PROFMAT
Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

UMA ABORDAGEM DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS COM ÊNFASE ÀS RELAÇÕES MÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO QUALQUER E SUAS APLICAÇÕES

por

Juliana Nadaline Haenisch

29 de Agosto, 2014

Uma abordagem de conceitos geométricos com ênfase às relações métricas em um Triângulo Qualquer e suas aplicações

Juliana Nadaline Haenisch

Departamento de Matemática -UFPR

019081-980, Curitiba, PR

Brazil

e-mail: jnada_h@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo apresenta-se parte de um trabalho sobre as relações métricas em um triângulo qualquer e suas aplicações no cálculo das medidas das alturas, medianas, bissetrizes internas e externas, trianas, área de um triângulo qualquer, e estende-se o estudo ao cálculo da área de um quadrilátero qualquer. Destacamos a importância de se ampliar os conceitos já trabalhados a respeito de triângulos específicos para um triângulo qualquer.

Palavras-chave: altura, mediana, bissetriz, trianas, triângulo qualquer.

1 Introdução

Nesse artigo apresentamos o estudo de alguns conceitos de geometria, mais especificamente no que se refere às relações métricas em triângulos quaisquer, visto que percebemos esta deficiência nos materiais didáticos disponíveis na atualidade, os quais, em sua maioria, restringem o assunto apenas a triângulos retângulos.

Em nossa prática, observamos que quase sempre o estudo da Geometria fica para o final de lista, na expectativa de uma sobra de tempo para a sua exploração com os educandos. Nosso estudo visa uma generalização de alguns conceitos bem simples trabalhados já no ensino básico, inclusive no Ensino Fundamental, tais como as relações métricas em um triângulo, como o cálculo da medida das medianas. Observamos que, além desses conteúdos ficarem à espera de tempo para serem abordados, em sua maioria, estão restritos apenas a triângulos específicos, como retângulo, isósceles ou então equilátero. No livro de Ary Quintella, ”Matemática para a quarta série ginasial” [9], utilizado por volta de 1970 nos anos finais do Ensino Fundamental, percebemos uma abordagem bem abrangente para esses conceitos, o que gostaríamos de, através deste, reintroduzir de forma genérica, ou seja, valendo para qualquer triângulo. Apresentamos também alguns tópicos que, mesmo não fazendo parte do currículo básico, poderiam ser apresentados aos alunos a título de curiosidade, como é o caso das trianas, um assunto pouco explorado que pode despertar o interesse dos alunos e motivá-los a explorar as propriedades das figuras geométricas.

Esse artigo está dividido em quatro seções, sendo a primeira com definições de alguns conceitos de geometria que serão utilizadas na sequência; a segunda com demonstrações sucintas e teoremas como o Teorema de Stewart, a terceira com a demonstração do cálculo das medidas das medianas e outras aplicações, como o ponto notável e as trianas, e a quarta com as considerações finais.

1 Definições

Para facilitar a leitura e um melhor entendimento do que propomos, apresentamos inicialmente algumas notações e definições que serão adotadas no desenvolvimento do trabalho.

Em um triângulo de vértices A, B e C, consideramos:

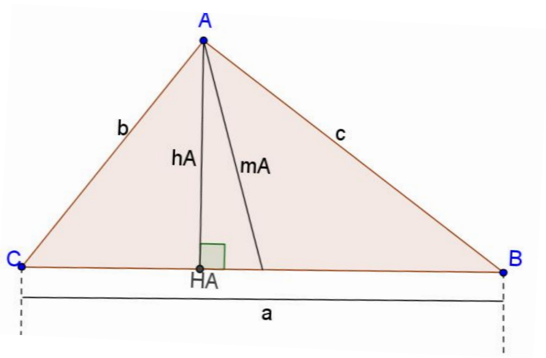
ΔABC – triângulo de vértices A, B e C.

h_x – altura referente ao vértice X.

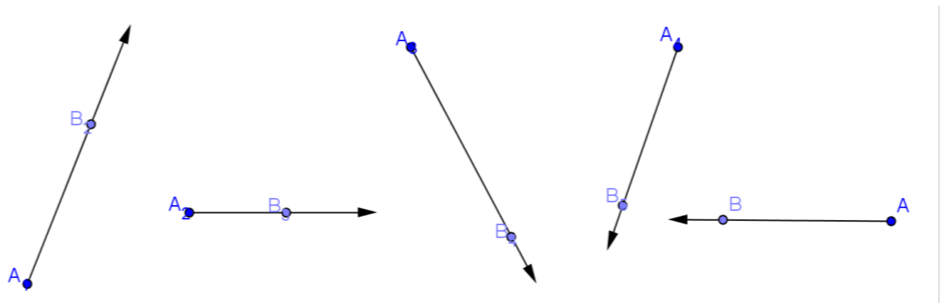
m_x – mediana relativa ao vértice X.

x – medida do lado oposto ao vértice X.

p = semiperímetro do triângulo.



Definição 1 Denotamos por $\overrightarrow{AB}$ a semirreta com origem em A que passa por B em linha reta e continua na mesma direção. A notação será dada sempre por uma seta, da esquerda para a direita, sobreposta às letras que indicam o ponto de origem e outro ponto qualquer que define sua direção. Por exemplo, todas as semirretas a seguir representamos por $\overrightarrow{AB}$.

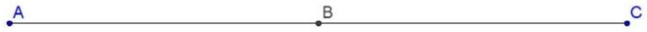


Definição 2 Sejam A e B dois pontos distintos. O segmento $\overline{AB}$ é o conjunto formado pelos pontos A e B juntamente com todos os pontos compreendidos entre A e B. Os pontos A e B são chamados extremidades de $\overline{AB}$. Denotamos um segmento pelas letras correspondentes aos pontos de suas extremidades, com uma barra no topo das mesmas. Por exemplo, $\overline{AB}$ indica a aparência do segmento com extremidades nos pontos A e B, como representado na figura a seguir:

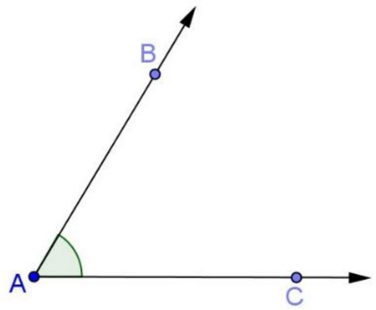
O número AB é chamado comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Definição 3 Segmentos de reta congruentes são segmentos que possuem mesmo comprimento.

Definição 4 Um ponto B é chamado ponto médio de um segmento $\overline{AC}$ se B está ente A e C e $AB = BC$.



Definição 5 Ângulo é a região de um plano concebida pelo encontro de duas semirretas distintas com mesma origem. As duas semirretas são chamadas lados do ângulo e a origem comum das semirretas é chamada vértice do ângulo. Considerando as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, o ângulo determinado por elas será representado por $B\hat{A}C$, $C\hat{A}B$.

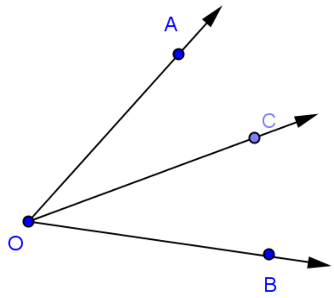


Definição 6 Ângulos congruentes são ângulos que possuem a mesma medida.

Definição 7 Seja o ângulo $A\hat{O}B$. Uma semirreta $\overrightarrow{OC}$ é uma bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ se:

i) C está no interior do ângulo $A\hat{O}B$;

ii) $A\hat{O}C$ é congruente ao ângulo $B\hat{O}C$ (isto é, tem a mesma medida).



Definição 8 Sejam $P_1,\ P_2, \ldots, P_n\ \ (n \geq 3)$ n pontos distintos tais que os segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$, possuem as seguintes propriedades:

i) Nenhum par de segmentos se intercepta a não ser nas suas extremidades;

ii) Nenhum par de segmentos com extremidade comum está na mesma reta.

A reunião dos segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$, é chamado de polígono, denotado por $P_1P_2P_3 \ldots P_n$.

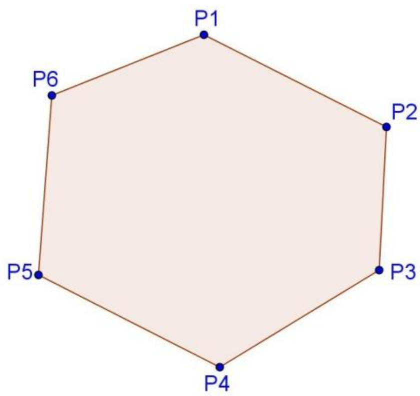
Os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são chamados os vértices do polígono e os segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ e $\overline{P_nP_1}$ são os seus lados.

Definição 9 A soma dos comprimentos dos lados de um polígono é chamada de perímetro do polígono.

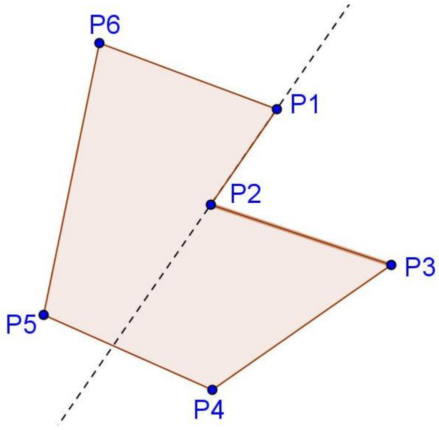
Definição 10 Um polígono é convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a cada reta que contém um de seus lados.

Exemplos:

i) o polígono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ é convexo.



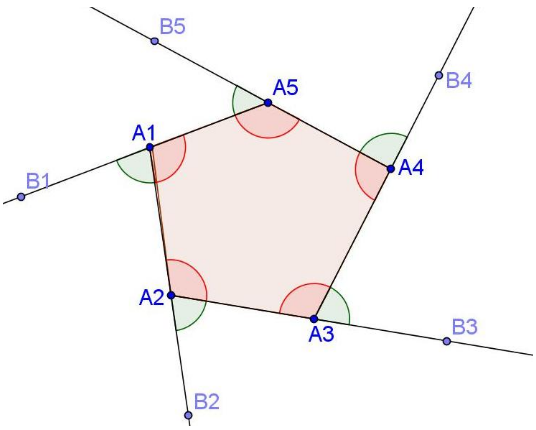
ii) o polígono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ é não convexo ou côncavo.



Definição 11 Os ângulos internos de um polígono convexo $P_1P_2P_3\ldots P_n$, são $P_{i-1}\widehat{P_i}P_{i+1}$, $i = 2, \ldots, n-1$ e os ângulos $P_{n-1}\widehat{P_n}P_1$ e $P_n\widehat{P_1}P_2$.

Os ângulos externos de um polígono convexo são os ângulos formados pelas semirretas $\overrightarrow{P_iQ_i}$ e $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$, $i = 2, 3, \ldots, n-1$ e as semirretas $\overrightarrow{P_nQ_n}$ e $\overrightarrow{P_nP_1}$, tal que P_{i+1} está entre P_i e Q_{i+1}, do mesmo modo P_1 está entre P_n e Q_1.

Exemplo: Consideremos o polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$ e os pontos $B_1, B_2 e, B_4\ e\ B_5$, como representados a seguir:



Os ângulos $B_1\widehat{A_1}A_2$, $B_2\widehat{A_2}A_3$, $B_3\widehat{A_3}A_4$, $B_4\widehat{A_4}A_5$, $B_5\widehat{A_5}A_1$, são chamados ângulos externos do polígono $A_1A_2A_3A_4A_5$.

Definição 12 Podemos classificar os polígonos de acordo com o seu número de lados. Assim um polígono de 3 lados é chamado de triângulo; de 4 lados é chamado de quadrilátero; de 5 lados é chamado de pentágono; de 6 lados é chamado hexágono, etc.

Definição 13 Em relação à medida dos seus lados, os triângulos são classificados assim:

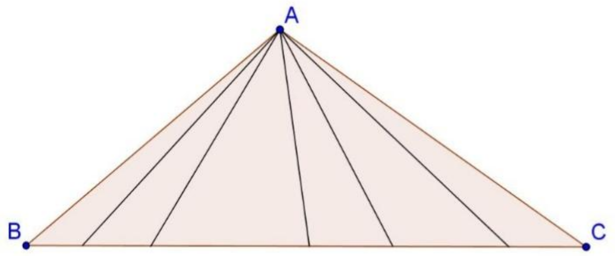
- Triângulo equilátero: 3 lados congruentes.
- Triângulo isósceles: 2 lados congruentes.

- Triângulo escaleno: 3 lados com medidas diferentes.

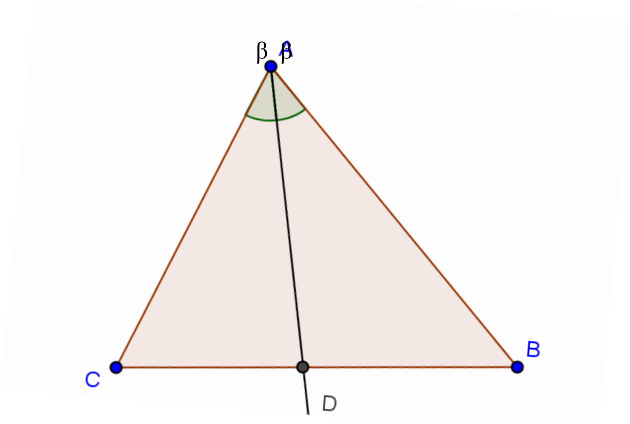
Em relação à medida de seus ângulos internos, os triângulos são classificados assim:

- Triângulo retângulo: possui um ângulo (interno) reto.
- Triângulo acutângulo: possui os três ângulos internos agudos.
- Triângulo obtusângulo: possui um ângulo interno obtuso.
- Triângulo equilátero: possui os três ângulos internos congruentes.

Definição 14 Cevianas de um triângulo são segmentos que tem uma extremidade em um vértice e outra na reta suporte ao lado oposto a este vértice.



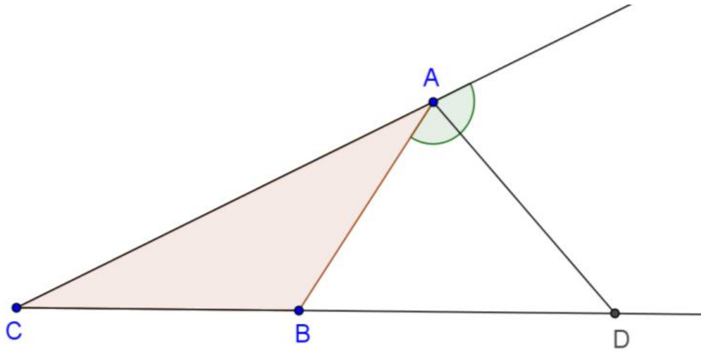
Definição 15 Uma bissetriz interna de um triângulo é um segmento da bissetriz de um ângulo do triângulo, cujas extremidades são o vértice deste ângulo e um ponto do lado oposto.



- $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ do triângulo ABC.
- Note que todo triângulo possui três bissetrizes, e estas se interceptam em um único ponto denominado incentro.

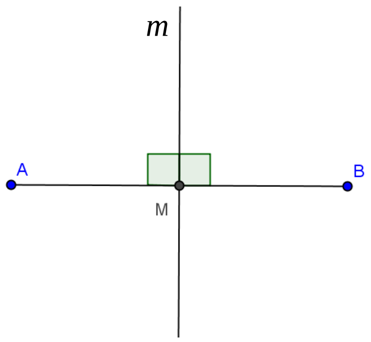
Definição 16 Uma bissetriz externa de um triângulo é um segmento da bissetriz de um ângulo externo do triângulo, cujas extremidades são o vértice deste ângulo e um ponto pertencente ao prolongamento do lado oposto.

Exemplo: Na figura a seguir $\overline{AD}$ é bissetriz externa correspondente ao vértice A.



- No caso de um triângulo isósceles, a bissetriz externa relativa ao vértice de ângulo diferente é paralela a base do triângulo, portanto a medida da bissetriz externa do triângulo relativa a este vértice não pode ser calculada. Se for triângulo equilátero, todas as bissetrizes dos ângulos externos do triângulo serão paralelas aos lados opostos correspondentes, logo também não podem ser calculadas as medidas das bissetrizes externas do triângulo.

Definição 17 A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular ao segmento e que contém o seu ponto médio.



- m é a mediatriz do segmento$\overline{AB}$.
- Observamos que:

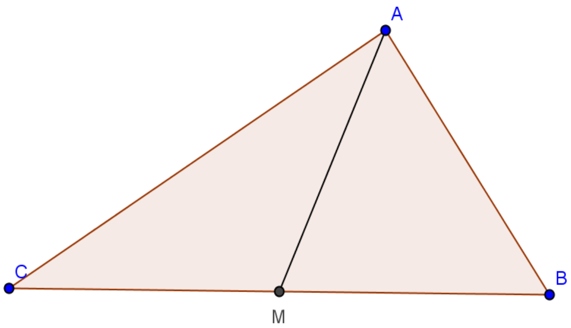
i) A mediatriz de um segmento é o conjunto dos pontos que equidistam das extremidades do segmento.

ii) As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam num único ponto chamado circuncentro.

Definição 18 Seja o triângulo ABC. Uma mediana de um triângulo é um segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

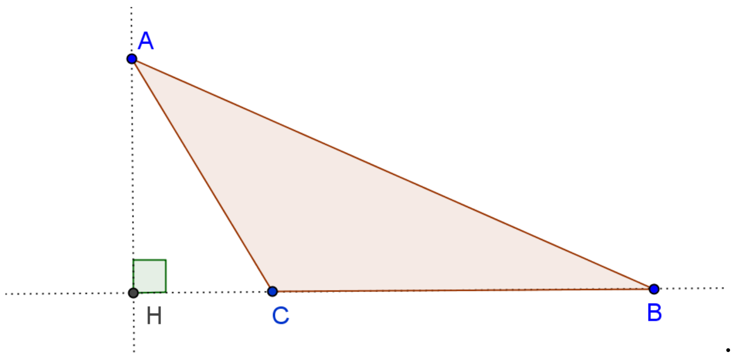
As três medianas de um triângulo se interceptam num único ponto denominado baricentro.

Exemplo: No triângulo ABC representado a seguir, M é ponto médio de $\overline{BC}$, então $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A.

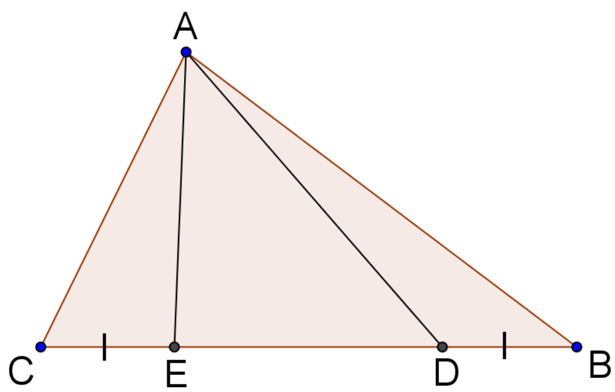


Definição 19 Uma altura de um triângulo ABC é o segmento perpendicular que une um vértice à reta que contém o lado oposto.

O prolongamento das alturas de um triângulo se interceptam num único ponto denominado ortocentro. Unindo-se os pés das alturas em um triângulo, obtém-se um novo triângulo denominado triângulo órtico.



Definição 20 Um par de trianas-p de um triângulo pode ser definido da seguinte forma: considerando um triângulo ABC, sejam D e E pontos do lado $\overline{BC}$, tais que $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ sejam congruentes e a proporção BD/BC seja igual a p. Sendo assim os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ são chamadas de trianas-p relativas ao lado $\overline{BC}$. (ver figura)



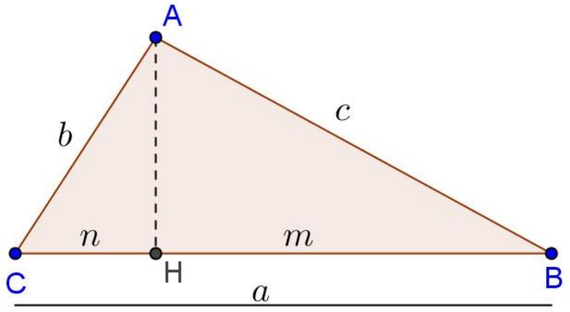
2 Demonstrações sucintas relacionadas à triângulo

Neste capítulo apresentamos algumas demonstrações de fórmulas simples, relacionadas ao triângulo, sendo este um dos polígonos de maior destaque na Geometria Euclidiana Plana.

2.1 Cálculo da relação entre lados num triângulo e uma projeção

Os ângulos internos de um triângulo podem ser classificados em: agudo, reto ou obtuso. A seguir estaremos verificando a relação entre os lados de um triângulo considerando essas três possibilidades.

- Consideremos primeiramente um triângulo ABC, de lados com medidas a, b e c, sendo $A\hat{B}C$ agudo. Tracemos então a altura em relação ao vértice A, o ponto de intersecção dessa altura com a reta $\overleftrightarrow{BC}$chamemos de H, a medida da projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ de n, e a medida da projeção do lado $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ de m.



Temos agora dois triângulos retângulos: ΔABH e ΔAHC. Vamos aplicar a ambos o Teorema de Pitágoras:

$b^2 = n^2 + AH^2 \qquad (\boldsymbol{I})$

$c^2 = m^2 + AH^2 \qquad (\boldsymbol{II})$

Nesse caso, em que $A\hat{C}B < 90°$, $m + n = a \Rightarrow n = a - m$. Substituindo em (I) teremos:

$b^2 = (a - m)^2 + AH^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 2am + m^2 + AH^2 (\boldsymbol{III})$

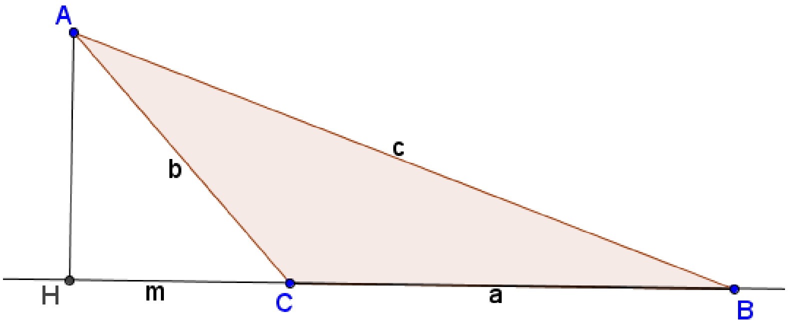
Da equação (II) temos $m^2 = c^2 - AH^2$, substituindo em $(\boldsymbol{III})$ obtemos:

$b^2 = a^2 - 2am + c^2 - AH^2 + AH^2$

$\Rightarrow \boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2am}$

Se isolássemos m ao invés de n, no caso em que $A\hat{C}B < 90°$, obteríamos a relação: $c^2 = a^2 + b^2 - 2an$.

- Caso o triângulo ABC seja retângulo em B, a relação dada é direta: $b^2 = a^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).
- Seja agora um triângulo ABC obtusângulo em C. Tracemos então a altura em relação ao vértice A, interceptando no prolongamento do lado $\overline{BC}$ em H. Seja também $HC = m$, que corresponde à projeção de $\overline{AC}$ sobre $\overrightarrow{BC}$.



Temos agora dois triângulos retângulos: ΔACHe ΔABH. Vamos aplicar a ambos o Teorema de Pitágoras:

$b^2 = m^2 + AH^2 \Rightarrow m^2 = b^2 - AH^2 \qquad (I)$

$c^2 = (a + m)^2 + AH^2 \qquad (II)$

Substituindo (I) em (II) teremos:

$c^2 = (a + m)^2 + AH^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + 2am + (b^2 - AH^2) + AH^2$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2am$

Se isolarmos b^2 na equação acima, temos:

$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 - 2am \Rightarrow b^2 = a^2 + c^2 - 2(a + m)a$, conforme observamos no primeiro caso.

2.1.1 Classificação de um triângulo em retângulo, obtusângulo ou acutângulo, conhecendo-se as medidas de seus lados

Considere o triângulo ABC de lados com medidas $a \geq b \geq c$, sendo $B\hat{A}C$ o ângulo interno oposto ao lado $\overline{BC}$ e m a projeção de $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{AC}$. Das relações demonstradas no tópico 2.1 e do teorema de Pitágoras decorrem as seguintes conclusões:

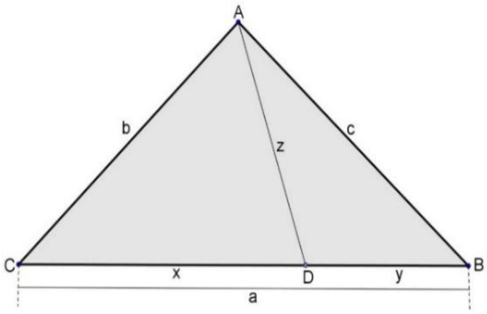
- Se $B\hat{A}C < 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2$. Neste caso, como os outros ângulos são menores ou iguais a $B\hat{A}C$, temos que ΔABC é acutângulo.
- Se $B\hat{A}C > 90°$, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \Rightarrow a^2 > b^2 + c^2$. Neste caso, como outros ângulos são agudos, temos que o ΔABC é obtusângulo.
- Se $B\hat{A}C = 90°$, $a^2 = b^2 + c^2$. Neste caso, temos que o ΔABC é retângulo em A.

2.2 Teorema de Stewart

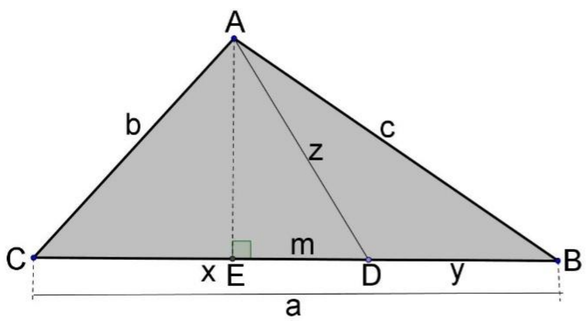
Matthew Stewart, matemático do século XVIII, nasceu no ano de 1717 em uma pequena ilha da Escócia chamada Bute. Educado em Rothesay Grammar School, entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou a geometria antiga. Em 1746 Matthew Stewart publicou o teorema, hoje conhecido como Teorema de Stewart, o qual relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo com o comprimento de uma ceviana.

Teorema de Stewart*: Dado um triângulo ABC qualquer, cujos lados têm medidas $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Seja D um ponto qualquer do lado $\overline{BC}$, com $AD = z$, vale a relação:*

$$b^2y + c^2x - z^2a = axy, \text{ onde } x = CD \text{ e } y = BD.$$



Demonstração: Dado ΔABC de lados com medidas a, b, c e d. Seja D um ponto qualquer sobre o lado $\overline{BC}$ e E o pé da perpendicular a $\overline{BC}$ que contém A, conforme indicados na figura.



Consideremos:

- $AD = z$
- $CD = x$
- $DB = y$
- $ED = m$

Considerando os triângulos ACD e ABD, obtemos as seguintes relações:

$\Delta ACD \Rightarrow b^2 = x^2 + z^2 - 2xm$ (Multiplicando por y)

$\Rightarrow b^2y = x^2y + z^2y - 2xym$

$\Delta ABD \Rightarrow c^2 = y^2 + z^2 + 2ym$ (Multiplicando por x)

$\Rightarrow c^2x = y^2x + z^2x + 2xym$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2y = x^2y + z^2y - 2xym \\ c^2x = y^2x + z^2x + 2xym \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$\Rightarrow b^2y + c^2x = x^2y + y^2x + z^2(x + y)$

$\Rightarrow b^2y + c^2x = xy(x + y) + z^2(x + y)$

Considerando que $x + y = a$, temos:

$\Rightarrow b^2y + c^2x = xya + z^2a$

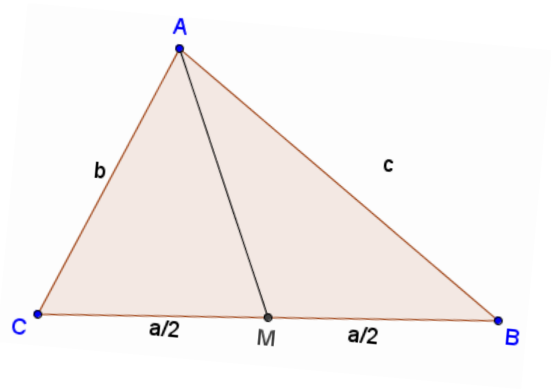
De onde vem a relação: $b^2y + c^2x - z^2a = axy$ $\square$

3 Cálculo das medidas das medianas de um triângulo qualquer

Muitos dos problemas envolvendo triângulos estão relacionados as suas medianas. Sendo assim apresentaremos nesta seção demonstrações detalhadas do cálculo de suas medidas em um triângulo qualquer.

3.1 Cálculo das medidas das medianas de um triângulo qualquer

Seja o triângulo ABC qualquer de lados $AB = c$, $BC = a$ e $AC = b$, vamos calcular a medida da mediana relativa ao lado $\overline{BC}$.

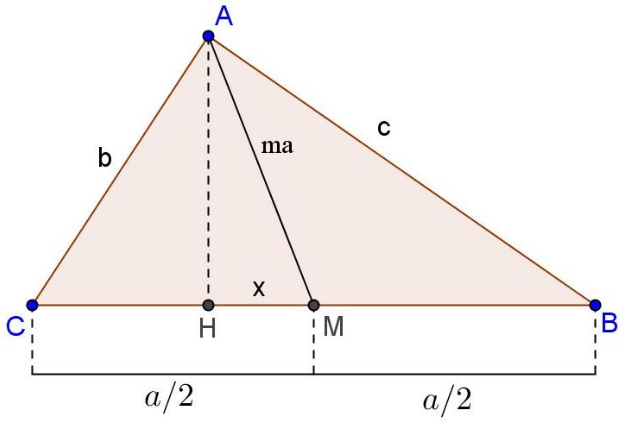


Sendo M ponto médio do segmento $\overline{BC}$, isto é, $CM = MB$. Seja $AM = m_a$ (a medida da mediana relativa ao vértice A).

$\Rightarrow CM + MB = a$

$\Rightarrow CM = MB = \dfrac{a}{2}$

Vamos olhar para o triângulo AMC e traçar a altura em relação ao vértice A. Seja H o ponto de intersecção da altura com o lado $\overline{CM}$.



Considerando $HM = x$ e aplicando a relação entre lados no triângulo AMC, segue:

$$A\widehat{M}C \ agudo \Rightarrow (\boldsymbol{i}): \quad b^2 = {m_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)x$$

Agora vamos aplicar a relação entre lados no triângulo ABM:

$$A\widehat{M}B \ obtuso \ (\boldsymbol{ii}): \quad c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)x$$

Somando as equações $(\boldsymbol{i})$ e $(\boldsymbol{ii})$ membro a membro temos:

$$b^2 + c^2 = {m_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)x + {m_a}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)x$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 = 2\,{m_a}^2 + 2\frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2\,{m_a}^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}}{2} = {m_a}^2$$

$$\Rightarrow \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = {m_a}^2$$

$$\Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}$$

Analogamente, para o cálculo das medidas das medianas em relação aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, vale:

$$\Rightarrow m_c = \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2 + 2b^2 - c^2)}$$

$$\Rightarrow m_b = \frac{1}{2}\sqrt{(2a^2 + 2c^2 - b^2)}$$

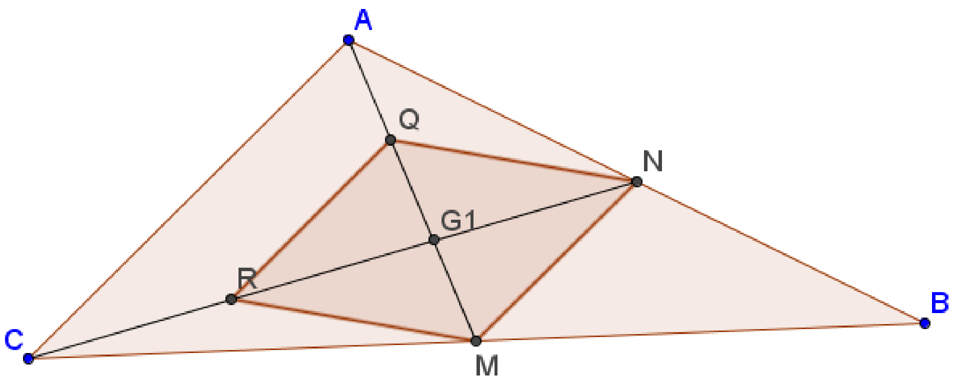
Caso o triângulo fosse equilátero ou isósceles de base $\overline{BC}$, a mediana coincide com a altura relativa ao vértice A, assim $H \equiv M$ o que implica em $x = 0.$ Observamos que o resultado se mantém.

3.1.1 Baricentro

Na Física, o centro de gravidade ou baricentro de um corpo é o ponto onde pode ser considerada a aplicação da força de gravidade de todo o corpo formado por um conjunto de partículas. Vamos demonstrar a existência e unicidade deste ponto tão importante.

Teorema: *As três medianas de um triângulo qualquer se encontram em um mesmo ponto. Tal ponto é chamado de baricentro do triângulo.*

Demonstração: Consideremos um triângulo de vértices A, B e C. Sejam $\overline{AM}$ e $\overline{CN}$ as medianas do ΔABC relativas aos vértices A e C, denotemos por G_1a intersecção dessas medianas. Considere Q e R os pontos médios de $\overline{AG_1}$ e $\overline{CG_1}$, respectivamente.



O quadrilátero $MNQR$ é um paralelogramo.

De fato, pelo teorema da base média temos:

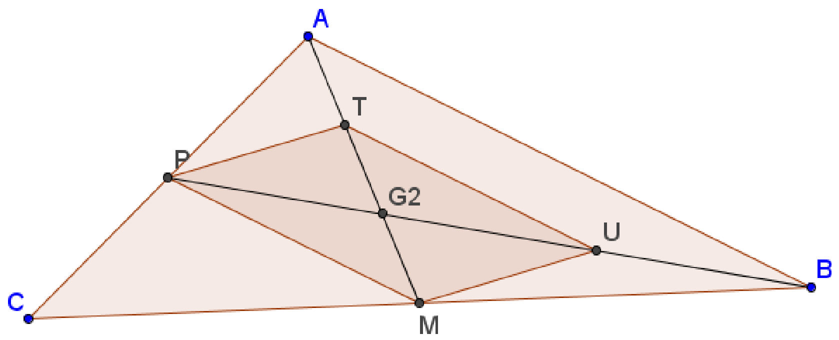
No ΔABC, $\overline{AC} // \overline{MN}$ e $AC = 2MN$

No ΔACG_1, $\overline{AC}//\overline{QR}$ e $AC = 2QR$.

Assim $\overline{QR}//\overline{MN}$ e $QR = MN$.

Além disso, sendo G_1 a intersecção das diagonais do paralelogramo $MNQR$, temos: $AG_1 = 2G_1M$ e $CG_1 = 2G_1N$

Analogamente, vamos considerar as medianas $\overline{AM}$ e $\overline{BP}$ e os pontos $G_2 = \overline{AM} \cap \overline{BP}$, T ponto médio de $\overline{AG_2}$ e U ponto médio de $\overline{BG_2}$. Temos que o quadrilátero $MUTP$ é um paralelogramo.



De fato, pelo teorema da base média temos:

No ΔBG_2A, $\overline{UT}//\overline{BA}$ e $UT = BA/2$ e no ΔABC, $PM//BA$ e $PM = BA/2$. Assim $UT//PM$ e $UT = PM$. Além disso, sendo G_2 a intersecção das diagonais do paralelogramo $MUTP$, temos: $AG_2 = 2G_2M$ e $BG_2 = 2G_2P$.

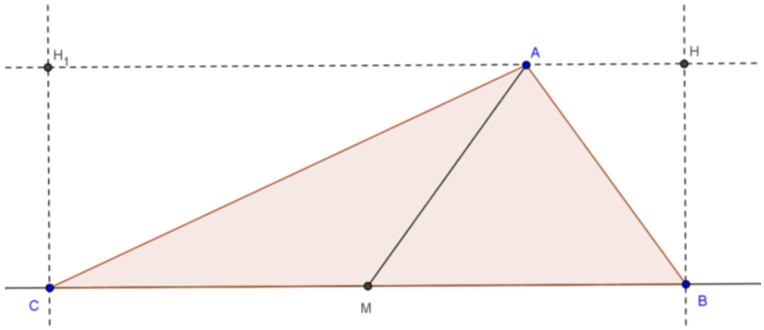
Como existe um único ponto X sobre $\overline{AM}$ tal que $AX = 2XM$, concluímos que $G_1 = G_2$. Dessa forma fica provado que as três medianas se encontram em um mesmo ponto, chamado apenas de G. □

Como consequência, temos que o baricentro divide as medianas numa razão de 2 para 1.

3.1.2 Uma mediana de um triângulo qualquer o divide em duas regiões de mesma área

Consideremos o triângulo ABC onde M é ponto médio de $\overline{BC}$. Temos que a mediana $\overline{AM}$ divide o triângulo ABC em duas regiões de áreas iguais.

Demonstração: Sejam H_1 e H pontos de intersecção das perpendiculares a $\overline{CB}$ que passam por C e por B, respectivamente, com a reta paralela a $\overline{CB}$ que contém A, conforme indicados na figura.



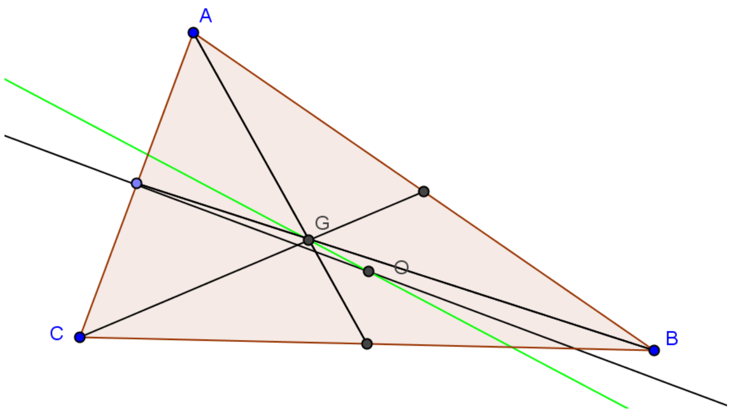
Temos que $CM = MB$, pois M é ponto médio de $\overline{CB}$, e $CH_1 = BH$, já que é a altura do triângulo ABC. Assim os triângulos ACM e AMB possuem a mesma base e mesma altura, logo têm áreas iguais. □

3.2 Reta de Euler

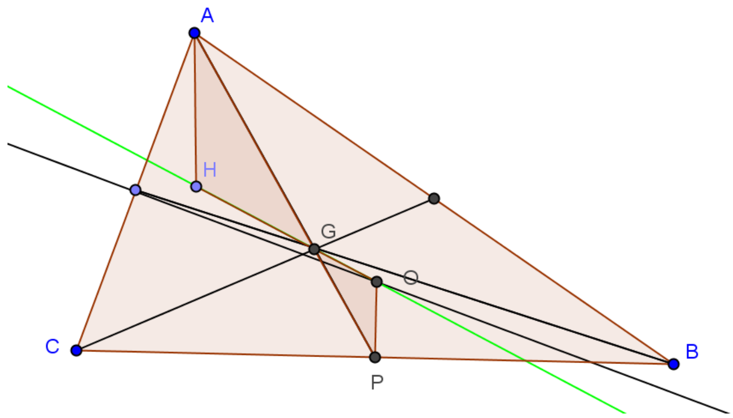
Leonhard Euler (1707 - 1783) é um dos grandes nomes da matemática. Originalmente seu pai queria que ele fosse um eclesiástico, porém entregou sua educação a um dos matemáticos famosos da época, Jacob Bernouilli, e daí ele se entusiasmou pela matemática. Casou-se e teve uma família de 13 filhos. No período de 1727 a 1783, ano de sua morte, ele produziu 886 trabalhos de matemática, produzindo em média 800 páginas de matemática por ano, apesar de ter perdido sua visão em 1771. Ele produziu em todas as áreas da matemática da época. Sua obra é um capítulo na História da Matemática. Várias fórmulas geométricas e várias construções levam seu nome; aqui apresentaremos a reta de Euler.

Teorema: *Num triângulo* ABC *que não é equilátero, o ortocentro* H, *o baricentro* G *e o circuncentro* O *são colineares. A reta* $\ell(H, O) = \ell\,(H, G)$ *é conhecida como reta de Euler.*

Demonstração: Vamos considerar então um triângulo ABC escaleno. Seja G o baricentro e O o circuncentro, pontos distintos (pois nesse caso, a mediana é diferente da mediatriz). Tomemos a reta ℓ determinada pelos pontos G e O.



Seja H um ponto pertencente à reta $\overleftrightarrow{OG}$ tal que $GH = 2\ GO$, e P ponto médio do lado $\overline{BC}$, conforme figura:



Consideremos a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{BC}$.

Os triângulos GHA e GOP são semelhantes pelo caso LAL de semelhança:

•$GH' = 2\ GO$ (por construção)

• $O\hat{G}P = H'\hat{G}A$ (opostos pelo vértice)

•$AG = 2\ GP$ (propriedade do baricentro)

Logo, seus ângulos correspondentes, $G\hat{O}P$ e $G\hat{H}A$ são congruentes.

Assim a reta suporte que contêm o segmento $\overline{AH}$ é paralela à mediatriz $\overline{OP}$.

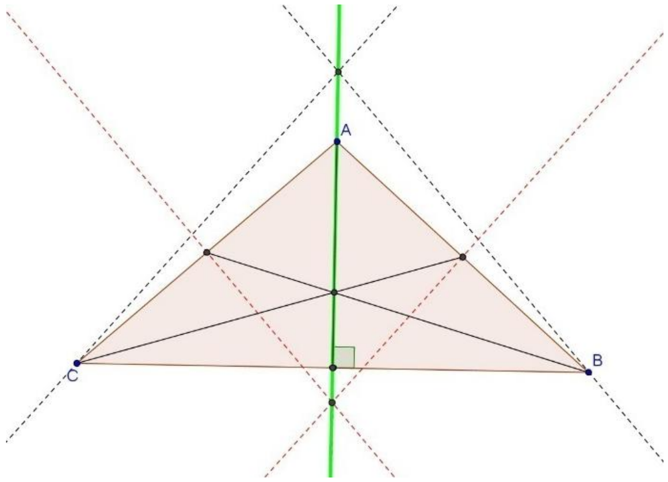
Consequentemente, H é um ponto pertencente à altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

Raciocinando da mesma forma, se tomarmos a mediana e a mediatriz relativas ao lado $\overline{AC}$, concluiremos que H é um ponto pertencente a altura relativa ao lado $\overline{AC}$.

Como H é a intersecção de duas alturas do triangulo ABC temos que H é ortocentro do triângulo ABC. Concluímos assim que, Circuncentro (O), Baricentro (G) e Ortocentro (H) são colineares e a Reta ℓ é a Reta de Euler do Triângulo ABC.

Como o Ortocentro de um triângulo é único, por construção temos que, o Baricentro estará sempre entre o Ortocentro e o Circuncentro e $GH = 2\ GO$.

No caso do triângulo ser isósceles, o circuncentro, o ortocentro, e o baricentro serão pontos colineares. A reta definida por esses pontos será coincidente com a altura relativa ao ângulo definido pelos lados congruentes, conforme indicado na figura.



No caso do triângulo ser equilátero, os três pontos: baricentro, ortocentro e circuncentro coincidem, não existindo a rela de Euler.

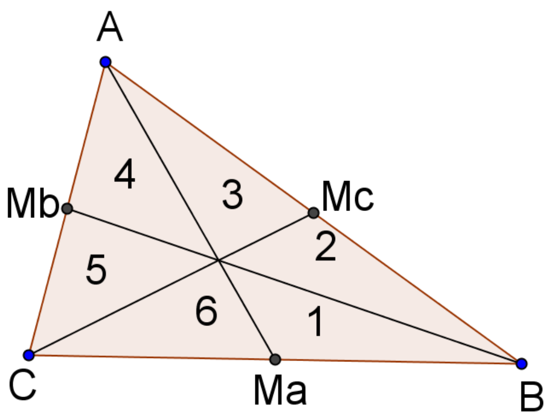
3.3 Propriedades das áreas definidas pelas medianas e trianas de um triângulo

Vamos apresentar as propriedades das áreas das regiões obtidas em um triângulo qualquer em duas situações: 1º- regiões definidas pelas medianas; 2º- regiões definidas pelas trianas.

3.3.1 Propriedades das regiões definidas pelas medianas de um triângulo qualquer

As medianas de um triângulo divide o mesmo em 6 triângulos menores de mesma área.

Demonstração: Dado o triângulo ABC, sejam as medianas M_a, M_b e M_c como na figura:



As medianas dividem o triângulo em 6 triângulos menores, os quais numeramos de 1 à 6.

Os triângulos 1 e 6 tem a mesma área, pois possuem mesma base e mesma altura; pelo mesmo motivo, os triângulos 2 e 3 também tem a mesma área , assim como os triângulos 4 e 5.

O triângulo M_bBC tem mesma área de M_cBC, pois possuem mesma base e, pelo teorema da base média (*pelos pontos médios de dois lados de um triângulo, passa uma paralela ao terceiro lado do mesmo*), possuem mesma altura. Desse modo, a área do triângulo 5 é igual a área do triângulo 2, logo os triângulos 5, 4, 2 e 3 possuem mesma área.

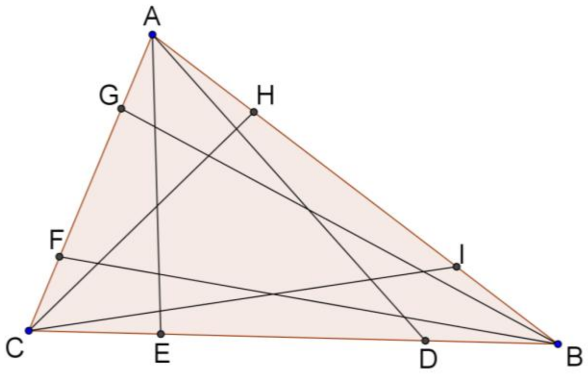
Analogamente se olharmos para os triângulos AM_bB e BM_aA também possuem mesma área, logo os triângulos 4 e 1 possuem mesma área.

Pelas igualdades já demonstradas, temos que as áreas dos seis triângulos são iguais.

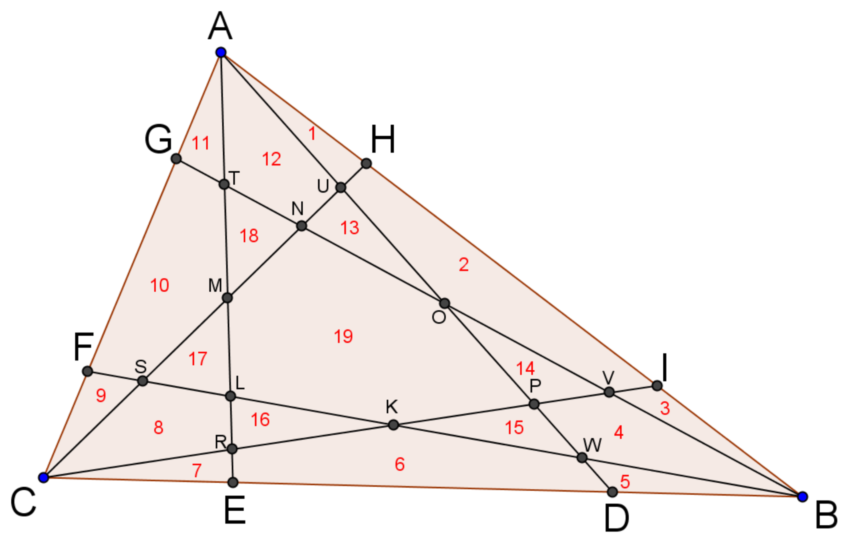
Logo, as medianas de um triângulo o dividem em seis outros triângulos equivalentes. □

3.3.2 Propriedades das áreas das regiões definidas pelas trianas de um triângulo

Se traçarmos as seis trianas-p no triângulo ABC, verificaremos que elas possuem algumas propriedades interessantes, como veremos a seguir.



Teremos 12 triângulos, 3 quadriláteros, 3 pentágonos e 1 hexágono. Vamos numerar esses polígonos de 1 a 19, representando suas respectivas áreas por $S1,\ S2,\ S3, S4, \dots, S19$, e marcar os pontos de intersecção das trianas-p, como na figura:



Por manter a proporção p nas seis trianas-p traçadas no triângulo, temos que os segmentos $\overline{UV}, \overline{NP}, \overline{TW}, \overline{MK}\ e\ \overline{SR}$ são paralelos ao segmento $\overline{AB}$; da mesma forma os segmentos $\overline{WR}, \overline{PL}, \overline{VS}, \overline{OM}\ e\ \overline{UT}$ são paralelos ao segmento $\overline{BC}$, e os segmentos $\overline{ST}, \overline{LN}, \overline{RU}, \overline{KO}\ e\ \overline{WV}$ são paralelos ao segmento $\overline{AC}$, como veremos a seguir:

I) Demonstração na forma analítica de que $\overline{TU}//\overline{CB}$:

Vamos introduzir um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas de modo que o ponto C seja a origem, o comprimento de $\overline{CB}$ será tomado como unidade de comprimento. Assim, $C = (0,0)$ e $B = (1,0)$. Consideremos o ponto $A = (p, q)$,$E = (r, 0)$, $D = (1 - r, 0)$, com p, q e r reais.

As equações das retas $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{AD}$ são:

$$\overleftrightarrow{AC}: y = \frac{q}{p}.x$$

$$\overleftrightarrow{AB}: y = \frac{q}{p-1}.(x-1)$$

$$\overleftrightarrow{AE}: y = \frac{q}{p-r}.(x-r)$$

$$\overleftrightarrow{AD}: y = \frac{q}{p-1+r}.(x-1+r)$$

Observamos que o segmento $\overline{GH}$ é paralelo a $\overline{BC}$, pois o triângulo AGH é semelhante ao triângulo ACB. Sendo assim, os pontos G e H possuem mesma ordenada, que vamos denominar mq, onde $0 < m < 1$. Para determinar as abscissas dos pontos G e H, consideremos o fato de que pertencem, respectivamente, às retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{AB}$. Desse modo temos:

$$x_G = \frac{mq.p}{q} \Rightarrow x_G = mp$$

$$x_H = \frac{mq(p-1)}{q} + 1 \Rightarrow x_H = mp - m + 1$$

Logo os pontos G e H possuem coordenadas $G(mp, mq)$ e $H(mp - m + 1, mq)$

Segue que as equações das retas $\overleftrightarrow{CH}$ e $\overleftrightarrow{BG}$ são:

$$\overleftrightarrow{CH}: y = \frac{qm}{mp-m+1}.x$$

$\overleftrightarrow{BG}: y = \frac{mq}{mp-1}.(x-1)$

Podemos agora determinar as coordenadas dos pontos de intersecção entre as retas $\overleftrightarrow{CH}$ e$\overleftrightarrow{AD}$, e entre $\overleftrightarrow{BG}$ e $\overleftrightarrow{AE}$, denotados respectivamente por U e T.

- Cálculo da ordenada de U:

$$U = \overleftrightarrow{CH} \cap \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{qm}{mp-m+1}.x_u = y_U = \frac{q}{p-1+r}.(x_u - 1 + r)$$

$$\Rightarrow \frac{y_U(mp-m+1)}{qm} = x_u = \frac{y_U(p-1+r)}{q} + 1 - r$$

$$\Rightarrow y_U \frac{(mp-m+1-pm+m-rm)}{qm} = 1 - r$$

$$\Rightarrow y_U = \frac{qm(1-r)}{1-rm}$$

- Cálculo da ordenada de T:

$$T = \overleftrightarrow{BG} \cap \overleftrightarrow{AE} \Rightarrow \frac{qm}{mp-1}.(x_T - 1) = y_T = \frac{q}{p-r}.(x_T - r)$$

$$\Rightarrow \frac{y_T(mp-1)}{qm} + 1 = x_T = \frac{y_T(p-r)}{q} + r$$

$$\Rightarrow \frac{y_T(mp-1-mp+rm)}{qm} = r - 1$$

$$\Rightarrow y_T = \frac{qm(r-1)}{rm-1}$$

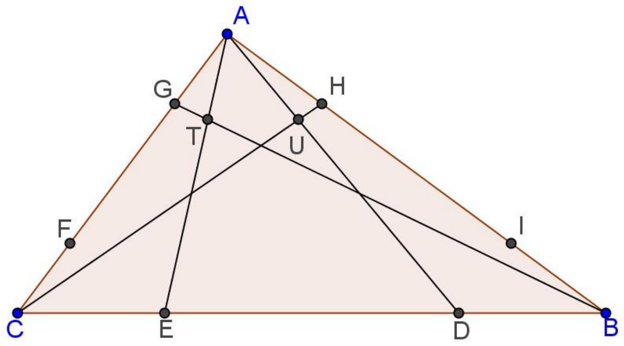
Observamos que:

$$y_U = \frac{qm(1-r)}{1-rm} = \frac{qm(r-1)}{rm-1} = y_T$$

Logo $y_u = y_t \Rightarrow \overline{TU}//\overline{CB}$

II) Demonstração de que $\overline{TU}//\overline{CB}$, baseada na Teoria das Proporções:

Dado o triângulo ABC e as trianas-p AE, AD, BG, e CH, sendo $T = \overline{AE} \cap \overline{BG}$ e $U = \overline{CH} \cap \overline{AD}$.

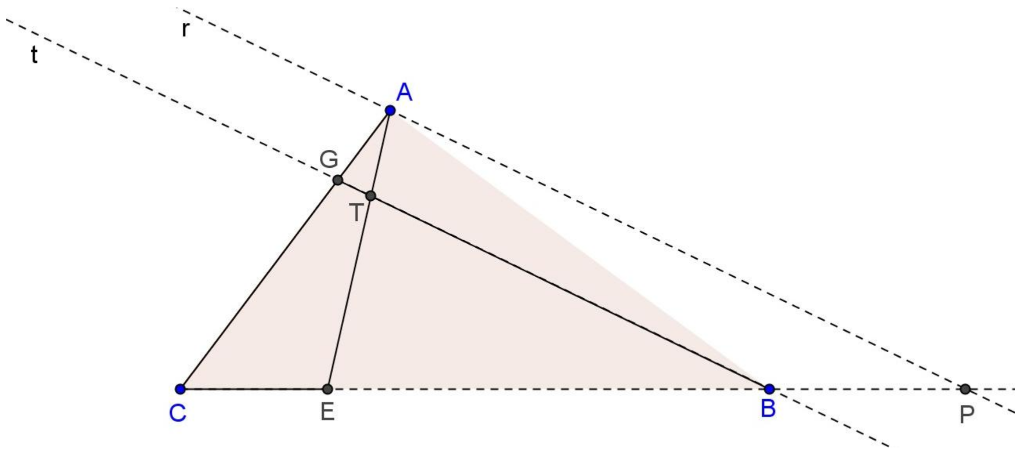


Por definição de trianas-p, temos:

$$\frac{CE}{BC} = \frac{DB}{DC} = \frac{BI}{AB} = \frac{AH}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{AG}{AC} = p \quad \left(p < \frac{1}{2}\right)$$

Vamos mostrar que $\overline{TU}//\overline{CB}$.

1) Vamos considerar o triângulo ACE com a transversal $\overleftrightarrow{BG} = t.(B - T - G)$



Seja $r//t$ com $A \in r$ e $P = \overleftrightarrow{CE} \cap r$.

No triângulo ACP, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{AG}{CG} = \frac{BP}{BC} \Rightarrow \frac{AG}{BP} = \frac{CG}{BC}$$

No triângulo AEP, temos:

$$\frac{TA}{TE} = \frac{BP}{BE} \Rightarrow \frac{BP}{BE} = \frac{TA}{TE}$$

Multiplicando ambos os membros, temos:

$$\frac{AG}{BP} \cdot \frac{BP}{BE} = \frac{CG}{BC} \cdot \frac{TA}{TE} \Rightarrow \frac{TE}{TA} = \frac{CG}{AG} \cdot \frac{BE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{TE}{TA} = \frac{AC - AG}{AG} \cdot \frac{BC - EC}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{TE}{TA} = \left(\frac{AC}{AG} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{EC}{BC}\right)$$

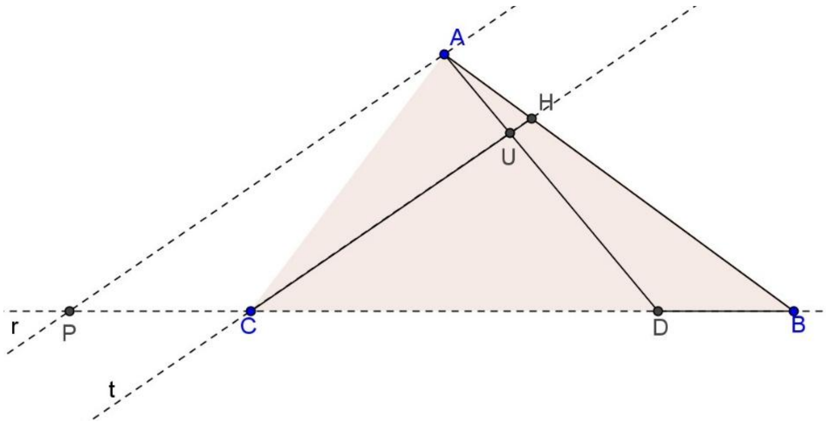
$$\Rightarrow \frac{TE}{TA} = \left(\frac{1}{p} - 1\right) \cdot (1 - p)$$

$$\Rightarrow \frac{TE}{TA} = \left(\frac{1-p}{p}\right) \cdot (1 - p)$$

$$\Rightarrow \frac{TE}{TA} = \frac{(1-p)^2}{p}$$

2) Vamos considerar o triângulo ACB com a transversal $\overleftrightarrow{CH} = t.(C - U - H)$

Seja $r//t$ com $A \in r$ e $P = \overleftrightarrow{CB} \cap r$.



No triângulo BAP, pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{AH}{BH} = \frac{CP}{BC} \Rightarrow \frac{AH}{CP} = \frac{BH}{BC}$$

No triângulo ACD, temos:

$$\frac{CP}{CD} = \frac{AU}{DU}$$

Multiplicando ambos os membros, temos:

$$\frac{AH}{CP} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{BH}{BC} \cdot \frac{AU}{DU} \Rightarrow \frac{DU}{AU} = \frac{BH}{AH} \cdot \frac{CD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{DU}{AU} = \frac{AB - AH}{AH} \cdot \frac{BC - BD}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{DU}{AU} = \left(\frac{AB}{AH} - 1\right).\left(1 - \frac{BD}{BC}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{DU}{AU} = \left(\frac{1}{p} - 1\right).(1-p)$$

$$\Rightarrow \frac{DU}{AU} = \left(\frac{1-p}{p}\right).(1-p)$$

$$\Rightarrow \frac{DU}{AU} = \frac{(1-p)^2}{p}$$

Observamos que

$$\frac{TE}{TA} = \frac{DU}{AU} \Rightarrow \overline{TU}//\overline{ED}$$

Como C, E, D e B são colineares, então: $\overline{TU}//\overline{BC}$.

Analogamente, temos: $\overline{MO}//\overline{WR}//\overline{PL}//\overline{VS}//\overline{UT}//\overline{CB}$, $\overline{UV}//\overline{NP}//\overline{KM}//\overline{TW}//\overline{SR}//\overline{AB}$, $\overline{ST}//\overline{LN}//\overline{RU}//\overline{KO}//\overline{VM}//\overline{AC}$. □

Analisaremos agora as áreas de cada um desses 12 triângulos.

- Comparando as áreas dos triângulos AHU e BIV verificamos que são iguais, pois tem a mesma base, e altura igual, por $\overline{UV}$ ser paralelo a $\overline{AB}$, ou seja, $S1 = S3$. Do mesmo modo temos que $S5 = S7$ e $S9 = S11$.

- Como $\overline{NP}$ é paralelo a $\overline{AB}$, os triângulos AIP e BHN possuem mesma área, pois tem bases iguais e alturas também, assim $S1 + S2 + S14 = S3 + S2 + S13$. Como Já vimos que $S1 = S3$ concluímos que $S14 = S13$. Analogamente temos que $S15 = S16$ e $S17 = S18$.

- Olhando agora para os triângulos ABT e BAW e partindo de $\overline{TW}$ ser paralelo a $\overline{AB}$, concluímos que possuem mesma área também. Logo $S1 + S2 + S3 + S13 + S12 = S1 + S2 + S3 + S14 + S4$. Levando em conta o resultado anterior, no qual $S13 = S14$, temos que $S12 = S4$. Agindo da mesma forma obtemos $S4 = S8$.

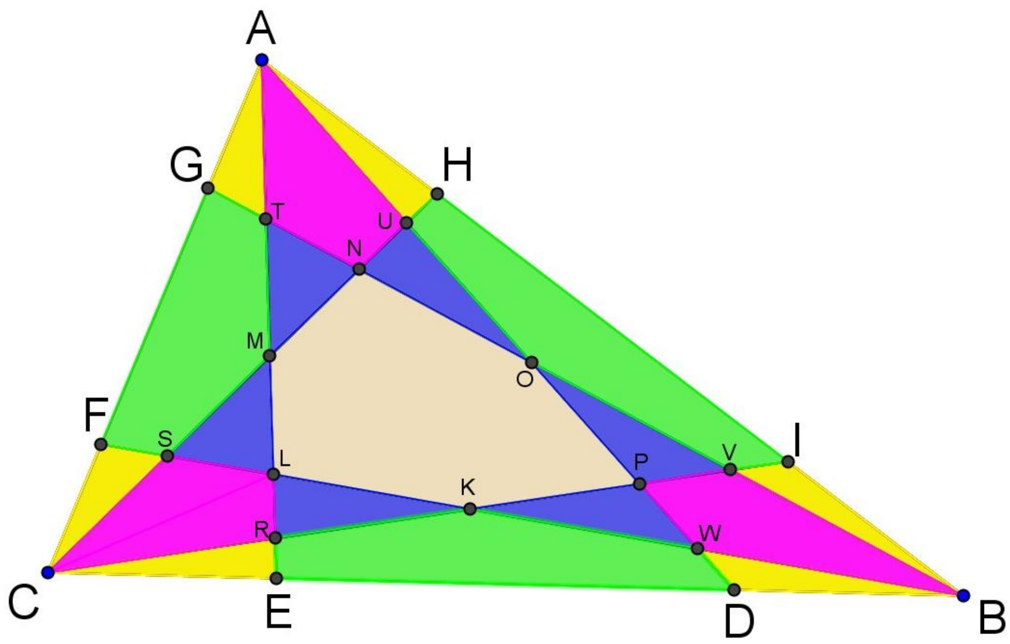
- Como $\overline{GD}$ é paralelo a $\overline{AB}$, os triângulos ABG e BAD tem a mesma área pelo mesmo motivo anterior: bases iguais e alturas também, ou seja, $S1 + S2 + S3 + S13 + S12 + S11 = S1 + S2 + S3 + S14 + S4 + S5$. Observando o resultado obtido no terceiro item, encontramos $S11 = S5$, e do mesmo modo $S7 = S1$ e $S3 = S9$.

- As áreas também são iguais dos triângulos ABM e BIK, pois sabemos que $\overline{MK}$ é paralelo a $\overline{AB}$, assim $S1 + S12 + S18 = S3 + S4 + S15$. Como $S1 = S3$, e $S12 = S4$, obtemos $S18 = S15$. Analogamente obtemos que $S14 = S17$ e $S16 = S13$.
- Sabendo que $\overline{FE}$ é paralelo a $\overline{AB}$, vemos que os triângulos ABF e BAE tem mesma área. Logo $S10 = S6$, verificando do mesmo modo que $S2 = S10$.

Se compararmos os resultados obtidos, chegamos às seguintes conclusões:

- $S1 = S3 = S5 = S7 = S9 = S11$
- $S4 = S8 = S12$
- $S13 = S14 = S15 = S16 = S17 = S18$
- $S2 = S6 = S10$

Podemos visualizar este resultado através da figura, colorindo os polígonos de mesma área com a mesma cor:



□

4 Considerações Finais

Nesse artigo, demonstramos alguns teoremas importantes relacionados a triângulos, visto que na maioria dos livros didáticos atuais não encontramos tais teoremas, nem cálculo das medidas das medianas de triângulos quaisquer, quanto mais suas demonstrações.

Visando sua aplicação em sala de aula, organizamos este material de modo que os conteúdos aqui abordados possam ser trabalhados inclusive no Ensino Fundamental, para que não fiquem restritos apenas a triângulos específicos.

Quando estendemos o estudo geométrico a um nível genérico, mostramos aos alunos a beleza da matemática aplicada à Geometria, além de aguçarmos sua curiosidade pelas generalizações de conceitos já vistos de forma restrita.

Referências

[1] ANGLIN, W.S. *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. New York, Springer Verlag, 1994.

[2] COXETER, H.S.M. *Introdution To Geometry*, John Wiley & Sons. New York, 1961.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José N. *Fundamentos de Matemática Elementar, 9: geometria plana*. Ed. São Paulo: Atual, 2004.

[4]GARBI, Gilberto Geraldo. *C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teorema e fórmulas essenciais da geometria*. Editora Livraria da Física. São Paulo, 2010.

[5] GERDES, Paulus. *Aventuras no Mundo dos Triângulos*, 2ª edição. Lulu.com, 2008.

[6] GUELLI,C.A., IEZZI, G. e DOLCE, O. *Geometria Métrica*. Editora Moderna. São Paulo, [19--?].

[7]MOISE, Edwin E. *Geometria Moderna*. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1975.

[8] MUNIZ NETO, A. C.: *Notas PROFMAT-Geometria I*, SBM, Rio de Janeiro, 2012.

[9] QUINTELLA, Ary. *Matemática para a quarta série ginasial*, 54ª edição. Companhia Editora Nacional. São Paulo, 1963.