PROFMAT Departamento de Matemática
Universidade Federal do Paraná
81531-990, Curitiba, PR
Brazil

A Noção de Raciocínio Indutivo em Fenômenos Cotidianos

por

Ricardo Almeida Branco

Orientador do Trabalho:
Prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho

Preprint PROFMAT 4 (2015)

30 de Março, 2015

Disponível via INTERNET:
http://www.mat.ufpr.br

A Noção de Raciocínio Indutivo em Fenômenos Cotidianos

Ricardo Almeida Branco
Departamento de Matemática - UFPR
019081-990, Curitiba, PR
e-mail: rycke.br@gmail.com

Resumo

A ideia do indutivo no ensino de matemática é estudada nesse trabalho à luz de uma proposta para o que se entende como raciocínio indutivo. A maneira como essa noção perpassa as propostas contidas nos documentos oficiais brasileiros é discutida, contrapondo-se aos documentos oficiais de outros países. Situações para a sala de aula envolvendo fenômenos da natureza, padrões geométricos e numéricos são propostas levando-se em conta a intencionalidade na explicitação do raciocínio indutivo nos processos matemáticos.

Neste trabalho, é apresentada a noção do que entendo como raciocínio indutivo e proponho situações e contextos significativos para que o professor possa explorar essa noção em sala de aula. Através do estudo de padrões geométricos, numéricos, presentes na natureza, entre outros, explorando a noção do indutivo, no qual os temas e conceitos das álgebra podem inserir-se como uma generalização de resultados numéricos.

No início do trabalho são analisadas as orientações pedagógicas brasileira, americana e portuguesa. Vê-se que enquanto no Brasil não temos uma orientação clara sobre como o indutivo e os padrões devem ser trabalhados, nos Estados Unidos os professores recebem uma orientação sobre como trabalhar com os padrões de modo detalhado e distribuído ao longo dos anos letivos. Em Portugal, os padrões também vistos como regularidades, novamente indicam um trabalho que se inicia com os alunos mais novos, padrões mais simples, e é distribuído ao longo da vida escolar culminando na generalização de padrões através de expressões algébricas.

Claro que ao estudarmos alguns conteúdos como progressões aritméticas, progressões geométricas e funções, estamos envolvidos com padrões e o indutivo se faz presente, porém muitas vezes o modo como estes conteúdos são trabalhados não explora o uso do raciocínio indutivo. São apresentadas fórmulas prontas que o aluno deve saber aplicar.

Na primeira seção são comparados os currículos brasileiro, americano e português, no que diz respeito ao estudo de padrões e regularidades, bem como sobre o indutivo.

Na segunda seção discorre-se sobre os padrões relacionando-os à álgebra. Com base em autores que têm pesquisado sobre o estudo de padrões e regularidades como introdução à generalização algébrica, explicita-se o que entendo por raciocínio indutivo. Ainda nesta seção é diferenciado o raciocínio indutivo de *indução matemática* (ferramenta de prova).

A terceira seção indica como o raciocínio indutivo pode ser usado em sala de aula. Apresento situações que muitas vezes nos são comuns, mas que no seu desenvolvimento dependeram do raciocínio indutivo, como é o caso da elaboração do calendário, de prever a ocorrência de eclipses, ou a aparição de um cometa. O cálculo do valor de π guarda aplicações de raciocínio indutivo e pode subsidiar os professores no estudo sobre a circunferência. O uso destes exemplos ou de outras situações que evidenciem o uso do raciocínio indutivo propicia aos alunos a descoberta, num processo exploratório, de resultados matemáticos que generalizam os padrões.

Conclui-se o trabalho com uma reflexão a respeito do tratamento das diversas construções matemáticas apresentadas, à luz do raciocínio indutivo, enfatizando a necessidade de tratar intencionalmente essa noção nas aulas de Matemática.

1 A Noção do Indutivo no Currículo de Matemática

Diante dos desafios do século XXI a sociedade espera que os indivíduos tenham capacidade de tomar decisões, trabalhar em grupo, interpretar e resolver problemas e comunicar-se. Deste modo, em vários países ocorreram reformas curriculares visando a formação deste cidadão versátil, analítico e decidido. Dois países que apresentaram uma proposta concreta no tratamento da noção do indutivo foram Estados Unidos e Portugal. Por isto faremos uma breve discussão comparativa entre as propostas daqueles países e os documentos oficiais brasileiros.

A seguir, serão analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCNs, pois estes "constituem um referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País" [8]. Também são analisados alguns pontos do currículo americano e português para a disciplina de Matemática.

Veremos que nestes documentos o desenvolvimento do raciocínio, da imaginação, o uso da indução, da capacidade de formular hipóteses e testá-las são temas abordados com frequência. Tais temas são necessários para o desenvolvimento do que chamarei de raciocínio indutivo.

Os PCNs [9] enfatizam a formação de alunos capazes de

> questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

É de consenso que para tal, faz-se necessário deixarmos de lado uma educação fundamentada em procedimentos mecânicos, que torna o aluno mero reprodutor de conhecimentos previamente definidos, ou seja, atuando como espectador e reprodutor de fórmulas e ideias prontas. É preciso que os alunos sejam participantes num processo de construção, especialmente no que se refere à Matemática. Segundo [11]

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

Acredito que a Matemática ocupa um papel fundamental na formação deste indivíduo e os PCNs [11] colocam que

> em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

Segundo a citação anterior, nota-se um esforço de buscar na Matemática um incentivo à investigação e a criatividade. Ainda, nas aulas da Matemática "o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução" [9].

O professor como mediador de processos educacionais precisa ter uma postura de quem aprecia resoluções com base no raciocínio, pois

> se o professor espera uma atitude curiosa e investigativa, precisa, então, propor prioritariamente atividades que exijam essa postura, e não a passividade, valorizar o processo e a qualidade, e não apenas a rapidez na realização, e esperar estratégias criativas e originais, e não a mesma resposta de todos [9].

Deste modo, precisamos ter professores engajados na tarefa de fazer os alunos criarem tais hábitos. Segundo [32] "a primeira regra de ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar".

Ainda de acordo com [8], o ensino de Matemática

> prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.

Entrando diretamente nas orientações para a disciplina de Matemática, encontra-se, por exemplo, que para cumprir seus objetivos, os PCNs de Matemática [9] "destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações".

Novamente os PCNs [9] falam sobre o uso da indução e da dedução quando dizem que:

> O exercício da indução e da dedução em Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência em todos os níveis de ensino.

Quando é proposta uma atividade em que a solução da mesma pode ser obtida de várias maneiras, damos ao aluno mais autonomia para que ele resolva tal atividade do seu próprio modo, pensando "do seu jeito". Ao fazer isto, o aprendizado pode ser mais significativo, pois o aluno relaciona conteúdos e ideias matemáticas e estabelece caminhos na resolução de problemas. Os PCNs [8] citam que com isto os estudantes

> podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidade, igualdade, composição e inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de analogias, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações como em espaço, forma e medidas.

Ainda, quando o texto que está sendo analisado fala sobre competências e habilidades que devem ser desenvolvidas em Matemática, especificamente sobre investigação e compreensão é preciso que o aluno possa "distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos" [10]. Outro ponto que merece destaque, no mesmo item do texto, é que o aluno deve "fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" [10].

No sistema de educação americano, o correspondente aos nossos PCNs são os *Standards*. O conteúdo dos *Standards* vem sendo organizado pelo NCTM (Conselho Nacional dos Professores de Matemática) desde o ano de 1986.

Nos *Standards* é reconhecida a necessidade de desenvolver um pensamento crítico. Para isso o NCTM levantou a importância da solução de problemas, da comunicação, das conexões e do raciocínio.

É comum nas várias unidades dos *Standards* a ideia de que "o estudo da matemática deve enfatizar o raciocínio para que os alunos acreditem que a Matemática faz sentido" [29].

O NCTM lista os objetivos para cada faixa etária, e já nos alunos mais novos é incentivado o reconhecimento de padrões e enfatizada a importância da aplicação da Matemática.

Na reforma americana do currículo da Matemática foram incluídos alguns novos temas entre eles *padrões e relações*. Estes permeiam todo o currículo desde os anos iniciais, iniciando com classificação e ordenação de objetos, até o ensino médio com generalização de padrões e uso da Álgebra.

Na tabela a seguir, traduzida de [15], é possível visualizar a distribuição do tema *padrões e relações* ao longo dos anos letivos no sistema de educação americano:

Grades Pré K-2	Ordenar e classificar objetos por tamanho, número e outras propriedades. Reconhecer, descrever e estender padrões tais como sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples e traduzir de uma representação para outra. Analisar como padrões de repetição e padrões de crescimento são gerados.
Grades 3-5	Descrever, estender e fazer generalizações sobre padrões geométricos e numéricos. Representar e analisar os padrões e funções, usando palavras, tabelas e gráficos.
Grades 6-8	Representar, analisar e generalizar uma variedade de padrões com tabelas, gráficos, palavras e, quando possível, regras simbólicas. Relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação. Identificar as funções como linear ou não linear e contrastar suas propriedades a partir de tabelas, gráficos ou equações.
Grades 9-12	Generalizar padrões usando funções definidas explicitamente e definidas de forma recursiva. Compreender as relações e funções e escolher, de forma flexível, a melhor representação para elas. Analisar funções de uma variável, investigando as taxas de variação, raízes, assíntotas e comportamento local e global. Compreender e executar transformações tais como combinação aritmética, compondo, e invertendo as funções mais usadas, usando a tecnologia para realizar estas operações quando em expressões simbólicas mais complicadas. Compreender e comparar as propriedades de classes de funções, incluindo a exponencial, polinomial, racional, logarítmica e funções periódicas. Interpretar representações de funções de duas variáveis.

Segundo [31] a investigação de padrões permitem aos estudantes:

- resolver problemas;
- desenvolver a compreensão e as relações de importantes conceitos matemáticos;
- investigar as relações entre quantidades (variáveis) de um padrão;
- generalizar padrões usando palavras ou variáveis;
- estender e conectar padrões;
- construir a compreensão de função.

Em Portugal o documento oficial semelhante aos PCNs é o *PMEB*, *Programa de Matemática do Ensino Básico*, que recentemente passou por atualizações. Além de fazer uma unificação dos ciclos da Educação Básica, foi acrescentado o conceito de *exploração de padrões*, como um primeiro passo para a generalização. O documento entende que a generalização é um dos componentes mais importantes do conhecimento matemático. Deste modo o *PMEB* sugere uma abordagem através de múltiplas representações utilizando para isto conceitos visuais/figurativos.

Para formar alunos com tais capacidades foram pensadas tarefas divididas em diferentes graus de dificuldade. Num primeiro momento são propostas atividades chamadas de "Contagens Visuais Básicas" nas quais é desenvolvida no aluno a partir da contagem e observação a chamada capacidade de ver instantaneamente, neste ponto são feitas atividades direcionadas tais como a composição e decomposição de números, relações numéricas, orientação espacial, figuras geométricas e simetria. Num segundo momento são trabalhados os chamados problemas de sequências em que, além de reconhecer o padrão, também deve ser feita a generalização. O objetivo é descobrir os padrões presentes numa determinada sequência e para cada caso fazer generalizações. O texto do documento fala sobre a regra do "Ver-Descrever-Registrar". São colocadas ainda duas formas de generalização: a generalização próxima e a generalização distante, utilizando como ferramentas o raciocínio recursivo e o funcional. Existe ainda um terceiro momento, no qual o aluno deve resolver problemas. Nesta etapa espera-se que o aluno desenvolva suas próprias sequências, descubra o padrão e estabeleça relações de modo a encontrar a solução do problema proposto. Por se tratar de um assunto relativamente novo, o governo de Portugal disponibilizou alguns manuais para a capacitação dos professores, para que eles possam fazer uma abordagem direcionada em suas práticas pedagógicas.

A seguir é apresentada uma outra tabela, agora com alguns pontos do Programa Curricular de Matemática de Portugal que nos remetem aos estudo de regularidades ou padrões:

1º ciclo	Classificar e ordenar de acordo com um dado critério.
	Realizar contagens progressivas e regressivas, representando os números envolvidos.
	Identificar e dar exemplos de números pares e ímpares.
	Resolver problemas envolvendo relações numéricas.
	Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números. Investigar regularidades numéricas.
	Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.
	Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos.
	Estabelecer relações entre fatos e ações que envolvam noções temporais e reconhecer o caráter cíclico de certos fenômenos e atividades.
	Relacionar entre si hora, dia, semana, mês e ano.
	Identificar a hora, a meia-hora e o quarto-de-hora.
	Ler, explorar e interpretar informação (apresentada em listas, tabelas de frequências, gráficos de pontos e pictogramas) respondendo a questões e formulando novas questões.
	Organizar os dados em tabelas de frequências absolutas e representá-los através de pictogramas.
	Calcular o perímetro de polígonos e determinar, de modo experimental, o perímetro da base circular de um objeto.
	Estimar a área de uma figura por enquadramento.
	Ler, explorar, interpretar e descrever tabelas e gráficos, e responder e formular questões relacionadas com a informação apresentada. Formular questões, recolher e organizar dados qualitativos e quantitativos (discretos) utilizando tabelas de frequências, e tirar conclusões.
	Explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos.
	Formular e testar conjecturas relativas a situações matemáticas simples.
	Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas.
	Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas.
	Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios.
	Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

2º ciclo	Identificar e dar exemplos de sequências e regularidades numéricas e não numéricas. Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente. Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las. Compreender os conceitos de razão, proporção e constante de proporcionalidade. Utilizar proporções para modelar situações e fazer previsões. Resolver e formular problemas envolvendo situações de proporcionalidade direta. Determinar um valor aproximado de π. Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contraexemplos e à análise exaustiva de casos. Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais. Interpretar a informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas. Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas. Traduzir relações de linguagem natural para linguagem matemática e vice-versa. Exprimir ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando a notação, simbologia e vocabulário próprios. Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.
3º ciclo	Resolver problemas e investigar regularidades envolvendo números racionais e reais. Deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo. Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra. Formular, testar e demonstrar conjecturas. Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples. Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo. Compreender o papel das definições em matemática. Distinguir uma argumentação informal de uma demonstração. Selecionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração. Interpretar informação e ideias matemáticas representadas de diversas formas. Representar informação e ideias matemáticas de diversas formas. Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando linguagem e vocabulário próprios. Discutir resultados, processos e ideias matemáticas.

Os PCNs apenas sinalizam uma abordagem que contemple o desenvolvimento de padrões, enquanto outros países como Estados Unidos e Portugal, através do *Standards* ou do *PMEB*, respectivamente, possuem propostas adaptadas para que o estudo dos padrões e a noção do indutivo sejam distribuídos, levando em consideração os graus de dificuldade, ao longo dos anos escolares. Por outro lado, amparados pelos PCNs, os professores podem desenvolver o tema em sala de aula. Ao longo do trabalho serão apresentados alguns caminhos para tratar o tema em diversas situações escolares.

2 Raciocínio Indutivo

Como observado na seção anterior os PCNs, em todos os níveis, sinalizam as ideias de *indutivo* e *indução*, mas o que estes termos querem dizer? Segundo [3], o adjetivo indutivo tem quatro significados que são:

1. Que procede por indução.
2. Relativo a indução.
3. Em que há indução.
4. Que induz.

No mesmo dicionário temos que o adjetivo indução significa

1. Ato ou efeito de induzir.
2. Forma de raciocínio que consiste em inferir de fatos particulares uma conclusão geral.
3. Conclusão tirada a partir desse raciocínio.
4. *fig.* Incentivo, estímulo, sugestão, instigação.

Nesta seção trata-se da indução como o processo de reconhecer um padrão ou uma sequência e descobrir os termos seguintes mesmo que eles não estejam representados. Acredito que um estudo intencional de padrões pode ser útil para a compreensão da álgebra, por exemplo, que muitas vezes é vista como sem significado para os alunos e um conteúdo com elevado grau de dificuldade.

O entendimento dos padrões é importante na Matemática mas não é enfatizado nos PCNs e muitas vezes não chega à sala de aula. Veremos na continuidade deste trabalho diversos conteúdos escolares que podem ser introduzidos através da análise de padrões, permitindo ao aluno compreender como certos resultados foram encontrados e entender a relação entre o conteúdo matemático e sua aplicação no mundo real. A abordagem do estudo dos padrões através do raciocínio indutivo possibilita reconstruir o contexto histórico em que dada fórmula ou resultado foi descoberto e portanto insere a História da Matemática na contextualização dos temas. O raciocínio indutivo ainda permite relacionar áreas e conteúdos matemáticos até que seja possível compreender o padrão em questão e por isto muitas vezes não tem uma única solução, dando assim certa liberdade ao aluno e ao mesmo tempo promove uma revisão de conhecimentos adquiridos.

Alguns autores como Mason [26], Serra [36], Lee [24], Devlin [16], Steen [35] e Vale [39] assim como as diretrizes citadas anteriormente colocam o estudo de padrões como uma possibilidade de iniciar a álgebra, já que para generalizar padrões é preciso comunicar o que ocorre, e para isto usam-se as variáveis.

Mason [26] defende que "o coração do ensino da matemática é o despertar da sensibilidade dos alunos para a natureza da generalização matemática" e que a álgebra "como entende-se na escola é a linguagem para a expressão e manipulação de generalidades".

Este autor ainda defende que a generalização não é apenas o culminar de investigações matemáticas, mas que a generalização é natural e onipresente. Por ser tão central para toda a Matemática, o autor acredita que muitos profissionais já não se atentam para este fato. Mason é favorável à ideia de que o pensamento algébrico enquanto passar do particular para o geral deve ser cultivado e pode ser desenvolvido. Para ele, este passar do particular para o geral é a generalização.

Bednarz, Kieran e Lee [4] citam que a comunidade internacional têm se interessado bastante pelas abordagens de ensino da álgebra. Segundo estes autores, agora é percebido que a álgebra não é "apenas uma ferramenta para resolver específicos problemas mas é também uma ferramenta para expressar soluções". Sendo assim, o estudo de regularidades encontrado em certas relações pode dar uma abordagem de que "a álgebra é o centro das generalizações". Desta maneira, o entendimento da álgebra pode ser ampliado ao pensarmos nela como ferramenta de generalização, de provar e validar as generalizações.

Lee [24] também defende o trabalho de padrões que são generalizados através de representações algébricas e que a compreensão dos padrões e a generalização é ampliada na medida em que os alunos passam a ter um estudo intencional sobre padrões e generalizações. Ele entende que existem outros modos de introduzir a álgebra enquanto ferramenta, mas que somente a generalização pode iniciar os estudantes na cultura algébrica.

Esta abordagem sobre a álgebra mostra que é possível, através das variáveis, modelar certas situações em que regularidades são observadas, fazendo conjecturas sobre a generalização, e verificar se a modelagem foi feita de modo correto. Como existem várias situações, escolares ou não, em que podemos observar padrões, isto pode ajudar a tornar o ensino de álgebra mais acessível e levar os alunos a compreender as relações entre quantidades numéricas conhecidas e quantidades numéricas representadas pelas variáveis.

OS PCNs indicam que é possível desenvolver alguns aspectos da álgebra desde as séries iniciais. Estes aspectos são justamente sobre a generalização dos padrões. Nos PCNs [9] lemos que:

> embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas. Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação.

O texto segue observando que:

> esse encaminhamento dado à Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função no terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.

De modo semelhante, Mendes e Delgado [27] afirmam que desde o jardim de infância as crianças devem ser iniciadas no trabalho com padrões e regularidades. As autoras ainda defendem este pensamento ao observar que:

> o trabalho com padrões é um dos alicerces do pensamento algébrico, pois a ideia de variável começa a formar-se ao longo da exploração de situações associadas à identificação de regularidades. Também a oportunidade de estabelecer generalizações, ainda que de uma forma intuitiva, partindo da identificação de padrões, contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

O estudo da álgebra culmina no cálculo literal, mas muitas vezes o cálculo literal é utilizado nas salas de aula como princípio, meio e fim do estudo da álgebra. A álgebra é ensinada desta maneira, ou ao menos vista desta maneira por grande parte dos alunos. Talvez seja este o motivo de que a álgebra seja um dos conteúdos em que os alunos apresentam mais dificuldade.

No capítulo que discutem sobre a álgebra, estas autoras [27] ainda observam que:

> O uso de situações significativas para o ensino da álgebra é particularmente interessante porque existem muitos professores de matemática que consideram a álgebra uma situação muito abstrata, sem qualquer correspondente em situações concretas. Quando é introduzida a simbolização algébrica, nota-se no ensino de matemática, uma verdadeira ruptura do progresso de certos alunos, que pareciam, até então, muito capazes de lidar com operações aritméticas"

Mas o que é Raciocínio Indutivo?

Serra afirma que "o raciocínio indutivo é o processo de observar padrões e fazer generalizações sobre esses padrões" [36]. O autor comenta que os matemáticos usam o raciocínio indutivo para fazer descobertas e em seguida verificam tais descobertas de modo lógico.

O mesmo autor descreve experiências que enfrentamos na nossa infância, como aprender a andar, a falar, a andar de bicicleta, como aprendizagens que se deram por observação, por tentativa e erro, e deste modo Serra coloca o raciocínio indutivo no cotidiano de todas as pessoas, ao mencionar que a maioria do que aprendemos se deu "por um processo chamado raciocínio indutivo" [36].

Ele então entende que o "raciocínio indutivo é o processo de observação de dados, reconhecimento de padrões, e generalizações a partir destas observações" [36].

Polya, no seu livro "A Arte de Resolver Problemas" [32] também discute o raciocínio indutivo. Para ele "a indução é o processo de descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática". Polya ainda explica que "a indução procura encontrar a regularidade e coerência nos fatos observados" [32].

Polya lembra "que muitos fatos matemáticos foram encontrados por indução". Estes fatos à que ele se refere, hoje fazem parte do conteúdo que é trabalhado em sala de aula, como veremos mais adiante.

Lembrando que na Matemática um fato só é dado como certo após ser provado, então tais fatos após serem descobertos por indução devem ser provados posteriormente. Esta prova é o que Serra coloca como verificação das descobertas de modo lógico, como citado anteriormente. Polya ao falar sobre a aceitação dos resultados encontrados por indução declara que na "Matemática há uma tal autoridade: a demonstração rigorosa" [32]. Este autor segue afirmando que "a Matemática apresentada com rigor, é uma ciência dedutiva sistemática, mas Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva e experimental". Com isto ele quer dizer que quando um matemático está criando ou desenvolvendo Matemática ele passa por um processo de estudo de casos, de observação de padrões, de conexão de ideias matemáticas e que este é um processo indutivo.

Ao final do que se acredita ser uma nova descoberta é preciso rever os passos e prová-los de modo sistematizado.

Entendo como Raciocínio Indutivo o processo (habilidade) de analisar, reconhecer padrões significativos e a partir dos casos particulares observados, construir processos que permitam estender e generalizar as regularidades para proposições mais gerais.

Assim, o raciocínio indutivo muitas vezes está presente na resolução de uma equação ou na modelagem e resolução de um problema. Em muitos casos conseguimos reconhecer os padrões com muita facilidade, como no estudo das progressões aritméticas e geométricas, porém em outros casos o raciocínio indutivo não se faz explícito, pois enxergamos o produto final e não o processo.

Vale ressaltar que o termo indução não está sendo usado como método de prova. Em Matemática existe um método de prova chamado de *Método da Indução Matemática* [17] ou *Princípio da Indução Finita* [21] que muitas vezes é chamado somente de *Indução*. Este método de prova não deve ser confundido com o raciocínio indutivo, como alerta Polya ao dizer que "a indução Matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo" [32]. Fica claro que Polya falava sobre o Princípio de Indução Finita. O autor ainda diz que "é de lamentar que estes nomes estejam relacionados, pois há muito pouca conexão lógica entre os dois processos". Polya citou teoremas, mas a prova por Indução Matemática pode ser usada para provar algumas igualdades, desigualdades, critérios de divisibilidade, fórmulas, entre outros.

Em seu livro Polya apresenta um exemplo no qual uma lei geral de uma sequência é encontrada pelo raciocínio indutivo e em seguida provada pela Indução Matemática. Neste caso a descoberta da lei geral se deu pelo raciocínio indutivo e "a demonstração aparece como um complemento matemático à indução" [32], e assim Polya atribui a isto a denominação de *Indução Matemática*.

3 O Raciocínio Indutivo e os Fenômenos do Cotidiano

Os PCNs sugerem o trabalho com padrões, mas na prática são encontradas poucas indicações de como o tema pode ser desenvolvido em sala de aula. Por outro lado, em outros países já existem currículos organizados para que o estudo de padrões acompanhe o desenvolvimento do aluno de forma sistemática. Acredito ser necessária a intencionalidade no tratamento do assunto, discutindo-se ajustes no currículo.

Carraher, Carraher e Schliemann [12] ao analisar o uso e aprendizagem da matemática fora da sala de aula citam em seu livro que "a aprendizagem de conceitos matemáticos pode exigir a observação de eventos no mundo" e ainda observam que a matemática é "uma forma particular de organizarmos os objetos e eventos no mundo".

O *Programa e Metas Curriculares de Portugal* [33], à este respeito, comenta que "os instrumentos matemáticos são indispensáveis à concretização de modelos que permitem descrever, interpretar e prever a evolução de um grande número de sistemas reais cujo estudo se pode inserir nas mais diversas áreas do conhecimento". Ainda, afirmam que "alguns conceitos centrais da Matemática foram desenvolvidos com o propósito de serem utilizados na análise de certos fenômenos naturais".

Nos próximos parágrafos apresento alguns casos em que o uso do raciocínio indutivo nos auxilia a compreender fenômenos da natureza e até formular regras que explicam e prevêem situações do cotidiano. Buscarei mostrar como o raciocínio indutivo foi utilizado e trarei algumas notas históricas referentes à compreensão matemática de cada fato.

Não tenho a intenção de esgotar as situações em que o raciocínio indutivo ocorre, mas procuro trazer alguns fatos que podem passar despercebidos e mostrar que os padrões e regularidades são mais presentes do que imaginamos.

Também acredito que a observação de padrões na natureza e no cotidiano foi responsável por grande parte do desenvolvimento da Matemática. Na sala de aula a apresentação destes fatos pode criar situações de aprendizagem para que o raciocínio indutivo seja trabalhado. Dentre elas cita-se:

3.1 Calendário

Provavelmente um dos primeiros padrões observados pelo homem foi o dia-noite. Também devem ter observado que o Sol atravessava o céu ao longo do dia, no sentido leste-oeste. A Lua e as estrelas também pareciam ter um movimento no período noturno. Sempre depois de uma noite tem-se um novo dia, então é possível generalizar que isto sempre vai acontecer. A este ciclo dia-noite é o que foi chamado de *dia*.

A Lua, por sua vez, não descrevia a mesma regularidade do Sol, entretanto foi possível observar as fases que hoje conhecemos por lua nova, lua crescente, lua cheia e lua minguante. Cada variação do que se pode enxergar da Lua leva aproximadamente 7 dias e nos dá a noção de *semana*, enquanto que o período entre duas luas cheias é um pouco mais de 29 dias, o que nos dá o a noção de *mês*.

A história nos conta que foram os egípcios antigos que pensaram o calendário mais ou menos como temos hoje. Para estes povos era importante entender as inundações do rio Nilo, pois estas fertilizavam as margens do rio preparando a terra para o cultivo favorecendo a agricultura. Ao perceber que a inundação ocorria de maneira cíclica, eles buscaram entender o padrão que explicaria as inundações.

Assim, "observaram que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol" [7]. Observaram que entre uma noite e outra as estrelas apareciam na mesma posição porém um pouco mais cedo e isto foi ficando mais evidente ao escolher a estrela Sirius, que é a mais brilhante depois do Sol. Por exemplo: se em uma dada noite ela aparecia no céu as 05:00 horas, ao observá-la na noite seguinte, ela aparecia as 04:56 e no outro às 04:52. Mais uma vez o raciocínio indutivo leva a generalizar que após certo tempo a estrela deve ter sua aparição no mesmo horário inicial, ou seja as 05:00. Como um dia possui 24 horas e cada hora 60 minutos, então o dia possui $24 \times 60 = 1.440$ minutos. Observou-se que a cada dia a estrela aparece com 4 minutos de antecedência em relação ao dia anterior, dividindo 1.440 por 4 temos 360 que seria a marcação do *ano*.

Hoje sabemos que o ano possui um pouco mais de 365 dias e que cada dia possui um pouco menos de 24 horas, mas os resultados obtidos em 2700 aC foram a base para o que temos hoje. O raciocínio indutivo pode ter influenciado o povo egípcio a observar os padrões celestes e com isso prever acontecimentos como a inundação do Nilo, as estações do ano, as fases da Lua dentre outros.

3.2 Eclipses

O homem se acostumou a ver o Sol durante o dia e a Lua durante a noite. A quebra do padrão com certeza causaria um assombro e, provavelmente, é o que sentiram os antigos ao verem o Sol sumindo durante o dia, enquanto presenciavam um eclipse solar, ou a Lua desaparecer durante um eclipse lunar. Boyer [7] conta que, segundo a tradição grega, em 585 aC Tales de Mileto previu um eclipse solar. Tales, provavelmente, entrou em contato com tabelas de eclipses solares, que registravam os eclipses que teriam acontecido até 150 anos antes, conseguindo reconhecer que existia um padrão que estava por trás destes acontecimentos. O documentário [38] indica que "ao longo dos séculos, pacientemente observando os movimentos do Sol e da Lua, astrônomos da antiguidade perceberam que um eclipse acontece quando a Lua passava em frente ao Sol". O documentário ainda relata que "na época cientistas estudaram os padrões do eclipse a ponto de conseguir prevê-los". O raciocínio indutivo pode ter permitido aos astrônomos estender o conhecimento que adquiriram com os casos particulares.

O raciocínio indutivo levou a compreender que em períodos de 6585 dias, cerca de 18 anos, era possível ver um eclipse no mesmo local, porém em horários diferentes.

A história mostra que além dos babilônicos, os caldeus e também os chineses, previam com bastante exatidão a data dos eclipses. Este período é chamado de ciclo de Saros e é o mínimo múltiplo comum (aproximado) entre três períodos: o tempo entre duas luas cheias, o tempo entre duas passagens da Lua pelo nó ascendente e o tempo entre dois apogeus lunares. A aproximação dos valores para o cálculo do mínimo múltiplo comum é necessária pois os períodos não são números inteiros de dias. O tempo entre duas luas cheias, por exemplo, é o período sinódico e dura aproximadamente $29,530589$ dias.

Ptolomeu, que viveu em torno de 150 dC, também fazia observações astronômicas, revelava conhecer a órbita de alguns planetas e parecia dispor um modo de prever eclipses solares e lunares.

Marcus du Sautoy em [1] relata uma história que teria ocorrido quando Cristovão Colombo estava com o navio avariado e sem alimentos na costa do continente americano. Os nativos da região não permitiam que deixassem o barco e assim, eles estavam encurralados. O capitão após consultar um calendário lunar verificou que um eclipse aconteceria depois de alguns dias e disse ao povo que se eles não lhes dessem alimentos então Deus iria engolir a lua. Dias após a "premonição" aconteceu o eclipse lunar e o povo com medo teria ajudado o capitão.

3.3 O cometa Halley

Consultando registros históricos é possível verificar que um cometa foi observado por Petrus Apianus em 1531. Johannes Kepler observou um cometa no ano de 1607 e também fez registros. Edmond Halley [23] viu um cometa em 1682. Assim, Halley notou que $1607 - 1531 = 76$ e que $1682 - 1607 = 75$ anos, observando que as aparições poderiam ser de um mesmo cometa, e então conjecturou que a próxima aparição se daria no ano de 1758. Isto realmente aconteceu e provou que sua teoria de que o cometa, hoje conhecido como cometa Halley, é periódico. O astrônomo Edmond Halley inicialmente imaginou que as aparições se dariam exatamente a cada 76 anos, mas na verdade ocorre em aproximadamente 76 anos, variando entre 75 e 76 anos a cada aparição. De qualquer maneira é mais uma mostra de que a observações de padrões nos corpos celestes, em conjunto com o raciocínio indutivo, auxiliam no entendimento da regularidade do fenômeno.

Em setembro de 1989, por exemplo, recebemos o cometa Brorsen-Metcalf. Na época o astrônomo e matemático Masayoshi Tsuchida disse à uma revista: “será a terceira vez que se tem conhecimento de que ele dá uma volta pelo sistema solar e a primeira prevista com antecipação” [18].

3.4 O número π

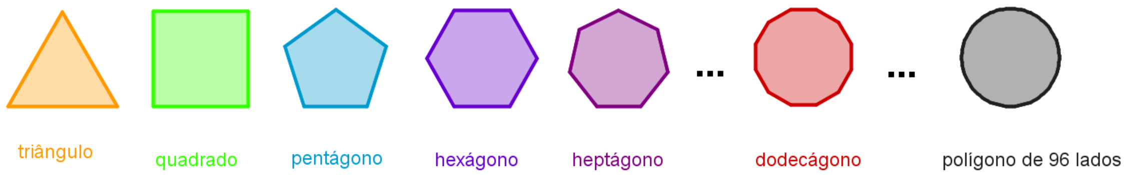
Ao reconhecer as formas geométricas (mesmo sem conhecimento profundo) o homem deve ter notado o formato circular em vários objetos e formas. Observamos a circunferência no formato da lua cheia, em um belo pôr do Sol, nos olhos, na vitória-régia, quando uma gota cai sobre a água, no miolo das flores, nas frutas, entre outros. Assim, o formato circular foi objeto de estudo de povos antigos. Segundo Beckmann [2] depois que o homem aprendeu a contar, desenvolveu o senso de medida e, em seguida, começou a fazer relações entre as medidas encontradas. Antes da invenção da roda o homem descobriu uma relação importante entre as medidas da circunferência. O mesmo autor diz que através de raciocínio, experiência, intuição ou uma combinação destes três foram feitas grandes descobertas. O reconhecimento de certas particularidades permitiram generalizar regras válidas que podem ser testadas. Isto é, através do raciocínio indutivo pode ter havido grande progresso no que se conhecia do mundo.

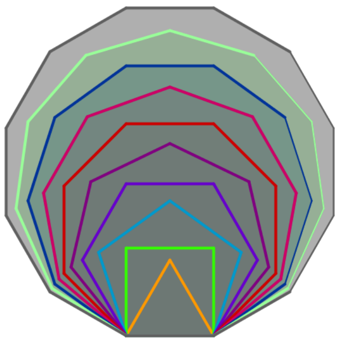
Cortando uma laranja ao meio obtemos uma forma semelhante a uma circunferência. De maneira aproximada, ao passarmos um barbante em torno desta forma poderemos medir seu comprimento e, com uma régua medir seu diâmetro. Imagine que em uma experiência as medidas aproximadas para o perímetro e o diâmetro são respectivamente, 72 mm e 23 mm. A razão entre os valores é $\frac{72}{23} \approx 3,13$.

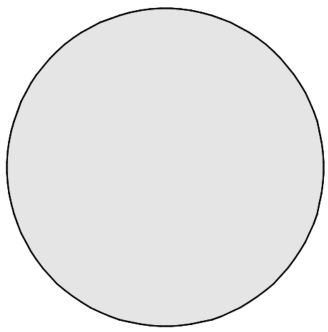
Podemos fazer o mesmo experimento em outras situações. Suponha que em um tronco de uma árvore encontre-se o comprimento de 95 cm e o diâmetro de 30 cm. Nesse caso, a razão entre os valores citados, respectivamente, é $\dfrac{95}{30} \approx 3,16$.

Repetindo o procedimento para outros objetos circulares, maiores ou menores, encontraremos resultados próximos a estes valores. Analisando a razão entre comprimento e diâmetro da circunferência os babilônios e egípcios, 2000 a.C conjecturaram que a razão entre essas medidas é um valor fixo, que achavam ser $3\dfrac{1}{8} \approx 3,125$ [2]. Aqui, observamos presente o raciocínio indutivo que culminou com a conjectura. Esta conjectura levou a uma busca para o valor desta razão, que hoje conhecemos como π.

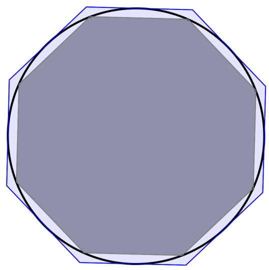
Note que se observarmos uma sequência de polígonos regulares como triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, em que a cada nova figura aumentamos um lado, notamos que o formato da figura vai se tornando cada vez mais próxima a forma de uma circunferência.




Polígonos de 3 a 9 lados


Polígono de 96 lados

Esta observação de um padrão geométrico, por meio do raciocínio indutivo, levou Arquimedes, em 240 a.C, a concluir que o valor de π é um número entre $3\dfrac{10}{71}$ e $3\dfrac{10}{70}$, isto é entre 3,1408 e 3,1428. Este cálculo está correto e apresenta o valor de π com duas casas decimais. Hoje conhecemos o valor de π com mais de um trilhão de casas decimais, mas uma aproximação melhor do que o valor encontrado por Arquimedes só foi descoberta 500 anos depois. Para o resultado obtido, Arquimedes buscou um modo de "capturar" a circunferência como veremos adiante. Ele usou dois polígonos regulares, um deles inscrito e o outro circunscrito a uma circunferência. O primeiro polígono limita inferiormente a circunferência e o segundo limita superiormente. Assim, o perímetro da circunferência é uma medida entre os dois perímetros dos polígonos. A figura abaixo mostra dois polígonos de 8 lados e uma circunferência, Arquimedes porém, usou um polígono de 96 lados [6, 7].



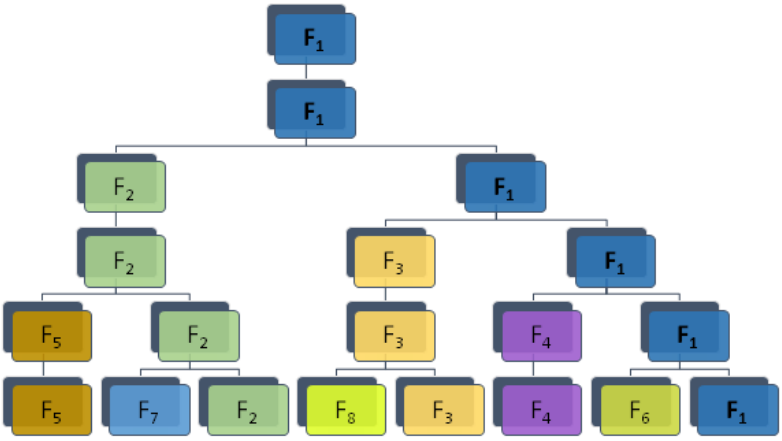
Uma outra contribuição de Arquimedes foi a de perceber que π era irracional. Antes de Arquimedes, tentava-se buscar o valor exato, racional, de π. É interessante saber que na China, Liu Hui, um grande matemático, mais ou menos na mesma época de Arquimedes, usou a mesma abordagem e encontrou 3,14 para o valor de π com um polígono de 96 lados e usando um polígono de 3.072 lados encontrou a aproximação 3,14159 [7].

3.5 A sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, escreveu um livro no qual ele explicava alguns métodos de cálculo e também eram propostos alguns problemas matemáticos. O problema que tornou Fibonacci conhecido trata de uma criação ideal de coelhos, na qual nenhum morre e a cada gestação sempre nasce um casal de coelhos. O problema dos coelhos está enunciado em [7] como "quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"

Começamos com um casal de coelhos que ainda não pode gerar filhos, chamemos este casal de F_1. No segundo mês, isto se repete mas, entre o final do segundo e o terceiro mês este casal gerou um novo casal, F_2. Temos agora dois casais de coelhos. No quarto mês o casal F_1 gera mais um casal de filhos, F_3, porém o casal F_2 ainda não está em período reprodutivo. Temos agora os casais F_1, F_2 e F_3. No mês seguinte temos o casal F_4 que é gerado pelo casal F_1 e o casal F_5 gerado pelo casal F_2, somando com os casais F_1, F_2 e F_3 totalizam 5 casais. A reprodução continua conforme observamos na tabela e na figura a seguir:

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Total de casais	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144



Após analisar os dados da tabela é possível perceber que a partir do terceiro mês, o total de coelhos é o resultado da soma dos dois números anteriores. A percepção deste resultado se dá através do raciocínio indutivo, pois após encontrar o padrão analisando o números de casais, mês a mês, podemos predizer que isto sempre acontece.

Este tipo de sequência em que o termo pode ser encontrado utilizando termos anteriores é chamado de sequência recursiva. Nesse caso, a recursão é $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Como vemos na tabela, a solução do problema proposto por Fibonacci é $F_{12} = 144$. Fibonacci na verdade não ficou famoso pelo problema em si, mas sim pela sequência que é formada pelos resultados do problema.

Note que a razão entre os dois últimos termos é $\dfrac{F_{12}}{F_{11}} = \dfrac{144}{89} \approx 1,6179775$. A sequência proposta por Fibonacci para descobrir o número de casais ao fim de um ano gera valores em que a razão entre dois termos consecutivos se aproxima do *número de ouro* (aproximadamente 1,618 como veremos na continuidade do texto). Para termos maiores da sequência a aproximação do número de ouro se torna ainda mais precisa.

Em sequências recursivas pode ser bem trabalhoso calcular o centésimo termo, por exemplo, pois precisaríamos calcular todos os termos de 1 a 100, mas pensando indutivamente parece ser possível descobrir uma fórmula fechada, isto é, a fórmula que dê o enésimo termo ou termo geral.

A sequência de Fibonacci é uma recorrência linear de segunda ordem. Por linear entendemos que os termos da sequência são de grau 1 e de segunda ordem pois para sabermos o próximo termo usamos os dois termos anteriores. Para ler mais sobre recorrências ver em [14], material do qual retiramos as duas expressões à seguir.

Realmente é possível descobrir o termo geral da *sequência de Fibonacci*, é dado por:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Ou através da fórmula de Binet:

$$F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$

Assim, observamos que existe uma relação entre os números da *sequência de Fibonacci* e o *número de ouro*. Os números de Fibonacci também estão presentes na natureza, como no girassol por exemplo, que costuma ter 34 espirais no sentido anti-horário e 21 no sentido horário ou na margarida que possui 55 ou 89 pétalas. Os abacaxis costumam ter 5 e 8 espirais, ou então 8 e 13 espirais.

O nome *sequência de Fibonacci* para a recursão que vimos anteriormente foi dado pelo teórico dos números Edouard Lucas em 1877. Lucas estava estudando sequências numéricas e resolveu homenagear Fibonacci nomeando tal sequência [5]. Edouard Lucas criou o que é chamada de a "Série de Lucas" ou "Números de Lucas", que segue a mesma recursividade da sequência de Fibonacci, mas os termos iniciais são $l_1 = 2$ e $l_2 = 1$. Assim os números de Lucas são $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, ...$ A razão entre os dois últimos números de Lucas citados é $\frac{199}{123} \cong 1,6178861$

Lucas, após analisar vários casos de sequências recursivas com a mesma lei de formação da sequência de Fibonacci, concluiu que elas convergem para o *número de ouro*. Note que primeiramente é possível reconhecer um padrão nas sequências estudadas, em seguida, através do raciocínio indutivo, podemos generalizar o resultado para todas as expressões deste tipo. Por exemplo, tomemos $T_{n+2} = T_{n+1} + T_n$, com $T_1 = 101$ e $T_2 = 103$ que são os dois primeiros primos maiores que 100. Vejamos alguns termos desta sequência logo abaixo e a razão aproximada entre dois termos consecutivos:

n	Termo	Valor	Razão
1	T_1	101	-
2	T_2	103	$1,019802$
3	T_3	204	$1,980583$
4	T_4	307	$1,504902$
5	T_5	511	$1,664495$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
29	T_{29}	52572751	-
30	T_{30}	85064498	$1,618034$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	T_n	$\cdots$	-
$n+1$	T_{n+1}	$\cdots$	Φ

E mais uma vez o número de ouro se faz presente. A sequência de Fibonacci tem várias outras relações na Matemática, como a relação com o triângulo de Pascal, que não será apresentada aqui mas pode ser interessante ao leitor.

Edouard Lucas inventou o jogo Torre de Hanoi, no qual o número mínimo de movimentos pode ser encontrado através de uma recorrência. Edouard Lucas ao estudar a teoria dos números encontrou um teste para ver se um dado número é primo [19].

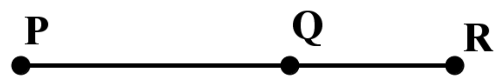
3.6 O Número de Ouro

Como vimos nos parágrafos anteriores, um certo tipo de recorrência nos fornece o *número de ouro*. Achamos importante comentar um pouco mais sobre o tema, já que o *número de ouro* é encontrado em algumas figuras geométricas e na natureza.

Conforme Huntley [22] o *número de ouro é ubíquo*, isto é, está presente em toda a parte, e portanto, "a condição do Φ não é dessemelhante da do π" pois este número "revela-se no mundo da natureza".

O valor de Φ que é aproximadamente $1,618$ ficou conhecido o como *número de ouro* e a nomenclatura é atribuída à Kepler, que segundo [7] escreveu que "a geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa." O número de ouro é representado pela letra grega Φ, conforme [22], em homenagem a Fidias, escultor grego.

Euclides, no livro 6 dos *Elementos*, define que "uma linha reta se diz dividida em média e extrema razão, quando toda a linha está para o segmento maior, como este segmento maior está para o segmento menor." Em outras palavras, um segmento de extremidades P e R com um ponto Q pertencente ao mesmo, $PQ > QR$, se diz dividido em média e extrema razão, quando $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PQ}{QR}$.



Fazendo $x = \dfrac{PR}{PQ}$ e notando que $PQ + QR = PR$ podemos escrever

$$x = \frac{PR}{PQ} = \frac{PQ + QR}{PQ} = \frac{PQ}{PQ} + \frac{QR}{PQ} = 1 + \frac{PQ}{PR} = 1 + \frac{1}{x}$$

Dessa forma, temos

$$x = 1 + \frac{1}{x},$$

que pode ser rescrita como $x^2 - x - 1 = 0$. Essa equação possui a solução $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Como x representa a medida de um segmento só nos interessa a solução positiva, isto é $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989$.

Por outro lado, a expressão $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ encerra ainda uma curiosa propriedade recursiva, já observada por matemáticos do passado. Imagine que escrevemos:

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

com $n = 1, 2, \ldots$. Então, a medida que n aumenta, se x_n se aproximar de algum dado valor, digamos x^* (isto é $x_n \to x^*$) teremos

$$x^* = 1 + \frac{1}{x^*}$$

que será uma solução da equação $x = 1 + \dfrac{1}{x}$. Vamos ver quais valores obtemos para x_n, iniciando como o valor mais simples, $x_1 = 1$:

n	x_n
1	3/2
2	5/3
3	8/5
4	13/8
5	21/13

Curiosamente notamos que as frações obtidas correspondem aos termos das sequência de Fibonacci, tal qual analisamos na parte anterior, e portando os valores da sequência $\{x_n\}$ se aproximarão no número Φ, tal qual a solução da equação quadrática $x^2 - x - 1$ indicou.

O número de ouro também deu origem ao chamado *ângulo de ouro* ou *ângulo áureo*. Tal ângulo é obtido ao dividir a circunferência na razão áurea. Portanto devemos ter um arco maior e um arco menor tais que a circunferência toda está para o arco maior assim como o arco maior está para o arco menor. Estas razões são iguais ao número de ouro. Simplificando podemos escrever:

$$\frac{360^o}{\text{arco maior}} = \frac{\text{arco maior}}{\text{arco menor}} \approx 1,618$$

Dessa forma

$$\text{arco maior} \approx \frac{360^o}{1,618} \approx 222,5^\circ$$

Como arco menor $= 360^{\circ} -$ arco maior, resulta que

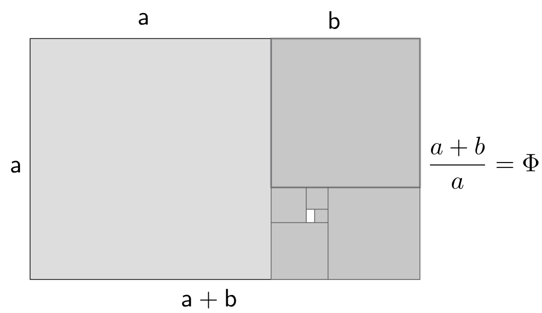
$$\text{arco menor} \approx 137,5^{\circ}$$

Este ângulo, chamado de *ângulo áureo*, está presente na natureza ao investigarmos qual o ângulo que maximiza a recepção de sol pelas folhas de uma planta, de modo que uma folha produza menos sombra sobre a outra.

Segundo Bellos [5], vamos descobrir que "o ângulo que oferece o melhor arranjo é o de 137,5º". A explicação, segundo o mesmo autor, "está relacionado ao conceito de números irracionais", pois se um ângulo é irracional, "por mais que o giremos em torno de um círculo, nunca voltaremos ao ponto de partida". Após analisar estes padrões na natureza vamos encontrar o ângulo áureo ao estudar a disposição das sementes do girassol, nas pinhas, no brócolis ou na couve-flor, na rosa, no caramujo náutilo, no chifre de alguns animais, no ângulo que os falcões usam ao cair sobre uma presa, no formato das galáxias, entre outros.

Bellos explica que pequenas variações no ângulo de disposição das sementes fará com que o número total de sementes na mesma área seja diminuído, portanto "a natureza escolhe o ângulo áureo devido à sua compacidade - as sementes ficam mais juntas e o organismo fica mais forte por causa disso".

É interessante notar que o ângulo áureo é responsável pela criação da espiral logarítmica ou espiral de ouro que também explica outros fenômenos naturais. A espiral logarítmica é uma espiral equiangular e pode ser encontrada no retângulo áureo e também no triângulo áureo. Um retângulo em que a razão entre a base e a altura é o número de ouro é chamado de *retângulo áureo* ou *retângulo de ouro.* O triângulo áureo é um triângulo isósceles na qual a razão entre um dos lados congruentes e a base é o número de ouro.



3.7 A Música

E o que a música tem a ver com a Matemática? Sautoy no documentário *O Código* [1] conversa com uma professora que estuda os efeitos psicológicos do som. Ela diz que se em um som não existem padrões, isto não é um som agradável, ao contrário, é um ruído. A ausência dos padrões indica que as frequências não são múltiplos entre si.

Sabemos que o som é resultado do deslocamento de ar. Quando um objeto vibra ele desloca o ar que está próximo até chegar ao nosso ouvido. Dependendo da frequência com que o ar é deslocado achamos o som agradável ou não.

Segundo [6], Pitágoras foi o responsável pelo primeiro estudo que relaciona a música à Matemática. Ele notou que "quando os comprimentos de várias cordas vibrantes formam razões de números inteiros uns com os outros, elas produzem sons harmoniosos".

Em [5] vemos que Pitágoras descobriu um padrão que está relacionado com a música. Segundo uma certa lenda, Pitágoras "ao passar em frente ao estabelecimento de um ferreiro ouviu os sons de um martelo batendo no metal e percebeu que a altura do som mudava de acordo com o peso das bigornas. Isso fez com que ele estudasse a relação entre a altura de uma corda vibrando e o seu comprimento". Para tal estudo ele criou um instrumento musical de uma corda só, o *monocórdio*, em que era possível facilmente medir as razões criadas ao pressionar a corda em diferentes pontos do seu comprimento.

A altura de uma nota musical não se refere ao volume do som (intensidade) mas sim à frequência da nota. Por exemplo, a nota *Lá* e a nota *Dó* estão em alturas diferentes. O que Pitágoras percebeu é que se temos uma corda que está emitindo a nota *Lá* do diapasão (a uma frequência de 440 Hz) e se dividirmos o tamanho da corda exatamente ao meio, ela continua emitindo uma nota *Lá*, porém uma oitava acima (agora com uma frequência de 880 Hz). Se dobrarmos o comprimento da corda ela ainda é uma nota *Lá*, mas uma oitava abaixo (com frequência de 220 Hz). Vemos ainda neste exemplo que o comprimento da corda é inversamente proporcional à frequência da nota.

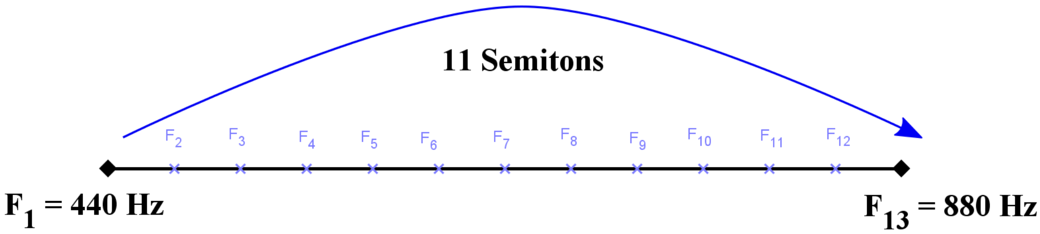
Segundo [13] "o que entendemos por música é o sequenciamento de combinações de sons com essas características". As características são a coerência das frequências harmônicas, pois elas são múltiplas umas das outras.

O mesmo texto informa que "na cultura ocidental, as escalas utilizadas são provenientes da Grécia Clássica, em particular da escola pitagórica, que estabeleceu as primeiras conexões entre Música e Aritmética". Pitágoras desenvolveu uma escala musical baseado em um chamado ciclo das quintas, isto é, a partir de uma nota escolhida contamos 5 notas à partir da inicial, inclusive ela. Usando as notas *Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si* e começando com a nota *Dó* chegaremos na quinta nota que é *Sol.* De *Sol* a quinta nota é *Ré.* As 5 primeiras notas são *Dó, Sol, Ré, Lá, Mi.* As notas *Fá* e *Sí*, bem como as notas *Dó♯, Ré♯, Fá♯, Sol♯, Lá♯* são obtidas continuando o padrão das quintas, fechando o ciclo e totalizando 12 notas. As escalas de Pitágoras ficaram conhecidas como os modos gregos e receberam nomes das regiões da Grécia. São os modos Jônio, Dórico, Frígio, Lídio e Eólio.

O estudo sobre a música desenvolvido por Pitágoras levou a compreender que as razões $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, e $\frac{3}{2}$ por exemplo, geram sons agradáveis. Com o passar do tempo surgiram outras escalas dentre as quais a cromática (temperada), que considera as 12 notas, incluindo os *semitons*, igualmente espaçadas. A escala temperada algumas vezes é atribuída ao músico Johann Sebastian Bach que apresentou o primeiro trabalho musical explorando todas as tonalidades, porém em 1691 o compositor Andreas Werkmeister já havia proposto o temperamento igual.

Na escala temperada surgiu um problema matemático: como incluir entre uma nota e sua oitava 11 *semitons* igualmente espaçados?

Simbolicamente devemos ter:



Como a distância entre os semitons é a mesma e considerando que cada um dos F_n é uma frequência que vamos incluir entre uma nota sua oitava, podemos escrever:

$$\begin{array}{lcccc|c}
F_1 & & & & & 440Hz \\
F_2 & = & F_1 \cdot q & & & \\
F_3 & = & F_2 \cdot q & = & F_1 \cdot q^2 & \\
F_4 & = & F_3 \cdot q & = & F_1 \cdot q^3 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
F_n & = & F_{n-1} \cdot q & = & F_1 \cdot q^{n-1} & \\
F_{12} & = & F_{11} \cdot q & = & F_1 \cdot q^{11} & \\
F_{13} & = & F_{12} \cdot q & = & F_1 \cdot q^{12} & 880Hz
\end{array}$$

Vimos que de uma nota à sua oitava a frequência é multiplicada por 2, portanto:

$$2F_1 = F_{13} \Rightarrow 2F_1 = F_1 \cdot q^{12} \Rightarrow 2 = q^{12} \Rightarrow \sqrt[12]{2} = q \Rightarrow q \approx 1,0595$$

Vemos que, olhando para o problema de um modo indutivo, podemos calcular a razão que separa, igualmente, cada um dos semitons.

Isto quer dizer que a razão entre uma nota e a nota seguinte, por exemplo um *Lá* e *Lá*$\sharp$ é de aproximadamente $1,0595$. A tabela a seguir mostra as frequências utilizadas na produção de instrumentos musicais, em que podemos verificar as razões entre cada semitom.

Nota	Lá	Lá$\sharp$	Si	Dó	Dó$\sharp$	Ré
Frequência	440	466,16378	493,88330	523,25109	554,36523	587.32952
Razão	- - - - - - -	1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631

Ré♯	Mi	Fá	Fá♯	Sol	Sol♯	Lá
622.25390	659.25512	698.45648	739.98883	783.99084	830.60937	880
1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631	1,0594631

Uma outra forma de solucionar o problema é através do uso de progressões geométricas, porém neste último caso, o uso raciocínio indutivo não fica evidente. Observe a seguir a solução sobre esta perspectiva.

Matematicamente temos uma progressão geométrica de razão 2 em que o termo inicial f_1 é a frequência da nota escolhida. Então para incluir os 11 semitons devemos fazer uma interpolação geométrica entre as frequências f_1 de um nota e f_{13} de sua oitava.

Usando a fórmula do termo geral da progressão geométrica $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, e observando que $f_1 = 440$ e $f_{13} = 880$ temos:

$$880 = f_{13} = 440 \cdot q^{12} \Rightarrow 2 = q^{12} \Rightarrow q = \sqrt[12]{2} \cong 1,0595.$$

A escolha do professor sobre qual dos métodos utilizar em sala vai mostrar aos alunos o que deve ser valorizado, o raciocínio indutivo ou a aplicação de fórmulas. A 1ª solução pode cativar os alunos despertando neles um maior interesse sobre o tema.

Leibniz teria escrito que "A música é um exercício aritmético secreto, e a pessoa que se delicia com ela não percebe que está manipulando números".

3.8 O formato hexagonal dos favos de mel

Outro padrão matemático que encontramos na natureza é o formato dos favos de mel. Segundo Sautoy [1] abelhas de todos os lugares do mundo sabem construir os favos de mel em formato hexagonal. Ainda, segundo o documentário, a "natureza é preguiçosa", tentando encontrar sempre uma forma eficaz, com pequeno gasto de energia ou material mas com o melhor aproveitamento. A natureza "leva em conta" a relação custo/benefício.

A presença desta forma geométrica na natureza chamou a atenção da Pappus de Alexandria, antigo matemático grego que viveu aproximadamente em 300 a.C, [20] Pappus considerou que o formato dos alvéolos deveria ser de tal modo que fossem contíguos, pois se houvesse espaço entre um alvéolo e outro a pureza do mel poderia ser contaminada, e tivessem o maior ângulo para que assim contivesse uma maior quantidade de mel.

Pesquisas recentes [28] afirmam que as abelhas não constroem o hexágono, mas sim círculos, e que a elevada temperatura durante o processo é que deforma os círculos e formam os hexágonos. Acreditamos que esta descoberta não diminui o interesse no formato dos favos de mel, pois de qualquer maneira, continuaremos a nos perguntar sobre o porque do formato hexagonal e não de outro formato.

A Matemática pode explicar isto. Inicialmente é preciso refletir que o formato hexagonal é apenas a parte visível dos favos de mel. Na verdade os favos são produzidos para armazenar o mel e os ovos no momento da reprodução. Na construção, evitando gasto desnecessário de material, cada parede deve servir para dois alvéolos. Se a construção fosse cilíndrica o aproveitamento do espaço disponível não seria máximo e a construção não seria eficaz.

Aceitamos então que a construção deve ser um prisma. Mas porque a base deste prisma deve ser hexagonal?

Estamos na realidade obtendo uma pavimentação do plano. Escolhendo um vértice comum à dois ou mais polígonos no plano (nó), a soma dos ângulos em torno deste vértice é igual à 360°.

Vamos acompanhar em uma tabela quais polígonos regulares possuem ângulos internos cujo valor é um divisor de 360°.

Polígono	Número de lados (n)	Soma dos ângulos (S_i)	Cada ângulo (a_i)	É divisor de 360°
Triângulo	3	180°	60°	Sim
Quadrado	4	360°	90°	Sim
Pentágono	5	540°	108°	Não
Hexágono	6	720°	120°	Sim
Heptágono	7	900°	$\cong 128,57°$	Não
Octógono	8	1080°	135°	Não
Eneágono	9	1260°	140°	Não
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Polígono de n lados	n	$S_i = (n-2) \cdot 180°$	$a_i = \dfrac{S_i}{n}$	?

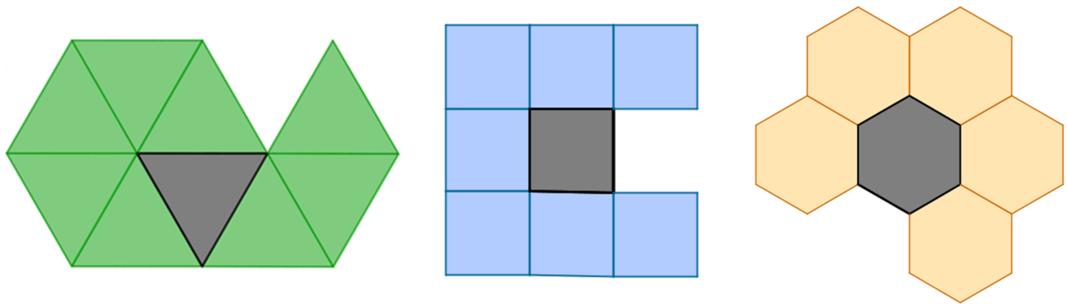
Dos valores testados verificamos que apenas 3 casos pavimentam o plano. Serão estes os únicos? Para concluirmos quais polígonos regulares podem pavimentar o plano, vamos precisar trabalhar com a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono, que foi apresentada na tabela. A dedução desta fórmula normalmente é abordada nos livros didáticos partindo da análise de casos particulares, triângulo, quadrado, pentágono, e generalizando para um polígono de n lados. A passagem do particular para o geral se dá quando percebe-se que um polígono de n lados pode ser particionado em $n-2$ triângulos justapostos. Como é conhecido que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, então a soma dos ângulos de um polígono de n lados é $S_i = (n-2) \cdot 180°$ com n natural e $n \geq 3$. Assim observa-se que o raciocínio indutivo proporcionou a obtenção da fórmula.

Cada ângulo interno de um polígono regular é dado pela fórmula $a_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$. Nesta expressão o valor de n é o número de lados do polígono e portanto é um número inteiro. Vamos verificar quais são os valores possíveis para n.

Chamando de p o número de polígonos justapostos que somam 360° temos:

$$p = \frac{360^o}{\frac{(n-2)\cdot 180^o}{n}} = \frac{2}{\frac{n-2}{n}} = \frac{2n}{n-2} = \frac{(2n-4)+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Para que p seja inteiro é preciso que 4 seja divisível por $n-2$. Como os divisores de 4 são 1, 2 e 4 então $n = 3, 4$ ou 6. Na construção da tabela, indutivamente era indicado esse fato, sendo os únicos polígonos regulares que pavimentam o plano o triângulo, o quadrado e o hexágono. Dessa maneira foi possível verificar nossa hipótese.



n = 3 – triângulo equilátero   n = 4 – quadrado   n = 6 – hexágono regular

Vejamos então qual destes polígonos possui a maior área. Pelo *Princípio de Arquimedes* se dois prismas possuem a mesma altura então o volume vai depender da área da base.

De modo semelhante ao que foi feito em [37] veremos a seguir que o hexágono é o que permite melhor aproveitamento de espaço.

Considere um triângulo, um quadrado e um hexágono, regulares, com lados iguais a a, b e c, respectivamente. Suponha ainda que os três polígonos citados possuem o mesmo perímetro, então podemos escrever que:

$$3a = 4b = 6c$$

Vamos analisar a particularidade de cada uma das áreas e concluir qual das expressões fornece a maior área.

De $3a = 4b$ temos que $b = \frac{3a}{4}$ e de $3a = 6b$ temos que $c = \frac{a}{2}$. Assim, temos os lados dos polígonos em função de a, para que seja possível comparar as áreas.

Sabemos que $A_{triângulo} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, $A_{quadrado} = l^2$ e que $A_{hexágono} = \frac{6l^2\sqrt{3}}{4}$. Substituindo os lados em função de a resulta que:

$$A_{triângulo} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad A_{quadrado} = \frac{9a^2}{16}, \quad A_{hexágono} = \frac{6a^2\sqrt{3}}{16}.$$

Então, usando a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$, temos

$$A_{triângulo} = 0,43a^2, \quad A_{quadrado} = 0,56a^2, \quad A_{hexágono} = 0,64a^2.$$

Ou seja, considerando o mesmo perímetro o polígono que cobre a maior área é o hexágono. Esta conclusão se deu através da observação do formato hexagonal presente na natureza e da análise de quais polígonos atenderiam as condições do problema em um cenário matemático. O raciocínio indutivo, presente na construção da tabela e na fórmula da soma dos ângulos internos do polígono, nos permite a conclusão de que realmente a melhor escolha para o armazenamento deve tomar o formato hexagonal.

Em [37] é possível verificar sobre o fechamento (inferior) dos alvéolos, problema que também foi proposto através da observação do padrão geométrico dos favos de mel.

3.9 E se aparentemente não encontramos um padrão?

Vimos nos exemplos anteriores que o raciocínio indutivo permite uma significativa compreensão de certos fenômenos. Tais exemplos também têm a intenção de levar à reflexão a respeito de situações em que padrões se façam presentes. Mas o que fazer quando escolhemos um objeto no qual o padrão não pode ser reconhecido? Isto seria um contra-exemplo da conjectura de que em tudo existem padrões ou seria um caso em que não somos capazes (ainda) de reconhecer o padrão?

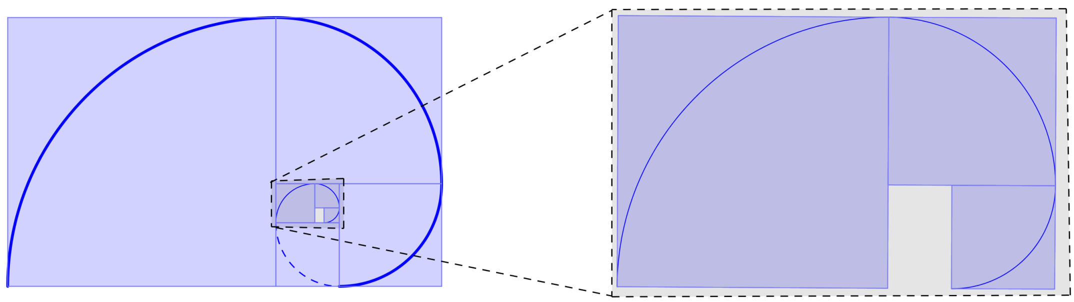
Tomemos como objeto de estudo uma árvore. Existe um padrão na disposição dos seus galhos? Que padrão seria este?

O fato é que diversos padrões que encontramos na natureza são irregulares e o conhecimento geométrico dos matemáticos do passado não explica tais fenômenos. Isto não quer dizer que a geometria euclidiana esteja errada, apenas quer dizer que ainda existe Matemática a ser desenvolvida. As abelhas já construíam hexágonos antes de Pappus ou até mesmo antes de Euclides. A música já existia antes de Pitágoras. A divina proporção e a sequência de Fibonacci sempre estiveram presentes na natureza. Conclui-se que a Matemática está presente, mas é preciso que os matemáticos a descrevam. Será que Pitágoras sempre esteve certo ao afirmar que "Tudo é número"? Mas o que explica o formato irregular das árvores?

As árvores precisam receber luz do sol e para aumentar a recepção de luz a estratégia utilizada é a de crescer e dividir. Assim, o tronco principal cresce e gera galhos. Cada galho por sua vez cresce e cria galhos menores e este processo continua. Esta necessidade de maximizar a recepção dos raios solares cria um padrão de repetição que é a característica do que hoje conhecemos como *fractal* (ou geometria fractal). Esse padrão de ramificação fractal pode ser encontrado na natureza [1]. Talvez ao olharmos a árvore notemos que o padrão de repetição está presente, mas tal padrão não é totalmente perfeito. Isto se dá devido à variáveis como vento, o solo, entre outros.

O termo fractal foi criado pelo matemático Benoit Mandelbrot em meados de 1970 e teve origem do latim *fractus*, palavra da qual também deu origem o termo fração e fragmento. Segundo Mandelbrot, o termo fractal também traz o sentido de irregular. Os fractais são objetos geométricos que possuem a seguinte característica: se olhamos para o objeto todo ou se olhamos para uma parte dele não vemos nenhuma diferença. Isto quer dizer que se olhamos de longe ou se olhamos com uma lupa vamos enxergar o mesmo tipo de padrões. Nos fractais os padrões se repetem independente do tamanho da figura.

Quando observa-se que o pentágono regular contém um pentagrama que por sua vez contém um novo pentágono regular, vemos esta característica dos fractais. Podemos construir, com uso do computador (no programa Geogebra, por exemplo) estes pentágonos e pentagramas "infinitos" e ao observarmos esta construção, ao ampliarmos em 100 vezes teremos, de forma similar à antes da ampliação, pentágonos que contém pentagramas. Alex Bellos [5] diz que a espiral logarítmica também possui esta característica. Ele observa que ela "é similar a si mesma", devido à ser equiangular, se olharmos um pedaço pequeno de espiral, este pedaço tem forma igual ao de um pedaço grande. Isso é o que foi definido como autossimilaridade, isto é, o todo do fractal se parece com uma parte dele.



Mandelbrot em seu livro *"A Geometria Fractal da Natureza"* [25] inicia dizendo que a geometria não consegue descrever algumas formas encontradas na natureza, como "a forma de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore". Ele continua explicando que "nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas costeiras não são círculos, a casca de uma árvore não é lisa, tampouco um raio viaja em linha reta". Mesmo assim, dentro da irregularidade existe uma certa ordenação, um certo padrão se faz notável. Mandelbrot ainda afirma que os padrões da natureza são irregulares e fragmentados.

De fato a Geometria Fractal é um ramo da matemática que tenta descrever algumas formas encontradas na natureza, como o formato de um brócolis, as árvores, as folhas de uma samambaia, os flocos de neve, os rios e seus afluentes, a rugosidade dos planetas, as veias em nosso organismo, entre outros.

No livro de Mandelbrot é discutido o problema de se medir a costa da Grã-Bretanha, visto que em algumas enciclopédias as medidas dessa extensão são bem diferentes. Ele explica que depende de qual régua será usada para a medição, já que se utilizarmos uma régua que meça em metros, por exemplo, deixaremos de medir as pequenas entradas de água no continente e à medida que diminuímos o tamanho da régua, medindo em centímetros, conseguimos medir com mais precisão. Mas qual é a menor unidade de medida que poderemos usar? Matematicamente sabemos que sempre é possível diminuir a unidade de medida sem chegarmos à zero. Assim, mesmo que a área do continente seja finita, o perímetro dele pode ser infinito. Em várias construções fractais vamos nos deparar com esta questão entre perímetro infinito e área finita, ou entre área infinita e volume tendendo a zero como no caso da esponja Menger-Sierpinski .

Na geometria euclidiana estudamos a dimensão dos objetos como números inteiros, um ponto possui dimensão 0, uma reta possui dimensão 1 (comprimento), um retângulo dimensão 2 (comprimento e altura) e um dodecaedro possui dimensão 3 (comprimento, altura e profundidade). Mandelbrot [25] alerta que a definição euclidiana de dimensão não serve para os fractais. Segundo Mandelbrot Cantor, Dedekind e Peano foram os primeiros a analisar rigorosamente a dimensão de objetos irregulares ou fragmentados. A dimensão fractal não precisa ser um número inteiro. Para conciliar a nova definição de dimensão foram cunhados os termos dimensão topológica (dimensão euclidiana) e dimensão fractal (dimensão de Hausdorff). Se o objeto estudado for um quadrado, por exemplo, ambas as dimensões coincidem mas se o objeto for um fractal então a dimensão fractal é maior que a dimensão topológica. Esta afirmação inclusive é usada por Mandelbrot ao afirmar que um *objeto fractal* "é, por definição, um conjunto no qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica". Para mais informações sobre este assunto veja [25].

A dimensão de um fractal é dada pela fórmula

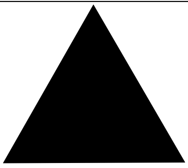
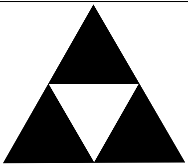
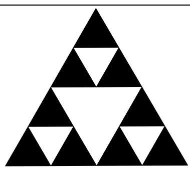
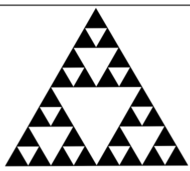
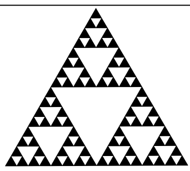
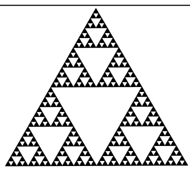
$$d = \frac{\log N}{\log 1/r}$$

onde N é o número de cópias do objeto original e r é a razão entre o comprimento do novo lado e o lado original, ou a razão da escala entre a figura nova e a original.

Antes de Mandelbrot alguns matemáticos já tinham se deparado com as ideias de fractais, entre eles Cantor (a poeira de Cantor), Sierpinski (O triângulo de Sierpinski), Koch (A curva de Koch) e Albert Bosnam (A árvore de Pitágoras). Nestes fractais está presente a ideia de recursividade, ou seja, tomando um objeto original decidimos alguns passos a serem tomados e criamos um novo objeto por meio de um processo indutivo. Ao aplicarmos nosso procedimento uma única vez, dizemos que fizemos uma iteração. A segunda iteração é aplicar o mesmo procedimento, os mesmos passos, ao que acabamos de obter. A enésima iteração consiste em aplicar n vezes a iteração sempre ao objeto que é resultado da iteração anterior.

A seguir temos um breve estudo sobre o triângulo de Sierpinski que é o símbolo do programa de mestrado PROFMAT. Note que no símbolo do PROFMAT ocorreram apenas 2 iterações. Assim, vamos explicar a recursividade e em seguida calcular o perímetro, a área e a dimensão do triângulo de Sierpinski.

Para a construção do triângulo de Sierpinski tomemos um triângulo equilátero e em seguida os pontos médios de cada lado. Ao unirmos os pontos médios teremos 4 novos triângulos equiláteros congruentes entre si. Descarta-se o triângulo central. Na segunda iteração tomamos os três triângulos restantes e aplicamos o processo de tomar os pontos médios, uni-los criando 4 novos triângulos e descartamos o triângulo central. Observemos a tabela a seguir:

Etapa	**Fractal**	**Número de triângulos**		**Comprimento do lado do triângulo**		**Perímetro**	**Área**
0		1	3^0	l	$\frac{l}{2^0}$	$\frac{3^1 l}{2^0}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^1}$
1		3	3^1	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2^1}$	$\frac{3^2 l}{2^1}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^2}$
2		9	3^2	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{2^2}$	$\frac{3^3 l}{2^2}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^3}$
3		27	3^3	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{2^3}$	$\frac{3^4 l}{2^3}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^4}$
4		81	3^4	$\frac{l}{16}$	$\frac{l}{2^4}$	$\frac{3^5 l}{2^4}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^5}$
5		243	3^5	$\frac{l}{32}$	$\frac{l}{2^5}$	$\frac{3^6 l}{2^5}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\ldots$	3^n		$\frac{l}{2^n}$		$\frac{3^{n+1} l}{2^n}$	$\frac{l^2\sqrt{3}}{4^{n+1}}$

É curioso observar que, a medida que n aumenta, o perímetro da forma geométrica aumenta, enquanto sua área diminui.

Para o cálculo da dimensão do Triângulo de Sierpinski vamos usar a fórmula citada anteriormente. N é o número de cópias do objeto original. Na etapa 1 temos 3 triângulos equiláteros semelhantes ao triângulo da etapa 0, portanto $N = 3$. O lado de cada novo triângulo é igual à metade do lado original, assim $r = \frac{1}{2}$. Portanto temos

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,584964.$$

A tabela aqui representada traz os resultados prontos, mas o cálculo das expressões que indicam os termos gerais dos números de triângulos, bem como do perímetro e da área são obtidos por meio de um raciocínio indutivo. Ao construir cada coluna da tabela o aluno deverá reconhecer o padrão, e ao generalizá-lo temos a forma do enésimo termo. Em um segundo momento, o professor pode mostrar aos alunos que é possível obter o termo geral através de uma progressão geométrica.

O uso dos fractais hoje permite criar os mundos virtuais presentes em jogos e animações. Pense em um cenário virtual onde estejam presentes montanhas, florestas e nuvens. Faz sentido desenhar cada curva da montanha, cada galho da árvore ou cada pedaço da nuvem? E se este cenário for parte de um filme de 2 horas, como desenhar o filme todo? Através dos fractais e da computação gráfica é possível construir os cenários que vemos nos filmes e nos jogos atuais. Além desta aplicação os fractais possuem aplicação em outras áreas como na medicina, na biologia, na botânica, na economia, nas artes, entre outros [25] .

3.10 Considerações Acerca do Raciocínio Indutivo nos Fenômenos do Cotidiano

Para finalizar esta seção é interessante notar como diferentes pessoas e povos chegam a conclusões semelhantes, sobre um mesmo fenômeno. É fato que o homem utiliza o raciocínio indutivo para, de certo modo, prever o futuro através da observação de fatos ocorridos no passado. A análise de casos particulares permite a generalização dos fenômenos e com isso o homem passa a ter controle sobre tais acontecimentos, como exemplificamos ao prever a cheia do rio Nilo ou a aparição de um cometa.

Ao olharmos para o que conhecemos do mundo notamos que o homem sempre manteve esse olhar investigativo, esta busca de regularidades, o desejo e a necessidade de prever o que está por vir, seja por meio de observações, de tentativa e erro, de tornar geral algo particular. Em diversos contextos o raciocínio indutivo é a ferramenta que permite toda esta compreensão do universo que nos cerca. É preciso aceitar que novas teorias surgem porque o processo do raciocínio indutivo se faz presente em grande parte delas. O aluno, o professor, o pesquisador, devem estar preparados para fazer uso do raciocínio indutivo na compreensão de problemas práticos e/ou matemáticos.

É neste sentido que procurei, nesta seção, mostrar alguns exemplos que relacionam a Matemática aos fenômenos da natureza, além de evidenciar a presença do raciocínio indutivo na compreensão e na formulação matemática dos eventos, na esperança de despertar o olhar sobre a presença do raciocínio indutivo.

4 Conclusão

Neste artigo procurei apresentar o que entende por raciocínio indutivo e como este pode ser uma ferramenta para o ensino, visto que não encontra-se nas diretrizes brasileiras uma proposta ou orientação para o trabalho com padrões e regularidades enfatizando o raciocínio indutivo.

Ainda foi exposto que o raciocínio indutivo pode dar significado à álgebra na sala de aula, já que a álgebra generaliza resultados particulares e permite manipular estas generalizações mantendo a veracidade dos resultados.

Foram apresentados alguns exemplos aos professores para trabalhar alguns conteúdos já presentes no currículo brasileiro, mas com uma outra abordagem, explicitando o "pensar indutivamente" nos processos. Estes exemplos são uma modesta parte do todo em que o raciocínio indutivo se faz presente na matemática, apresentando aos professores um novo olhar para os conteúdos escolares.

Na composição do calendário a presença do raciocínio indutivo se deu através da observação dos corpos celestes, da generalização dos eventos e da formulação matemática destes. Também ao compreender que entre uma noite e outra a mesma estrela aparece 4 minutos antes e calcular em quantos dias ela leva para aparecer no mesmo horário de observação. Ao trabalhar sobre o calendário o professor pode ainda construir um relógio solar, gnomon, e explicar que este relógio ajudou a entender as 4 estações do ano. No 9º ano é possível relacionar a vareta do relógio solar com o Teorema de Tales.

De maneira semelhante foi apresentado um estudo da regularidade dos eclipses e cometas. De certo modo, são acontecimentos que rompem o padrão, já que não são tão frequentes, chamando a atenção de pessoas que resolveram estudar estes acontecimentos. Através destes estudos, o homem foi capaz de descrever com exatidão os eventos futuros ancorado numa análise do padrão de eventos passados com base no raciocínio indutivo. Em sala de aula os exemplos a respeito da regularidade de eclipses e aparições de cometas podem ser relacionados com o Mínimo Múltiplo Comum no Ensino Básico e depois no Ensino Médio sob o olhar das progressões aritméticas ou de funções. O professor, ainda tem a alternativa de explorar os exemplos escrevendo os dados em uma tabela com as datas das aparições. O aluno buscará identificar o padrão e generalizar para obter dados que não foram informados explicitamente.

Quando estudamos o número π temos oportunidade de falar sobre os polígonos regulares, quantidade de lados e nome dos polígonos, perímetro, área e noção de limite. É possível desenvolver um trabalho com os alunos no qual eles verifiquem o perímetro e o diâmetro de certas circunferências e calculem qual é a razão entre entres valores, para que indutivamente encontrem o valor de π. Neste exemplo, o raciocínio indutivo primeiramente permite conjecturar que a razão entre comprimento e diâmetro é um valor fixo. Em seguida, novamente através do raciocínio indutivo, na observação de um padrão geométrico nos polígonos regulares, nota-se que ao aumentarmos o número de lados o formato do polígono vai se assemelhando ao formato de uma circunferência, e com isso dois polígonos regulares foram usados para "limitar" uma circunferência, permitindo o cálculo aproximado para o valor de π.

No exemplo sobre a sequência de Fibonacci é citada a possibilidade de usar recorrências, mas a construção à partir da tabela pode ser feita mesmo com alunos do 6º ano. Esta é a opção mais simples e permite observar a presença do raciocínio indutivo. Na sequência seguinte, analisando os números de Lucas, o raciocínio indutivo permite relacionar as razões entre os termos consecutivos e o número de ouro.

O número de Ouro pode ser o ponto de partida para trabalhar sobre razões e proporções e pode ser revisitado ao trabalhar equações quadráticas. Permite o estudo de alguns conteúdos geométricos e pode ser a introdução para falar sobre a autossimilaridade dos fractais. Pode ser trabalhado em parceria com a disciplina de Arte na elaboração de ilustrações em que a razão áurea esteja presente.

O raciocínio indutivo também foi fator determinante para a criação da escala musical que usamos atualmente. O indutivo ganha evidência no modo utilizado para descobrir a razão entre as frequências, no momento em que precisamos interpolar os semitons entre duas oitavas. A música pode apoiar o estudo de frações, e por outro lado pode contextualizar o estudo das progressões geométricas. É um conteúdo que também pode ser trabalhado em parceria com Arte ou Física, ao estudar sobre altura e volume ou sobre a frequência das ondas, respectivamente.

O formato dos favos de mel novamente nos traz aplicações de geometria, do cálculo de área e volume, do Princípio de Arquimedes e de expressões algébricas. Também traz o raciocínio indutivo no interior do problema, e fica evidente na tabela que traz os ângulos dos polígonos regulares e que nos auxiliou a supor quais polígonos regulares encaixam-se perfeitamente de modo a pavimentar o plano.

O exemplo sobre os fractais traz o indutivo no processo iterativo da criação de cada fractal. Foi escolhido revelar o indutivo no estudo que fizemos sobre o triângulo de Sierpinski. Este exemplo possibilita o trabalho de vários conteúdos matemáticos como progressões geométricas, logaritmos, área, perímetro, volume (no caso de fractais espaciais), análise combinatória, sequências recursivas, a ideia de infinito, noções de limite, potências, entre outros. Um trabalho que mostra como os fractais podem ser usados em sala de aula pode ser encontrado em [34]. Os fractais também permitem o trabalho interdisciplinar, como com a disciplina de Arte, ao trabalhar Escher, como podemos ver em [30]. Escher também trabalhou com a pavimentação do plano, em que os modelos utilizados eram os 3 polígonos regulares que pavimentam o plano, como vimos anteriormente: triângulo, quadrado e hexágono.

Por fim, o raciocínio indutivo perpassa diversos conteúdos e construções matemáticas, permitindo ao professor organizar situações investigativas que insiram o estudante em um processo de construção e descoberta matemática.

Referências

[1] BBC. *Documentário: O CÓDIGO*. Direção de Marcus Du Sautoy. Oxford: BBC Two, 2011.

[2] BECKMANN, P. *A History of* π. New York: The Golem Press, 1971.

[3] BECHARA, E. (Org.). *Dicionário Escolar da Academia Brasileira de Letras*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2011.

[4] BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. *Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching*. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 3-11.

[5] BELLOS, A. *Alex no país dos números - Uma viagem ao mundo maravilhoso da Matemática*. São Paulo: Companhia das letras, 2011.

[6] BENTLEY, P. *O livro dos números: Uma hitória ilustrada da Matemática*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 2009.

[7] BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo: Blücher, 2002.

[8] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

[9] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC, 2000.

[11] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (PCN+ Ensino Médio). *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática*

e suas tecnologias. Brasilia: MEC/Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC, 2002.

[12] CARRAHER, D. W.; CARRAHER, T. N.; SCHLIEMAN, A. D. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

[13] CARVALHO, P. C. P. *Métodos Matemáticos e Computacionais em Música*. São Paulo: SBMAC, 2009 - (Notas em Matemática Aplicada; v. 38)

[14] CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. O. *Matemática Discreta - Coleção PROFMAT*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] CSSU *Math Frameworks 2004*. Disponível em: http://staff.najah.edu/sites/default/files/NCTM%20standards.pdf (acesso em 19/01/2015)

[16] DEVLIN, K. *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002.

[17] FOMIN, D. *Círculos Matemáticos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[18] FRANÇA, M. S. J. *O fascínio dos cometas* - Revista Super Interessante, . Edição 24, set 1989.

[19] GRAHAM, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Matemática Concreta - Fundamentos para a Ciência da Computação*.2ª Ed. Rio de Janeiro: LTC, 1995.

[20] HEATH, T. *A history of Greek mathematics* - v. 2. 1. ed. Oxford: The Clarendon Press, 1921. Disponível em: <http://archive.org/stream/ahistorygreekma00heatgoog>. Acesso em: 25 de novembro de 2014.

[21] HEFEZ, A. *Indução Matemática*. Rio de Janeiro: Impa, 2009.

[22] HUNTLEY, H.E. *A divina proporção*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

[23] KEPLER, S. O.; SARAIVA, M.F.O. *Astronomia e astrofísica*. 3ª Ed. São Paulo: Editora Livaria da Física, 2013.

[24] LEE, L. *An initiation into algebraic culture through generalization activittes*. In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

[25] MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: Freeman, 1983.

[26] MASON, J. *Expressing Generality and Roots of Algebra.* In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C.; LEE, L. Approaches to Algebra: Perspectivs for Research and Teaching. Netherland: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

[27] MENDES, M. F.; DELGADO, C. C. *Geometria: textos de apoio para educadores de infância.* Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2008.

[28] POPPICK, L. *Honeycombs' Surprising Secret Revealed.* http://www.livescience.com/38242-why-honeybee-honeycombs-are-perfect.html. Acessado em janeiro, 29, 2015.

[29] National Council of Teachers of Mathematics. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

[30] PEITGEN, H. SAUPE, D. et al. *The Science of Fractal Images.* New York: Springer, 1988.

[31] PHILLIPS, E. et. al. *Patterns and functions from Addenda Series, Grades 5-8: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1991.

[32] POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo enfoque do método matemático.* Rio de Janeiro: Interciência, 1994

[33] PORTUGAL. Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares - Matemática A.* Lisboa: Ministério da Educação e Ciência, 2013.

[34] REIS, J. N. C. *Fractais no Ensino Médio: Da observação de padrões da natureza ao uso do geogebra.* Mossoró. Dissertação (Mestrado) - UFERSA, 2014.

[35] STEEN, L. A. *The Science of Patterns.* Science 240 (1988), no. 4852, 611-616.

[36] SERRA, M. *Discovering Geometry: An Inductive Approach.* California: Key Curriculum Press, 1997.

[37] TAHAN, M. *As maravilhas da matemática.* Rio de Janeiro: Editora Bloch, 1987.

[38] The History CHANNEL. Documentário: *O Universo: Eclipse Total.* EUA. The History Channel, 2011.

[39] VALE, I.; PALHARES, P.; CABRITA, I.; BORRALHO, A. *Os padrões no ensino e aprendizagem da álgebra.* In: VALE, I.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. (Ed.) Número e Álgebra. Lisboa: SEM-SPCE, 2007, p.193-211.

Orientador do Trabalho

Prof. Alexandre Luis Trovon de Carvalho
Departamento de Matemática - UFPR
Caixa Postal 019081 - Curitiba, PR
e-mail: trovon@ufpr.br