UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOZIEL LIMA OLIVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

MOSSORÓ
2014

JOZIEL LIMA OLIVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada à Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência

O48r Oliveira, Joziel Lima

Resolução de problemas de otimização sem o uso do cálculo diferencial: uma proposta para o ensino médio / Joziel Lima Oliveira -- Mossoró, 2014.
74f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Odacir Almeida Neves

Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação.

1. Matemática. 2 . Ensino médio. 3. Otimização. 4. Resolução de problemas. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT /846-14 CDD: 510

Bibliotecária: Vanessa de Oliveira Pessoa
CRB-15/453

JOZIEL LIMA OLIVEIRA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO SEM O USO DO CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 15 de agosto de 2014

BANCA EXAMINADORA

Profº. Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA
Presidente

Profº. Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA
Primeiro Membro

Profº. Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 15 de agosto de 2014.

Dedico este trabalho a meu filho Rodrigo Elon, a minha esposa Maria Claudênia, a meus pais: João Rodrigues e Maria do Socorro, a meu tio Veridiano Rodrigues e a todos os meus amigos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais João Rodrigues e Maria do Socorro, minha esposa Claudênia, meu tio Veridiano, e a todos da minha família que, com muito apoio, não mediram esforços para que eu concluísse mais esta etapa de minha vida.

Ao professor Dr. Odacir Almeida Neves pela orientação no desenvolvimento deste trabalho.

A todos os meus colegas do PROFMAT polo da UFERSA, tanto docentes quanto discentes, mas em especial aos companheiros do grupo de estudo JAGUARMAT: Joziel Lima, Claudenor Silva, Reginaldo Amorim e Ueslei Marques, com os quais tive a honra de conviver durante esses dois anos de estudos, compartilhando conhecimento e aprendendo sobre os mais diversos assuntos durante as nossas inesquecíveis viagens do Ceará ao Rio Grande do Norte.

Ao coordenador do Curso (PROFMAT – UFERSA), Ronaldo Garcia por todo o incentivo, por não medir esforços para que seus alunos pudessem alcançar o sucesso, pelo apoio e por acreditar em cada um dos alunos.

Aos amigos e colegas, pelo incentivo e apoio constantes.

"O que é sucesso?
Rir muito e com frequência; ganhar o respeito das pessoas inteligentes e o afeto das crianças; merecer a consideração de críticos honestos e suportar a traição de falsos amigos; apreciar a beleza, encontrar o melhor, seja por uma saudável criança, um canteiro de jardim ou uma redimida condição social; saber que ao menos uma vida respirou mais fácil porque você viveu.
Isto é ter sucesso!"

(Ralph Waldo Emerson)

RESUMO

A matemática é uma área do conhecimento que se originou e desenvolveu-se nos problemas que o homem encontra. Assim a essência da matemática é a resolução de problemas. Desta forma para seu ensino é necessário que os alunos aprendam a ter criatividade e participação. Nesse intuito os problemas de otimização (assim como quaisquer outros problemas de matemática) são fundamentais, pois permitem ao aluno colocar-se diante de questionamentos e pensar por si próprios, possibilitando o exercício do raciocínio lógico e não apenas o uso frequente de formulações pré-definidas. Este trabalho apresenta uma proposta de trabalho com alguns problemas de otimização em nível de Ensino Médio e utilizando somente ferramentas desta etapa do ensino básico aqui no Brasil. Iniciamos com uma breve apresentação de ideais nos quais nosso trabalho se apoia. Tais ideais encontram-se nas atuais propostas educacionais no ensino de matemática de nosso país como os Parâmetros Curriculares Nacionais. Em sequência faremos uma rápida revisão histórica da origem dos problemas de otimização apresentando alguns exemplos. Logo após, daremos uma revisão em alguns conteúdos do Ensino Médio necessários ao entendimento dos problemas de otimização propostos a se trabalharem com alunos que ainda não tiveram contato com o Cálculo Diferencial. Para cada problema proposto apresentaremos uma ou duas soluções, sempre fazendo observações a respeito do conteúdo utilizado e em que momento do ensino pode-se trabalhá-lo. Este trabalho pode fazer parte do material adotado em estudo preparatório para situações futuras como resolução de problemas cotidianos, concursos, vestibulares e principalmente olimpíadas de matemática como a Olimpíada Brasileira de Matemática.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Otimização. Matemática no Ensino Médio.

ABSTRACT

Math is an area of knowledge that originated and developed in the problems that man finds. Therefore the essence of mathematics is problem solving. In this way, it is necessary for teaching students to learn to take creativity and participation. With this aim optimization problems (as well as any other math problems) are fundamental as they enable the student to put forth the questions and think for themselves, enabling the exercise of logical reasoning and not just the frequent use of formulations pre-defined. This study presents a proposal to work with some optimization problems in high school level and using only tools in this stage of basic education in Brazil. We begin with a brief presentation of ideals to which our study is based. Such ideals are in current educational proposals in mathematics teaching of our country as the Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs. In sequence we will do a quick historical review of the origin of optimization problems presented some examples. Soon after, we'll review some content in high school needed to understand the problems of optimization proposed to work with students who have not had contact with the Differential Calculus. For each issue we present the proposed one or two solutions, always making comments about the content used and at what time the school can work it. This work may be part of the material adopted preparatory study for future situations like solving everyday problems, quizzes, vestibular and especially math olympics as the Brazilian Mathematical Olympiad.

Keywords: Problem solving. Optimization. Mathematics in high school.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 A proposta

O presente trabalho tem como objetivo principal propor uma adequação e utilização no Ensino Médio dos chamados *problemas de otimização* ou *problemas de determinação de máximos e mínimos*. Tais problemas são comumente vistos, em nível de Brasil, apenas no ensino superior e somente em cursos que contenham em sua grade curricular a tradicional disciplina de *cálculo diferencial e integral*. Tal disciplina oferece base referencial para a compreensão do desenvolvimento científico e tecnológico desde que foi desenvolvida por Newton na Inglaterra e Leibniz na Alemanha, há trezentos anos. No cálculo diferencial as soluções dos problemas de otimização utilizam-se de ferramentas específicas da própria disciplina (*as derivadas*), o que torna inviável para alunos de Ensino Médio entendê-las antes de conhecerem a disciplina.

Por outro lado, nos dias atuais faz-se necessário que professores busquem cada vez mais formas de motivar os alunos a estudar. Esta necessidade torna-se mais forte no que diz respeito ao estudo de Matemática, haja vista que muitos alunos já têm pré-formado o conceito de que estudar matemática é difícil. Daí, pretendemos neste trabalho descrever e defender a adoção de uma proposta que possa ajudar o aluno a desenvolver conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral.

Com o intuito de iniciar a proposta deste trabalho levantamos as seguintes questões:

1. Por que trabalhar problemas de otimização no Ensino Médio é algo novo?
2. Por que trabalhar resolução destes tipos de problemas é importante?
3. É possível resolver estes problemas com conhecimentos existentes na grade curricular do Ensino Médio?

Para estas indagações podemos fazer os seguintes levantamentos:

Em nível de Brasil, a primeira resposta pode ser verificada fazendo-se uma pesquisa nos atuais livros didáticos adotados pelo MEC ou por instituições não governamentais do ramo da educação. Neste trabalho não detalharemos tal pesquisa. Citaremos aqui apenas uma conclusão geral acerca do que se pode dizer em relação aos problemas de otimização e de como estão trabalhados.

Os problemas de otimização encontrados nos livros analisados são de dois tipos:

- Os puramente algébricos, restritos às situações que recaem em uma expressão do segundo grau, apresentando “soluções modelos” condicionadas ao estudo dos pontos de máximos ou mínimos de uma função quadrática.
- E os geométricos, na maioria envolvendo áreas, que também recaem em um problema de determinar pontos de máximos ou mínimos de uma função quadrática.

Assim, torna-se claro que problemas de otimização são minimamente trabalhados no Ensino Médio atual do Brasil, restringindo-se, quase que geral, ao de trabalhar situações que recaiam em uma função do segundo grau.

Em nível de exterior, consoante [11], podemos citar como exemplo Portugal, onde há muito tempo os problemas de otimização surgiram nos manuais escolares. No entanto, comentar tal prática foge a nossa proposta, visto que, neste país, estes problemas são resolvidos, maioritariamente, através do cálculo da derivada de uma função, conteúdos lá vistos no ensino secundário, uma denominação próxima a de Ensino Médio aqui no Brasil.

Quanto à segunda pergunta, afirmamos que, em nossa perspectiva, problemas que busquem um resultado “*ótimo*”, isto é, os *problemas de otimização*, podem vir a ser mais um instrumento motivador para que alunos do Ensino Médio se interessem por matemática. Um ponto forte disto são os próprios problemas, que na maioria das vezes, deixam questionamentos que dificilmente venham a ser ignorados ou esquecidos de imediato pelo aluno. Isto é, na mente do aluno, mesmo que na não obtenção da resposta, os *problemas de otimização* podem deixar uma vontade de pensar um pouco mais. Por exemplo, falar de maximizar lucros ou minimizar despesas sempre desperta interesse, não somente nos alunos, mas em muitas pessoas.

Como já dizia Polya (2006, p. v):

> O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Por outro lado os problemas de máximos e mínimos necessitam de uma base pré-trabalhada e por isso, constituem uma forma de manter o aluno preso no enfoque do conteúdo estudado. Outra vantagem é que o estudo deste tema poderá ser feito evitando o tradicional padrão de ensino “definição → exemplos → exercícios” e em vez disso, consoante [2] (p.81) “... a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se pela apresentação de uma situação-problema ao aluno”.

A forma de apresentação de uma resolução de um destes problemas dificilmente se dar de maneira isolada e sim num conjunto de ideias, o que garante enriquecer e transformar essas ideias numa forma de estimular e ajudar a desenvolver no aluno o seu raciocínio lógico.

Ainda em conformidade com [2] (p.81), neste caso cabe ao aluno resgatar todo o conhecimento adquirido e adequá-lo a situação, cabendo ao professor, no início do processo, mediar os conteúdos a serem lembrados.

Ou seja, trabalhar problemas de otimização, que, em nossas perspectivas, são do tipo que desafiam a curiosidade e a capacidade do raciocínio, pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em matemática.

É notável ainda que os problemas de máximos e mínimos sempre abordam o desenvolvimento das habilidades[1] e competências[2] previstas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais [3]. Entre essas habilidades e competências estão as seguintes:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.)
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a aplicação da matemática e a resolução de problemas têm lugar de destaque.

> Não somente em Matemática ... a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problema novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégia de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. ([3], p.52).

Segundo [4]
[1]Habilidades se ligam a atributos relacionados não apenas ao saber-conhecer mas ao saber-fazer, saber conviver e ao saber-ser.
[2]Competências se constituem num conjunto de conhecimentos, atitudes, capacidades e aptidões que habilitam alguém para vários desempenhos da vida.

Outra pergunta que também pode surgir refere-se ao grau de dificuldade encontrado na solução destes problemas: poderá ser ele muito elevado para alunos do Ensino Médio? A resposta favorece a proposta, visto que problemas que alcancem um nível de solução mais elevado são propostos todos os anos nas mais diversas olimpíadas de matemática aplicadas a alunos de Ensino Médio. Assim, com maior razão, tais problemas servirão ainda de base preparatória para provas que requerem a utilização de soluções mais elegantes e bem elaboradas, como as que comumente aparecem em olimpíadas de matemática como a Olimpíada Brasileira de Matemática.

Por fim, ainda com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais [3]

> "... cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo".(1997, p.41)

Antes de responder a terceira pergunta daremos mais algumas informações sobre problemas de otimização.

1.2 Um pouco de história

Assim como em outras áreas da matemática, os problemas de otimização tiveram suas origens nas aplicações. Pode-se constatar que a história dos principais resultados de otimização é muito curta. Logo não é preciso voltar muitos anos para encontrar as aplicações que incentivaram o seu desenvolvimento.

É notável que os problemas de otimização são tão naturais no contexto real, o da matemática. Durante milhares de anos, matemáticos buscavam resolver sistemas de equações para melhorar observações astronômicas na babilônia, para identificar preços no mercado de comida chinês, para obter a posição e velocidade de objetos, etc. A solução deste tipo de problema contribuiu para o crescimento de algumas áreas da matemática, como podemos citar, por exemplo, a álgebra e a teoria dos números. No entanto, a resolução de inequações aparenta ter ficado a margem dos interesses dos matemáticos da época quando comparada com a resolução de equações. Podemos citar pouquíssimos casos, isolados, de matemáticos que fizeram uso de tal ferramenta. Podemos citar Fourier (1768-1830), que introduziu inequações em mecânica e que relacionou equilíbrio mecânico com um tipo de multiplicadores introduzidos por Lagrange (1736-1813) para equações. Dentre outros, também Farkas (1847-1930) aplicou inequações à mecânica, e Minkowski (1864-1909) também as usou no seu Geometria de Números.

Mas, resultados que se podem considerar hoje como inspiradores do desenvolvimento deste ramo da matemática, só vieram surgir no século XX, por volta do final da década de 30 e início da década de 40.

Por concordância com a proposta deste trabalho, nos restringiremos a citar acontecimentos anteriores à descoberta do cálculo.

Dentre os episódios da história podemos destacar os seguintes:

- Antiguidade: resolução de problemas relacionados a estudos geométricos;
  - 300 A. C.: Euclides considerou a mínima distância entre um ponto e uma linha e provou que o quadrado possui a maior área entre retângulos dado o perímetro;
  - 100 A. C.: Heron provou que a luz viaja entre dois pontos através da rota com o menor comprimento quando refletida de um espelho;

- Século XVI e XVII: antes do cálculo diferencial não houve uma grande evolução na otimização.
  - 1615: Kepler descobriu as dimensões ótimas de um barril de vinho.
  - 1638: Galileu investigou o problema de uma ponte suspensa, mas sem sucesso.
  - 1646: Fermat mostrou que em um ponto extremo o gradiente é anulado.
  - 1660: Newton e Leibniz (1670?) elaboraram a análise matemática baseada no cálculo diferencial.

1.3 Alguns problemas de otimização antigos

Destacaremos aqui alguns problemas de otimização que foram solucionados ao longo da história da matemática. Alguns dos problemas apontados são de difícil contextualidade com os conteúdos adotados no Ensino Médio atual, e, além disso, a maioria das soluções eram dadas por formulações extensas e com bases pré-determinadas, por isso apresentaremos aqui, no geral, apenas os problemas da época citada, emitindo portanto, suas soluções. Ressaltamos ainda que alguns destes problemas poderão estar entre os exemplos que serão resolvidos neste trabalho. Neste ponto do trabalho, nosso principal intuito é mostrar que os problemas de otimização surgiram muito antes do desenvolvimento do cálculo. Além disso, vale mencionar que o surgimento do *cálculo diferencial* facilitou a solução dos problemas de otimização. No entanto, como é objetivo principal deste trabalho propor a solução destes problemas sem uso de tal recurso, as soluções utilizando cálculo diferencial também serão omitidas.

1.3.1 Problema 1: Problema de Dido

Este é um problema com história, e que surge de uma lenda que é conhecida por nós através de um poema épico latino presente na obra "A Eneida" (Aeneis em latim) escrito por um dos maiores poetas da Roma antiga, Publius Virgilius Maro, no século I a. C..

Dido era uma rainha da cidade fenícia de Tiro (atual Líbano). Dido deixara a cidade, depois do irmão ter assassinado o seu marido, com destino à baia da Tunísia, no Mediterrâneo.

Figura 1- Problema de Dido

Fonte – Disponível em http://ztfnews.wordpress.com/2014/02/26/marlowe-dido-y-el-problema-isoperimetrico/

Dido quando chegou decidiu comprar a terra ao seu patrono, o Rei Jarbas, para que ela e seu povo pudessem instalar-se, pagando-lhe uma quantia em dinheiro, por uma quantidade de terra que se conseguisse cercar com uma pele de boi.

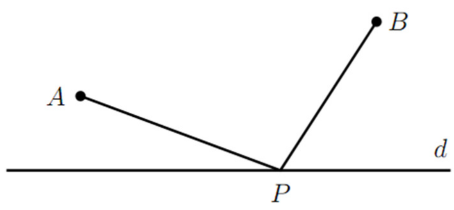
Para obter a maior quantidade de terra possível, Dido cortou a pele de boi em tiras finas, como mostra uma tela do século VII, na figura 1, e dispôs estas tiras de modo a formar um semicírculo. Fundou assim a cidade de Cartago (que se situa ao lado da atual cidade de Tunes na Tunísia).

Muitos pesquisadores são da opinião que este problema de área máxima conservando o perímetro, denominado Problema de Dido ou Problema isoperimétrico, foi o primeiro a ser discutido em literatura científica, pelas propriedades isoperimétricas do círculo, pois de todas as figuras planas com o mesmo perímetro é o que limita a maior área.

1.3.2 Problema 2: Problema de Heron de Alexandria

Deve-se a Heron de Alexandria (10 D.C.-70 D.C.) outro problema, que surge alguns séculos mais tarde, mas desta vez com o objetivo de encontrar um mínimo.

Figura 2 – Problema de Heron



Fonte – Elaborada pelo autor

"Dados dois pontos A e B, coplanares com uma reta d, e ambos do mesmo lado da reta, determinar um ponto P, da reta, tal que a soma das distâncias de A a P e de P a B seja mínima."

Com base nos exemplos citados acima, a terceira pergunta pode ter resposta afirmativa, visto que, como vimos alguns problemas de otimização já eram propostos e solucionados muito antes do surgimento do cálculo. Mais exemplos podem ser encontrados em [1].

Resta-nos, agora, mostrar que soluções de problemas deste tipo podem ser feitas a partir de conhecimentos adquiridos no próprio Ensino Médio. Para isso apresentaremos a seguir alguns problemas de otimização com suas respectivas soluções. Mas, antes disso, é necessário nos fundamentarmos em algumas bases que facilitarão a compreensão das soluções que serão apresentadas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA - CONTEÚDOS PRÉVIOS A SEREM REVISADOS

Traremos aqui conteúdos pré-requisitos para que o leitor compreenda o nosso trabalho.

2.1 Tópicos de álgebra

2.1.1 Desigualdades

Se a e b são os números reais, a afirmação de que a é maior que b significa que $a - b$ é positivo, e isso pode ser escrito de várias formas equivalentes:

$$a > b, a - b > 0, b < a \; ou \; b - a < 0.$$

De forma similar, a afirmação de que a é maior do que ou igual a b significa que $a - b$ é positivo ou zero, e podemos escrever

$$a \geq b, a - b \geq 0, b \leq a \; ou \; b - a \leq 0.$$

Alguns resultados importantes:

Se a, b, c, d e k são números reais positivos satisfazendo $a \geq b$ e $c > d$, então:

a) $a + c > b + d$ e $ac > bd$;

b) $a + k \geq b$ +k e $ak \geq bk$;

c) $c + k > d + k$ e $ck > dk$;

d) $x^2 \geq 0$, para todo x real;

e) Se $c > d$ e $d > f$ então $c > f$;

2.1.2 Condição de existência de uma raiz quadrada:

$$\sqrt{a} \; existe \; se, e \; somente \; se, a \geq 0$$

2.1.3 Quadrado da soma de 3 termos

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

2.1.4 Solução de uma equação do 2º grau.

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a, b, c \epsilon \mathbb{R}, a \neq 0$, temos que

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.1.5 Resolução de um sistema de equações de 2 incógnitas

Para resolver um sistema com duas incógnitas, uma das formas mais comuns é isolar, numa das equações, um termo ou variável que apareça nas duas equações, e substituir na outra, a fim de obter uma nova equação com apenas uma variável.

Exemplo: Resolver o sistema

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + 2y = 4 \end{cases}$$

Solução: Tomemos na primeira equação o valor de y, isto é, $y = 2 - x$.

Substituindo esse resultado na segunda equação obtemos:

$$x^2 + 2(2 - x) = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 2$$

Assim teremos $x = 0$ e $y = 2$ ou $x = 2$ e $y = 0$.

2.1.6 A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica: $MA \geq MG$

Denotemos por MA e MG, respectivamente, as médias aritmética e geométrica dos números positivos $a_1, a_2, \dots, a_n$, definidas por

$$MA = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

e

$$MG = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Então $MA \geq MG$, com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

Demonstração: Vamos nos restringir aos casos em que $n = 2$ e $n = 3$.

Caso 1: $n = 2$

Basta tomarmos a desigualdade $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0$.

De fato

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}.$$

Assim

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 . a_2}$$

Caso 2: $n = 3$

Podemos supor sem perda de generalidade que $a_1 \leq a_2 \leq a_3$

Seja $MG = \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}$. Então $a_1 \leq MG \leq a_3$.

Apliquemos o resultado do caso em que $n = 2$ a a_2 e $\frac{a_1 a_3}{MG}$, isto é:

$$\frac{a_2 + \frac{a_1 a_3}{MG}}{2} \geq \sqrt{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3}{MG}} = \sqrt{\frac{(MG)^3}{MG}} = MG \Leftrightarrow$$

$$a_2 + \frac{a_1 a_3}{MG} + MG \geq 3MG \qquad (I)$$

Por outro lado

$$a_1 + a_3 - MG - \frac{a_1 a_3}{MG} = (a_3 - MG)(MG - a_1)\left(\frac{1}{MG}\right) \geq 0,$$

isto é,

$$a_1 + a_3 \geq MG + \frac{a_1 a_3}{MG} \Leftrightarrow a_1 + a_2 + a_3 \geq a_2 + \frac{a_1 a_3}{MG} + MG \qquad (II)$$

Logo, de (I) e (II) resulta que

$$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3MG \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq MG \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3},$$

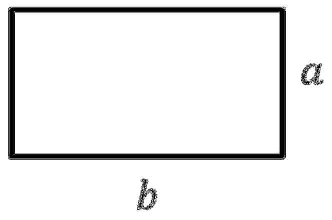
ou seja $MA \geq MG$.

Observação: O raciocínio utilizado acima pode ser usado na demonstração para um n qualquer, através do processo de indução matemática. Mais detalhes podem ser encontrados em [8].

2.2 Tópicos de geometria plana, espacial e analítica.

2.2.1 Retângulo

Figura 3 – Retângulo de dimensões $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{b}$.



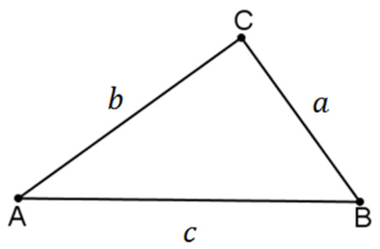
Fonte – Elaborada pelo autor.

$$Área\ do\ retângulo\ =\ a \cdot b$$

$$Perímetro\ do\ retângulo\ =\ 2a + 2b$$

2.2.2 Triângulo

Figura 4 - Triângulo de lados medindo $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

$$Perímetro = a + b + c$$

Fórmula de Heron:

$$Área\ do\ triângulo\ = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, onde\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

Fórmula trigonométrica:

$$Área\ do\ triângulo\ = \frac{absen\hat{C}}{2} = \frac{bcsen\hat{A}}{2} = \frac{acsen\hat{B}}{2}$$

2.2.3 Desigualdade triangular

Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. (ver figura 4)

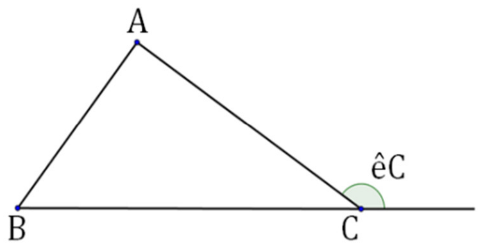
$a < b + c$ $\qquad$ $b < a + c$ $\qquad$ $c < a + b$

2.2.4 Teorema do ângulo externo

i. Em todo triângulo, cada ângulo externo é igual a soma dos internos não adjacentes: $\hat{e}C = \hat{A} + \hat{B}$

ii. Em todo triângulo, cada ângulo externo é maior que cada um dos internos não adjacentes: $\hat{e}C > \hat{A}$ e $\hat{e}C > \hat{B}$.

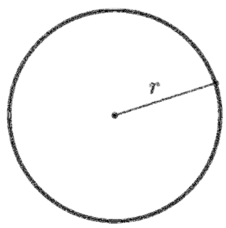
Figura 5 – Teorema do ângulo externo



Fonte – Elaborada pelo autor.

2.2.5 Círculo e circunferência

Figura 6 – Círculo de raio r



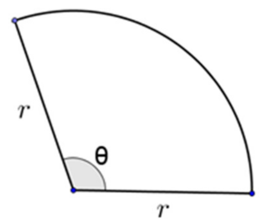
Fonte – Elaborada pelo autor.

$$\text{Área do círculo} = \pi r^2$$

$$\text{Comprimento da circunferência} = 2\pi r$$

2.2.6 Setor circular

Figura 7 – Setor circular de raio r e ângulo $\boldsymbol{\theta}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Sendo k a fração que o setor representa do círculo então:

$$Área\ do\ setor = k \cdot (Área\ do\ círculo) = k \cdot \pi r^2$$

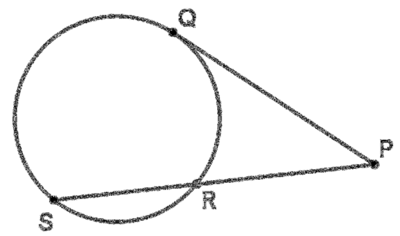
Se a medida do ângulo θ estiver em radianos então:

$$Área\ do\ setor = \frac{\theta}{2} r^2.$$

$$Perímetro\ do\ setor = 2r + k(2\pi r).$$

2.2.7 Relação entre secante e tangente a um circulo por um ponto

Figura 8 – Segmentos tangente e secante a um círculo por um ponto.



Fonte – Elaborada pelo autor.

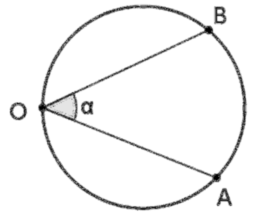
O quadrado da medida do segmento tangente é igual ao produto da medida do segmento secante pela medida de sua parte externa:

$$(PQ)^2 = PS \cdot PR$$

2.2.8 Ângulos inscritos em um círculo

Ângulo inscrito: é o ângulo inscrito que possui seu vértice localizado em qualquer ponto da circunferência e seus lados sejam cordas da circunferência.

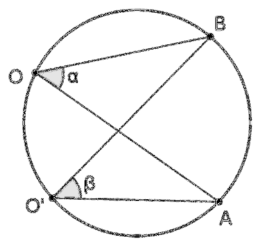
Figura 9 – Ângulo inscrito numa circunferência.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Propriedade: Se dois ou mais ângulos inscritos determinam mesma corda eles são congruentes.

Figura 10 - Ângulos inscritos determinando mesmo arco.

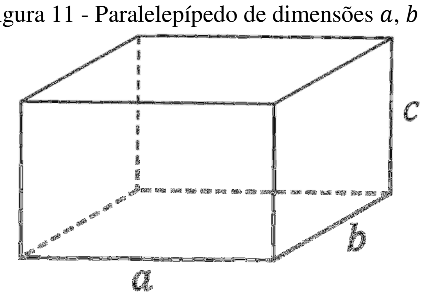


Fonte – Elaborada pelo autor.

$$\alpha = \beta$$

2.2.9 Paralelepípedo.

Figura 11 - Paralelepípedo de dimensões a, b e c.



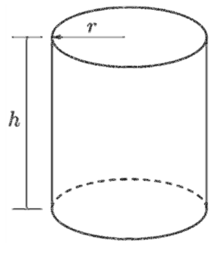
Fonte – Elaborada pelo autor.

$$Volume\ do\ paralelepípedo = abc$$

$$Área\ \ lateral\ do\ paralelepípedo = 2ab + 2bc + 2ac$$

2.2.10 Cilindro

Figura 12 – Cilindro de raio $\boldsymbol{r}$ e altura $\boldsymbol{h}$.



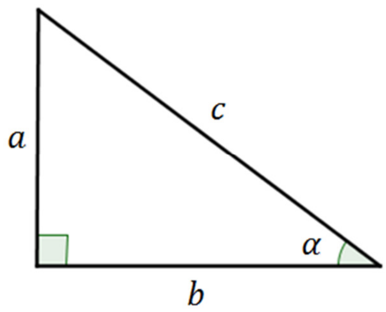
Fonte – Elaborada pelo autor.

$$Volume\ do\ cilindro = \pi r^2 h$$

$$Área\ lateral\ do\ cilindro = 2\pi rh + 2\pi r^2$$

2.2.11 Triângulo retângulo

Figura 13 – Triângulo retângulo de catetos a e b e hipotenusa c.



Fonte – Elaborada pelo autor.

$$Teorema\ de\ Pitágoras: c^2 = a^2 + b^2$$

$$Razões\ trigonométricas: \begin{cases} sen\ \alpha = \dfrac{a}{c} \\ cos\ \alpha = \dfrac{b}{c} \\ tg\ \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases}$$

2.2.12 Distância entre dois pontos e equação de uma reta por dois pontos no plano

Dados dos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ no plano Oxy então a distância entre A e B é dada por

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Além disso a equação da reta que passa por esses dois pontos pode ser obtida por

$$\frac{y - y_A}{y_A - y_B} = \frac{x - x_A}{x_A - x_B}.$$

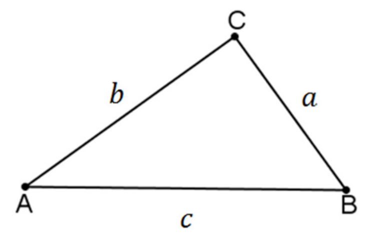
2.3 Tópicos de trigonometria

2.3.1 Relação fundamental da trigonometria

$$sen^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

2.3.2 Lei dos cossenos

Figura 14 – Triângulo ABC.



Fonte – Elaborada pelo autor.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\hat{C}$$

2.3.3 Seno da soma de dois arcos

$$sen(a + b) = sena \cdot\ cosb + senb \cdot\ cosa$$

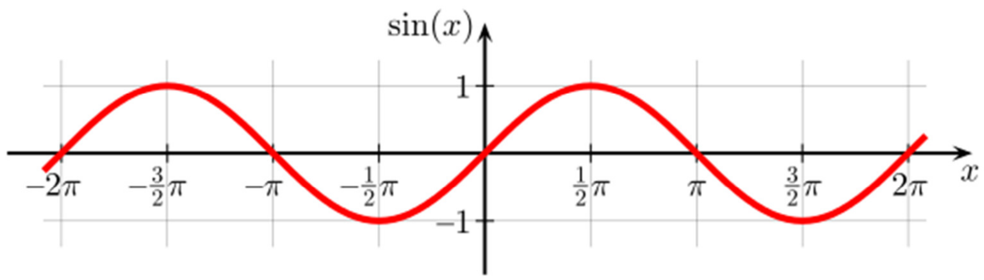
2.3.4 Tangente da diferença de dois arcos

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

2.3.5 Funções trigonométricas

2.3.5.1 Função $f(x) = sen\ x$:

Figura 15 – Gráfico da função seno.

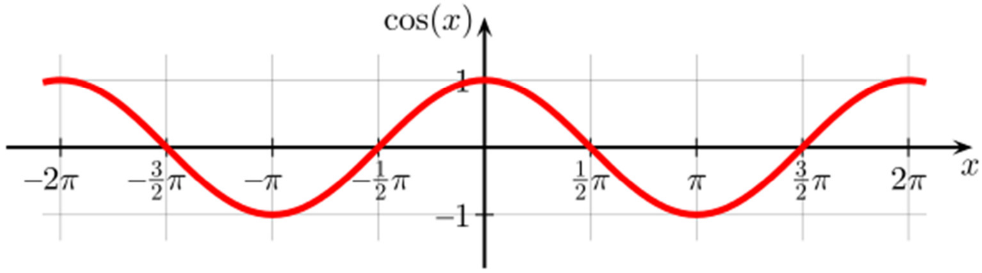


Fonte – Elaborada pelo autor.

O domínio da função é todo o conjunto $\mathbb{R}$, e a imagem da função é $[-1,1]$.

2.3.5.2 Função $f(x) = cos\ x$:

Figura 16 - Gráfico da função cosseno.

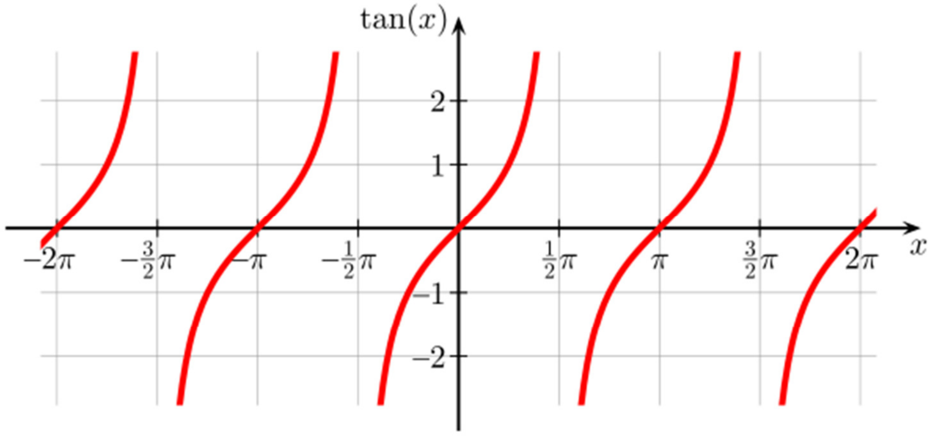


Fonte – Elaborada pelo autor.

O domínio da função é todo o conjunto $\mathbb{R}$, e a imagem da função é $[-1,1]$;

2.3.5.3 Função $f(x) = tan\ x$:

Figura 17 - Gráfico da função tangente.



Fonte – Elaborada pelo autor.

O domínio da função é $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} - k\pi, k\epsilon\mathbb{Z}\}$, e a imagem da função é todo o conjunto $\mathbb{R}$.

3 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

3.1 Definição:

Considere uma função $f : D \to R$. Um problema é de *otimização* quando pode ser escrito na seguinte forma:

$$\text{Minimizar ou maximizar } f(x)$$

$$\text{Sujeito a } x \in D$$

$$\text{onde } D \subseteq \mathbb{R}^n$$

Ressalto aqui que a maioria dos problemas podem ser tratados e resolvidos sem a necessidade de formular tal função.

3.2 Alguns Problemas de Otimização que podem ser trabalhados no Ensino Médio.

Aqui apresentaremos alguns problemas e suas soluções sempre destacando o conteúdo base (o que vai propiciar ao leitor saber em que momento pode-se propor ao aluno resolvê-lo) e apresentando sugestões de como melhor trabalhá-los no Ensino Médio.

Problema 1: Encontrar o valor de x que torna mínima a expressão $x^2 + 8x + 23$.

Solução: Completando o quadrado temos

$$x^2 + 8x + 23 = (x + 4)^2 + 7 \ \geq 7$$

desde que

$$(x + 4)^2 \geq 0.$$

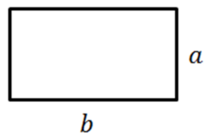
Então o valor mínimo da expressão é $7 = 0 + 7$, ocorrendo quando $(x + 4)^2 = 0$, isto é, $x + 4 = 0$ e , assim $x = -4$.

Observação: Este tipo de problema pode ser tomado como ponto de partida para trabalhar os *problemas de otimização*. É claro que uma situação problema que recaía numa expressão como esta seria o mais ideal. Quanto ao raciocínio utilizado sugerimos deixar opcional ao aluno utilizá-lo ou aplicar o conhecimento adquirido no estudo da função quadrática, mas sempre reforçando a ideia de que este raciocínio o prepara para situações que exijam outro conhecimento.

Problema 2: Paladino quer cercar um terreno de forma retangular, e para isso dispões de uma cerca de 40 m. Qual é o maior valor da área que nosso herói pode cercar?

Solução: Sejam a e b os lados de retângulo conforme figura abaixo.

Figura 18 - Retângulo de dimensões a por b.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Como o perímetro da cerca é 40, devemos ter $2a + 2b = 40 \Leftrightarrow a + b = 20$. Logo, usando $MA \geq MG$, temos

$$10 = \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq 100.$$

Logo a área máxima a ser atingida é de $100\ m^2$ e ocorre quando $a = b = 10\ m$.

Observação: Este problema é ideal para iniciar o trabalho com a aplicação da desigualdade $MA \geq MG$. Cabe lembrar que não está descartada a possibilidade do aluno resolver utilizando a forma mostrada a seguir:

Se A é o valor da área então

$$A = ab = a(20 - a) = -a^2 + 20a = 100 - (a - 10)^2 \leq 100$$

desde que

$$-(a - 10)^2 \leq 0.$$

Então o valor máximo da expressão é $100 = 100 - 0$, ocorrendo quando $(a - 10)^2 = 0$, isto é, $a - 10 = 0$ e , assim $a = 10$, e por conseguinte obtem-se $b = 10$. O aluno também pode querer recorrer a expressão que nos dar o valor da abcissa do vértice da parábola,

$$a = \frac{-(20)}{2 \cdot (-1)} = 10.$$

Notadamente as duas últimas opções ficam abertas se o contexto a ser adotado for aberto, isto é, não exija uma solução utilizando a desigualdade $MA \geq MG$.

Problema 3: Para $x > 0$, encontre o menor valor de

$$5x + \frac{16}{x} + 21.$$

Solução: Como $x > 0$, então todas as parcelas desta soma são positivas e tem produto constante. Além disso, desconsiderando a constante 21 ainda temos a mesma conclusão para as parcelas restantes. Logo podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, obtendo:

$$\frac{5x + \frac{16}{x}}{2} \geq \sqrt{5x \cdot \frac{16}{x}} = 4\sqrt{5}$$

Isto é,

$$5x + \frac{16}{x} \geq 8\sqrt{5}$$

A igualdade ocorre quando

$$5x = \frac{16}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{5} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto

$$5x + \frac{16}{x} + 21 \geq 8\sqrt{5} + 21$$

isto é, o valor mínimo é $21 + 8\sqrt{5}$.

Observação: Um questionamento plausível seria o porquê de não utilizar a desigualdade das médias para as três parcelas. Os alunos que não perceberem a resposta devem ser levados a notarem que, em tal caso, a igualdade estaria condicionada ao sistema

$$5x = \frac{16}{x} = 21$$

que, notadamente, não possui solução.

Outra solução: Escrevendo

$$5x + \frac{16}{x} + 21 = r \quad (1)$$

temos

$$5x^2 + (21 - r)x + 16 = 0.$$

Resolvendo esta última equação em x obtemos

$$x = \frac{21 - r}{10} \pm \frac{\sqrt{r^2 - 42r + 121}}{10}$$

Assim x existe se $r^2 - 42r + 121 \geq 0$

Logo r $\geq 21 + 8\sqrt{5}$ ou r $\leq 21 - 8\sqrt{5}$.

Mas por (1), r > 21 e, portanto a desigualdade que nos interessa é r $\geq 21 + 8\sqrt{5}$, isto é, o valor mínimo da expressão é $21 + 8\sqrt{5}$.

Observação: Destacamos aqui que a segunda solução, apesar de utilizar a equação do segundo grau, não se detém num estudo de função quadrática. Buscar condições válidas sobre os elementos estudados (no caso o radicando) foi o que fizemos e, este é um caminho que sempre podemos tentar segui-lo na resolução de problemas de otimização.

Problema 4: Para todo número x positivo, minimize a expressão

$$6x + \frac{24}{x^2}.$$

Solução: Escrevendo

$$6x + \frac{24}{x^2} = 3x + 3x + \frac{24}{x^2} \quad (2)$$

podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, visto que sendo $x > 0$, todas as parcelas serão positivas. Assim, obtemos que

$$\frac{3x + 3x + \frac{24}{x^2}}{3} \geq \sqrt[3]{3x \cdot 3x \cdot \frac{24}{x^2}} = 6$$

isto é ,

$$3x + 3x + \frac{24}{x^2} \geq 18.$$

Além disso, pela desigualdade $MA \geq MG$, a igualdade ocorre se, e somente se,

$$3x = 3x = \frac{24}{x^2}$$

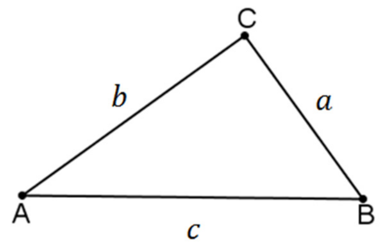
ou seja $x = 2$.

Observação: Aqui novamente chamamos atenção para o fato de utilizarmos a desigualdade das médias sempre que pudermos trabalhar com parcelas de soma ou produto constante. Daí a escolha de escrever (2).

Problema 5: De todos os triângulos com perímetro dado, mostre que o triângulo equilátero é o que possui maior área.

Solução: Dado um triângulo ABC com lados medindo a, b e c e perímetro fixado $2p = a + b + c$.

Figura 19 – Triângulo de dimensões $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Assim, a área S desse triângulo, usando a fórmula de Heron é dada por

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Como p é constante, então S é máxima quando o produto $(p-a)(p-b)(p-c)$ é máximo.

Usando a desigualdade $MG \leq MA$ temos que

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} = \frac{3p-(a+b+c)}{3} = \frac{3p-2p}{3} = \frac{p}{3}$$

Isto é,

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3 \ (valor\ máximo).$$

Assim á área máxima é

$$S = \sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2\sqrt{27}}{27}.$$

Além disso, pela desigualdade $MG \leq MA$, a igualdade ocorre se, e somente se,

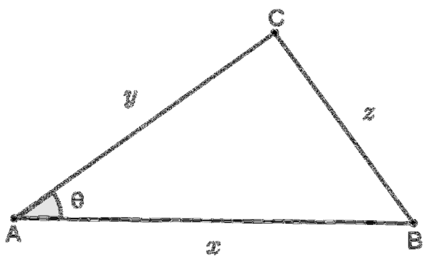
$p - a = p - b = p - c$, isto é, $a = b = c$, ou seja, quando o triângulo é equilátero.

Observação: O raciocínio utilizado nesta solução não se limita apenas a aplicação da desigualdade $MG \leq MA$. A quantidade de conteúdos utilizados enriquece esta solução. Há uma grande variedade de passos que foram seguidos, todos interligados pelo objetivo geral do problema. Logo, este problema servirá de base para outros problemas semelhantes ou para capacitar o aluno para situações futuras no ramo da matemática.

Problema 6: Entre todos os triângulos ABC tendo um determinado ângulo A e uma determinada área S, qual tem perímetro mínimo?

Solução: Denotemos por x, y e z os comprimentos dos lados de AB, AC, BC, respectivamente, e θ a medida do ângulo A.

Figura 20 – Triângulo de dimensões $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ e ângulo $\boldsymbol{\theta}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Então a área S e o perímetro P são dados por

$$S = \frac{1}{2} xy \, sen\theta$$

e $P = x + y + z$ ou ainda, utilizando a lei dos cossenos

$z^2 = x^2 + y^2 - 2xycos\theta$, resulta que

$$P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2xycos\theta}, \qquad (1)$$

Agora, note que θ e S são constantes, de modo que o produto

$$xy = \frac{2S}{sen\theta}$$

também é uma constante.

Logo, pela desigualdade $MA \geq MG$, temos que $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$. Isto é, $x + y$ é mínimo se $x = y$.

Como x^2y^2 também é uma constante, temos que $x^2 + y^2$ é mínimo apenas se $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$. Observando a equação final (1), temos que, desde que o termo $2xycos\theta$ é uma constante, P é mínimo também no caso $x = y$.

Portanto, a solução do Problema acima é requerer que $x = y$, isto é $AB = AC$, tornando o triângulo ABC isósceles.

Observação: Esta resolução se baseia nos conhecimentos básicos de trigonometria (fórmula trigonométrica da área de um triângulo e lei dos cossenos) e da desigualdade $MA \geq MG$. Os dois primeiros são trabalhados a partir da série final do Ensino fundamental, não sendo, portanto, uma dificuldade representativa que possa surgir ao trabalhar este problema com alunos destas séries. No entanto torna-se necessário, antes de propor tal problema, trabalhar com as médias e suas desigualdades, ou particularmente, só com a desigualdade $MA \geq MG$, o que para esse propósito basta prová-la para dois termos.

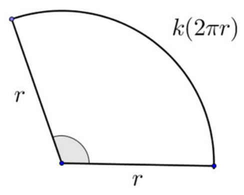
Problema 7: Determinar a área máxima de um setor circular com perímetro fixado.

Solução: Inicialmente vamos compreender o problema. Um setor circular tem um perímetro constituído por dois raios e por um arco de círculo que liga os pontos de extremidade dos raios. Por exemplo, comparemos as áreas de três sectores, cada um com perímetro $p = 100$ e ângulos centrais 45°, 90 ° e 180 °, respectivamente. Estes são setores que correspondem a um oitavo do círculo, um quarto do círculo e um semicírculo, respectivamente. Cada vez que os ângulos aumentam, os raios se tornam mais curtos, porque mais do perímetro fixo está no arco.

i) Alguns estudantes (e professores) têm uma aversão a trabalhar com radianos. Para estes, a abordagem poderia ser como se segue:

Seja k a fração de um círculo representado pelo setor, onde $0 < k < 1$.

Figura 21 - Setor circular de raio **r** fração **k** do círculo.



Fonte – Elaborada pelo autor.

O perímetro é uma constante e podemos representá-lo como duas vezes o raio, mais a fração da circunferência, isto é,

$$p = 2r + k(2\pi r)$$

Logo

$$r = \frac{p}{2 + 2k\pi}$$

e

$$k = \frac{p - 2r}{2\pi r}$$

Note que a área do sector pode ser formada quer como uma função de r, ou uma função de k, dependendo da substituição de r ou k na equação de perímetro. Qualquer uma delas pode ser usada pra finalizar o problema.

Temos que

$$Área = k\pi r^2$$

a) Se tomarmos k teremos

$$Área_{(r)} = \left(\frac{p - 2r}{2\pi r}\right)\pi r^2 = \left(\frac{p}{2} - r\right)r$$

E, utilizando a desigualdade $MG \leq MA$, obtemos

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2} - r\right)r} \leq \frac{\left(\frac{p}{2} - r\right) + r}{2} = \frac{p}{4}.$$

Assim

$$Área_{(r)} \leq \left(\frac{p}{4}\right)^2 \ (área\ máxima),$$

Com a igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{p}{2} - r = r$$

isto é,

$$r = \frac{p}{4}\ e\ k = \frac{1}{\pi}$$

b) Se tomarmos r teremos

$$Área_{(k)} = k\pi\left(\frac{p}{2 + 2k\pi}\right)^2 = k\pi\left(\frac{p^2}{4 + 8k\pi + 4k^2\pi^2}\right).$$

Dividindo o numerador e o denominador por $k\pi$, obtemos

$$Área_{(k)} = \frac{p^2}{\frac{4}{k\pi} + 8 + 4k\pi}.$$

Agora, basta notar que $Área_{(k)}$é máxima quando a expressão

$$\frac{4}{k\pi} + 8 + 4k\pi$$

é mínima. Além disso, note que esta soma tem produto constante, logo podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$ nas parcelas das extremidades obtendo

$$\frac{\frac{4}{k\pi} + 4k\pi}{2} \geq \sqrt{\frac{4}{k\pi} \cdot 4k\pi} = 4 \quad (*)$$

isto é,

$$\frac{4}{k\pi} + 4k\pi \geq 8$$

e assim

$$\frac{4}{k\pi} + 8 + 4k\pi \geq 16.$$

Portanto

$$Área_{(k)} = \frac{p^2}{\frac{4}{k\pi} + 8 + 4k\pi} \leq \frac{p^2}{16} = \left(\frac{p}{4}\right)^2 \ (área\ máxima).$$

Além disso, a igualdade em $(*)$ ocorre se, e somente se,

$$\frac{4}{k\pi} = 4k\pi \Leftrightarrow k = \frac{1}{\pi}$$

e assim

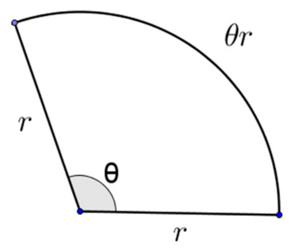
$$r = \frac{p}{4}.$$

ii) Se quisermos trabalhar com radianos podemos proceder da seguinte forma:

Seja $\theta\, rad$ o ângulo central do setor circular de raio r e perímetro fixado

$$p = 2r + \theta r. \ (*)$$

Figura 22 - Setor circular de raio r e ângulo $\boldsymbol{\theta}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Então

$$Área = \frac{\theta}{2} r^2.$$

Da igualdade $(*)$ obtemos

$$r = \frac{p}{2+\theta}$$

e

$$\theta = \frac{p-2r}{r}.$$

Agora, procedendo como no caso anterior, podemos obter $Área$ com uma função de r ou de θ.

a) Se tomarmos θ teremos

$$Área_{(r)} = \frac{\left(\frac{p-2r}{r}\right)}{2} r^2 = \left(\frac{p}{2} - r\right) r$$

E, utilizando a desigualdade $MG \leq MA$, obtemos

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}-r\right)r} \leq \frac{\left(\frac{p}{2}-r\right)+r}{2} = \frac{p}{4}.$$

Assim

$$Área_{(r)} \leq \left(\frac{p}{4}\right)^2 \ (área\ máxima),$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se,

$$\frac{p}{2} - r = r$$

isto é,

$$r = \frac{p}{4} \ e \ \theta = 2\ rad$$

b) Se tomarmos r teremos

$$Área_{(\theta)} = \frac{\theta}{2}\left(\frac{p}{2+\theta}\right)^2 = \frac{\theta}{2}\left(\frac{p^2}{4+4\theta+\theta^2}\right)$$

Dividindo o numerador e o denominador por θ, obtemos

$$Área_{(\theta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\frac{4}{\theta}+4+\theta}\right).$$

Agora, basta notar que $Área_{(\theta)}$ é máxima quando a expressão

$$\frac{4}{\theta} + 4 + \theta$$

é mínima. Além disso, note que esta soma tem produto constante, logo podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$ nas parcelas das extremidades obtendo

$$\frac{\frac{4}{\theta}+\theta}{2} \geq \sqrt{\frac{4}{\theta}\cdot\theta} = 2 \quad (*)$$

isto é,

$$\frac{4}{\theta} + 4\theta \geq 4$$

e assim

$$\frac{4}{\theta} + 4 + 4\theta \geq 8.$$

Portanto

$$Área_{(\theta)} = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\frac{4}{\theta} + 4 + \theta}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{8}\right) = \left(\frac{p}{4}\right)^2 \ (área\ máxima).$$

Além disso, a igualdade em $(*)$ ocorre se, e somente se,

$$\frac{4}{\theta} = \theta \Leftrightarrow \theta = 2$$

e assim

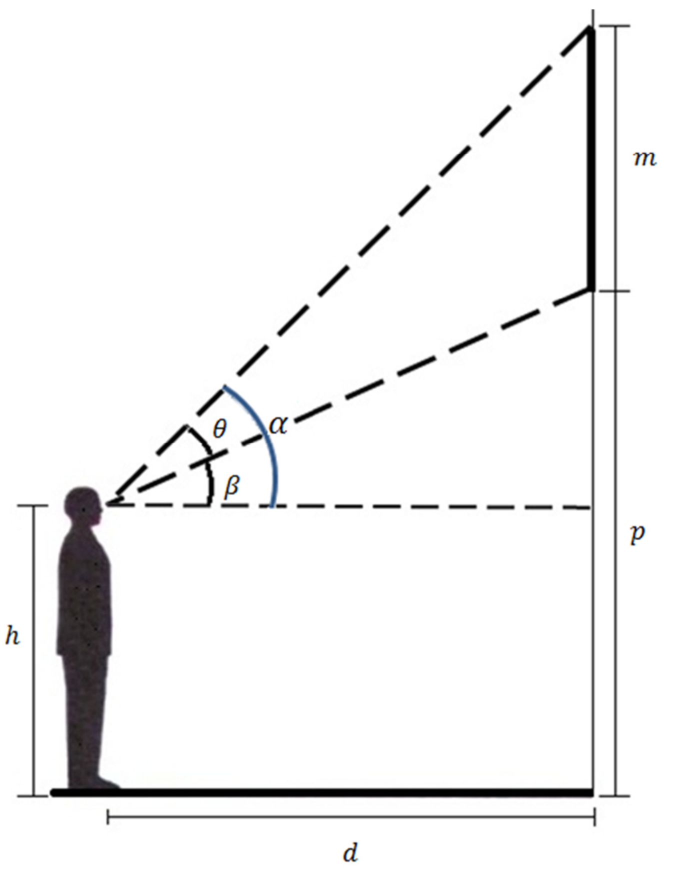
$$r = \frac{p}{4}.$$

Observação: Ambas as soluções servem para fortificar o argumento de que a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica é uma ferramenta excelente, e deve ser sempre tomada como uma das sugestões na hora de resolver um problema de otimização. Uma boa ideia seria escolher uma situação com valores reais dados para as medidas do raio e do arco. Isto pode tornar o problema ainda mais acessível ao aluno e/ou professor.

Problema 8: Um quadro está pendurado numa parede num ponto acima do nível dos olhos de um observador. Quão longe da imagem deve ficar o observador para maximizar o ângulo de observação, isto é, o ângulo subtendido no olho do observador pela parte superior e inferior da imagem?

Solução: Suponha um quadro de altura m pendurado numa parede a uma altura p, e um observador, cujo olho estar a uma altura h $(h < p)$, e que o enxerga sob um ângulo θ, que varia de acordo com a distância d entre o observador e a base da parede, conforme a figura 23. Queremos determinar a distância d para que o ângulo de visão θ seja máximo.

Figura 23 - Observador visualizando quadro na parede sob ângulo ∝.



Fonte – Elaborada pelo autor.

O observador ver o quadro sob o ângulo $\theta = \alpha - \beta$, onde α e β são os ângulos entre a horizontal à altura do observador e os segmentos que ligam ao topo e a base do quadro, respectivamente. Logo temos que

$$tg\ \theta = tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\ \alpha - tg\ \beta}{1 + tg\ \alpha \cdot tg\ \beta}$$

Da figura temos que $tg\ \alpha = (m + p - h)/d$ e $tg\ \beta = (p - h)/d$.

Assim, fazendo $a = m + p - h$ e $b = p - h$:

$$tg\ \theta = \frac{\frac{a}{d} - \frac{b}{d}}{1 + \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{d}} = \frac{a - b}{d + \frac{ab}{d}}$$

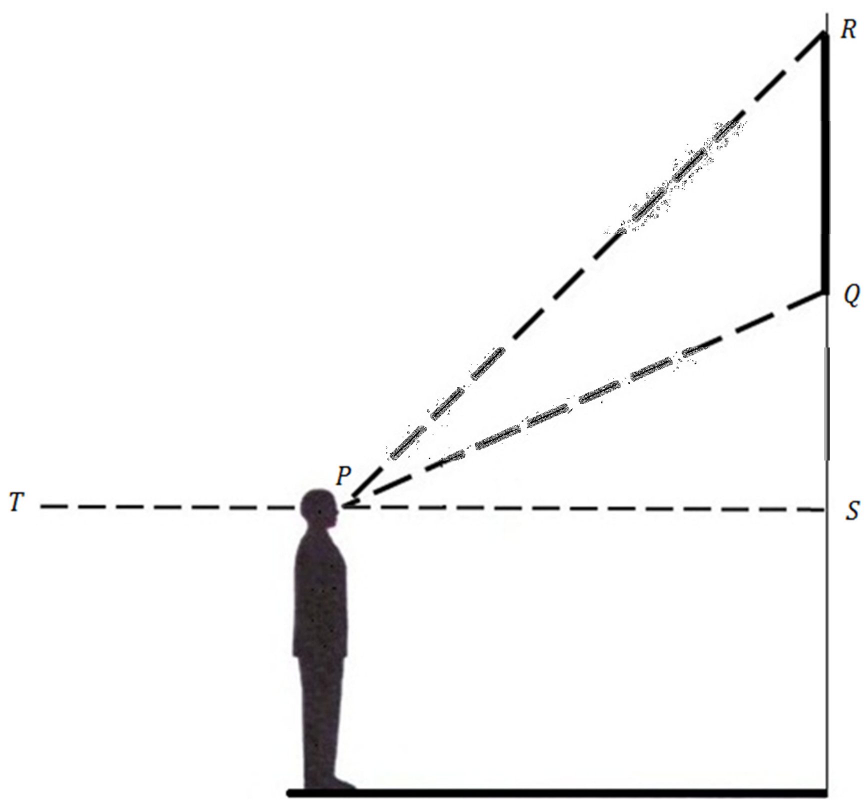
Sabe-se que $tg\ \theta$ é crescente no intervalo $[0, \pi/2]$, portanto maximizar θ é equivalente a maximizar $tg\ \theta$. Por outro lado, para maximizar $tg\ \theta$ deve-se minimizar a expressão $d + ab/d$, uma vez que $a - b$ é constante. Como a expressão $d + ab/d$ tem parcelas de produto constante, para encontrar d que minimiza esta expressão podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, obtendo

$$\frac{\left(d + \frac{ab}{d}\right)}{2} \geq \sqrt{d \cdot \frac{ab}{d}} = \sqrt{ab} \Leftrightarrow d + \frac{ab}{d} \geq 2\sqrt{ab}.$$

Logo $d + ab/d$ é sempre maior do que ou igual a $2\sqrt{ab}$, a igualdade ocorre se, e somente se, $d = ab/d$, ou seja, quando $d = \sqrt{ab}$. Daí conclui-se que o ângulo de visão θ é máximo quando $d = \sqrt{(m + p - h)(p - h)}$.

Outra solução: Este problema pode ainda ser ilustrado na figura 24, em que Q e R representam o fundo e o topo da imagem e ST é a linha horizontal, ao nível do olho do observador. O problema é localizar o ponto P sobre TS de modo a maximizar o ângulo $Q\hat{P}R$. Primeiro vamos resolver o problema geometricamente e, em seguida, dar uma formulação algébrica da solução.

Figura 24 – Observador observando o quadro.



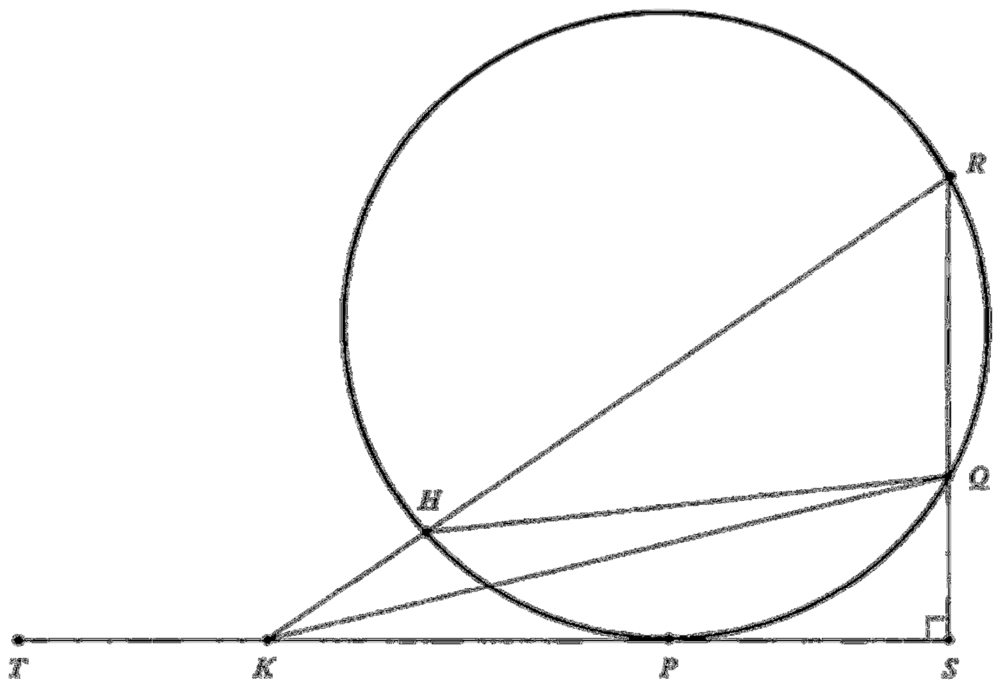
Fonte – Elaborada pelo autor.

Uma chave para a solução é o círculo que passa pelos pontos Q e R, tangente ao segmento de reta TS. O ponto P deve estar localizado no ponto de tangência, como mostra a figura 25. Se K é um outro ponto em TS, mostraremos que $Q\hat{P}R < Q\hat{K}R$. Seja H o ponto de interseção do segmento de reta RK com o círculo, e note que $Q\hat{P}R = Q\hat{H}R$ pela propriedade básica que a corda QR subtende ângulos iguais em quaisquer dois pontos no arco QR. Assim podemos escrever

$$Q\hat{P}R = Q\hat{H}R = Q\hat{K}R + H\hat{Q}K > Q\hat{K}R,$$

onde utilizamos o teorema do ângulo eterno no triângulo QKH. Assim provamos que o ângulo de observação é minimizado se o olho do observador está no ponto de tangência P. Esta solução é válida mesmo no caso em que o quadro não é plano contra a parede, como é frequentemente o caso, em que o quadro é ligeiramente inclinado para fora da parede de baixo para cima. Mesmo que o segmento QR não seja vertical, existe um único círculo passando através de Q e R, tangente à linha horizontal ao nível dos olhos do observador.

Figura 25 - Problema do quadro na parede utilizando segmentos secante e tangente a uma circunferência.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Se quisermos encontra um valor para $d = SP$, onde o ângulo de visão é máximo, em termos de SQ e SR, como na solução anterior, basta utilizar o resultado básico a partir da geometria do círculo, em que a tangente SP e a linha secante SQR satisfaz a relação de distância $(SP)^2 = SQ \cdot SR$.

De posse disto, temos a solução $SP = \sqrt{SQ \cdot SR}$ e, utilizando as constantes adotadas na primeira solução obtemos $d = \sqrt{SQ \cdot SR} = \sqrt{(p-h)\cdot(m+p-h)}$, que é a mesma resposta já encontrada.

Observação: Ambas as soluções apresentam uma riqueza de detalhes a serem abordados durante o processo de solução. As duas requerem muita criatividade e raciocínio e podem chegar a não serem desenvolvidas de forma independente pela maioria dos alunos. Recomendamos que este problema seja trabalhado de modo apresentativo, isto é, servindo de modelo que mostre que os problemas de otimização não são difíceis de resolver, mas que requerem, em algumas vezes, o domínio de vários aspectos da matemática, quer seja algébrico ou geométrico.

Partindo da adoção da primeira solução, sugerimos, obviamente, trabalhar este problema com alunos que já tenham conhecimento de funções trigonométricas, em especial a função tangente, e que já tenha se familiarizado com as desigualdades das médias. Desta forma torna-se necessário trabalhar tal solução apenas em séries de Ensino Médio que atendam estes requisitos.

Já a segunda solução auto exige o conhecimento do teorema do ângulo externo, bem como das propriedades entre segmentos tangentes e secantes a um círculo por um ponto. Sendo assim, é possível trabalha-la tanto em nível de Ensino Fundamental (em séries finais) quanto em nível de Ensino Médio.

Uma boa ideia é atribuir valores reais as medidas apresentadas na solução, isto é, quantificar a altura em que o quadro estar pendurado e seu tamanho. Isto pode tornar mais atrativo o problema aos alunos.

Problema 9: Seja $P(x) = ax^2 + bx + c$ um polinômio quadrático com coeficientes não negativos. Mostre que para todo número positivo x,

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \big(P(1)\big)^2.$$

Solução: Temos que para $a > 0$, pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica,

$$\frac{a + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2,$$

com a igualdade ocorrendo se, e somente se, $a = 1$. Desde que os números ab, bc e ca são não negativos, temos que

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = (ax^2 + bx + c)\left(a\frac{1}{x^2} + b\frac{1}{x} + c\right)$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab\left(x + \frac{1}{x}\right) + bc\left(x + \frac{1}{x}\right) + ca\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$$
$$\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = \left(P(1)\right)^2$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $x = 1$ ou $ab = bc = ca = 0$, o que, tendo em conta a condição de $a > 0$ significa que $b = c = 0$. Consequentemente, para todo x real positivo que temos

$$P(x) \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) \geq \left(P(1)\right)^2$$

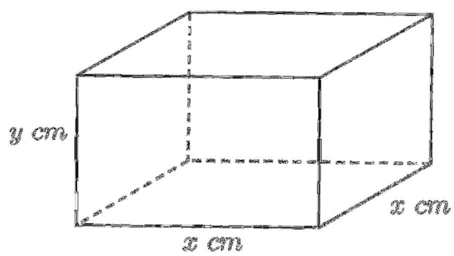
com a igualdade ocorrendo se, e somente se $x = 1$ ou $b = c = 0$.

Observação: Este problema é uma aplicação direta da desigualdade $MA \geq MG$, e além disso, um pouco fechado, ficando como exigência para sua resolução o domínio e a prática desse conteúdo. Assim aconselhamos trabalha-lo para fins de aprofundamento.

Problema 10: Uma caixa fechada de base quadrada deve ter um volume de $2000\,cm^3$. O material da tampa e da base deve custar $R\$3{,}00$ por centímetro quadrado e o material para os lados $R\$1{,}50$ por centímetro quadrado. Queremos encontrar as dimensões da caixa cujo custo total do material seja mínimo.

Solução: Seja $x\ cm$ o comprimento de um lado da base quadrada e $C(x)$ o custo total do material. A área da base é x^2cm^2. Seja $y\ cm$ a profundidade da caixa. Veja figura 26.

Figura 26 - Paralelepípedo de base quadrada.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Como o volume da caixa é o produto da área da base pela profundidade

$$x^2y = 2000 \Leftrightarrow y = \frac{2000}{x^2} \quad (1)$$

O número total de cm^2 na área combinada da tampa e da base é $2x^2$ e para os lados, é $4xy$. Portanto, o número de reais no custo total do material é

$C(x) = 3 \cdot (2x^2) + 1{,}5 \cdot (4xy)$.

Substituindo y por seu equivalente em (1), temos:

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12000}{x},$$

onde $x > 0$.

Agora escrevemos

$$C(x) = 6x^2 + \frac{6000}{x} + \frac{6000}{x} \quad (2)$$

Como $x > 0$, então todas as parcelas são positivas. Logo podemos utilizar a desigualdade

$MA \geq MG$, obtendo:

$$\frac{C(x)}{3} = \frac{6x^2 + \frac{6000}{x} + \frac{6000}{x}}{3} \geq \sqrt[3]{6x^2 \cdot \frac{6000}{x} \cdot \frac{6000}{x}} = 600$$

Isto é, $C(x) \geq 1800$ (custo mínimo). A igualdade ocorre quando

$$6x^2 = \frac{6000}{x} = \frac{6000}{x}.$$

Isto é, $6x^3 = 6000 \Leftrightarrow x = 10$, e assim $y = 20$.

Observação: A solução deste problema torna-se simples ao verificarmos que podemos utilizar a desigualdade das médias. Por outro lado, pode-se questionar ao aluno como chegar em (2), visto que há várias formas de decompor

$$\frac{12000}{x}$$

como uma soma de frações. A resposta que se deve esperar deve está relacionado ao fato de que a ideia de escrever tal fração como uma soma da forma

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

deve estar condicionada ao sistema

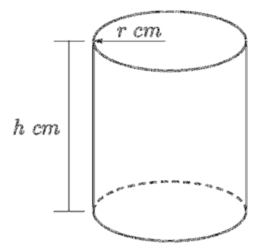
$$6x^2 = \frac{a}{x} = \frac{b}{x}$$

ter solução, o que acontece se, e somente se, $a = b$.

Problema 11: Se uma lata de zinco de volume $16\pi\ cm^3$ deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível.

Solução: Seja $r\ cm$ o raio da base do cilindro, $h\ cm$ a altura do cilindro e $S\ cm^2$ a área da superfície total do cilindro. Veja figura 27. A área da superfície lateral é $2\pi rh\ cm^2$, a área da base é $\pi r^2 cm^2$.

Figura 27 - Cilindro de raio **r** e altura h.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Logo,

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \quad (1)$$

Se $V\ cm^3$ for o volume de um cilindro então $V = \pi r^2 h$.

Assim $16\pi = \pi r^2 h \quad (2)$.

Resolvendo (2) em h e substituindo em (1), obtemos S como uma função de r:

$$S_{(r)} = 2\pi r\left(\frac{16}{r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{32\pi}{r} + 2\pi r^2.$$

Escrevendo

$$S_{(r)} = \frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2$$

Podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, obtendo:

$$\frac{S_{(r)}}{3} = \frac{\frac{16\pi}{r} + \frac{16\pi}{r} + 2\pi r^2}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{16\pi}{r} \cdot \frac{16\pi}{r} \cdot 2\pi r^2} = 8\pi$$

Isto é, $S_{(r)} \geq 24\pi$ (área mínima). A igualdade ocorre quando

$$\frac{16\pi}{r} = \frac{16\pi}{r} = 2\pi r^2.$$

Isto é, $2\pi r^3 = 16\pi \Leftrightarrow r = 2$ e, consequentemente, $h = 4$.

Logo a menor quantidade de material será usada na fabricação da lata quando o raio for de 2 cm e a altura for de 4 cm.

Observação: As orientações para este problema são as mesmas do problema anterior.

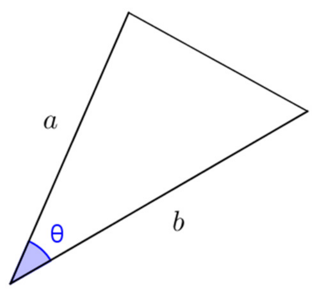
Problema 12: Mostre que de todos os triângulos com dois lados dados, o que possui maior área é o triângulo retângulo com hipotenusa no terceiro lado.

Solução: Seja θ o ângulo entre os dois lados dados de medidas a e b. Então θ é um ângulo variável, e o problema pode ser reformulado da seguinte forma: encontre θ para que a área do triângulo da figura abaixo seja máxima.

Temos que a área de um triângulo de lados medindo a e b, e ângulo θ entre eles, é

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \operatorname{sen}\theta .$$

Figura 28 - Triângulo com ângulo **θ** entre os lados medindo ***a*** e ***b***.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Então o problema se reduz a maximizar senθ. O maior valor de senθ é 1, ocorrendo se, e somente se, $\theta = 90^o$ para ângulo de um triângulo.

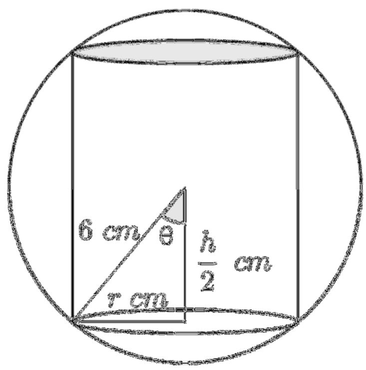
Logo o triângulo é retângulo e tem o terceiro lado como hipotenusa.

Observação: Este problema, embora seja comumente trabalhado em alguns livros de Ensino Médio, não costuma aparecer soba forma de uma situação problema. Na maioria das vezes é dada apenas a expressão envolvendo senθ, e em seguida pede-se o valor máximo ou mínimo. Na forma como é proposto aqui, o problema requer um conhecimento que não se limita apenas a variação da função seno, o que favorece a prática do aluno em resoluções de problemas.

Problema 13: Um cilindro circular reto deve ser inscrito numa esfera com raio 6 cm. Ache a razão entre a altura h e o raio r da base do cilindro cuja área superficial lateral seja máxima.

Solução: seja $\theta\ rad$ o ângulo no centro da esfera subtendido pelo raio do cilindro e S a área da superfície lateral do cilindro.

Figura 29 – Cilindro inscrito numa esfera.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Da figura temos que:

$r = 6\ \cdot sen\theta$ e $h = 2 \cdot 6 \cdot cos\ \theta.$

Como $S = 2\pi rh$, então

$$S = 2\pi(6\ \cdot sen\theta) \cdot (2 \cdot 6 \cdot cos\ \theta) = 72\pi \cdot sen\ (2\theta).$$

Como 72π é constante, o problema se reduz em maximizar $sen2\theta$.

O maior valor de $sen2\theta$ é 1, ocorrendo se, e somente se, $2\theta = \frac{\pi}{2}rad$, isto é, $\theta = \frac{\pi}{4}rad$.

Logo, quando $\theta = \frac{\pi}{4}rad$, $r = 3\sqrt{2}$ e $h = 6\sqrt{2}$.

Assim, para que a área de superfície lateral seja máxima,

$$\frac{h}{r} = 2$$

Outra Solução: De acordo com a figura temos que

$$S = 2\pi rh = 4\pi\left(\frac{rh}{2}\right) \; e \; 36 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

Aplicando a desigualdade $MA \geq MG$, obtemos:

$$\frac{36}{2} = \frac{r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2} \geq \sqrt[2]{r^2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{rh}{2} = \frac{S}{4\pi},$$

isto é, $S \leq 72\pi$.

A área lateral do cilindro é então menor do que ou igual a $72\pi \; cm^2$ e será máxima quando, e se, a igualdade ocorrer. A igualdade ocorre quando os termos forem iguais, isto é, $r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$.

Agora basta resolver o sistema

$$\begin{cases} r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 36 \end{cases},$$

Obtendo, $r = 3\sqrt{2}$ e $h = 6\sqrt{2}$.

Observação: Na primeira solução temos novamente uma utilização do estudo da função seno, sendo que tal utilização se dar somente após a construção de um raciocínio prévio, sem o qual o conhecimento de funções trigonométricas seria inútil. No entanto, esta solução depende desse conhecimento para sua conclusão. Assim, a solução apresentada, como outras já aqui propostas, segue um raciocínio que prepara o aluno para a resolução de outros problemas. Já a segunda solução não requer conhecimento de funções trigonométricas, todavia necessita do estudo da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Tal solução, para ser iniciada, requer atenção apenas para a soma constante e/ou produto constante (característica principal dos problemas de otimização que podem ser resolvidos utilizando a desigualdade $MA \geq MG$), ambos envolvendo as mesmas variáveis.

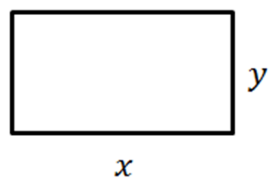
Problema 14: a) Dado um número $a > 0$ quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a?

b) Justifique matematicamente por que não se pode responder a questão anterior se trocarmos "mínimo" por "máximo".

Solução:

a) Precisamos encontrar as dimensões do comprimento e da largura de um retângulo com área fixa a e, de modo que seu perímetro seja o mínimo. Sejam x e y as dimensões do comprimento e da largura, respectivamente, conforme a figura abaixo.

Figura 30 - Retângulo de dimensões **x** por y.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Então, temos que

$$xy = a$$

E queremos $2p = 2x + 2y = 2(x + y)$ tal que $2p$ seja mínimo.

Assim o problema envolve determinar uma soma mínima sabendo que o produto é constante, logo podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, obtendo

$$\frac{(2x + 2y)}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 2y} = 2\sqrt{xy}$$

e assim

$$2p = 2x + 2y \geq 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{a}.$$

Logo o perímetro mínimo é $4\sqrt{a}$.

Além disso, pela desigualdade $MA \geq MG$, a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$, isto é, o retângulo de perímetro mínimo, fixada a área, é um quadrado de lado $x = y = \sqrt{a}$.

b) Precisamos agora, mostrar que não existe retângulo de perímetro máximo com área $a > 0$ fixada. Para isto basta observar que, se $xy = a$, multiplicando x por N tão grande quanto se queira e dividindo y pelo mesmo N, a área

$$A = (N \cdot x)\left(\frac{y}{N}\right)$$

é mantida igual a a, porém o perímetro

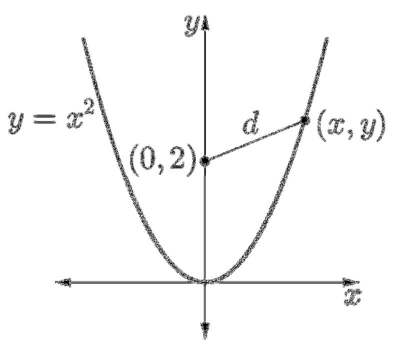
$$2p = 2Nx + \frac{2y}{N}$$

pode tornar-se maior do que qualquer número fixado, ou seja, o perímetro não possui um valor máximo.

Observação: Nesta solução pode-se observar a beleza da matemática. Além disso, os argumentos e deduções são de uma simplicidade muito grande, ao mesmo tempo em que a construção do raciocínio é feita de modo capacitador, elevando o grau de importância da resolução do problema.

Problema 15: Achar os pontos sobre a curva $y = x^2$ mais próximos do ponto $(0,2)$.

Figura 31 - Gráfico de $\mathbf{y = x^2}$.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Solução: Se (x, y) é um ponto da curva a distância a ser minimizada é

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{y + (y-2)^2}$$

Onde substituímos x^2 por seu valor y. Para minimizar este radical basta minimizar o radicando

$$y + (y-2)^2 = y^2 - 3y + 4 = \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

Como temos uma parcela constante, a soma é máxima quando a outra parcela é mínima. Mas,

$$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0,$$

e assim seu valor mínimo é 0, ocorrendo quando

$$x = \frac{3}{2}.$$

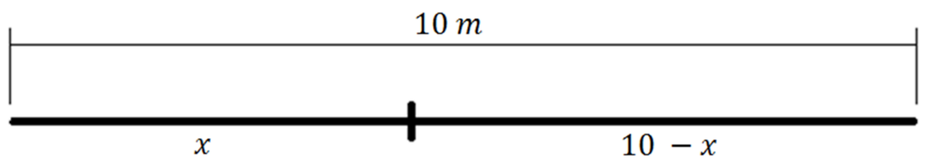
Portanto, como $y = \frac{3}{2}$ corresponde a $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, os pontos $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right) e \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\right)$estão mais próximos de $(0,2)$ do que qualquer outro ponto sobre a curva $y = x^2$.

Observação: De posse do conhecimento do cálculo da distância entre dois pontos no plano, a solução torna-se simples, requerendo do aluno apenas conhecimentos básicos. Vale lembrar que a expressão utilizada para o cálculo da distância entre dois pontos poderia ser obtida exclusivamente para esta solução, isto é, alunos que não estudaram geometria analítica podem resolvê-lo, só requer mais atenção na hora de elaborar a construção da resolução.

Problema 16: Um pedaço de arame com $10\ m$ vai ser cortado em duas partes. Uma delas é curvada na forma circular e a outra, na forma de um quadrado. Como dividir o fio, de tal modo que a área combinada das duas figuras seja a menor possível?

Solução: Se o pedaço a ser usado na forma circular mede x, então o pedaço a ser utilizado na construção do quadrado mede $10 - x$, conforme a figura 32.

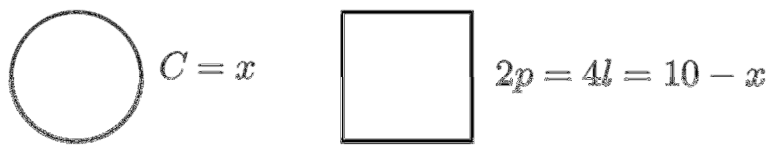
Figura 32 – Segmento dividido em duas partes.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Assim teremos uma circunferência de comprimento x e um quadrado de perímetro $10 - x$.

Figura 33 - Perímetro do círculo e do quadrado.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Logo, sendo r o raio desta circunferência e l o lado deste quadrado, teremos:

$2\pi\, r = x$ e $4l = 10 - x$

E assim

$$r = \frac{x}{2\pi}, l = \frac{10 - x}{4}$$

e portanto, sendo S a soma das áreas destas figuras temos que

$$S = \pi r^2 + l^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{10 - x}{4}\right)^2 = \frac{4 + \pi}{16\pi}\left(x - \frac{10\pi}{4 + \pi}\right)^2 + \frac{25}{16} - \frac{25\pi}{4(4 + \pi)}$$

Note que, como

$$\frac{25}{16} - \frac{25\pi}{4(4 + \pi)}$$

é constante, então a soma é mínima quando a primeira parcela é mínima. Mas,

$$\frac{4 + \pi}{16\pi}\left(x - \frac{10\pi}{4 + \pi}\right)^2 \geq 0,$$

e assim seu valor mínimo é 0, ocorrendo quando

$$x = \frac{10\pi}{4 + \pi}.$$

Logo, para que a combinação das áreas dessas figuras seja a menor possível devemos ter

$$r = \frac{5}{4 + \pi}$$

e

$$l = \frac{10}{4 + \pi}.$$

Observação: O problema também poderia ser resolvido utilizando o estudo da função quadrática. Em ambos as soluções o problema propicia ao aluno de nível fundamental e/ou médio a prática com a álgebra na hora de reescrever sentenças. Na solução apresentada o aluno trabalhará a fatoração de uma expressão não tão simples (aqui apresentamos um resultado rápido, mas o aluno terá que passar por todos os passos até a forma final).

Problema 17: Dividir o número a em duas partes de modo que o quadrado de uma dessas partes subtraído de seu produto deixa o maior valor possível.

Solução: Seja x uma das partes. Então, a outra é $a - x$ e seu produto é $ax - x^2$. Assim, a diferença que queremos maximizar é:

$$(ax - x^2) - x^2 = ax - 2x^2$$

Seja r tal que $ax - 2x^2 = r \Leftrightarrow 2x^2 - ax + r = 0$

Resolvendo esta equação quadrática obtemos

$$x = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2}{16} - \frac{r}{2}} = \frac{a}{4} \pm \sqrt{\frac{a^2 - 8r}{16}},$$

e é evidente que a existência de x está condicionada a desigualdade $a^2 - 8r \geq 0$, e consequentemente, quando r é máximo devemos ter $a^2 = 8r$ e portanto

$$x = \frac{a}{4}$$

Outra Solução: Escrevamos

$$ax - 2x^2 = \frac{a^2}{8} - 2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2.$$

Note que, como $\frac{a^2}{8}$ é constante, então a diferença é máxima quando a parcela subtraída é mínima. Mas,

$$2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 \geq 0,$$

e assim o valor mínimo subtraído é 0, ocorrendo quando

$$x = \frac{a}{4}.$$

Observação: Nada impede de o aluno resolver tal problema com as técnicas aprendidas no estudo da função quadrática, isto é, a expressão $ax^2 + bx + c$ tem seu valor máximo quando $x = -\frac{b}{2a}$. No entanto, os raciocínios utilizados (dispensando fórmulas) nas duas soluções apresentadas fornecem melhor preparação para problemas futuros que não recaiam obrigatoriamente numa expressão do segundo grau.

Problema 18: Quando uma pessoa tosse, o raio da traqueia diminui, afetando a velocidade do ar na traqueia. Se $r_0 > 0$ é o raio normal da traqueia, a relação entre a velocidade v do ar e o raio r da traqueia é dada por uma função da forma $v_{(r)} = ar^2(r_0 - r)$, onde a é uma constante positiva. Determine o raio para o qual a velocidade do ar é máxima.

Solução: O raio da traqueia contraída não pode ser negativo, nem maior que o raio normal, r_0. Assim, o objetivo é encontrar o máximo absoluto de v_r no intervalo $[0, r_0]$.

Temos que

$$v_{(r)} = ar^2(r_0 - r) = a(-r^3 + r_0 r^2)$$

Desconsiderando a constante a, tomemos m tal que

$$-r^3 + r_0 r^2 = m \Leftrightarrow -r^3 + r_0 r^2 - m = 0. \qquad (1)$$

Seja $r = -y$ uma raiz negativa da equação (1). Então $r + y$ é um fator do primeiro membro de (1).

Dividindo (1) por $r + y$ obtemos o quociente

$$-r^2 + (r_0 + y)r - y(r_0 + y)(= 0) \;\; (2)$$

e o resto

$$y^2(r_0 + y) - m.$$

Como a divisão tem que ser exata devemos ter

$$y^2(r_0 + y) = m \Leftrightarrow y(r_0 + y) = \frac{m}{y} \;\; (3)$$

Combinando (2) e (3) obtemos

$$-r^2 + (r_0 + y)r - \frac{m}{y} = 0.$$

Resolvendo esta última equação em r, obtemos:

$$r = \frac{r_0 + y}{2} \pm \sqrt{\frac{(r_0 + y)^2 - 4\frac{m}{y}}{4}}$$

e é evidente que a existência de r está condicionada a desigualdade

$$(r_0 + y)^2 - 4\frac{m}{y} \geq 0,$$

isto é,

$$\frac{m}{y} \leq \frac{1}{4}(r_0 + y)^2$$

e consequentemente, quando m é máximo devemos ter

$$\frac{m}{y} = \frac{1}{4}(r_0 + y)^2. \quad (4)$$

Combinando (3) e (4), obtemos:

$$y(r_0 + y) = \frac{1}{4}(r_0 + y)^2.$$

Resolvendo esta última equação em y obtemos

$$y = -r_0$$

(não satisfaz, pois $y > 0$, e, além disso, teríamos $r = 0$)

e

$$y = \frac{r_0}{3}.$$

Logo

$$r = \frac{r_0 + y}{2} = \frac{r_0 + \frac{r_0}{3}}{2} = \frac{2}{3}r_0$$

é o valor do raio para que a velocidade seja máxima, a saber a velocidade máxima é

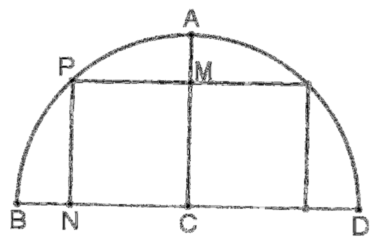
$$v_{\left(\frac{2}{3}r_0\right)} = \frac{4a}{27}r_0^3.$$

Observação: Este é um problema, cuja solução apesar de recair num equação do segundo grau, começa com uma expressão do terceiro grau que, para chegar até a segunda, requer um raciocínio que vai muito além do trabalhado no estudo da função quadrática. As ideias de divisão utilizadas nesta solução são indispensáveis, no entanto tais ideias costumam ser trabalhadas em nível de ensino fundamental, tornando assim o problema acessível também a estes alunos. Uma pergunta que pode surgir é se sempre uma equação do terceiro grau tem pelo menos uma raiz negativa, neste caso, dependendo do nível de ensino em que se trabalhe pode-se atentar para o fato de que quando dizemos "seja" estamos supondo que exista tal raiz, isto é, estamos tomando uma raiz imaginária. A observância de alguma contradição ou não, no desenvolver da resolução determinará se a suposição é verdadeira ou se, no caso de falsa, alteraria o resultado final da solução. Um ótimo exercício seria pedir aos alunos para estipular quais seriam as condições para que uma equação cúbica tenha pelo menos uma raiz negativa. E pra aquelas equações cúbicas que não tiverem ao menos uma raiz negativa, verificar se o resultado da resolução se alteraria.

Problema 19: Qual o maior retângulo que pode ser inscrito num círculo de raio a dado?

Solução: O problema é equivalente a encontrar o maior retângulo que pode ser inscrito num semicírculo de raio a, conforme a figura abaixo.

Figura 34 - Retângulo inscrito num semi-círculo.



Fonte – Elaborada pelo autor.

Seja $CN = x$ e $CA = a$. Então $NP = \sqrt{a^2 - x^2}$ e, por conseguinte o retângulo inscrito tem área igual a $2CN \cdot NP = 2x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2x^2 - x^4}$.

Então para maximizar esta área basta maximizar $a^2x^2 - x^4$.

Seja r tal que

$$a^2x^2 - x^4 = r \Leftrightarrow x^4 - a^2x^2 + r = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - a^2x^2 + r = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática obtemos

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - r^2}.$$

Note que a existência de x^2 estar condicionada a desigualdade $\frac{a^4}{4} - r^2 \geq 0$, e é evidente que quando r é máximo então $\frac{a^4}{4} = r^2$ e assim

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Logo o retângulo (do problema original) procurado tem base

$$2CN = 2x = a\sqrt{2}$$

e altura

$$2NP = 2\sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{2}$$

isto é, o maior retângulo que pode ser inscrito num círculo de raio a é um quadrado de lado $a\sqrt{2}$.

Outra solução:

Na expressão $a^2x^2 - x^4$, façamos $x^2 = y + \frac{a^2}{2}$.

Assim obtemos a expressão

$$a^2x^2 - x^4 = a^2\left(y + \frac{a^2}{2}\right) - \left(y + \frac{a^2}{2}\right)^2 = \frac{a^4}{4} - y^2$$

que tem seu valor máximo quando $y^2 = 0 \to y = 0$ e, assim,

$$x^2 = \frac{a^2}{2} \to x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Observação: Ambas as soluções mostram mais uma vez a importância de se resolver problemas que recaem em equações do segundo grau sem recorrer a sentenças pré-formuladas. O raciocínio utilizado resolve o problema que envolve uma equação do quarto grau da mesma forma que resolvemos problemas envolvendo equações de segundo e terceiro graus.

Problema 20: Dividir o número $a > 0$ em dois fatores de modo que a soma de seus quadrados seja mínima.

Solução: Se x é um dos fatores, então o outro é a/x.

Assim a soma que queremos minimizar é

$$x^2 + \left(\frac{a}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{a^2}{x^2}.$$

Seja r tal que

$$x^2 + \frac{a^2}{x^2} = r \Leftrightarrow x^4 - rx^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2)^2 - rx^2 + a^2 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática obtemos

$$x^2 = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2 - 4a^2}{4}},$$

e é evidente que a existência de x^2 está condicionada a desigualdade $r^2 - 4a^2 \geq 0$. Consequentemente, quando r é mínimo devemos ter $r^2 = 4a^2$ e, portanto

$$r = 2a$$

e assim

$$x^2 = \frac{r}{2} = a \Leftrightarrow x = \sqrt{a}$$

Observação: Note que foi conveniente desconsiderarmos a solução $r = -2a$, de fato isto nos levaria a $x^2 = -a$, o que tornaria impossível existir um valor real para x.

Outra Solução: A soma

$$x^2 + \frac{a^2}{x^2}$$

Contem parcelas positivas cujo produto é constante, logo podemos aplicar a desigualdade $MA \geq MG$, donde obtemos

$$\frac{x^2 + \frac{a^2}{x^2}}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot \frac{a^2}{x^2}} = a \Leftrightarrow x^2 + \frac{a^2}{x^2} \geq 2a$$

Onde a igualdade ocorre se, e somente se,

$$x^2 = \frac{a^2}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Observação: Note que, mesmo apresentando uma expressão quadrática (na verdade biquadrática), a primeira solução não aconteceria se dispuséssemos apenas do estudo da função quadrática. O raciocínio utilizado para finalizá-la é bastante simples e, senão visualizado de imediato pelo aluno, não será dispensado em resoluções de problemas semelhantes que venha encontrar no futuro. Quanto à segunda solução, de posse do conhecimento da desigualdade $MA \geq MG$, também se torna simples a partir do ponto que o aluno perceba a soma de parcelas com produto constante.

Problema 21: Encontrar o valor de x que torna máximo o valor de

$$\frac{x}{1+x^2}.$$

Solução: Note que o valor de x que torna

$$\frac{x}{1+x^2}$$

máximo é positivo, e é o mesmo valor que torna

$$\frac{1}{\frac{x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{x}$$

mínimo.

Seja r tal que

$$\frac{1+x^2}{x} = r \Leftrightarrow x^2 - rx + 1 = 0.$$

Resolvendo esta equação quadrática encontramos

$$x = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2-4}{4}}.$$

e é evidente que a existência de x está condicionada a desigualdade $r^2 - 4 \geq 0$, isto é, $r^2 \geq 4$ e consequentemente, quando r é mínimo devemos ter $r^2 = 4$, isto é, $r = 2$ (não necessitamos falar de $r = -2$. Por que?) e portanto

$$x = \frac{r}{2} = 1.$$

Outra Solução: Note que para encontrar o valor máximo de

$$\frac{x}{1 + x^2}$$

podemos nos restringir a $x > 0$. Equivalentemente, para encontrar x tal que

$$\frac{1}{\frac{x}{1 + x^2}} = \frac{1 + x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$$

seja mínimo (encontrar x que minimiza sua soma com seu inverso), podemos considerar $x > 0$, e assim, sendo as duas parcelas positivas, podemos utilizar a desigualdade $MA \geq MG$, obtendo:

$$\frac{\frac{1}{x} + x}{2} \geq \sqrt[2]{\frac{1}{x} \cdot x} = 1 \quad (*)$$

Isto é,

$$\frac{1}{x} + x \geq 2 \; (valor\ mínimo)$$

e assim

$$\frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \leq \frac{1}{2} \; (valor\ máximo)$$

Por $(*)$, a igualdade ocorre se, e somente se,

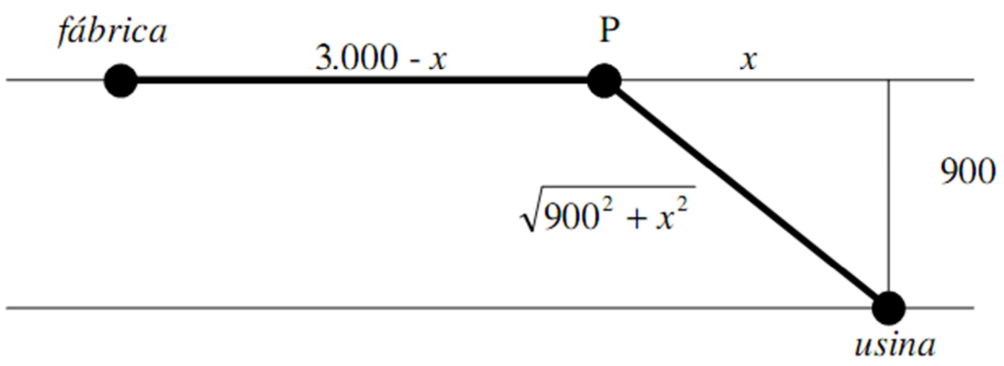
$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x = 1.$$

Observação: A primeira solução já foi comentada em um problema semelhante. Na segunda podemos citar um detalhe importante que foi a verificação da condição $x > 0$ poder ser adotada, e assim podermos trabalhar com uma soma de parcelas positivas com produto constante, e consequentemente utilizarmos a desigualdade $MA \geq MG$. O aluno pode ficar "viciado" a utilizar esta desigualdade sempre que encontrar soma de parcelas com produto constante, assim, este problema pode ser utilizado para chamá-lo a atenção de que sempre a condição “parcelas positivas” deve ser satisfeita.

Problema 22: Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900 m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3000 m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R$5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa RS4,00 o metro. Qual o percurso mais econômico para o cabo?

Solução: Inicialmente vejamos a ilustração gráfica do problema, a fim de facilitar a construção da função custo:

Figura 35 - Ilustração do problem 22.



Fonte – Elaborada pelo autor.

O objetivo é minimizar o custo de instalação do cabo. Logo, precisamos construir a função custo, a qual, baseada na figura acima e no enunciado, é dada por:

$$C(x) = 5\sqrt{900^2 + x^2} + 4(3000 - x) = 12000 + 5\sqrt{900^2 + x^2} - 4x$$

Como x e $3000 - x$ não podem ser negativos, a região de interesse (domínio do problema) é o intervalo $[0,3000]$, onde devemos encontrar mínimo absoluto de C.

Desconsiderando a constante 12000, $C(x)$ é mínimo quando

$$r = 5\sqrt{900^2 + x^2} - 4x$$

é mínimo. Desenvolvendo temos:

$$r = 5\sqrt{900^2 + x^2} - 4x \Leftrightarrow 5\sqrt{900^2 + x^2} = r + 4x \Leftrightarrow$$

$$25(900^2 + x^2) = r^2 + 8rx + 16x^2 \Leftrightarrow 9x^2 - 8rx + 25 \cdot 900^2 - r^2 = 0.$$

Resolvendo a última equação, em x, obtemos:

$$x = \frac{8r}{18} \pm \frac{\sqrt{100r^2 - 36 \cdot 25 \cdot 900^2}}{18}.$$

Assim, a existência de x está condicionada a desigualdade

$$100r^2 - 36 \cdot 25 \cdot 900^2 \geq 0 \Leftrightarrow r^2 \geq 2700^2$$

e consequentemente, quando r é mínimo devemos ter $r^2 = 2700^2$, isto é, $r = 2700$.

Logo, quando r é mínimo temos

$$x = \frac{8r}{18} = \frac{8 \cdot 2700}{18} = 1200.$$

Note que não utilizamos o valor $r = -2700$, pois este levaria a $x = -1200$, o que não pode ocorrer, pois $x \geq 0$.

Portanto o custo $C_{(x)}$ é mínimo quando $x = 1200$, isto é,

$$C_{(1200)} = 12000 + r = 12000 + 2700 = 14700$$

Observação: Notemos que a expressão a se minimizar não é do tipo aqui já trabalhada, pois apresenta um expressão com radical. No entanto, o desenvolvimento é semelhante aos casos que envolvem expressões do segundo e terceiro grau. Vale ressaltar que o problema é bastante acessível ao aluno, pois se trata de uma situação fácil de visualizar num contexto real. Assim podemos trabalhar esse problema a partir das série finais do Ensino Fundamental. Pode ser necessário mostrar a obtenção da expressão da hipotenusa do triângulo retângulo da figura.

Problema 23: Determine os valores máximos e mínimos de $asen\,\theta + bcos\,\theta$, onde a e b são constantes reais.

Solução: Para números reais a e b, não simultaneamente nulos, podemos escrever

$$asen\,\theta + bcos\,\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}sen\,\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}cos\,\theta\right) \quad (1)$$

e existe α satisfazendo

$$sen\,\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

determinados pela localização do ponto

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$$

no círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$.

Segue que (1) pode ser escrita como

$$\sqrt{a^2 + b^2}(\cos \alpha \, sen \, \theta + sen \, \alpha \cos \theta) = \sqrt{a^2 + b^2} sen(\alpha + \theta).$$

Logo, o máximo é obtido escolhendo θ tal que $sen(\alpha + \theta) = 1$ e o mínimo de modo que $sen(\alpha + \theta) = -1$.

Assim, o valor máximo de $asen \, \theta + bcos \, \theta$ é $\sqrt{a^2 + b^2}$ e o valor mínimo é $-\sqrt{a^2 + b^2}$. Se a e b são positivos, o valor máximo pode ser obtido com um único valor de θ satisfazendo $0 \leq \theta \leq 90^o$.

Observação: Esta solução requer habilidade na manipulação de expressões algébricas respeitando as variações de seus valores, por exemplo, a introdução dos dois fatores de produto unitário é de tal modo que um deles tenha variação coincidente com o valor de $sen \, x$, isto é, é uma escolha que garante que seu valor varie de -1 a 1. Assim, torna-se restrito, a aplicação do problema a alunos que já tenha estudado funções trigonométricas e, além disso, que tenha trabalhado as expressões dessas funções para soma e/ou diferença de dois arcos. Como em outros problemas, sugerimos opcionalmente abordá-lo com valores numéricos para as constantes a e b, o que pode tornar mais visível a todos os alunos as alterações feitas e seus objetivos.

Problema 24: Encontre o valor máximo de $4x + 3\sqrt{1 - x^2}$, onde $0 \leq x \leq 1$.

Solução: Uma boa ideia seria procurar uma expressão sem o radical que substituísse a dada. Para isto precisaríamos escrever $1 - x^2$ como um quadrado. Uma forma de fazermos isto é tomar $x = sen \, y$, e sendo $0 \leq x \leq 1$, podemos restringir $0 \leq y \leq \pi/2$.

Assim,

$$4x + 3\sqrt{1 - x^2} = 4sen\, y + 3\sqrt{1 - (sen\, y)^2} = 4sen\, y + 3\sqrt{(\cos y)^2} = 4sen\, y + 3\cos y,$$

visto que $0 \leq cos\, y \leq 1$, para $0 \leq y \leq \pi/2$.

Logo, pelo problema 23, $4sen\, y + 3\cos y \leq \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, e assim,

$$4x + 3\sqrt{1 - x^2} \leq 5(valor\ máximo).$$

Observação: Após a solução do problema anterior esta solução torna-se simples, depois, é claro, de se verificar a substituição a se fazer. Tal processo não é desconhecido por alunos de nível médio, por exemplo, na solução de equações biquadradas já se utilizam de substituição com mudança de variáveis. Aqui combinamos este aprendizado ao do estudo de funções trigonométricas, no caso em questão, das funções seno e cosseno. Detalhes devem ser observados para evitar erros comuns, como por exemplo, na eliminação do radical deve ser citado o porquê de simplesmente eliminarmos o radical, sem colocar o módulo, mais um motivo para relembrar o estudo das funções trigonométricas.

Problema 25: Encontre o valor máximo de $4x + \sqrt{3 - x^2}$, onde $0 \leq x \leq \sqrt{3}$.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio da solução de problema anterior, procuremos eliminar o radical. Para isto escrevamos $3 - x^2$ como um quadrado tomando $x = \sqrt{3}sen\, y$. Além disso, sendo $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, podemos restringir $0 \leq y \leq \pi/2$.

Assim,

$$4x + \sqrt{3 - x^2} = 4\sqrt{3}sen\, y + \sqrt{3 - \left(\sqrt{3}sen\, y\right)^2} = 4\sqrt{3}sen\, y + \sqrt{3}\sqrt{1 - (\mathrm{sen}\, y)^2} =$$

$$4\sqrt{3}sen\, y + \sqrt{3}\sqrt{(\cos y)^2} = 4\sqrt{3}sen\, y + \sqrt{3}\cos y,$$

visto que $0 \leq cos\, y \leq 1$, para $0 \leq y \leq \pi/2$.

Logo, pelo problema 23,

$$4\sqrt{3}sen\, y + \sqrt{3}\cos y \leq \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{51},$$

e assim,

$$4x + \sqrt{3 - x^2} \leq \sqrt{51}(valor\ máximo).$$

Observação: Um detalhe a ser observado no que diferencia esta solução da anterior é a escolha da substituição adequada de modo a obter, após simplificações, o radicando $1-(\text{sen}\, y)^2$.

Problema 26: Mostre que para uma constante $a > 0$, o valor mínimo de $asecy - tgy$, $0 \leq y < 90°$, é $\sqrt{a^2-1}$, ocorrendo se, e somente se, $secy = a/\sqrt{a^2-1}$ e $tg\, y = 1/\sqrt{a^2-1}$.

Solução: Se escrevermos $m = asecy - tgy$ então o problema torna-se minimizar m.

Da expressão acima obtemos que $a = mcos\, y + sen\, y$.

A expressão no lado direito desta equação se assemelha a função linear de $seny$ e $acos\, y$ minimizado antes. A sugestão foi definir α satisfazendo

$$sen\, \alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$$

e

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}},$$

Com $0 < \alpha < \pi/2$. Daí

$$a = mcos\, y + sen\, y = \sqrt{1+m^2}\left(\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} cos\, y + sen\, y \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\right)$$
$$= \sqrt{1+m^2}(sen\, \alpha\, cos\, y + sen\, y \cos \alpha\,) = \sqrt{1+m^2}\, sen(\alpha + y).$$

Assim obtemos que

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}} = sen(\alpha + y).$$

Logo, para minimizar m, temos que maximizar

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}},$$

isto é, maximizar $sen(\alpha + y)$.

O máximo valor de $sen(\alpha + y)$é 1, obtido tomando $\alpha + y = \pi/2$, e portanto temos

$$\frac{a}{\sqrt{1+m^2}} = 1,$$

$$m = \sqrt{a^2-1}\ (valor\ mínimo),$$

$$sen\ y = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{1}{a},$$

$$\cos y = \operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}.$$

As duas últimas igualdades nos fornecem ,

$$secy = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}$$

e

$$tg\ y = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Observação: A solução apresentada utiliza um artifício um tanto difícil de pensar, por este motivo, recomendamos que este problema seja resolvido pelo professor, a fim de fornecer ideias para outras soluções. No entanto, dada a ideia inicial pode-se questionar aos alunos possíveis formas de continuar o desenvolvimento da solução.

Problema 27: Encontre o valor mínimo de $5\sqrt{9+4x^2}-8x$.

Solução: Inicialmente escrevamos

$$5\sqrt{9+4x^2}-8x = 10\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}-8x.$$

Agora, para eliminar o radical tomemos para cada x real, um y tal que

$$x = \frac{3}{2}tg\ y.$$

Note que y está bem definido, pois a função tangente é sobrejetiva.

Substituindo obtemos

$$5\sqrt{9+4x^2}-8x = 10\sqrt{\frac{9}{4}+\left(\frac{3}{2}tg\ y\right)^2}-8\frac{3}{2}tg\ y =$$

$$10\frac{3}{2}\sqrt{1+(tg\ y)^2}-12tg\ y = 15\sqrt{(\sec y)^2}-12tg\ y$$

$$= 15\sec y - 12\ tg\ y = 12\left(\frac{15}{12}\sec y - tg\ y\right).$$

Logo, utilizando o resultado do problema anterior, obtemos que

$$5\sqrt{9+4x^2}-8x = 12\left(\frac{15}{12}\sec y - tg\ y\right) \geq 12\sqrt{\left(\frac{15}{12}\right)^2 - 1} = 9.$$

Portanto o valor mínimo de $5\sqrt{9+4x^2}-8x$ é 9.

Além disso, ainda utilizando o resultado do problema anterior, temos que

$$tg\ y = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{15}{12}\right)^2 - 1}} = \frac{1}{\frac{9}{12}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2,$$

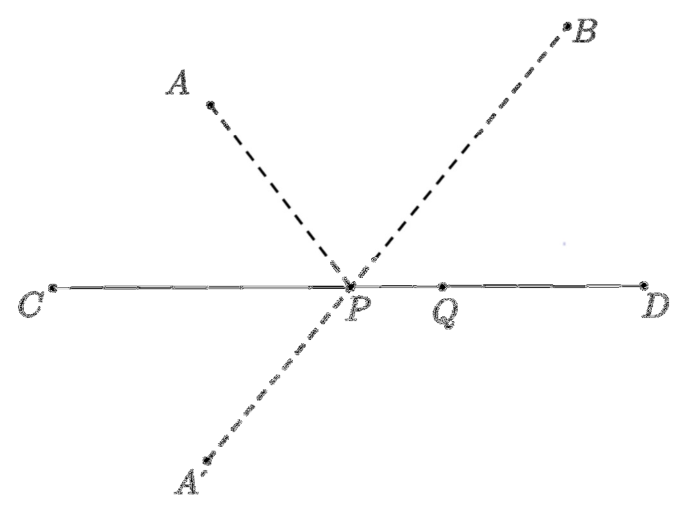
isto é, o valor mínimo ocorre quando $x = 2$.

Observação: Embora a ideia inicial de eliminar o radical pareça um tanto obscura, é notável que os argumentos utilizados são simples, requerendo apenas o conhecimento de identidades trigonométricas fundamentais e do estudo da função tangente, considerando, é claro, que o problema anterior já tenha sido trabalhado.

Problema 28: Considere a seguinte problema: Dados dois pontos A e B no mesmo lado de um segmento de reta CD, encontrar o ponto P em CD para que $AP + PB$ seja mínimo.

Solução: A forma mais rápida de resolver este problema consiste em tomar em imagem de espelho da reta CD de um dos pontos A e B, por exemplo, a imagem de espelho A' de A, como mostrado na figura abaixo. Em seguida, o segmento BA' intersecta CD no ponto desejado P. Este é o teorema de Heron, também conhecido como O princípio da reflexão.

Figura 36 - Solução gráfica do problema de Heron.



Fonte – Elaborada pelo autor.

O conceito de espelho-imagem é quase autoexplicativo: A' é o ponto tal que o segmento de linha AA' é perpendicular a CD e intercepta CD. Para provar que P é o ponto que queremos, considere qualquer outro ponto Q em CD, como mostrado na figura acima. Então $AQ = A'Q$ e AP = A'P; portanto, temos $AQ + QB = A'Q + QB > A'B = A'P + PB = AP + PB$,

onde usamos a desigualdade triangular.

Podemos aplicar este resultado geométrico na álgebra, reformulando o problema em um ambiente de coordenadas. Tome o eixo Ox sobre a o segmento de reta CD, com origem na posição C, e sejam as coordenadas de A e B, (a, b) e (c, d), com $b > 0$ e $d > 0$. Denotando qualquer ponto em CD por $(x, 0)$, o problema consiste em minimizar a soma das distâncias de $(x, 0)$ a (a, b) e (c, d). Isto é, encontrar o valor de x que torna

$$\sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2} \qquad (1)$$

mínimo.

Usando o resultado geométrico, a álgebra torna-se simples. As coordenadas de A' são $(a, -b)$, de modo que a equação da reta $A'B$ é

$$\frac{y+b}{-b-d} = \frac{x-a}{a-c}$$

Tomando $y = 0$ e resolvendo para x, encontramos a coordenada x do ponto P onde $A'B$ cruza o eixo x, ou seja,

$$x = \frac{ad+bc}{b+d} \qquad (2)$$

Este é o único valor de x que torna (1) mínimo.

Observação: Aqui temos uma situação onde álgebra e geometria se combinam em perfeita harmonia e nos levam a solução do problema. Pelo uso de muitas expressões algébricas, recomendamos o que este problema seja proposto a alunos que já dominem os conteúdos envolvidos, isto é, além da álgebra básica, a geometria plana (desigualdade triangular) e as noções básicas de geometria analítica (distância entre dois pontos e equação de uma reta por dois pontos). Cabe lembrar que o problema se torna mais acessível se adotarmos os pontos A e B num plano, com suas respectivas coordenadas dadas, isto é, com seus valores numéricos e não algébricos. Neste caso convém continuarmos a tomar como reta CD o eixo Ox.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma sugestão de como trabalhar os problemas de otimização com conteúdos do próprio Ensino Médio. De imediato queremos ressaltar que nosso intuito aqui não foi menosprezar o Cálculo Diferencial, que é um poderoso instrumento na matemática. Nossa intenção foi simplesmente mostrar que ele não é o único instrumento. É notável que o cálculo diferencial possa trabalhar com mais variedade de funções que os métodos apresentados neste trabalho. Um exemplo interessante disso são as funções exponenciais e logarítmicas. O Cálculo é a melhor ferramenta para se trabalhar com problemas de otimização envolvendo essas funções. Por isso, não é por acaso que, no nosso trabalho, ficaram ausentes problemas que recaiam em funções exponenciais ou logarítmicas.

A maioria dos problemas discutidos neste trabalho são mais manejáveis pelos métodos apresentados aqui do que por cálculo. Em muitos problemas não existe uma função simples para ser submetido ao processo de diferenciação. Por exemplo, a formulação da função área em termos de quatro variáveis não é uma forma favorável para resolver o problema utilizando o Cálculo.

Além disso, mesmo quando o Cálculo é a ferramenta mais rápida, os métodos apresentados aqui ainda levam vantagem por necessitarem de uma base de conhecimento básica, tornando os problemas acessíveis até mesmo a estudantes com nível de escolaridade anterior ao superior. Isso era de se esperar, uma vez que os problemas foram selecionados para atender a esse fim. Vale ressaltar que alguns dos problemas aqui propostos foram retirados de livros de Cálculo Diferencial e neste trabalho resolvidos com conteúdos do Ensino Médio.

Outro ponto que podemos destacar é a inovação que fizemos com a utilização de um método para determinar máximos ou mínimos de expressões polinomiais de grau maior do que dois, método até então ausentes em nossos livros de Ensino Médio.

Podemos ainda destacar que a proposta de se trabalhar os problemas de otimização no Ensino Médio apoia alguns dos ideais encontrados nos PCN’s, principalmente no que se refere ao fato de oferecerem uma oportunidade do professor trabalhar a interdisciplinaridade, em decorrência de sua relação natural com outras áreas como a física, a biologia, o transporte, dentre outras. Além disso pode se trabalhar o assunto envolvendo uma variedade de conteúdos de matemática. Por exemplo, merece destaque a geometria, que é um campo fértil para se trabalhar situações problemas, a trigonometria, que auxiliam os problemas de otimização com suas identidades e funções, e, ainda pouco trabalhada no Ensino Médio, a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. Devido a essa “mistura” de conteúdos é possível trabalhar com os problemas de otimização em vários momentos do Ensino Médio e, por vezes, até no ensino fundamental. Nas séries finais do Ensino Médio, em que os alunos já viram a maioria dos conteúdos base, estes problemas poderiam compor um capítulo a ser trabalhado. Vale lembrar que os mesmo podem compor o banco de questões preparatórias para exames tais como as olimpíadas de matemática, em especial a OBM. Deve-se a isso o fato de que, mesmo não sendo frequentes nestas provas, os problemas de otimização requerem em sua solução habilidade semelhante a exigida nos problemas presentes nestas provas. Além disso, esperamos que este tipo de problema sirva de treinamento para que os alunos possam adquirir bases para solucionar problemas futuros.

Por fim, nos lisonjeamos com a esperança de que nosso trabalho será de alguma utilidade para os professores matemáticos trabalharem os problemas de otimização com alunos que não tenham avançado ainda no estudo do Cálculo Diferencial, e que os amantes da matemática darão apoio a nossa proposta.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2012: 2. Matemática. 3. Ensino Médio**. Brasília:2011.

[2] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio; volume 2: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: 2006.

[3] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental, v.3.** Brasília: 1997.

[4] DELGADO R.V., MANFRINO B.R.B., ORTEGA J.A.G. **Inequalities: a Mathematical Olympiad approach**. Birkhäuser, Basel · Boston · Berlin, 2010.

[5] FASCIO, Regina Vera. **Competências e habilidades.** Disponível em http://cefaprotga. blogspot.com.br/2008/03/competncias-e-habilidades.html/ Acesso em: 11 de dezembro de 2013.

[6] LAL, Ramchundra, 1821-1880. **A treatise on problems of maxima and minima, solved by algebra.** Calcutta: Impresso por P. S. D'rozario e CO. Tank-Square, 1850.

[7] LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica. Vol. 1**. Editora Harbra, São Paulo: 1994.

[8] LIMA, E. L. **O Princípio da indução**, in: Artigo da Revista Eureka, no 03. Rio de Janeiro: SBM, 1998. Disponível em http://www.obm.org.br/opencms/revistaeureka/lista.html. Acesso em junho de 2014.

[9] NIVEN, Ivan. **Maxima and mínima without calculus**, The Dolciani Mathematical Exposition, 6. Math. Ass. Amer., 1981.

[10] POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

[11] SANTIAGO, Ana Elisa Esteves. **Evolução histórica dos problemas de optimização e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI.** Salamanca (Tese de doutoramento apresentada na Universidade de Salamanca. 2008).