PROFMAT Departamento de Matemática 81531-990, Curitiba, PR
Universidade Federal do Paraná Brazil

TÓPICOS DE ARITMÉTICA: equações Diofantinas

por

Julio Cezar Cordeiro de Paula

Preprint PROFMAT 1 (2014) 12 de novembro, 2014

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

Tópicos de Aritmética: equações diofantinas

Julio Cezar Cordeiro de Paula
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
Brasil
e-mail: luanafduarte@yahoo.com.br

8 de Dezembro de 2014

Resumo

O presente trabalho é parte de uma coleção de atividades resolvidas, comentadas e complementares envolvendo conceitos de aritmética. Apresentamos uma proposta de material para ser utilizado em cursos extracurriculares, cujo objetivo é potencializar o interesse pelo estudo da Matemática. Por este motivo, buscamos atividades que despertem a motivação dos alunos e as descrevemos de maneira a auxiliar os professores em sua aplicação, com respostas, comentários e sugestões. A abordagem dos temas se faz com o uso recorrente de aspectos históricos, resolução de problemas, jogos e atividades recreativas.
Palavras-Chave: Aritmética - Resolução de problemas - Jogos

1 Introdução

O material a seguir é uma proposta de projeto para um curso de matemática extracurricular para alunos do Ensino Médio. Surgiu da percepção da necessidade de um atendimento diferenciado a alunos com algum interesse na disciplina, pois em nossas experiências podemos perceber que no dia a dia de uma sala de aula não é sempre possível dar atenção aos alunos com um maior interesse e habilidades em matemática. A consequência disso é um desperdício de possíveis talentos que são deixados a margem, em um sistema de ensino que geralmente oferece projetos extraclasse apenas de reforço escolar para sanar dificuldades, já que dificilmente temos algo no sentido de potencializar habilidades. Cabe ressaltar que a ideia não é selecionar apenas os melhores alunos para participar. O ideal é que seja aberto a todo aluno simpatizante da disciplina e que voluntariamente se inscreva no curso.

Os tópicos abordados são: equações Diofantinas e Teorema Chinês do Resto. Os temas são desenvolvidos inicialmente com um pouco de história sobre o protagonista principal do assunto. Em seguida são propostas atividades, que remetem à resolução de problemas, nos quais o aluno vai gradativamente chegando às conclusões. No texto, as atividades estão com respostas e comentários. A versão do aluno, sem respostas, é encontrada no anexo. Buscamos abordar os assuntos de maneira curiosa e lúdica com a intenção de despertar uma motivação para os tópicos mais delicados do trabalho e principalmente causar uma inquietação no sentido de buscar conhecimento matemático que vá além do que a escola oferece às turmas regulares.

Em vários momentos no texto, o professor encontrará sugestões de como organizar a aplicação das atividades em sala. Porém, é importante que haja uma preparação inicial no sentido de mesclar a proposta do texto com a habilidade e experiência do aplicador. Igualmente importante é a realização de uma leitura inicial do nível de conhecimento matemático da turma. Neste sentido e caso seja necessário, deve ser pensado um pré-curso no qual serão trabalhadas as arestas identificadas.

2 Metodologia

Procuramos uma apresentação da matemática de forma a valorizar a construção do conhecimento, diferente da forma clássica na qual se define novos conteúdos com auxílio dos assuntos anteriores, completando com exemplos e problemas que utilizam esses saberes, segundo Brousseau (1996, pg 36) sobre a maneira de ensino clássica

> "apaga completamente a história destes saberes, isto é, a sucessão das dificuldades e das questões que provocaram o aparecimento dos conceitos fundamentais, a sua utilização para a colocação de novos problemas, a intrusão de técnicas e de questões resultantes dos progressos dos outros sectores, a rejeição de determinados pontos de vista, considerando falsos ou desadequados, e as numerosas querelas a seu respeito."

Buscamos coletar problemas e jogos que desenvolvessem o aspecto científico nos alunos, situações que envolvem habilidades de levantar hipóteses, conjecturar, intuir, testar e validar resultados, como Brousseau (1996, pg 38) descreve

> "uma boa reprodução pelo aluno de uma actividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos,

> teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc."

A respeito da escolha da aritmética, acreditamos que há conteúdo que não estão evidenciados nos parâmetros curriculares, porém podem ser abordados e relacionados com os que lá estão. A aritmética também é importante, pois segundo Gomes, (2008, pg 160)

> "A aritmética é invocada como o primeiro exemplo sensível da necessidade dos signos: conforme Condillac, não poderíamos fazer progressos algum no conhecimento dos números, se não imaginássemos nomes para todas as idéias que formamos pela multiplicação da idéia de unidade, que ele supõe já ter recenido um nome."

Escolhemos utilizar de alguns jogos, pois estes auxiliam no desenvolvimento de habilidades de raciocínio lógico, desperta um maior interesse, pode-se analisar os erros e elaborar estratégias para vencer, de acordo com Emerique (1999, pg 188)

> "colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas"

Também de acordo com o aspecto cognitivo do jogo Paulo (1999, pg 190) diz

> "necessidade e possibilidade de construção de novos conhecimentos e procedimentos, de descobrir erros e de imaginar formas de superá-los, dentre outros desafios."

Utilizamos também a resolução de problemas, uma vez que propicia um ambiente em que o aluno é ser ativo no processo de ensino-aprendizagem e segundo Onuchic (1999, pg 204)

> "a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simuntanea de vários níveis de atividade."

3 Equações Diofantinas

3.1 Um pouco de história: Diofanto

No período conhecido como Segunda Idade de Alexandria, encontramos o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria. Pouco se sabe sobre sua vida, além de uma tradição referida numa coleção de problemas datando do quinto ou sexto século, chamada "Antologia grega"

> Deus lhe concedeu ser um menino pela sexta parte de sua vida, e somando uma duodécima parte a isto cobriu-lhe as faces de penugem. Ele lhe acendeu a lâmpada nupcial após uma sétima parte, e cinco anos após seu casamento concedeu-lhe um filho. Ai! Infeliz, criança tardia; depois de chegar à metade da vida de seu pai, o destino frio o levou. Depois de se consolar de sua dor durante quatro anos com a ciência dos números ele terminou sua vida (Cohen e Drabkin,1958; p.27).

Se esse enigma é historicamente exato, Diofanto viveu oitenta e quatro anos. Positivamente não deve ser tomado como problema típico dos que interessavam a Diofanto, pois este pouca atenção deu a equação de primeiro grau. As equações Diofantinas, têm seu nome em homenagem a Diofanto de Alexandria, matemático grego, que publicou treze volumes do livro Aritmética, que até há pouco tempo somente seis eram conhecidos originalmente em grego, na atualidade existem mais quatro livros que alguns historiadores julgam fazer parte da obra de Diofanto, porém escritos em árabe.

3.2 Atividades

Atividade 3.1 *Equações Diofantinas*

O objetivo desta atividade é o ensino de resolução de equações Diofantinas, ou seja, do tipo $ax+by=c$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$. Atentar para o fato de que as resoluções das equações diofantinas dar-se-ão sempre no universo do conjunto dos números inteiros face esse ser o objeto de nosso estudo, uma vez que para os reais sempre teremos um par que corresponda a uma solução válida.

Vamos começar com um problema:

Proponha aos alunos que resolvam da maneira como julgarem pertinente o primeira questão da folha de atividades da página 19:

Questão 3.1.1 *Numa criação de coelhos e galinhas contaram-se* 152 *pés. Quantas podem ser as galinhas e quantos podem ser os coelhos. Após discutir as respostas possíveis reduzir a resposta a menor diferença possível entre o número de galinhas e coelhos.*

Resposta comentada: Após aparecer a primeira resposta válida, informe aos educandos que a mesma não é única e os faça chegar à conclusão de que outra resposta válida será sempre somar duas galinhas e diminuir um coelho, ou retirar duas galinhas e acrescentar um coelho visto que estamos acrescentando ou retirando quatro pés e retirando ou acrescentando quatro pés, mantendo o número de pés solicitados. Caso não apareça uma resposta válida, instigue os alunos a acharem uma resposta para o caso em que só existam galinhas. Serão encontrados 76 galinhas e 0 coelhos. Em seguida, faça-os entender que outras respostas válidas seriam 74 galinhas e 1 coelho, 72 galinhas e 2 coelhos, 70 galinhas e 3 coelhos, etc. Ao fazermos a inspeção das respostas, encontraremos todas as respostas válidas. Mostre aos alunos que a medida que se diminui o número de galinhas, o número de coelhos deve aumentar e, com isso, a diferença entre eles diminui. Chegaremos ao resultado de 28 galinhas e 24 coelhos (diferença de 4 animais); a próxima resposta será 26 galinhas e 25 coelhos (diferença de 1 animal); a próxima resposta válida será 24 galinhas e 26 coelhos (diferença de 2 animais). Neste momento, mostre que as próximas respostas somente irão aumentar a diferença; logo esta é a resposta procurada. Após estas reflexões apresente a solução da equação diofantina:

$$4x + 2y = 152$$

Esta equação pode ser reduzida à forma

$$2x + y = 76$$

Devemos escrever o número 1 em função dos coeficientes $a = 2$, $b = 1$ Como $2 - 1 = 1$. Então

$$76.(2 - 1) = 76.1$$

$$2.76 + 1.(-76) = 76$$

ou seja, os números $x = 76$ e $y = -76$ são soluções válidas para a equação acima. Utilizando o mesmo raciocínio efetuado com os alunos, sabemos que caso seja diminuído o número de coelhos, ocorre um acréscimo no número de galinhas. Mais especificamente, como já verificado, ao diminuirmos um coelho e acrescentarmos duas galinhas, chegaremos à resposta já encontrada. Neste momento, vale frisar aos alunos que nem sempre será possível efetuar a resolução via tentativas e erro. Por isso deve-se entender o método de resolução a fim de que sejam encurtados os processos.

Questão 3.1.2 *É possível encontrar valores inteiros para x e y que satisfaçam a equação $4x + 6y = 3$?*

Resposta comentada: Não existe solução $\mathbb{Z}$ para a equação. Temos que $4x$ e $6y$ são pares para todo $x, y \in Z$, sendo assim $4x + 6y$ também é par. Portanto, não pode ser igual a 3 pois este é ímpar.

Na equação apresentada na questão anterior conseguimos perceber que não há solução em $\mathbb{Z}$. Nem sempre essa conclusão é tão natural assim. Por exemplo, a equação $3x + 6y = 10$ não possuiu solução em inteiros e pelo menos a princípio não é tão óbvio chegar a esta conclusão. A proposição a seguir apresenta em que condições as equações Diofantinas apresentam solução.

Proposição 3.1 *Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. A equação $ax + by = c$, admite solução em inteiros se, e somente se o m.d.c entre a e b, ou seja (a, b), divide c.*

Demonstração 3.1 *Tome uma equação na forma:*

$$ax + by = c; \quad com \;\; a, b, c, x, y \in \mathbb{Z} \tag{3.2.1}$$

Suponha que o m.d.c entre a e b é igual a d; logo

$$a = d.t \;\; e \;\; b = d.u; \quad com \;\; d, t, u \in \mathbb{Z}.$$

Assim a equação (3.2.1) pode ser escrita na forma:

$$d.t.x + d.u.y = c \;\; ou \quad : d.(t.x + u.y) = c$$

dividindo ambos os lados por d obteremos :

$$t.x + u.y = \frac{c}{d}$$

1. *Suponhamos primeiramente que d não divide c. Logo $c/d \notin \mathbb{Z}$ e a equação $ax + by$ não possui solução em $\mathbb{Z}$; pois como $\mathbb{Z}$ é fechado em relação à multiplicação e à adição $ax + by \in \mathbb{Z}$.*

2. *Suponhamos agora que d divide c. Logo $c/d \in \mathbb{Z}$, e a equação $ax + by = c$ possui solução em $\mathbb{Z}$; pois como $\mathbb{Z}$ é fechado em relação a multiplicação e adição existe a, x, b, y tal que $a.x + b.y = c$.*

Sabe-se então determinar se a equação Diofantina tem solução nos inteiros. Sendo assim agora será apresentado um esquema de resolução da equação. Faremos isso através da resolução de um exemplo.

Exemplo 3.1 *De quantas maneiras pode-se comprar selos de* 3 *reais e de* 5 *reais de modo que se gaste* 50 *reais?*

Sendo x e y respectivamente a quantidade de selos de 3 reais e 5 reais, temos que o problema pode ser representado pela equação:

$$3x + 5y = 50$$

Como o m.d.c entre 3 e 5 é 1 e 1 divide qualquer número, logo a equação tem solução. Mostrar aos alunos que o modo de se obter a solução é simples e envolve escrever o número 1 em função dos coeficientes a e b da equação $ax + by = c$. Como temos de solucionar a equação $3x + 5y = 50$; basta que escrevamos o número 1 em função de produtos envolvendo os números 3 e 5. Assim mostre aos alunos que

$$1 = 3.2 - 5 \;\; \text{ou} \;\; 1 = 3.2 + 5.(-1)$$

Como a equação proposta é igual a 50, basta multiplicarmos os dois lados da igualdade por 50 e obteremos:

$$50.[3.2 + 5.(-1)] = 1.50$$

Usando a propriedade distributiva temos que:

$$3.(2.50) + 5.(-1.50) = 50$$

$$3.100 + 5.(-50) = 50$$

Logo $x = 100$ e $y = -50$ são uma solução válida para a equação. Como estamos calculando a quantidade de selos, esta resposta não faz o menor sentido em se tratando de valores negativos. Neste ponto mostrar aos alunos que como $3.5 = 5.3 = 15$, a cada cinco unidades em x obteremos um y menor em três unidades e vice-versa de tal forma que $x = 95$, $y = -47$, é uma outra solução, $x = 90$, $y = -44$ e assim sucessivamente chegaremos a $x = 20$, $y = -2$, a próxima resposta será $x = 15$, $y = 1$ (que será a primeira resposta válida). Através do mesmo raciocínio obteremos $x = 10$, $y = 4$; $x = 5$, $y = 7$; $x = 0$ e $y = 10$. Como a próxima resposta desta sequência será $x = -5$ e $y = 13$, daqui para frente somente encontraremos soluções que são inválidas para o nosso problema. Então, as formas como podemos comprar os selos são

1. 15 selos de $R\$ \, 3,00$ mais 1 selo de $R\$ \, 5,00$.
2. 10 selos de $R\$ \, 3,00$ mais 4 selos de $R\$ \, 5,00$.
3. 5 selos de $R\$ \, 3,00$ mais 7 selos de $R\$ \, 5,00$.
4. Nenhum selo de $R\$ \, 3,00$ com 10 selos de $R\$ \, 5,00$.

Note que podemos em cada um dos itens escrever

a. $x = 100 - 5.17$, donde $x = 100 - 85$, ou seja $x = 15$
$y = -50 + 3.17$, donde $y = 50 + 51$, ou seja $y = 1$.

b. $x = 100 - 5.18$, donde $x = 100 - 90$, ou seja $x = 10$
$y = -50 + 3.18$, donde $y = 50 + 54$, ou seja $y = 4$.

c. $x = 100 - 5.19$, donde $x = 100 - 95$, ou seja $x = 5$
$y = -50 + 3.19$, donde $y = 50 + 57$, ou seja $y = 7$.

d. $x = 100 - 5.20$, donde $x = 100 - 100$, ou seja $x = 0$
$y = -50 + 3.20$, donde $y = -50 + 60$, ou seja $y = 10$

Perceba que há um padrão de soluções: sendo $x_0 = 100$ e $y_0 = -50$ a solução inicialmente encontrada para a equação $3x + 5y = 50$. As demais soluções são:

$$x = x_0 - 5t; y = y_0 + 3t, \quad \text{com} \quad t \in \mathbb{Z}$$

O resultado que intuímos no exemplo é de fato válido e o enunciamos a seguir.

Proposição 3.2 *Seja* x_0 *,* y_0 *soluções da equação* $ax + by = c$*, onde o m.d.c de a e b é igual a 1. Então, as soluções x, y em* $\mathbb{Z}$ *da equação são*

$$x = x_0 - tb, t \in \mathbb{Z}$$

$$y = y_0 + ta, t \in \mathbb{Z}$$

Demonstração 3.2 *Seja x, y uma solução de* $ax + by = c$*, logo,*

$$ax_0 + by_0 = ax + by = c$$

consequentemente

$$a.(x - x_0) = b.(-y + y_0)$$

Como m.d.c de a e b é igual a 1, segue-se que b divide $(x - x_0)$*. Logo,* $x - x_0 = t.b, t \in \mathbb{Z}$*, substituindo temos,* $a.t.b = b.(-y + y_0)$*, segue-se que* $-y + y_0 = t.a$*, logo* $y = y_0 - t.a, t \in \mathbb{Z}$*, o que prova que as soluções são do tipo exibido. Por outro lado x, y, como no enunciado, é solução, pois*

$$ax - by = a.(x_0 - tb) + b.(y_0 + ta) = ax_0 - atb + by_0 + atb = ax_0 + by_0 = c$$

Agora é o momento de os alunos praticarem:

Questão 3.1.3 *Qual a idade do senhor Pedro sabendo que ela pode ser expressa na forma* $11x + 1$ *ou na forma* $8y + 3$ *e* $x, y \in \mathbb{Z}$*?*

Resposta comentada: Lembrando que sempre deverá informar ao aluno que a solução será efetuada dentro dos números inteiros, ou seja $x, y \in \mathbb{Z}$. Primeiro vamos mostrar que necessitamos de uma resposta que satisfaça tanto a primeira quanto a segunda afirmação. Como x,y devem ser inteiros, podemos montar as equações na forma

$$11x + 1 = I \quad \text{e} \quad 8y + 3 = I$$

onde I é a idade do Sr.Pedro. Como $11x + 1 = I$ e $8y + 3 = I$; logo podemos concluir que

$$11x + 1 = 8y + 3$$

Reorganizando a equação teremos: $11x - 8y = 2$; como então, resolveremos a equação ao lado? O professor deve resgatar a resolução do m.d.c (máximo divisor comum) para poder escrever o número 1 em função de uma expressão envolvendo $11.p - 8.q$, de tal forma que encontremos uma expressão na forma $11p - 8q = 1$, com $p, q \in \mathbb{Z}$; multiplicada a solução por 2 teremos

$$11.(2p) - 8.(2q) = 2 \quad \text{a qual} \quad 2p = x, \quad \text{ou} \quad 2q = y$$

será uma das soluções para a equação.

	1	2	1
11	8	3	2
3	2	1	

Logo, podemos escrever:

$$1 = 3 - 2 = 3 - (8 - 2.3) = 3.3 - 8 = 3.(11 - 8) - 8 = 11.3 - 8.4;$$

$11.(3) - 8.(4) = 1$, multiplicando ambos os membros por 2 teremos:

$$2.[11.(3) - 8.(4)] = 2.1$$

$$11.(3.2) - 8.(4.2) = 2 \text{ ; donde}$$

$$11.6 - 8.8 = 2$$

com $x = 6$ e $y = 8$ é uma das soluções da equação.

Para encontrar a idade do Sr. Pedro basta então substituir o valor de x na equação $11.x + 1$, ou seja, $11.6 + 1 = 67$; ou o valor de y na equação $8.y + 3$ o que nos fornece equivalentemente $8.8 + 3 = 64 + 3 = 67$. Logo a idade do Sr. Pedro é de 67 anos. Neste momento, o professor deve solicitar aos alunos que usem a preposição 5.2 para calcular outras possíveis respostas:

$$x = x_0 - tb, t \in \mathbb{Z}, \quad \text{substituindo}$$

$$x = 14 - (-8)t, \quad \text{ou seja,} \quad x = 14 + 8t$$

Para $t = -2$,

$$x = 14 + 8.(-2) = 14 - 16 = -2$$

substituindo $x = -2$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(-2) + 1 = -22 + 1$$

logo $I = -21$, o que não faz sentido no contexto do problema.

Para $t = -1$,

$$x = 14 + 8.(-1) = 14 - 8 = 6$$

substituindo $x = 6$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(6) + 1 = 66 + 1$$

logo $I = 67$, é a resposta que havíamos encontrado anteriormente.

Para $t = 0$,

$$x = 14 + 8.(0) = 14 + 0 = 14$$

substituindo $x = 14$ em $I = 11.x + 1$, temos:

$$I = 11.(14) + 1 = 154 + 1$$

logo $I = 155$. Essa resposta é improvável visto que atualmente o Guiness Book, o famoso livro dos recordes, lista como a pessoa mais velha do mundo um japonês de 114 anos de idade. Para valores t maiores que 2 teremos idades maiores que 155 anos e para valores de t menores que -2, idades menores que -21. De uma forma ou de outra os resultados seriam impossíveis.

Questão 3.1.4 *De quantas maneiras posso efetuar o pagamento de* $R\$\,1.000,00$*, utilizando-se de exatamente* 30 *notas entre os valores de* $R\$\,10,00$*,* $R\$\,20,00$ *e* $R\$\,50,00$*.*

Resposta comentada: Primeiramente notamos que as equações definidas pelo texto são:

$$10x + 20y + 50z = 1000 \tag{3.2.2}$$

$$x + y + z = 30 \tag{3.2.3}$$

De (3.2.3) temos que $x = 30 - y - z$; substituindo em (3.2.2)

$$10.(30 - y - z) + 20y + 50z = 1000$$

$$300 - 10y - 10z + 20y + 50z = 1000$$

$$10y + 40z = 1000 - 300$$

$$10y + 40z = 700 \quad \text{ou} \quad y + 4z = 70$$

Resolvendo esta equação diofantina obteremos as respostas possíveis para o enunciado proposto. Logo:

$$1 = 1(-3) + 4.1$$

$$70.1 = 70.[1.(-3) + 4.1]$$

$$70 = 1.(-210) + 4.70$$

Portanto $y = -210$ e $z = 70$ é solução da equação. Porém, não faz sentido para o contexto do problema já que não há como ter quantidade negativa de notas de $R\$\,20,00$. Usamos então a preposição 3 afim de encontrar uma resposta que seja adequada.

$$y = y_0 - b.t \quad z = z_0 + a.t \quad t \in \mathbb{Z}$$

substituindo:

$$y = -210 - 4.t \quad \text{e} \quad z = 70 + t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

por inspeção vemos que um valor conveniente para t é -53, assim temos:

$$y = -210 - 4.(-53) = -210 + 212 = 2, \quad \text{ou seja,} \quad y = 2$$

$$z = 70 + (-53) = 70 - 53 = 17, \quad \text{ou seja,} \quad z = 17$$

substituindo na equação (3.2.2):

$$x + y + z = 30, x + 2 + 17 = 30, x + 19 = 30, x = 11$$

Portanto uma resposta para o problema é: 11 notas de $R\$\,10,00$, 2 notas de $R\$\,20,00$ e 17 notas de $R\$\,50,00$. De fato:

$$10.11 + 20.2 + 50.17 = 1000$$

Existem outras respostas para o problema?
Para responder a isso precisamos analisar outros valores de t menores que -53; note na equação $z = 70 + t$ que t não pode ser menor que -70 pois os resultados a partir daí serão de números negativos de notas de $R\$\,50,00$. Concluímos então que podemos estudar respostas para valores de t no intervalo $-73 \leq t \leq -53$. Forneça um valor de t para cada aluno da turma e peça que determinem a respectiva resposta do problema. Em seguida discutam essas respostas.
Dividindo 202 por 4 obtemos 50 com resto 2; diminuindo 50 vezes teremos $z = 18$ e obteremos:

$$z = 18 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

As próximas respostas válidas serão: $z = 17$, $y = 2$; logo $x = 11$

$$10x + 20y + 50z = 110 + 40 + 850 = 1000$$

$z = 16$, $y = 6$; logo $x = 8$

$$10x + 20y + 50z = 80 + 120 + 800 = 1000$$

$z = 15$,$y = 10$, logo $x = 5$

$$10x + 20y + 50z = 50 + 200 + 750 = 1000$$

$z = 14$, $y = 14$, $x = 2$

$$10x + 20y + 50z = 20 + 280 + 700 = 1000$$

Para $z = 13$, $y = 18$, $x = -1$ a resposta não é válida, pois x obrigatoriamente é maior ou igual a zero.

Da onde podemos concluir que estas são as respostas válidas para o problema. Após introduzido o assunto, o professor pode recorrer aos exercícios da página 15 a fim de que seja fixada a forma de resolução dos problemas envolvendo equações diofantinas.

Outra aplicação para as equações Diofantinas anteriormente descritas, será a utilização de equações Diofantinas junto aos problemas envolvendo o Teorema Chinês do Resto. O referido teorema trata de um processo de resolução de um sistema de equações modular; teve uma de suas primeiras aparições em "Manual de aritmética do mestre Sun", um livro chinês que data de 287 d.C. a 473 d.C.. Ele foi desenvolvido simultaneamente por gregos e chineses com o intuito de resolver alguns problemas relativos à astronomia.

Atividade 3.2 *Mágica com os números.*

O objetivo desta atividade é a resolução de um sistema de equações modulares através de uma abordagem de sistemas de equações e resolução de equações diofantinas, face tratar-se de uma forma de cálculo mais acessível ao aluno de Ensino Médio, a fim de que não se aprofunde muito no campo da aritmética modular, parte de congruências limitando-se a simples apresentação ao educando das formas gerais de que um número X congruente a P na base Y, pode ser escrito na forma $K.Y + P$, com $K \in \mathbb{N}$. Por exemplo, um número que deixa resto 3 quando dividido por 7 pode ser escrito sob a forma $7K + 3$, com $K \in \mathbb{N}$. Sendo que, esta ideia será utilizada para a resolução de problemas envolvendo o Teorema Chinês do Resto, utilizando-se da resolução dois a dois através de sistemas de equação os quais irão resultar em uma equação diofantina, sobre as quais recairão os objetos de ensino de maneira que fiquem mais acessíveis aos nossos alunos de Ensino Fundamental e Médio.

Descrição da atividade: O professor ao chegar em sala solicita aos alunos que escolham, em comum acordo, um número entre 11 e 1000 (Neste momento o professor pode até sair da sala afim de que os alunos possam confabular). Feito isso os alunos devem apresentar ao professor três respostas:

Questão 3.2.1 *Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 9*?*

Questão 3.2.2 *Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 10*?*

Questão 3.2.3 *Qual é o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por* 11*?*

Com estas respostas em mãos, o professor, secretamente, segue o procedimento a seguir para desvendar o enigma e apresentar o número aos alunos.

Exemplo 3.2 *A turma escolheu o número* 825*; logo quando dividido por* 9 *gera resto* 6*; dividido por* 10 *deixa resto* 5 *e dividido por* 11 *deixa resto* 0*. Logo* X *pode ser escrito de três formas a seguir:*

$$X = 11k \tag{3.2.4}$$

$$X = 9u + 6 \tag{3.2.5}$$

$$X = 10v + 5 \text{ com } k, u, v \in \mathbb{N}. \tag{3.2.6}$$

Igualando (3.2.4) a (3.2.5) teremos:

$$11k = 9u + 6 \quad 11k - 9u = 6$$

Esta equação diofantina pode ser resolvida pois m.d.c entre 11 e 9 é igual a 1 e 1 divide 6. Então teremos: $11a - 9b = 1$ como

$$1 = 9 - 2.4 = 9 - (11 - 9).4 = 9 - 11.4 + 9.4 = 11.(-4) - 9.(-5)$$

$$11.(-4) - 9.(-5) = 1 \quad \text{(Multiplicando ambos os lados por 6 teremos)}$$

$$11.(-24) - 9.(-30) = 6$$

Donde $k = -24$ satisfaz (3.2.4) a (3.2.5) simultaneamente; sendo um valor de X possível $X = 11.(-24)$ logo $X = -264$. Como, o resultado $X = -264$, nada mais é do que o resultado da equação diofantina $11k - 9u = 6$, sabemos de equações diofantinas que outros valores válidos para a equação serão $k_1 = k + p.9$ o que implicaria $u_1 = u + p.11$, com $p \in \mathbb{Z}$. Como X é da forma $X = 11.k$, obteremos $X = 11.(k + 9p)$, ou seja, $X = 11.k + 99.p$, com $p \in \mathbb{Z}$. Donde concluímos que existe uma resposta possível a cada 99 números consecutivos. Então X pode ser $X = -264$, $X = -165$, $X = -66$, $X = 33$. Generalizando teremos

$$X = 99w + 33 \tag{3.2.7}$$

Igualando (3.2.6) e (3.2.7) teremos:

$$10v + 5 = 99w + 33$$

$$10v - 99w = 28$$

Como m.d.c entre 99 e 10 é igual a 1 e 1 divide 28; logo a equação possui solução.

$$10c - 99d = 1$$

$$1 = 10 - 9 = 10 = 10 - (99 - 9.10) = 10.10 - 99.1$$

$$10.10 - 99.1 = 1 \quad \text{(Multiplicando-se ambos os lados por 28) teremos:}$$

$$10.280 - 99.28 = 28$$

Como $v = 280$; logo $X = 10.280 + 5 = 2805$. Efetuando a comparação das respostas exatamente como a feita no item anterior, chegamos a conclusão de que possuímos $v_1 = 10.(280 + 99.p)$, ou $v_1 = 10.280 + 990.p$, ou seja os valores de X variarão para mais ou para menos 990. Donde

$$X = 2805; \quad X = 1815; \quad X = 825$$

Sendo que, $X = 825$ está no intervalo solicitado aos alunos e possui os restos informados pelos mesmos. Logo $X = 825$.

Após esta "mágica"o professor deve solicitar aos alunos que encontrem um número entre 1 e 50 que deixe resto 1 quando dividido por 2; resto 2 quando dividido por 3 e resto 3 quando dividido por 5. Incentivar aos alunos a efetuarem

a resolução por tentativa e erro. Segue uma forma de resolução:
Grupo dos números que quando divididos por 5 deixam resto 3 entre 1 e 50.

$$3 - 8 - 13 - 18 - 23 - 28 - 33 - 38 - 43 - 48$$

Excluindo os números que são divisíveis por 2 (pares)

$$3 - 13 - 23 - 33 - 43$$

Analisando os candidatos:
3 deixa resto 0 quando dividido por três.
13 deixa resto 1 quando dividido por três.
23 deixa resto 2 quando dividido por três.
33 deixa resto 0 quando dividido por três.
43 deixa resto 1 quando dividido por três.
Neste momento, o professor deve mostrar que 53 também seria uma resposta válida, assim como 83, 113, porém não se encontram no intervalo solicitado.

Após esta etapa para apresentação do tipo de problema, o professor deve escolher um número entre 10 e 999, informar os restos na divisão por 9, 10 e 11 e resolver detalhadamente o problema com seus alunos para que entendam o processo de resolução.

4 Problemas complementares

4.1 Problemas de Equações Diofantinas

Problema 4.1 *Maria tem exatamente* $R\$\,61,00$ *em notas de* $R\$\,1,00$*,* $R\$\,5,00$ *e* $R\$\,10,00$*. Se ela tem exatamente* 14 *notas. Quais as notas que possui?*

Problema 4.2 *João tem várias cartas para enviar com* $R\$\,100,00$*. Comprando selos de* $R\$\,0,53$ *e* $R\$\,0,49$*. De quantas maneiras diferentes ele pode remeter as cartas sem que sobre nem um centavo?*

Problema 4.3 *Dois times disputam um declato. Em cada competição, o time vencedor ganha* 4 *pontos, o time perdedor ganha* 1 *ponto e, em caso de empate, ambos os times ganham* 2 *pontos. Após um certo número ímpar de rodadas, os dois times juntos possuem juntos* 46 *pontos. Quantos empates houveram?*

Problema 4.4 *Quantas quadras de basquete e quantas quadras de vôlei são necessárias para que* 80 *alunos joguem simultaneamente qualquer um dos esportes?*

Problema 4.5 *Encontre todos os números naturais menores do que* 500 *que deixam resto* 3 *quando divididos por* 7 *e deixam resto* 10 *quando divididos por* 13.

Problema 4.6 *Num cinema o valor da entrada é de* $R\$\,15,00$ *e, hoje excepcionalmente a meia-entrada está sendo cobrada* $R\$\,7,00$. *Sabendo que o valor arrecadado na sessão foi de* $R\$\,1.000,00$, *qual o número máximo e o número mínimo de pessoas que podem ter assistido à sessão?*

Problema 4.7 *Um produtor rural precisa arrecadar* $R\$\,15.000,00$ *para pagamento urente de uma dívida. Sabendo que possui sacas de feijão e trigo as quais pode vender a* $R\$\,270,00$ *e* $R\$\,360,00$. *De quantas formas diferentes ele pode efetuar a venda de modo a arrecadar o valor exato?*

4.2 Problemas do Teorema Chinês do Resto

Problema 4.8 *Um fazendeiro possui um número de cabeças de gado de tal forma que se esse número for dividido por* 7 *origina um resto* 3, *se dividirmos essa quantidade por* 11 *deixa resto* 5 *e se dividirmos ainda a quantidade por* 7 *a conta será exata. Qual o número mínimo de cabeças de gado que esse fazendeiro possui?*

Problema 4.9 *Para o problema anterior, apresente outras três quantidades de cabeças de gado que satisfazem os restos apresentados e diferentes da solução mínima.*

Problema 4.10 *Possuo em minha carteira um valor em dinheiro que caso seja dividido por* 7 *deixa resto* 2, *caso seja dividido por* 2 *deixa resto* 1 *e, caso seja dividido por* 9 *deixa resto* 5. *Sabendo que possuo entre* $R\$\,500,00$ *e* $R\$\,625,00$. *Quanto possuo em minha carteira?*

5 Referências Bibliográficas

Referências

[1] BROUSSEAU,Guy. In: *Didática Matemáticas, direção de Jean Brun. Tradução: Maria José Figueiredo.* Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 35-113.

[2] EMERIQUE, Paulo S..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 185-198.

[3] ONUCHIC, Lourdes de la R..In: *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Organizadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo.* São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

[4] GOMES, Maria Laura Magalhães.: *Quatro visões iluministas sobre a educação matemática: Diderot, D'Alembert, Condillac e Condorcet.* Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2008.

[5] Pitombeira, J. B.: *O jogo de Euclides.* Revista do Professor de Matemática (RPM), SBM, São Paulo, 1989.

[6] HEFEZ, Abramo.: *Elementos de Aritmética.* 2.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[7] BOYER, Carl B..: *História da matemática* 2. ed. Editora Edgard Blucher, LTDA.

[8] FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia.: *Círculos Matemáticos: A Experiência Russa. Tradução: Valéria de Magalhães Iório.* Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] Roque ROQUE, Tatiana.: *História da Matemática.* Editora Zahar, 2012.

[10] STEWART, Ian.: *Almanaque das Curiosidades Matemáticas.* Editora Zahar, 2008.

[11] STEWART, Ian.: *Incríveis Passatempos Matemáticos.* Editora Zahar, 2010.

[12] GARDNER, Martin.: *Divertimentos matemáticos*/ tradução de Bruno Mazza. 3.ed. São Paulo: IBRASA, 1998.

[13] Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap4.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[14] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/515/2011_00411. _PABLO_ROBERTO_DE_SOUSA_NETO.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[15] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ espec/monografiasPdf/Monografia_Jurandir.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[16] Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/euclides/euclides.htm. Acesso em: 25/10/2014.

[17] Disponível em: http://www.uff.br/cdme/rza/rza-html/rza-paintings-br.html. Acesso em: 25/10/2014.

[18] Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/mcsilva/HMTP8.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[19] Disponível em: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=373. Acesso em: 25/10/2014.

[20] Disponível em: http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle-/123456789/558/2011. _00462_GISELI_DUARDO_MACIANO_CAMPOS.pdf?sequence=1. Acesso em: 25/10/2014.

[21] Disponível em: http://www.uesb.br/mat/download/Trabamonografia/2013/Dinguiston.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[22] Disponível em: http://legauss.blogspot.com.br/2009/06/o-general-e-o-teorema-chines-dos-restos.html. Acesso em: 25/10/2014.

[23] Disponível em: http://illuminations.nctm.org/lesson.aspx?id=655. Acesso em: 25/10/2014.

[24] Disponível em: http://www.nctm.org/uploadedFiles/Lessons_and_Resources/mt2012-08-34a.pdf. Acesso em: 25/10/2014.

[25] Disponível em: http://www.nctm.org/publications/article.aspx?id=19900. Acesso em: 25/10/2014.

Anexo

Atividade: Equações Diofantinas

Questão 1: Numa criação de coelhos e galinhas contaram-se 400 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos, sabendo que a diferença entre esses dois números é a menor possível?

Questão 2: É possível encontrar valores inteiros para x e y que satisfaçam a equação $4x + 6y = 3$?

Questão 3: Qual a idade do Sr. Pedro sabendo que ela pode ser expressa na forma $11x + 1$ ou na forma $8y + 3$ e $x, y \in \mathbb{Z}$.

Questão 4: De quantas maneiras posso efetuar o pagamento de $R\$\,1.000,00$, utilizando-se de exatamente 30 notas entre os valores de $R\$\,10,00$, $R\$\,20,00$ e $R\$\,50,00$.

Atividade: Mágica com os números.

Questão 1: Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 9?

Questão 2: Qual o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 10?

Questão 3: Qual é o resto deixado pelo número escolhido quando dividido por 11?