC} \tag{12}$$

Então, a razão entre as áreas é:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\overline{AB}.\overline{BC}}{\overline{A'B'}.\overline{B'C'}} = \frac{k\overline{A'B'}.k\overline{B'C'}}{\overline{A'B'}.\overline{B'C'}} = \frac{k^2 S_1}{S_1} = k^2 \tag{13}$$

De acordo com Lima (1991, p.49), se $\sigma: F \to F'$ é uma semelhante de razão *r* entre as figuras F e F', então a área de F' é igual a r^2 vezes a área de *F*. Como vimos acima, isto é verdade quando F e F' são retângulos e portanto, também quando F e F' são polígonos retangulares. Assim, todo polígono retangular *P*, contido em *F*, é transformado pela semelhança σ num polígono retangular P', contido em F', tal que a área de P' é igual a r^2 vezes a área de *P*. Desta maneira, temos:

$$(\acute{a}rea\ de\ F') = r^2.(\acute{a}rea\ de\ F)$$

3. UM POUCO DE HISTÓRIA

Um dos mais famosos e importantes teoremas da Matemática é o Teorema de Pitágoras, batizado com o nome do grande matemático grego Pitágoras que nasceu na ilha de Samos, na Grécia e que segundo Lima et al. (2006.a, p.61) "foi a partir das ideias desses dois grandes personagens que a Matemática se iniciou como ciência e pôde se desenvolver enormemente nos séculos seguintes", referindo-se também a Tales.

Pitágoras optou por sair da sua terra e viajar em busca de conhecimento. Estudou algum tempo no Egito e também passou pela Babilônia, quando retornou a Grécia na cidade de Crotona. Fundou uma escola, onde dedicou-se ao estudo da matemática, da filosofia e das ciências naturais. Ainda de acordo com Lima et al. (2006.a, p. 62)

> Como todos os documentos daquela época se perderam, tudo o que sabemos veio através de referências de outros autores que viveram séculos depois. Por isso, Pitágoras é uma figura obscura na história da Matemática e, para dificultar ainda mais as coisas, a sua escola, além de secreta, era comunitária, ou seja, todo o conhecimento e todas as descobertas eram comum a todos. Assim, não sabemos sequer se foi o próprio Pitágoras que descobriu o teorema que leva o seu nome, pois era comum naquela época dar todo o crédito ao mestre.

De acordo com Bressiani (2011, p.15) "Uma das grandes contribuições da escola pitagórica à Matemática foi organizar algumas partes da geometria, como a teoria das paralelas, por meio do método demonstrativo".

A Escola Pitagórica possuía um símbolo que era chamado de Pentagrama, este pentagrama na verdade é um pentágono estrelado, e o mais interessante é que as diagonais deste pentágono estrelado se intersectam formando um outro pentágono regular e estes pontos de intersecção dividem a diagonal na chamada secção áurea. (CASTRO, 2013, p.18). Como mostra a figura 7.

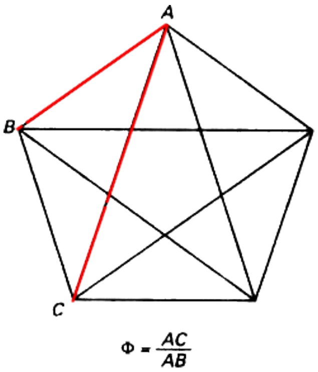


Figura 7 – Pentagrama

Ainda segundo Castro (2013, p.18) “É bem provável que Pitágoras e seus discípulos conhecessem a divisão de um segmento em média e extrema razão, pois a mesma gera uma equação do 2º grau, que Pitágoras deve ter conhecido em suas viagens a Babilônia.”

E ainda sobre o Teorema de Pitágoras, Proclus (apud LIMA 1991, p. 26) “Se dermos ouvidos aos que relatam História Antiga, acharemos alguns que atribuem este teorema a Pitágoras e dizem que ele sacrificou um boi pela descoberta”.

Além da dúvida se o crédito do teorema deve ser dado a Pitágoras ou algum de seus discípulos, documentos mostram que o Teorema de Pitágoras já era conhecidos por outras civilizações que viveram bem antes que o próprio Pitágoras.

Os egípcios usavam um método bastante interessante para demarcar as terras que eram desmarcadas pelas enchentes do rio Nilo que aconteciam todos os anos. Assim, para encontrar um ângulo reto eles perceberam que poderiam usar uma corda com 13 nós espaçados igualmente e que formando um triângulo com lados 3, 4 e 5 obteriam um ângulo reto entre os lados 3 e 4.

> Ou seja, eles conheciam pelo menos um terno de números ditos pitagóricos, que com certeza não eram conhecidos dessa forma. Mas mesmo sem qualquer documento que comprove isso, o mais importante é essas situações devem ter sido vividas de alguma forma por Pitágoras nessas viagens. (CASTRO, 2013, p.12).

Nesse sentido, a civilização mesopotâmica que começou por volta de 3500 a.C. deixou alguns escritos que registram em tábulas ternas pitagóricas como destaca Calabria (2013, p.7) “Uma das mais famosas é a Tábulas de Plimpton 322, 1900-1600 a. C., na qual se encontra o mais antigo registro sobre o Teorema de Pitágoras, contendo uma tabela de ternas pitagóricas”.

A Tábula de Plimpton está na Universidade da Columbia nos Estados Unidos, sendo que o fragmento preservado mostra uma tabela de quinze linhas e três colunas de números. De acordo com Fernandes (2013, p. 25, 26)

> Os pesquisadores descobriram que essa tabula continha ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo. Como o que restou é apenas um pedaço de um tablete, que deveria fazer parte de um conjunto de tabletes, não se sabe como esses números foram encontrados. Mas uma pista de que os babilônicos conheciam uma forma de encontrar esses números está em um tablete guardado no Museu Britânico (...) Não há nenhuma demonstração, naturalmente, pois isso ainda estava longe de ser uma preocupação na época. Somente com os gregos é que se iniciaria a Matemática demonstrativa. Os babilônios conheciam receitas que davam certo e com ela resolviam inúmeros problemas.

Assim, cerca de mil anos antes de Pitágoras os babilônicos conheciam já o teorema e usavam um método sistemático para encontrar as ternas e além disso as utilizavam para encontrar soluções de problemas geométricos. (CALABRIA, 2013)

Os babilônicos estavam preocupados em resolver problemas práticos e também problemas teóricos utilizando o Teorema de Pitágoras, pois esta civilização já tinha o conhecimento geométrico relacionado as áreas de retângulos, triângulos retângulos, triângulos isósceles e trapézios com um lado perpendicular à base.

Existe ainda um segundo tablete que se encontra no museu da Universidade de Yale e é o único que contém figuras com um quadrado e suas diagonais.

Além dos babilônicos o teorema era conhecido pelos indianos e chineses. Na China, o Teorema de Pitágoras já era conhecido há cerca de 600 anos antes de Pitágoras. De acordo com um famoso livro chinês Zhoubi Suanjing, do terceiro século a. C., reunindo alguns problemas muito antigos inclusive um que equivale ao Teorema de Pitágoras chamado, “Gou Gu”, onde a demonstração utilizada é área. (LIMA et al., 2006.a).

Acredita-se que o crédito do Teorema é dado a Pitágoras, porque como já foi citado anteriormente a preocupação com as demonstrações só vieram a aparecer com os gregos, portanto Pitágoras ou algum de seus discípulos provavelmente devem ter sido os primeiros a demonstrarem o Teorema. No entanto, até hoje não se sabe qual foi a demonstração original, mas os historiadores acreditam que deve ter sido alguma usando áreas.

4. O TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras é um dos mais famosos teoremas da matemática e ocupa um lugar de destaque devido a sua aplicabilidade. Apesar de não se saber ao certo a sua demonstração original, inúmeras demonstrações são utilizadas para melhor definir esse teorema e mesmo com tantas formas distintas para se demonstrar ainda nos deparamos com situações em que o aluno não consegue compreender o que realmente significa $a^2 = b^2 + c^2$. Como se pode perceber na pesquisa de Leivas

> Em nosso entender, o Teorema de Pitágoras é um dos principais assuntos a ser tratado na Escola Básica ... Segundo nossa vivência como professor de diversos níveis de ensino, não ocorre uma generalização do teorema, o que deixa os estudantes com uma concepção única de como ele se apresenta e se aplica a diversas situações. (2012, p.3)

Assim, o Teorema de Pitágoras é apresentado para os alunos no 9º ano do ensino fundamental e é tratado nos Parâmetros Curriculares Nacionais no bloco que fala sobre Grandezas e Medidas da seguinte forma, "Outro conteúdo destacado neste bloco é a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis, que envolvem por exemplo conceitos e procedimentos da Geometria e da Física" (BRASIL, 1998, p. 52). E é através de teoremas como o de Pitágoras que podemos encontrá-las.

Apesar da sua aplicabilidade, muitas vezes esse Teorema torna-se apenas mais uma fórmula a ser decorada, sem que haja o verdadeiro entendimento do teorema, pois normalmente os livros trazem o que é o Teorema sem uma demonstração compreensível do tema, restringindo-se a identificar um triângulo retângulo e descobrir um dos lados conhecendo a medida dos outros dois, fazendo com que o aluno limite-se apenas a ideia de que o triângulo retângulo tem uma propriedade especial e deixando de lado as várias implicações que esta propriedade traz.

> No entanto, os professores aderem ao programa oficial e tentar trabalhar os seus alunos (as), mas ambos fazem por meio de questões delimitadas ou instruções específicas; que colocar o aluno em uma situação de dependência, inibindo a sua obra autônoma e exploratória. (OLFOZ, GUZMAN, ESTRELLA, 2014, p. 13)

Diante dessa deficiência dos alunos em compreender que o Teorema de Pitágoras vai muito além de uma fórmula pré-estabelecida, percebemos a necessidade de se demonstrar o Teorema de Pitágoras desde o primeiro momento em que ele é apresentado aos alunos, usando inicialmente a demonstração através das áreas dos quadrados que tem lado igual aos lados do triângulo e a partir desse momento começar a relacionar os conteúdos matemáticos envolvidos nesta demonstração, e ainda segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, “além disso, os conteúdos referentes as grandezas e medidas proporcionaram contextos para analisar a interdependência entre grandezas e expressá-las algebricamente”.(BRASIL, 1998, p. 52)

Pode-se também utilizar alguns instrumentos de desenho para realizar as demonstrações e sair da demonstração usual do livro didático, pois como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais, no bloco referente Espaço e Forma,

> O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações. (BRASIL, 1998, p.51)

Sendo assim podemos aproveitar para generalizar o Teorema de Pitágoras, mostrando que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a área da soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos, com essa generalização o aluno pode compreender melhor o Teorema e ainda aprender a relacionar conteúdos matemáticos, percebendo que a aplicação da propriedade existente no Teorema não é apenas para quadrados, mas também para outras figuras como afirmam, Penafiel e Yun ao realizar uma atividade com semicírculos semelhante, atividades estas que são normalmente utilizadas com quadrados

> Os diâmetros dos semicírculos são congruentes com os correspondentes lados do triângulo. Os estudantes podem descrever a relação entre as áreas dos semicírculos nas laterais do triângulo, usando os grãos de borracha. É possível ver que a soma das áreas dos dois semicírculos construídos sobre os catetos é igual à área do semicírculo construído sobre a hipotenusa. (2008, p. 4)

Dentro da perspectiva de relacionar os conteúdos matemáticos as demonstrações do Teorema de Pitágoras vai aproveitar muitos conteúdos já vistos como: áreas, semelhança de figuras planas, proporcionalidade, dentre outros. A partir disso, o educando passa a compreender melhor esses conteúdos e a perceber como a matemática está interligada e que quando seus conceitos são bem definidos, pode-se usá-los para definir novos conceitos. Nesse sentido Leivas (2012, p. 14), afirma

> Portanto, ainda há muito a fazer em Educação Geométrica, para que possamos atingir um patamar aceitável no ensino e na aprendizagem de Geometria nos diversos níveis de escolaridade. Acreditamos que desenvolver habilidades de visualização que permitam diversas formas de representação de um conceito matemático é fundamental para se atingir esse objetivo e, especialmente, distinguir Geometria e Formas de Grandezas e Medidas.

Portanto, a abordagem feita para qualquer conteúdo em especial os ligados a geometria devem ser abordados de diferentes maneiras com o objetivo de atingir o nível de compreensão esperado para os alunos.

Para se compreender o Teorema de Pitágoras, faz-se necessário primeiro definir um triângulo retângulo, já que é nele que esse teorema se aplica.

Dizemos que um triângulo é retângulo quando este possui um ângulo reto, ou seja, igual a 90º. Chamamos de hipotenusa o lado do triângulo que está oposto ao ângulo de 90º e de catetos os outros dois lados. A hipotenusa é o maior lado deste triângulo, pois se um triângulo possui um ângulo de 90º nenhum outro ângulo deste será maior que ou igual a 90º e segundo as propriedades dos triângulos o lado oposto ao maior ângulo será o maior lado. Como mostra a figura 8.

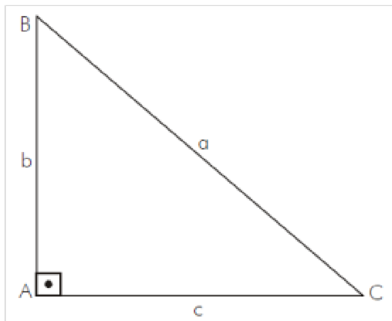


Figura 8 – Triângulo Retângulo

As palavras hipotenusa e catetos tem significados que lhe definem claramente, pois hipotenusa tem origem no grego, “hypoteínousa”, que tem por significado “contrário de” e a palavra cateto que também tem origem grega, “Kathetos” que significa “que cai perpendicular” (CASTRO, 2013)

O Teorema de Pitágoras diz que em qualquer triângulo retângulo a área do quadrado cujo o lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os catetos. Este enunciado nos leva a seguinte identidade $a^2 = b^2 + c^2$, onde a é a medida da hipotenusa, b e c são as medidas dos catetos. Podemos representá-lo geometricamente através da figura 9.

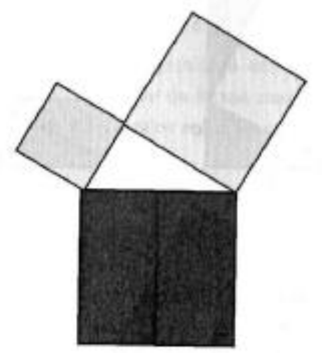


Figura 9 – Interpretação geométrica.

Intuitivamente, para verificar a validade deste teorema, podemos desenhar os quadrados relativos aos lados dos catetos e cortá-los de maneira que eles sobreponham o quadrado construído sobre a hipotenusa, ou ainda medir os lados de vários triângulos retângulos e verificar se a identidade $a^2 = b^2 + c^2$ se aplica.

Os procedimentos citados acima apenas verificam o Teorema. Porém, isso não consiste em uma prova matemática. Para provar que de fato ele se aplica a todos os triângulos retângulos, precisamos de uma demonstração rigorosa. Como defende Castro (2013, p.29)

> Na Matemática, uma conjectura só é considerada verdadeira quando for demonstrada, com argumentos lógicos, sem deixar qualquer margem de dúvida. Ou seja, realizar testes em casos particulares, por maior que seja a quantidade desses testes, não serve como demonstração, ou prova de qualquer afirmação Matemática.

O Teorema de Pitágoras sem dúvida é um dos mais importantes e intrigantes teoremas da Matemática pois, além de ocupar um lugar de destaque no conhecimento matemático, é rodeado de lendas. Sua relevância fica bem notória quando observamos que apesar de não se saber ao certo qual foi a sua demonstração original, inúmeras demonstrações do teorema já foram feitas, tornando-o provavelmente o teorema que mais possui demonstrações. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações e ainda existem mais (LIMA et al., 2006.a).

Mostraremos algumas das inúmeras demonstrações do teorema como a demonstração clássica, a demonstração que usa semelhança, a demonstração de Perigal e também a demonstração de Euclides.

4.1 DEMONSTRAÇÃO CLÁSSICA

A demonstração clássica acredita-se que tenha sido a que os pitagóricos imaginaram.

Dado um triângulo retângulo de hipotenusa *c* e catetos *a* e *b*, queremos provar que $c^2 = a^2 + b^2$. Para isso tomamos dois quadrados cujas medidas dos lados são iguais a *a*+*b.* como podemos observar na figura 10:

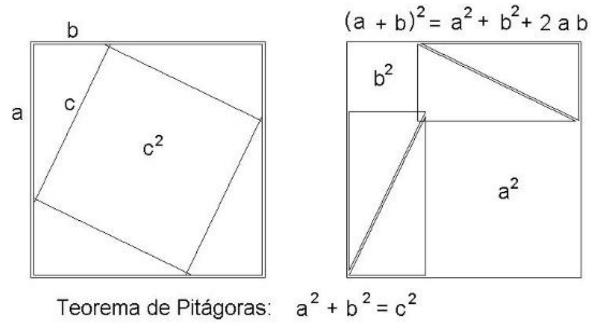


Figura 10 – Quadrados

Do quadrado esquerdo retiramos quatro triângulos iguais (congruentes) ao triângulo dado, restando apenas um quadrado de lado *c*. No quadrado da direita retiramos também quatro triângulos iguais ao triângulo dado, restando dois quadrados, um de lado *a* e outro de lado *b.* Como os dois quadrados iniciais tinham a mesma área, já que seus lados eram *a*+*b* e foram retirados os mesmos quatro triângulos, então podemos concluir que a área que sobrou do quadrado da esquerda, c^2, é igual a área que sobrou do quadrado da direita, $a^2 + b^2$, ou seja, $c^2 = a^2 + b^2$, como queríamos demonstrar.

4.2 DEMONSTRAÇÃO QUE USA SEMELHANÇA

Segundo Lima et al. (2006.a, p. 66), " Esta demonstração é a mais frequente hoje nas escolas porque permite, com único e pequeno esforço, não só demonstrar o Teorema de Pitágoras como também encontrar relações importantes do triângulo retângulo".

Dado um triângulo *ABC,* retângulo em *A*, traçamos a altura *AH*. Agora, temos dois novos triângulos *AHB* e *AHC,* retângulos em *H.* Pelo critério *AA*, *AHB* e *ABC* são semelhantes, pois os dois possuem um ângulo reto e o ângulo B em comum. Usando o mesmo critério de semelhança temos que os triângulos *AHC* e *ABC* também são semelhantes, já que os dois triângulos possuem um ângulo reto e o ângulo *C* em comum.

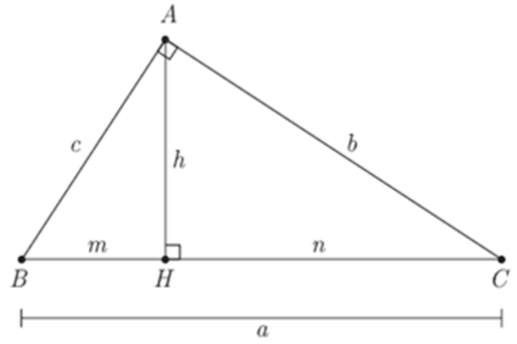


Figura 11 – Triângulo retângulo

Como os triângulos *AHB* e *ABC* são semelhantes, seus lados correspondentes são proporcionais, daí tem-se:

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{c} \rightarrow c^2 = am \tag{14}$$

Da semelhança de *AHC* e *ABC* encontramos:

$$\frac{b}{a} = \frac{n}{b} \rightarrow b^2 = an \tag{15}$$

Somando as relações (14) e (15):

$$b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = a.a = a^2$$

Logo $a^2 = b^2 + c^2$.

4.3 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

A demonstração do britânico Henry Perigal baseia-se em mais uma prova geométrica, onde ele busca evidenciar que a soma da área dos quadrados construídos sobre os catetos preencham a área do quadrado construídos sobre a hipotenusa.

Para essa demonstração ele usa uma figura como a 12. Nesta figura ele divide o quadrado construído sobre o maior cateto com duas retas que se intersectam no centro do quadrado, uma das retas é paralela a hipotenusa do triângulo e a outra é perpendicular, gerando quatro partes congruentes.

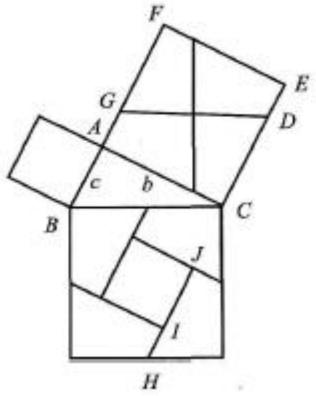


Figura 12 – Demonstração de Perigal

A congruência dessas partes verifica-se porque temos duas retas que se intersectam no centro do quadrado, portanto as duas retas ficam divididas em partes iguais, e como no quadrado todos os lados tem a mesma medida, o ponto de intersecção da reta paralela a hipotenusa com os lados divide este em duas partes iguais as partes resultantes da divisão que o ponto de intersecção da reta perpendicular faz com os outros dois lados.

As retas também são perpendiculares, daí cada uma das quatro partes geradas terão dois ângulos retos, portanto a soma dos outros dois ângulos é igual a 180º, já que essas quatro partes são quadriláteros. E ainda os ângulos que tem um lado comum são suplementares, portanto as figuras têm ângulos congruentes.

Chamando *AC* = *b* e *AB* = *c* os lados dos quadrados construídos sobre os catetos e *BC* = *a* o lado construído sobre a hipotenusa. Com as quatro partes formada pelo quadrado de lado *b*, formamos como mostra a figura 12 um outro quadrado de lado *a*, ficando sem preencher uma região no interior desse quadrado. Para concluir a demonstração vamos provar que essa região é o quadrado de lado igual a *c.*

Como as quatro regiões do quadrado de lado *b* são congruentes temos que *AG* = *DE* = *x.* E ainda temos *DG* e *BC*, *BG* e *CD* são paralelos, logo *BCDG* é um paralelogramo. Daí, temos que $BG = CD \rightarrow c + x = b - x \rightarrow c = b - 2x$. Como *HJ* = *GF* = *CD* = *b* – *x* e *HI* = *DE* = *x,* temos $IJ = HJ - HI = b - x - x =$

$b - 2x = c$. Portanto, a região que faltava para preencher a área no interior do quadrado de lado *a* é o quadrado de lado *c.* Logo $a^2 = b^2 + c^2$.

4.4 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

No que diz respeito a demonstração de Euclides, Proclus (apud LIMA, 1991, p. 26) afirma,

> De minha parte, embora admire aqueles que primeiro tomaram conhecimento da verdade deste teorema, me maravilho mais com o autor dos Elementos, não somente porque ele o estabeleceu mediante a demonstração mais lúcida, mas porque ele insistiu no teorema mais geral, pelos irrefutáveis argumentos científicos do Livro VI.

Quando se refere ao teorema mais geral ele está falando do Teorema de Pitágoras e ao citar irrefutáveis argumentos está se referindo a teoria de semelhança.

Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A* como mostra a figura 13. Para provar o Teorema de Pitágoras, ou seja, que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa *BC* é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos *AB* e *AC,* traça-se *AF* perpendicular à *BC* e a prolonga até *G,* traçando-se também *AE* e *CD.*

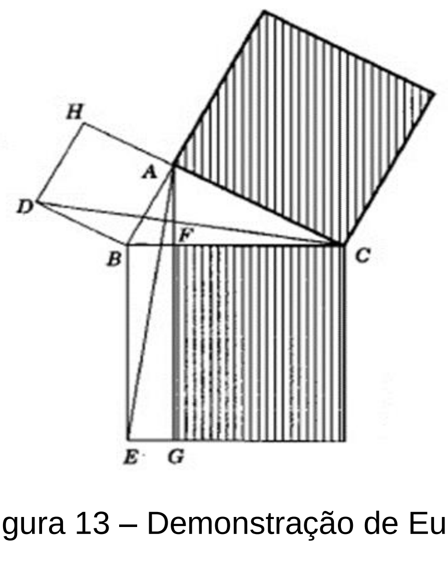


Figura 13 – Demonstração de Euclides

Como *BE* = *CB, AB* = *BD* e os ângulos *ABE* e *CBD* são iguais, podemos concluir, pelo critério LAL, que os triângulos *ABE* e *DBC* são congruentes. Já os triângulos *ABE* e *FEB* têm a mesma base (*BE*) e a mesma altura (*BF)*, ou seja, a mesma área. Portanto, a área de *ABE* é a metade do retângulo *BEGF.*

Do mesmo modo, *BCD* tem área igual à de *ADB,* pois os dois tem base *BD* e altura *AB.* Pode-se observar que os dois triângulos estão entre as paralelas $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{BD}$. Logo *BCD* tem área igual a metade do quadrado *ABDH.* Uma vez que os triângulos *ABE* e *DBC* são congruentes, segue que a área do quadrado *ABDH* é igual a área do retângulo *BEGF.*

De forma análoga pode-se mostrar que a área do quadrado de lado *AC* é igual ao retângulo de base *CF* e altura *FG.* Daí temos que a área do quadrado que tem como lado a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados os catetos.

4.5 GENERALIZAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

De acordo com o que foi demonstrado anteriormente, em um triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados construídos sobre os catetos. No entanto, a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras não se limita apenas aos quadrados. Ela é válida para quaisquer três figuras semelhantes que também sejam construídas sobre seus catetos e sua hipotenusa. Essas figuras não precisam ser necessariamente polígonos, basta apenas que sejam semelhantes, como é o caso dos semicírculos (CASTRO, 2013).

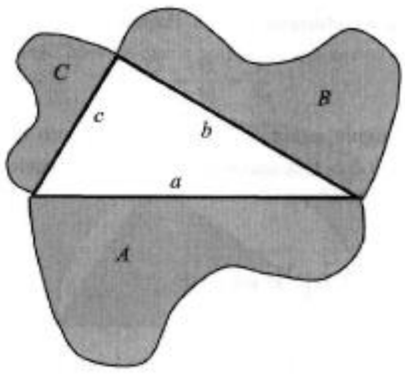


Figura 14 – Generalização do Teorema de Pitágoras

Para provarmos isso, consideremos *A, B* e *C* as áreas de três figuras semelhantes construídas sobre a hipotenusa *a* e sobre os catetos *b* e *c* de um triângulo retângulo, conforme pode ser visto na figura 14. Mostraremos que a identidade *A* = *B* + *C* também é verdadeira. De fato, pela equação (13), temos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança. Portanto:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} \qquad (16)$$

$$\frac{A}{C} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} \rightarrow \frac{A}{a^2} = \frac{C}{c^2} \qquad (17)$$

Pelas identidades (16) e (17), temos que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B}{b^2} = \frac{C}{c^2} \qquad (18)$$

Já da propriedade 2.1 de proporcionalidade, concluímos que

$$\frac{A}{a^2} = \frac{B+C}{b^2+c^2} \qquad (19)$$

Como, pelo Teorema de Pitágoras, temos que $a^2 = b^2 + c^2$, então pelas propriedades de proporcionalidade, temos que *A*=*B*+*C,* como queríamos demonstrar.

Após desenvolverem uma atividade que mostra essa relação, Penafiel e Yun (2008, p.4) afirmam que

> É possível ver que a soma das áreas dos dois semicírculos construídas os catetos do triângulo é igual à área do semicírculo construído sobre a hipotenusa. Naturalmente, essas extensões não são novas, mas os alunos são sempre surpresos que a relação de Pitágoras também é válida para diferentes formas de quadrados.

E ainda, segundo Castro (2013, p.24), "A vantagem dos quadrados é que eles também ilustram bem a identidade $a^2 = b^2 + c^2$".

4.6 APLICAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

O Teorema de Pitágoras tem diversas aplicações na Matemática como também na vida pratica. Na Matemática pode-se citar: O Problema de Hipócrates, a distância entre dois pontos, a condição de perpendicularidade, a diagonal do retângulo e a diagonal do paralelepípedo retângulo.

Uma aplicação que é bastante interessante do Teorema de Pitágoras e apropriada para os alunos que estão tendo o primeiro contado com este conteúdo é a demonstração da área de um triângulo equilátero.

4.6.1 Área do Triângulo Equilátero

Seja um triângulo equilátero de lado *l*, com o auxílio do Teorema de Pitágoras pode-se encontrar que área $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, portanto traçando a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ e chamando esta altura de *h,* então tem-se agora dois triângulos retângulos.

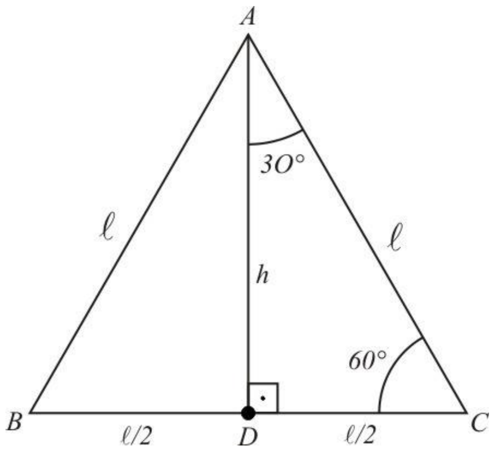


Figura 15: Triângulo Equilátero

Pelas propriedades do triângulo retângulo sabe-se a altura, a bissetriz e a mediana coincidem, logo esta altura também é mediana do lado $\overline{BC}$, portanto divide este lado em duas partes iguais, assim pelo Teorema de Pitágoras concluímos que

$$l^2 = \frac{l^2}{4} + h^2 \to h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4} \to h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \qquad (20)$$

Pela equação (2) tem-se a área do triângulo em função da base e da altura, como em um triângulo equilátero todos os lados são iguais, o objetivo é colocar a área desse triângulo em função apenas do lado, logo:

$$A = \frac{b.h}{2} = \frac{l.\frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \qquad (21)$$

4.6.2 O Problema de Hipócrates

De acordo com Lima et al. (2006a, p. 73), o Problema de Hipócrates constitui-se de mostrar que em um triângulo retângulo se temos três semicircunferências onde os diâmetros destas são os lados desse triângulo, então a soma da área das duas lúnulas é igual a área do triângulo.

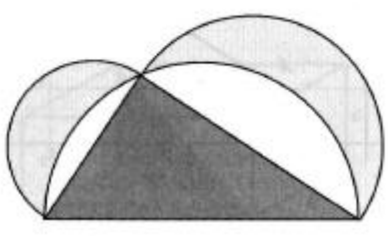


Figura 16: Problema de Hipocrátes

Para solucionar este problema vamos chamar de T a área do triângulo, P e Q as áreas das lúnulas[1] e U e V as áreas das outras duas regiões. Como mostra a figura 17.

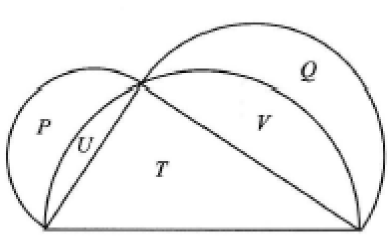


Figura 17: Problema de Hipocrátes

De acordo com a seção 4.5 onde há a generalização do Teorema de Pitágoras, temos que a área da semicircunferência construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das semicircunferências construídas sobre os catetos, portanto $T + U + V = P + U + Q + V$, ou seja, $T = P + Q$, como queríamos demonstrar.

[1] Figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos.

5. METODOLOGIA

A aplicação do trabalho foi realizado com 22 alunos da turma do 9º ano A do ensino fundamental na Escola Municipal Quinze de Julho, localizada no distrito de Maniçoba em Juazeiro – BA, no período de 06/11/2014 a 02/12/2014.

A princípio, foi utilizada uma atividade individual (como mostra o apêndice C), elaborada com o auxílio do livro texto adotado pela escola e aplicada pela professora da turma. Esta atividade tinha como objetivo identificar qual o grau de conhecimento dos alunos com relação ao Teorema de Pitágoras e algumas de suas aplicações, pois o conteúdo já tinha sido trabalhado pela professora com a turma.

Após a aplicação e a análise das atividades, foram realizadas aulas que abordaram conteúdos como: área, proporcionalidade e semelhança de figuras planas. Estes conteúdos tiveram seus conceitos trabalhados através de uma breve explanação, seguida de atividades com material concreto, para introduzir suas propriedades de forma intuitiva. Depois foram dadas as demonstrações formais.

O primeiro encontro com a turma teve como tema a *área*. A princípio, foi dada a definição da área do quadrado unitário. Em seguida, os alunos foram separados em 5 grupos onde cada grupo receberia uma atividade.

O grupo 1 recebeu um quadrado todo dividido em quadrados de 1 *cm* de lado, para assim encontrarem a área deste quadrado e deduzirem a fórmula geral para a área do quadrado, como mostra a figura 18.

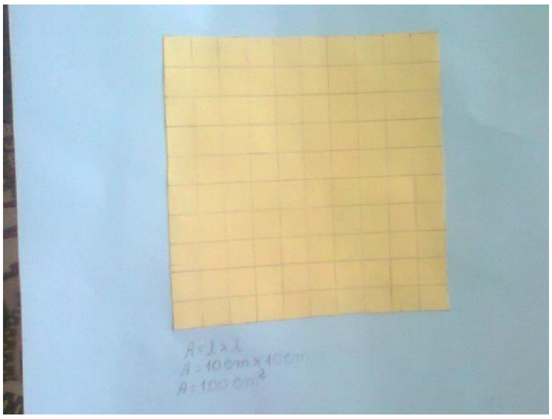


Figura 18: Quadrado

O grupo 2 recebeu um retângulo também dividido em quadrados de 1 *cm* de lado com a mesma finalidade do grupo 1, como mostra a figura 19.

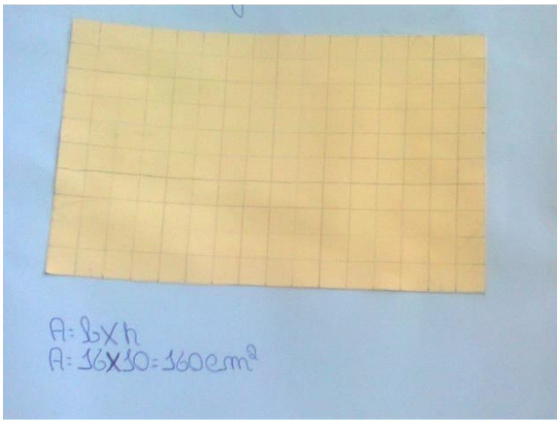


Figura 19: Retângulo

O grupo 3 recebeu um paralelogramo, onde eles deveriam transformar este paralelogramo em uma outra figura geométrica, no caso o retângulo, para assim deduzir que a área de qualquer paralelogramo encontra-se da mesma forma que a área do retângulo, como mostra a figura 20.

Figura 20: Retângulo

O grupo 4 recebeu um paralelogramo para através deste descobrirem a área do triângulo, então os alunos transformaram este paralelogramo em dois triângulos congruentes e perceberam que a área do triângulo é a metade área do paralelogramo, como mostra a figura 21.

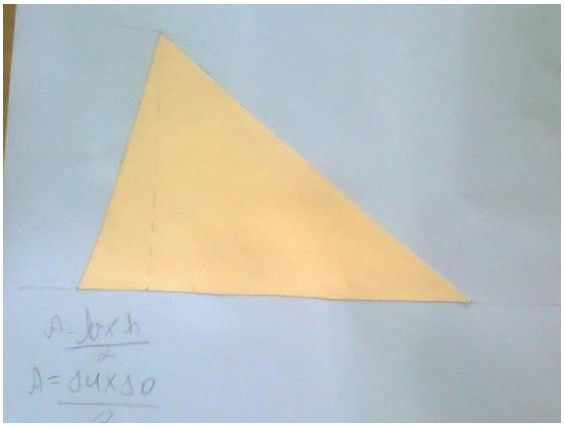


Figura 21: Triângulo

No caso do grupo 5 os alunos receberam duas figuras, um triângulo e um paralelogramo, para montarem uma nova figura, ou seja, um trapézio e assim perceberem que a área do trapézio é a soma da área do paralelogramo mais a área do triângulo.

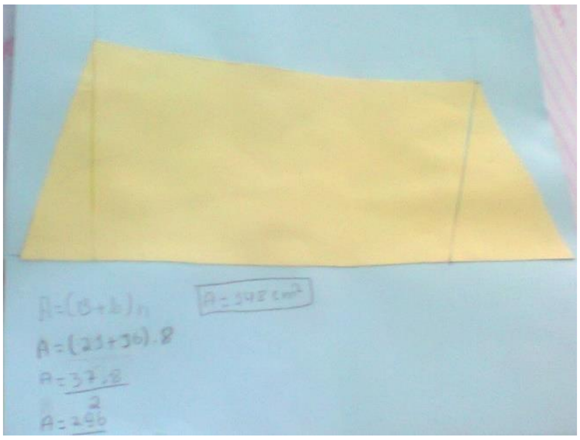


Figura 22: Trapézio

A partir das montagens das figuras, o paralelogramo e o triângulo, e de uma demonstração formal sobre as conclusões que eles chegaram a questão 1 do apêndice B foi resolvida com o auxílio da autora da presente pesquisa.

No segundo encontro o conteúdo abordado foi proporção, a princípio foi trabalhado com os alunos a definição de razão e proporção, e como atividade concreta mostrou-se que até no corpo humano existe uma proporção. Para mostrar esta curiosidade do corpo humano usou-se a secção áurea.

Na aula anterior tinha sido sugerido que os alunos trouxessem uma fita métrica e uma calculadora para se dividirem em dupla e encontrarem no colega a proporção existente no corpo humana, de acordo com a orientação da autora da pesquisa, porém os alunos não trouxeram a fita métrica, assim uma aluna da sala foi convidada para exemplificar como encontramos o número de ouro no corpo humano e como este segue uma proporção.

Os alunos acharam curioso o exemplo de proporção no corpo humano e ficaram bastante atentos as medidas que eram encontradas no corpo da colega e participaram procurando os resultados das divisões propostas para encontrar o número de ouro.

Ainda sobre proporção a equação (13) foi demonstrada para os alunos com objetivo de facilitar a Generalização do Teorema de Pitágoras e ainda a questão 2 do apêndice B foi resolvida juntamente com os educandos.

Em cada demonstração efetuada percebia-se a dificuldade dos alunos, já que eles estavam tendo contato com algo que normalmente eles não têm.

No terceiro encontro o assunto abordado era semelhança de figuras planas, como nos outros casos, foi trabalhada a definição e ainda a questão 3 do apêndice B foi resolvida em sala, em seguida foi proposto para os alunos trazerem uma pesquisa no próximo encontro sobre Pitágoras e o Teorema de Pitágoras.

No quarto encontro foi feito um estudo histórico sobre o Teorema de Pitágoras, para que este tema seja abordado na sala como fator estimulante para os alunos. Neste encontro foi entregue e lida a pesquisa realizada pelos alunos, pelo fato da escola ser em zona rural alguns alunos não tem acesso a internet e poucos alunos entregaram a pesquisa. Mesmo com essa dificuldade dos alunos a história do Teorema foi discutida em sala e muitos dos alunos descobriram neste momento a razão do nome do teorema e quem era Pitágoras, e ainda que antes dele outros povos já tinham conhecimento desse teorema.

Além de se esclarecer essas curiosidades sobre o teorema, foram desenvolvidas duas atividades em sala de aula com cunho histórico. A primeira atividade foi realizada em trio onde os alunos receberam um barbante com 12 nós fechando o barbante, e deveriam montar um triângulo retângulo, como mostra as figuras 23, 24, 25.

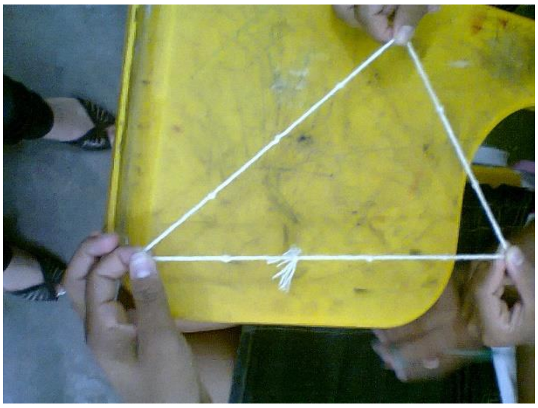


Figura 23: Grupo 1

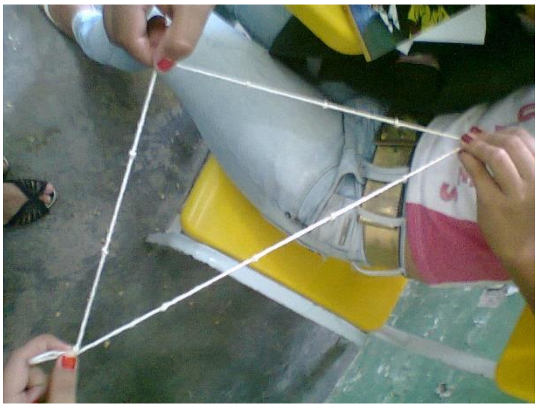


Figura 24: Grupo 2

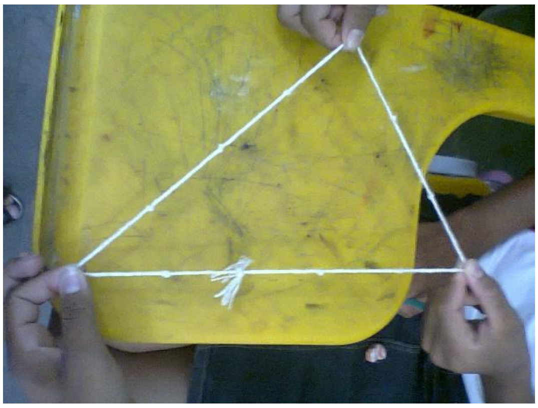


Figura 25: Grupo 3

A segunda atividade realizada é segundo Calabria (2013, p.7) “um problema que aparece no texto babilônico BM 85196, que se refere a triângulos retângulos, utilizando-se o Teorema de Pitágoras na sua resolução”, muito antes do próprio Pitágoras e que está na questão 4 do apêndice B.

No quinto encontro o Teorema de Pitágoras foi abordado, primeiramente definindo o que era o triângulo retângulo e qual a relação existente entre seus lados, e o que significava geometricamente a identidade $a^2 = b^2 + c^2$. Como o conteúdo de semelhança já tinha sido trabalhado, a demonstração por semelhança foi a primeira a ser apresentada aos alunos, e ainda foram resolvidas as questões 4 e 5 do apêndice B.

Como nos outros casos de demonstrações os alunos acompanharam a demonstração por semelhança, no princípio muito assustados, mas no decorrer da demonstração eles já conseguiam participar de maneira ativa.

No sexto encontro, foram usados o material concreto para mostrar o Teorema de Pitágoras. A turma foi dividida em três grupos e cada grupo ficou com uma atividade diferente. O grupo 1 fez a demonstração clássica com o material concreto, o grupo 2 montou o quebra cabeça pitagórico retirado do trabalho Atividades de Laboratório de Ensino de Matemática e o grupo 3 usou uma atividade desenvolvida no trabalho de Penafiel e Yun com grãos de feijão para mostrar a generalização do teorema, como mostram as figuras de 26 a 32.

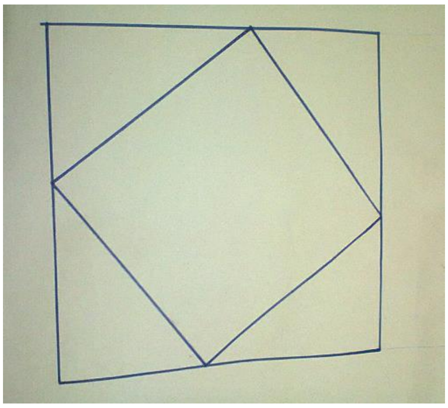


Figura 26: Grupo 1

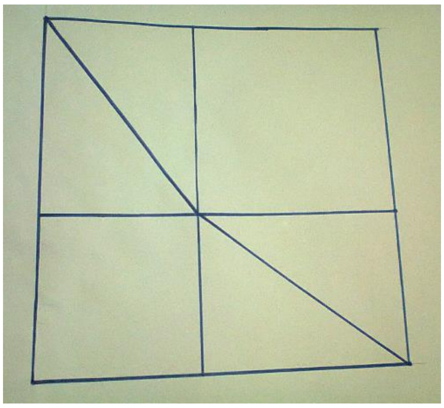


Figura 27: Grupo 1

Figura 28: Demonstração Clássica

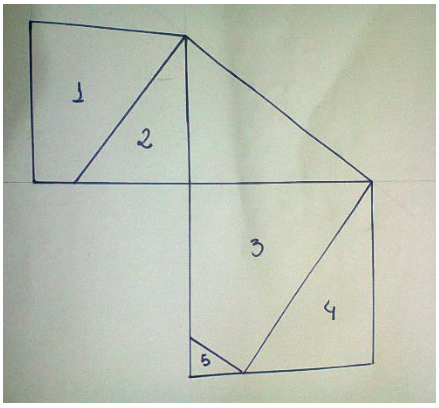


Figura 29: Grupo 2

Figura 30: Quebra cabeça pitagórico

Figura 31: grupo 3

Figura 32: Generalização do Teorema de Pitágoras

O grupo que teve mais dificuldade foi o grupo 2 que não estava conseguindo montar o quebra-cabeça pitagórico, mas que no final consegui realizar a atividade com sucesso.

Após a realização dessas atividades se fez o uso da demonstração formal, explicando a demonstração clássica montada pelo grupo 1 com material concreto, para isso os desenhos das figuras 26 e 27 foram feitos no quadro e depois o grupo apresentou seu cartaz. Além disso, foi feito a generalização do Teorema, levando em conta atividade desenvolvida pelo grupo 3.

Como aplicação do Teorema de Pitágoras foi trabalhado com os alunos a área do triângulo equilátero e resolvido a questão 6 do apêndice B, e para trabalhar a Generalização do Teorema foi resolvido em sala o Problema de Hipocrátes.

Depois de realizar todas essas as atividades propostas foi aplicada uma nova atividade individual sobre o tema para os alunos, visando identificar se eles conseguiam definir o Teorema, representá-lo geometricamente e fazer algumas aplicações.

6. RESULTADOS

Na atividade a priori os alunos tiveram um bom desenvolvimento nas primeiras questões, mas na terceira, na quarta e principalmente na sexta questão o desempenho não foi satisfatório, já a quinta foi razoável, como mostra o quadro 1:

Quadro 1: Resultado da atividade a priori

Questão	Nº de alunos que acertaram completamente ou parcialmente a questão	Nº de alunos que erraram ou não fizeram a questão
01	18	04
02	18	04
03	06	16
04	08	14
05	11	11
06	01	21

Como pode-se perceber no apêndice C a primeira questão pede para identificar os catetos e a hipotenusa de cada um dos quatro triângulos retângulo. Neste ponto a maioria dos alunos conseguiu se desenvolver bem, levando em conta que os triângulos estavam rotacionados e somente o quarto triângulo tinha seus catetos paralelos aos lados da folha, o que facilita a identificação. No entanto dos 18 alunos que acertaram a primeira questão apenas 10 a acertaram completamente, o que demonstra que eles não tinham tanta segurança no que estavam fazendo. E ainda os 8 que erraram em algum ponto da questão, também erraram o quarto triângulo, o que é um fator surpreendente já que este seria o de menor dificuldade.

Quanto a segunda questão, onde os alunos deveriam escrever a fórmula do Teorema de Pitágoras, poucos não conseguiram escrever corretamente, pois dos 4 que não acertaram 3 queriam escrever uma proporção e 1 colocou duas igualdades na fórmula.

A terceira questão revelou que mesmo lembrando da fórmula muitos dos alunos não sabem aplicá-la, pois não entenderam completamente a relação entre esta e o triângulo retângulo. Outra dificuldade dos educandos é identificar quem são os catetos e a hipotenusa quando não há o desenho do triângulo, já que eles associam a hipotenusa apenas ao lado oposto ao ângulo reto, esquecendo que esta, também é o maior lado do triângulo.

Nesta questão onde eles deveriam dizer se os triângulos eram ou não retângulos, apenas conhecendo a medida dos seus lados, grande parte da turma se quer respondeu, pois dos 16 que não acertaram a questão, 14 nem tentaram resolver.

Na quarta questão onde eles deveriam encontrar o lado desconhecido do triângulo, como existia o desenho do triângulo retângulo, eles tiveram menos dificuldade que na terceira para aplicar a fórmula, porém apresentaram outras dificuldades para realizar com sucesso a questão. O mais intrigante é que ninguém acertou completamente a questão, mesmo sendo esta, uma aplicação muito simples do teorema.

Como mostra o apêndice C, na letra a da questão 4 a medida desconhecida é a hipotenusa, e mesmo assim, dos 8 alunos que acertaram parcialmente a questão apenas 4 fizeram este quesito corretamente, a maior dificuldade dos alunos foi no momento de encontrar a raiz quadrada de 1225.

No que diz respeito aos quesitos b e c as dificuldades ainda eram maiores, pois eles tinham que encontrar a medida de um dos catetos conhecendo a hipotenusa e o outro cateto, somente 2 alunos acertaram o quesito b completamente e 1 aluna errou apenas na hora de encontrar a raiz de 49, o que é bastante preocupante. O erro da maioria dos alunos era relacionar o valor desconhecido sempre à hipotenusa, para a maioria, a questão estava querendo saber o valor da hipotenusa.

Com relação a letra c, dos 8 alunos que acertaram parcialmente a questão 4, 3 não a fizeram, 1 colocou o valor desconhecido como hipotenusa e os outros 4 aplicaram a fórmula corretamente, mas erraram em alguma etapa, ou seja, ninguém acertou completamente a letra c.

A quinta questão apresentava uma situação do dia a dia e foi a que apresentou melhor resultado dos alunos, em relação as outras questões de aplicação do Teorema, talvez porque a medida que se queria obter era a da hipotenusa, o que é um fator favorável. Um outro fator facilitador da questão é o fato de se tratar de números pequenos, onde os alunos vão se deparar no final da questão com a raiz quadrada de 25 que é bastante conhecida. O resultado dessas condições foi que 50% da turma acertou completamente a questão, um número bom em relação as outras questões de aplicação da fórmula, mas por outro lado, um número baixo levando-se em conta o grau de dificuldade da questão.

Pode-se observar que dentre os 11 alunos que não acertaram a questão, 6 nem tentaram fazê-la e os outros 5 que fizeram apresentaram cálculos que estava muito distante do que se esperava. O mais interessante é que desses 11 alunos apenas dois não responderam a segunda questão, que pede a fórmula, corretamente, logo eles conheciam a fórmula e mesmo assim não conseguiram aplicá-la e os outros dois que erraram a fórmula na segunda questão, conseguiram êxito na quinta questão, o que se torna um fator intrigante.

A sexta questão foi a que apresentou pior resultado sendo que dentre os 22 alunos apenas 1 acertou a questão, e o mais dramático é que dos 21 que não acertaram apenas 8 tentaram resolver e mesmo assim apresentaram resoluções muito aquém do esperado, apesar da questão ter vários pontos facilitadores, pois apresentava uma figura quadriculada e a medida procurada era a hipotenusa. Mesmo assim os alunos não conseguiram respondê-la.

De acordo com os resultados apresentados na atividade a priori conclui-se que os alunos conseguem identificar com sucesso os catetos e a hipotenusa no triângulo retângulo quando existe a figura e eles conhecem a identidade $a^2 = b^2 + c^2$ sabendo que esta representa a fórmula do Teorema de Pitágoras.

No entanto, percebe-se que quando não existe o desenho do triângulo os alunos apresentam uma maior dificuldade em identificar quem poderia ser a hipotenusa e os catetos e não conseguem perceber que se aquelas medidas satisfazem o Teorema de Pitágoras este triângulo é retângulo. O mais contraditório é que eles não conseguem solucionar com sucesso os problemas envolvendo o Teorema, mesmo sabendo identificar os lados do triângulo e conhecendo sua fórmula, ou seja, eles parecem conhecer a fórmula, mas não sabem o que cada incógnita dela significa.

Na atividade a posteriori que se encontra no apêndice D, os alunos tiveram maior dificuldade na questão 3 onde eles tinham que justificar sua resposta, veja quadro 2.

Quadro 2: Resultado da atividade a posteriori

Questão	Nº de alunos que acertaram a questão	Nº de alunos que erraram a questão
01	09	13
02	17	05
03	03	19
04	11	11
05	09	13

Na primeira questão onde os alunos deveriam representar geometricamente o Teorema de Pitágoras, dos 13 alunos que não acertaram, 3 deixaram a questão em branco e outros 10 desenharam apenas um triângulo, que muitas vezes nem era retângulo ou desenharam quadrados aleatoriamente.

A questão 2 foi a que apresentou melhor desempenho dos alunos e também uma grande evolução no período entre a atividade a priori e a posteriori, já que esta atividade tem o mesmo objetivo da questão 4 da atividade a priori somente com um diferencial, apresenta medidas em raiz quadrada, o que aumenta o grau de dificuldade para os alunos.

Vale ainda salientar que 7 dos 17 acertaram a questão completamente, e ainda obtiveram êxito na parte de radiciação, que foi uma grande dificuldade da atividade a priori. Entre os 10 que acertaram parcialmente a questão, pode-se destacar que apenas 3 acertaram a letra c, porque tiveram dificuldade com números maiores.

Um ponto bastante importante é fato de que dentre os 22 alunos presentes, apenas 3 não conseguiram identificar na letra b que a medida desconhecida não era a hipotenusa.

A questão 3 da atividade a posteriori tem uma grande semelhança com a questão 3 da atividade a priori e foi a que obteve o pior desempenho, os 19 alunos que erraram, apresentaram respostas que demonstravam uma total falta de compreensão. Desses 19 que não acertaram a questão, 5 deixaram em branco, 2 conseguiram visualizar o triângulo e reconhecer que se este fora retângulo, 26 seria a hipotenusa, porém não conseguiram aplicar o Teorema para realmente comprovar sua afirmativa, os outros 12 responderam sim ou não aleatoriamente e colocaram como justificativa as mais absurdas possíveis, como pode-se observar na resposta de uma aluna que diz: “Não. Porque eu não sei se ele tem o ângulo de 90º”.

Na questão 4 é usada uma situação bastante simples e a medida que se deseja descobrir é a hipotenusa, mesmo assim, apenas 50% dos alunos alcançaram o resultado esperado. A maior dificuldade entre os que não acertaram em 1º lugar foi, identificar corretamente os catetos e a hipotenusa e em 2º, resolver corretamente potência e radiciação, pois 6 alunos erraram na identificação e 5 na parte de potência e raiz quadrada.

A questão 5 apresenta um problema análogo a questão 6 da atividade a priori, e obteve um resultado bem mais significativo, mesmo sendo esta questão de maior dificuldade já que não apresentava a figura em uma imagem quadriculada, onde fica mais simples identificar o ângulo de 90º. Dos 13 que não acertaram 3 não tentaram resolver, 4 confundiram um dos catetos com a hipotenusa e 6 erram na resolução da equação ou na resolução das potências e raízes quadradas.

Quando comparamos o resultado das duas atividades temos que 10 estudantes melhoram as notas e 12 alunos que diminuíram o rendimento, como mostra o quadro 3.

Quadro 3: Comparativo do rendimento dos alunos nas duas atividades

Aluno	Rendimento da atividade a priori	Rendimento da atividade a posteriori
01	14%	6%
02	38%	60%
03	64%	60%
04	8%	6%
05	42%	100%
06	78%	60%
07	40%	70%
08	44%	6%
09	20%	6%
10	24%	40%
11	2%	14%
12	90%	72%
13	72%	40%
14	36%	44%
15	10%	72%
16	20%	48%
17	16%	6%
18	20%	18%
19	40%	20%
20	20%	30%
21	42%	72%
22	76%	68%

Um outro comparativo que pode ser observado é a média aritmética da turma nas duas atividades.

Quadro 4: Média Aritmética da turma

Atividade	Média Aritmética
A priori	$3{,}7\overline{09}$
A posteriori	$4{,}1\overline{72}$

De acordo com o quadro 4 a média aritmética da turma teve um pequeno aumento entre as duas atividades aplicadas, mesmo que segundo o quadro 3 o número de alunos que aumentaram o rendimento foi um pouco menor do que o número de alunos que diminuíram. E ainda, pode-se salientar que a atividade posteriori apresentava um grau de dificuldades maior.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Visando tornar o ensino da Matemática mais significativo e atraente para os alunos, este trabalho foi elaborado sob a perspectiva de desenvolver uma série didática dinâmica e participativa, buscando envolver o aluno e instigá-lo a construir suas próprias conclusões.

Apesar dos resultados apresentarem um crescimento pequeno no rendimento da turma, consideramos que o trabalho foi bastante significativo, quando observamos a participação da turma e evolução de muitos alunos durante a aplicação do projeto.

Os alunos conseguiram realizar as atividades de construção com sucesso apresentando muitas vezes dificuldades, mas que com o auxílio da autora da pesquisa eram superadas. Logo as atividades programadas foram realizadas apesar das dificuldades que serão destacadas logo mais.

Alguns fatores impactaram os alunos, pode-se destacar que a princípio eles estranharam a metodologia, pois sempre tinha que realizar em grupo uma atividade com material concreto que pudesse lhe auxiliar a compreender o conteúdo, mas o que mais assustou os alunos foram as demonstrações que até então eram desconhecidas por eles.

Os objetivos de demonstrar, generalizar e aplicar o Teorema de Pitágoras foram alcançados. Os alunos conseguiram através de material concreto mostrar a demonstração clássica e a partir disso apresentar o Teorema geometricamente, algo que até então eles não conheciam. E ainda na atividade a posteriori 40,9% dos alunos conseguiram representar geometricamente o teorema.

Com relação as atividades a priori e a posteriori pode-se perceber que mesmo que a maioria dos alunos diminuíram o rendimento, a média aritmética da turma aumentou, isso significa que os alunos que aumentaram o rendimento tiveram um aumento mais significativo do que a baixa que teve os alunos que diminuíram o rendimento.

Um ponto que ainda pode ser destacado em relação as atividades citadas no parágrafo anterior, tem-se que a segunda atividade tinha um grau de dificuldade maior que a primeira e ainda nas questões que tinham o mesmo objetivo a segunda atividade teve um rendimento melhor.

Ainda durante a aplicação da série didática alguns fatores prejudicaram a realização do trabalho, fazendo com que o cronograma pré-estabelecido e que se encontra no apêndice A, não fosse cumprido. O primeiro cronograma previa a realização da pesquisa em um período de 21 dias utilizando 14 aulas, porém ele foi realizado em um período de 26 dias, utilizando 14 aulas.

O cronograma foi alterado porque neste período a chuva provocou a falta de energia elétrica no distrito onde se localiza a Escola, o que impediu os ônibus de estudantes de serem abastecidos, fazendo com que a escola ficasse sem aula no dia 18/11/2014 e também alguns ônibus quebraram neste período, fazendo com alguns alunos faltassem, como mostra o apêndice E.

Mesmo que algumas dificuldades não tenham sido extintas da turma, o avanço dos alunos foi notório e isso fica claro nas questões 02, 04 e 05 da atividade a posteriori, já que os melhores resultados da atividade a priori estão nas primeiras questões que eram bastante simples. Portanto, pode-se notar uma evolução nos alunos no que diz respeito à aplicação da fórmula.

O proposito primordial deste trabalho foi apresentar o Teorema de Pitágoras de maneira significativa para os alunos, onde este aluno pudesse se envolver nas aulas e ser ativo na construção do seu conhecimento, por isso a proposta aqui apresentada defende que desde o primeiro momento em que o Teorema de Pitágoras seja trabalhado suas demonstrações sejam feitas em sala de aula.

De acordo com o que foi aplicado na turma percebe-se que a princípio devem ser aplicadas atividades concretas onde os alunos possam construir algo, pois motivam sua participação e despertam sua atenção, portanto as demonstrações devem ser antecedidas de atividades em grupo ou individual que levem o educando a perceber a propriedade peculiar existente no triângulo retângulo, após isso as demonstrações formais serão realizadas com sucesso.

Desenvolver uma aula que busque demonstrar, generalizar e aplicar o Teorema de Pitágoras pode parecer a princípio muito avançado para uma turma de 9º ano, mas se bem planejada e executada de acordo com evolução dos alunos, vai assustar os educandos no começo, porém os levará a uma compreensão do conteúdo bem mais significativa.

Os conteúdos matemáticos só serão realmente entendidos quando o aluno conseguir entender como se chegou a tais resultados, por isso acreditamos que este Teorema assim como outros devem ser demonstrados nas primeiras aulas em que ele é abordado, para que nos anos subsequentes os educandos lembrem com facilidade o que realmente aprenderam e entendam onde e como podem aplicar o seu conhecimento.

O trabalho aqui apresentado contribuiu para o desenvolvimento dos alunos tanto na aprendizagem como na participação das aulas, mostrando o Teorema de Pitágoras sob um ângulo que eles ainda não conheciam e comprovando que realmente este teorema é verdadeiro.

Portanto, os objetivos propostos foram alcançados e a turma conseguiu apresentar um resultado favorável, mesmo que alguns alunos não obtiveram os resultados esperados, o que é natural já que cada um reage de modo diferente, mas ainda estes conseguiram participar de alguma maneira das aulas. Como destaque tem-se um resultado bastante motivador onde a aluna 05 teve 42% de aproveitamento na primeira atividade e depois da aplicação da pesquisa ela teve 100% de aproveitamento na segunda atividade.

Como recomendação orienta-se que as demonstrações e generalizações não sejam omitidas nas aulas, para que o aluno perceba que os teoremas ou propriedades, abordados em sala são resultados de uma lógica matemática e tem uma aplicação em problemas matemáticos ou cotidianos.

Durante a correção da atividade a priori percebeu-se a deficiência dos alunos nos conteúdos de potenciação e radiação, por isso será de bastante aproveitamento introduzir esses dois assuntos em uma nova aplicação dessa pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBILOGRÁFICAS

ACOSTA – ROBLEDO, J. U. Analogía para derivar un teorema extendido de Pitágoras para “N” dimensions. México. v.13. Nº1. Março 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Brasília: Secretaria de Educação Fundamental, 1988.

BELUSSI, G. M.; GERALDINI, D. A.; PRADO, E. A. Número de ouro. Londrina. v.1. Nº1. Março 2005.

BRESSIANI, L. *Teorema de Pitágoras*: Abordagem em Mídias Digitais. 14. Porto Alegre. 2011.

CALABRIA, A. R. Histórias e histórias: Os Babilônicos e o Teorema de Pitágoras. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v. 1, n 81, p.7, mai./agost. 2013.

CASTRO, W. M. F. Sobre o Teorema de Pitágoras. 2013. 55 f. Monografia (Mestrado) – Programa de Metrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Universidade Federal Fluminense.

FERNANDES, J. A. Equações Quadráticas na Antiga Babilônia. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, v.1, n 81, p. 26, mai/agost. 2013.

LEIVAS, J. C. P. *Pitágoras e van Hieli*: uma possibilidade de conexão. Santa Maria. V. 18 . nº 3. Bauru 2012.

LIMA, E. L. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 97 p. Coleção do Professor de Matemática. 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio. 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 280 p. Coleção do Professor de Matemática. 2006.b.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Temas e Problemas Elementares. 12 ed. Rio de Janeiro: SBM, 256 p. Coleção do Professor de Matemática. 2006.a

MUNIZ NETO, A. C. Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 464 p. Coleção do Professor de Matemática. 2013.

OLFOS, R.; GUZMAN I.; ESTRELLA S. *Gestion didáction em classe y su relación com las decisiones del professor*: el caso del teorema de Pitágoras em séptimo grado. Rio Claro.v. 28. Nº 48. Abril 2014.

PENAFIEL, A. F.; YUN J. O. El Teorema de Pitágoras com frijoles de goma. México. v. 20. Nº 1. Abril 2008.

SANTOS, M. N.; VIANA, M. C. V. Abordagem histórica para a aprendizagem dos teoremas de Tales e de Pitágoras. In: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 9., 2010. Belo Horizonte. **Anais ...** Ouro Preto. SBHMat. 2010.

APÊNDICE A – Plano de Aula

Público Alvo: 9º ano do ensino fundamental

Conteúdo estruturante: Geometria

Conteúdo Específico: Teorema de Pitágoras

Objetivo Geral:

Avaliar o desenvolvimento dos alunos diante dessa nova abordagem do Teorema de Pitágoras;

Objetivos: Definir áreas de figuras planas;

Definir proporcionalidade;

Definir figuras semelhantes;

Demonstrar o Teorema de Pitágoras usando áreas e semelhança;

Aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar a área do triângulo retângulo;

Generalizar o Teorema de Pitágoras;

Aplicar o Teorema de Pitágoras em problemas como a Área do triângulo equilátero e o Problema de Hipócrates

Metodologia:

Primeira etapa: Atividade a priori.

Aplicação de uma atividade individual para identificar o que os alunos aprenderam do Teorema de Pitágoras.

Segunda etapa: Definindo áreas

Explicar o que é área e definir a área do quadrado de lado 1, depois dividir a sala em grupos, sendo que cada grupo tenha em mãos as seguintes figuras geométricas: Quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio.

Grupo 1: montar um quadrado de lado $n \in \mathbb{Z}$, usando quadradinhos de lado 1, para deduzir a área do quadrado

Grupo 2: fazer com o retângulo o mesmo que foi feito com o quadrado.

Grupo 3: Transformar o paralelogramo em um retângulo, usando recorte e colagem para deduzir a área do paralelogramo.

Grupo 4: Dividir um paralelogramo em dois triângulos para deduzir a área do triângulo.

Grupo 5: Montar um trapézio usando um triângulo e um paralelogramo para deduzir a área do trapézio.

Atividade: resolver a questão 1 do apêndice B

Terceira etapa: Definindo proporcionalidade e semelhança.

Definir proporcionalidade e algumas de suas propriedades usando exemplos. Trabalhar com os alunos o famoso número de ouro. Para isso a sala será dividida em duplas e será pedido, antecipadamente, que os alunos tragam uma calculadora e uma fita métrica para verificarem a proporção do seu corpo.

Atividade: resolver a questão 2 do apêndice B
Definir semelhança no geral e mais especificamente semelhança de triângulos, dá exemplos. Usar régua e compasso para desenhar triângulos semelhantes e achar a sua razão de semelhança.
Atividade: resolver a questão 3 do apêndice B

Quarta etapa: Teorema de Pitágoras (história).
Pedir antecipadamente que os alunos façam em grupo uma pesquisa sobre Pitágoras e o Teorema, no dia da aula cada grupo terá a oportunidade de dizer o que mais lhe chamou a atenção na pesquisa. Depois da participação dos grupos a professora fará o complemento da parte histórica e explicará porque o Teorema foi batizado com o nome de Pitágoras. Para comprovar que outros povos já tinham conhecimento desse Teorema será realizado a atividade dos 12 nós desenvolvida pelos egípcios, portanto a sala será dividida em trios, para que cada trio monte o seu triângulo e explique o que percebeu com aquela atividade.
Atividade: resolver a questão 4 do apêndice B.

Quinta etapa: Teorema de Pitágoras (demonstração, generalização e aplicação)
Enunciar o Teorema de Pitágoras e mostrar o teorema através de algumas atividades como: quebra cabeça pitagórico, construção da demonstração clássica, atividade com a caixa de papelão e feijão, com semicírculos. Depois dessas atividades fazer no quadro a demonstração clássica, a demonstração por semelhança e a generalização do Teorema de Pitágoras.
Exemplificar situações do cotidiano que utilizam o Teorema de Pitágoras e também algumas situações dentro da própria matemática.
Atividade: resolver as questões 5, 6 e 7 do apêndice B.

Sexta etapa: Atividade a posteriori
Aplicar novamente uma atividade avaliativa abordando o Teorema de Pitágoras, para identificar a evolução da aprendizagem dos alunos depois da sequência didática proposta.

Cronograma

Conteúdo	Data	Quantidade de aulas
Atividade a priori	04/11/2014	2
Área de figuras planas	06/11/2014 e 11/11/2014	2
Proporcionalidade	11/11/2014	1
Semelhança de figuras planas	13/11/2014 e 18/11/2014	2
Teorema de Pitágoras (histórico)	18/11/2014	1
Teorema de Pitágoras (demonstração)	20/11/2014 e 24/11/2014	2
Teorema de Pitágoras (generalização e aplicação)	24/11/2014	2
Atividade a posteriori	25/11/2014	2

APÊNDICE B – Atividade de sala de aula

Escola: ____

Educando: __________________________ Série: _____

Atividades

1. De uma folha de papel retangular com lados medindo 21cm e 29,5 cm, Beatriz recortou dois triângulos e obteve um paralelogramo.

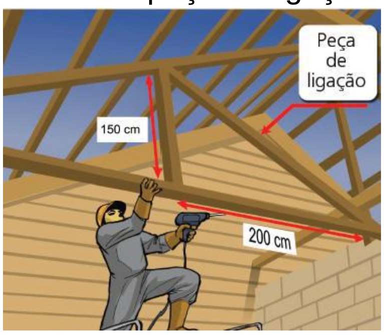
a. Qual a área:
   Da folha de papel?
   Do paralelogramo que Beatriz obteve?
b. A área do paralelogramo é maior, menor ou igual à soma das áreas dos dois triângulos?

2. Sabendo que MN = 60 cm, OP = 15 cm e QR = 100 cm, determine a medida de ST de modo que MN e OP sejam proporcionais QR e ST.

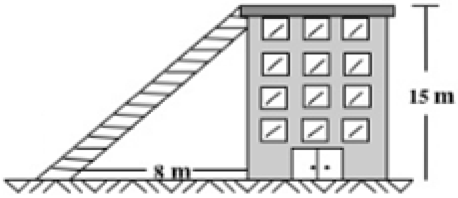
3. A razão de semelhança entre dois hexágonos regulares é 7/2. Determine a medida do lado de cada um desses hexágonos sabendo que o perímetro do maior deles é 50,4.

4. Uma viga de madeira está apoiada contra uma parede. O comprimento da viga é 30 unidades. Se o topo da viga escorrega 6 unidades, quanto a base escorrega no solo? Reciprocamente, se ela escorrega 18 unidades sobre o solo, quanto ela escorrega para baixo?

5. Qual deve ser o comprimento da peça de ligação do telhado?



6. A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8m de sua base ligada ao topo do edifício. Qual é o comprimento da escada?



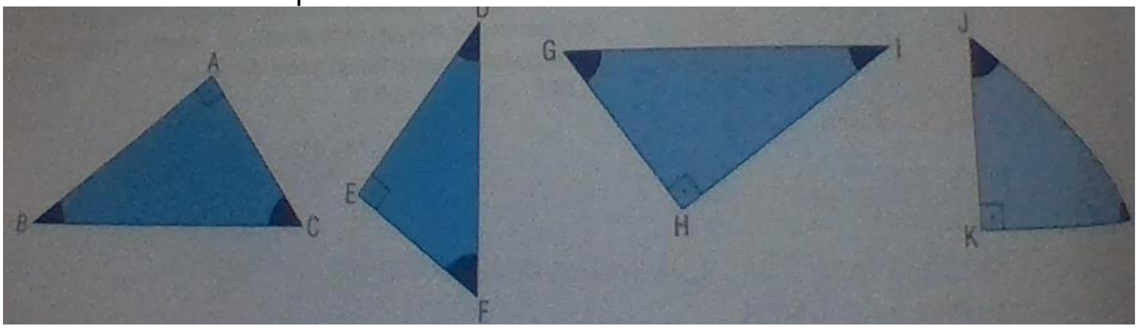
7. Qual a área de um triângulo equilátero de lado 4 cm?

APÊNDICE C – Atividade a priori

Escola: ____
Educando: _____________________________ Série: _____

Teorema de Pitágoras

1. Na figura, quais são os catetos do triângulo retângulo e qual segmento recebe o nome de hipotenusa?

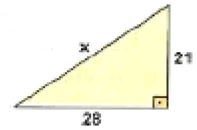


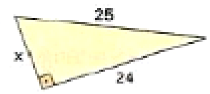
2. Você lembra da fórmula do Teorema de Pitágoras? Escreva-a.

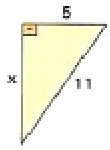
3. No quadro estão indicadas as medidas dos lados de alguns triângulos. Utilizando o Teorema de Pitágoras, verifique quais deles são retângulos.

Triângulo	Medida do lado em (cm)		
	A	B	C
I	6	4	3
II	12,5	12	3,5
III	15	12	8
IV	37	35	12

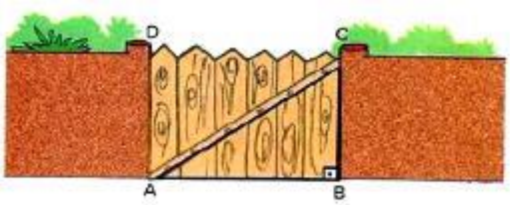
4. Aplicando o teorema de Pitágoras, determine a medida x indicada em cada um dos triângulos:

a)


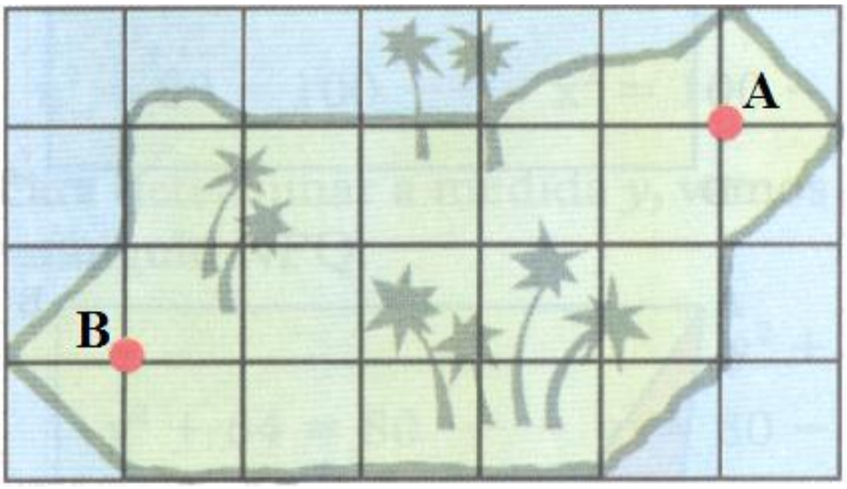
b)


c)


5. O portão de entrada de uma casa tem 4m de comprimento e 3m de altura. Que comprimento teria uma trave de madeira que se estendesse do ponto A até o ponto C?



6. A figura representa uma ilha em escala reduzida. Se o lado de cada quadradinho do mapa equivale a 1 km no tamanho real, qual é a distância, em linha reta, entre os pontos A e B?



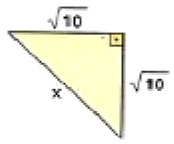
APÊNDICE D – Atividade a posteriori

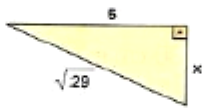
Escola: ____
Educando: ___________________________________ Série:____

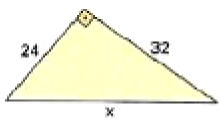
Teorema de Pitágoras

1. O Teorema de Pitágoras diz que a área do quadrado cujo lado é a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos. Represente esse Teorema geometricamente.

2. Aplicando o Teorema de Pitágoras, determine a medida *x* indicada em cada um dos triângulos.



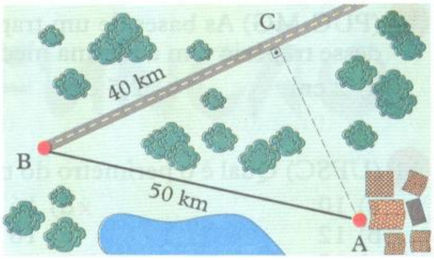




3. Os lados de um triângulo *ABC* medem 10*cm,* 24*cm* e 26*cm*. Você pode afirmar que ele é retângulo? Justifique.

4. Uma árvore foi quebrada pelo vento e a parte do tronco que restou em pé forma um ângulo reto com o solo. Se a altura do tronco da árvore que restou em pé é de 12 m, e a ponta da parte quebrada está a 9 m da base da árvore, qual é a medida da outra parte quebrada da árvore?

5. Na figura estão apresentadas três cidades, deseja-se construir uma estrada que ligue a cidade *A* a cidade *B*, com o menor comprimento possível. Qual deverá ser o comprimento dessa estrada?



APÊNDICE E – Lista de Chamada

Aluno	06/11	11/11	13/11	20/11	21/11	25/11	26/11	27/11	02/12
01	P	P	P	P	F	F	P	P	P
02	P	P	P	P	F	P	P	P	P
03	P	P	P	P	F	P	P	P	P
04	P	P	P	P	P	P	P	P	P
05	P	P	P	P	P	P	P	P	P
06	P	P	P	P	F	P	P	P	P
07	P	P	P	P	P	P	P	P	P
08	P	P	P	P	F	P	P	P	P
09	P	P	P	P	F	P	P	P	P
10	P	P	P	P	P	P	P	P	P
11	P	F	F	P	P	F	P	P	P
12	P	P	P	P	P	F	P	P	P
13	P	P	P	P	P	F	P	P	P
14	P	F	F	P	P	P	P	P	P
15	P	P	P	P	P	P	P	P	P
16	P	F	P	F	P	P	P	P	P
17	P	P	P	P	P	P	P	P	P
18	P	P	P	F	P	F	P	P	P
19	P	P	P	P	F	F	P	P	P
20	P	P	P	P	P	P	P	P	P
21	P	P	P	P	F	P	P	P	P
22	P	P	P	P	P	P	P	P	P