Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Com Coeficientes Constantes e Derivação da Equação Característica

Ricardo da Silva Santos

Goiânia

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: [X] Dissertação [ ] Tese

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Ricardo da Silva Santos				
E-mail:	ricardodasilva_santos@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	Professor				
Agência de fomento:	Faculdade Noroeste			Sigla:	FAN
País: Brasil	UF:	GO	CNPJ:		
Título: Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Com Coeficientes Constantes e Derivação da Equação Característica					
Palavras-chave:	EDOs, Lineares, Coeficientes Constantes, Equação Característica				
Título em outra língua:	Linear Ordinary Differential Equations with Coefficients and Constant Equation Derivation Feature				
Palavras-chave em outra língua:	ODE, Linear, Constant Coefficients , Equation Feature				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	27/03/2015				
Programa de Pós-Graduação:					
Orientador (a):	Dr. Ole Peter Smith				
E-mail:	ole.ufg@gmail.com				
Co-orientador (a):*					
E-mail:					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Ricardo da Silva Santos
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 15 / 04 / 2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ricardo da Silva Santos

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Com Coeficientes Constantes e Derivação da Equação Característica

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr Ole Peter Smith

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

da Silva Santos, Ricardo
Equações Diferenciais Ordinárias Lineares Com Coeficientes Constantes e Derivação da Equação Característica [manuscrito] / Ricardo da Silva Santos. - 2015.
XLVII, 47 f.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística (IME) , Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2015.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. EDOs. 2. Lineares. 3. Coeficientes Constantes. 4. Equação Característica. I. Peter Smith, Ole, orient. II. Título.

Ricardo da Silva Santos

Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes e Derivação da Equação Característica

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de março de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello
ICET/UFMT

Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Ricardo da Silva Santos graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás em 2011, durante a graduação foi monitor das disciplinas de Calculo Diferencial de Geometria Analitica, já atuou como professor substituto do Estado de Goiás e atualmete é professor substituto do Instituto Federal de Goiás-Campus Goiânia, atuando no Ensino Médio e Superior, e professor na Faculdade Noroeste ministrando Matemática Financeira e Matemática Básica.

"Sonhos, desejamos alcançar
ser alguém com poder maior do que você já tem"
Ishikawa Keiju (Dragon Ball Z)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus.

Agradeço a minha família pelo suporte e apoio em todos os momentos de dificuldades durante o curso.

Agradeço ao meu Orientador Ole Peter Smith, pelas ideias, orientações e todas as demais contribuições no meu trabalho.

Agradeço à todos meus amigos do PROFMAT, em especial a Pâmella, PH , Phzinho e Robinho pela convivência e momentos de descontração durante o curso.

Agradeço ainda aos amigos do Mestrado Acadêmico e Doutorado Acadêmico em especial ao Pedro, Marcos Tulio Bala, Dassael, Thiago Preto pela amizade, zoação e companheirismo.

Agradeço também a CAPES pelo suporte financeiro que foi de fundamental importância para a conclusão do curso.

E a todos que foi de alguma forma importante nesse trabalho e nesse curso que agora me foge da memória.

Resumo

Este trabalho foi dividido em 3 capítulos. No primeiro temos algumas definições básicas para o estudo de Equações Diferenciais, e resultados básicos como a fórmula de Euler e Wronskiano.

No segundo capítulo, falamos sobre Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem, além de comentarmos sobre o que vem a ser Problema do Valor Inicial (PVI), e o Teorema da Existência e Unicidade para EDO's.

No terceiro e principal capítulo, trabalhamos com métodos de resolução de uma Equação Diferencial Ordinária Com Coeficientes Constantes. Em especial, apresentamos um método não tão usual na literatura Matemática pra resolver EDOs Lineares, que é através da Derivação da Equação Característica.

Palavras-chave

Equações Diferenciais Ordinárias, Equação Característica, Coeficientes Constantes.

Abstract

This work was divided into three chapters , the first we have some basic definitions for the study of differential equations, and basic results as Euler's formula and Wronskian .

In the second chapter, we talked about Differential Equations of First Order Linear, and commenting on PVI, and the Theorem of Existence and Uniqueness for ODEs.

In the third and main chapter, we work with resolution methods Differential Equations. In particular, we present a unnusual in mathematics literature to solve Linear Differential Equations, which is by Equation Characteristic.

Keywords

Ordinary differential equation, Characteristic Equation, constant coefficients.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Neste trabalho falaremos sobre Equações Diferenciais Ordinárias o qual denotaremos por EDO, principalmente sobre métodos resolutivos de EDOs Lineares Com Coeficiente Constantes.

O trabalho, está dividido em três capítulos, no primeiro abordaremos as preliminares onde estão algumas definições e alguns resultados importantes como por exemplo, a Fórmula de Euler Para Números Complexos, as definições básicas de EDO, além do Teorema de Existência e Unicidade de EDO.

No Segundo Capítulo, falamos basicamente de EDOs de primeira ordem, definições método de resolução e etc, além disso provamos um teorema importante sobre Solução Completa de uma EDO Não-Homogênea.

No Terceiro e Ùltimo capítulo, falamos sobre o enfoque principal do trabalho, que são as EDO's Lineares Com Coeficiente Constantes, vemos um método que para resolver cada EDO homogênea tem uma relação com encontrar as raízes de um Polinômio equivalente, e ainda utilizando o Teorema de Solução Completa do capítulo anterior, resolvemos EDOs Lineares Com Coeficiente Constantes Não-Homogênea.

Capítulo 1

Preliminares

Nesse primeiro capítulo definiremos alguns falaremos alguns conceitos básicos como a Fórmula de Euler para Números Complexos tipos e Ordem de Equações Diferenciais, além dos conceitos de Independência Linear e utilizaremos o Wroskiano para verificar quando duas funções são linearmente independentes.

1.1 Números Complexos e Propriedades

Inicialmente, iremos falar sobre um conceito que utilizaremos muito nesse trabalho todas as vezes que formos trabalhar com números complexos que é a Fórmula de Euler.

Desde o Ensino Médio, estudamos números complexos, e vimos que todo número $z = x + yi$ onde i representa a unidade imaginária, pode também ser representado da forma polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ onde $r = |z|$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Recordemos a expansão de Taylor em torno da origem, da seguinte função:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Então:

$$e^{(i\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - ...$$

Separando a parte real e a parte imáginária ficamos com:

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - ...\right) \tag{1.1}$$

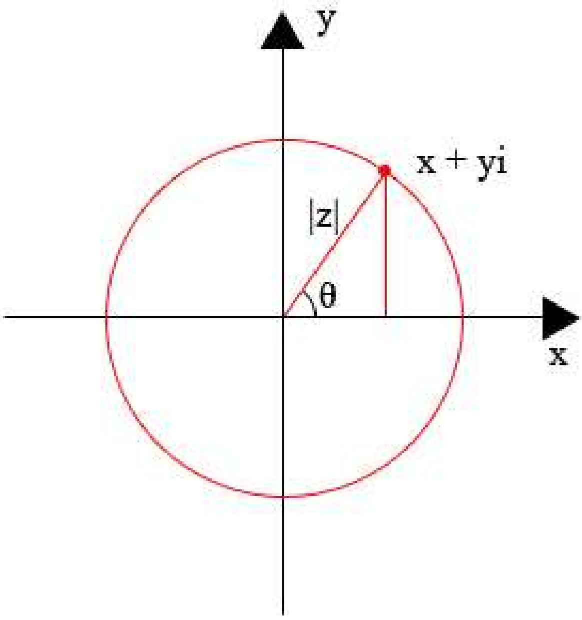

Figura 1.1: Representação de um Ponto em Forma Polar.

Mas recorde também que:

$$\cos\theta = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + ...\right) \tag{1.2}$$

e ainda,

$$\sin\theta = \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + ...\right) \tag{1.3}$$

Das equações (1.1), (1.2) e (1.3), temos que:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.4}$$

A equação (1.4) é chamada de Fórmula de Euler para Números Complexos.

Exemplo 1. *Temos que:*

$$e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

1.1.1 Operações na forma trigométrica

Já vimos que $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ onde $r = \mid z \mid$.

Tomemos os números complexos na forma trigonométrica $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

Vejamos as seguintes operações na forma trigonométrica.

Multiplicação

Fazendo o produto entre z_1 e z_2 obtemos:

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= [r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)].[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)] \\
z_1z_2 &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\
z_1z_2 &= r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).
\end{aligned}$$

Divisão

Fazendo a divisão entre z_1 e z_2 obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{[r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)]}{[r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)]} \\
\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} &= \frac{r_1r_2}{r_2^2}[\cos\theta_1 + i\sin\theta_1][\cos\theta_2 - i\sin\theta_2] \\
\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} &= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)).
\end{aligned}$$

Portanto, temos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

Potenciação

Calculando $z_1^2 = z_1z_1$.

Temos:

$${z_1}^2 = r_1^2(\cos(2\theta_1) + i\sin(2\theta_1)).$$

Analogamente provamos por indução que:

$$z_1^n = r_1^n(\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)).$$

Em particular tomando $r_1 = 1$ temos:

$$[\cos\theta + i\sin\theta]^n = (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)). \tag{1.5}$$

A equação (1.5) é chamada fórmula de Moivre.

1.2 Equações Diferenciais

Ao estudarmos derivada em Cálculo, aprendemos que dado uma função, $y = f(x)$, então a derivada, $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$, também é uma função de x.

Para exemplificar pensemos no exemplo, $y = e^{x^2}$, então:

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 2xy$$

Porém o nosso problema aqui é o inverso do Cálculo, ou seja, o nosso problema, não é dada uma função $y = f(x)$ encontrar $f'(x)$. Mas o problema é: dado uma equação como $\dfrac{dy}{dx} = 2xy$, determinar alguma maneira de encontrar a função $y = f(x)$ que satisfaça a equação.

Definição 1. *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de* **Equação Diferencial**.

A partir de agora, iremos classificar os diversos tipos de Equações Diferenciais.

1.2.1 Tipos de Equações Diferenciais

Umas das primeiras classificações que faremos, depende se a função desconhecida depende de apenas uma variável independente ou de diversas (mais do que uma) variáveis independentes.

Definição 2. *Se uma Equação Diferencial possui apenas uma variável independente, dizemos que a equação é uma* **Equação Diferencial Ordinária (EDO)**.

Exemplo 2. *A equação a seguir é um exemplo de EDO, pois possui apenas uma variável independente.*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 8.$$

Exemplo 3. *A equação abaixo, possui duas variáveis dependentes, porém é uma EDO pois tanto u quanto v depende de x, ou seja, possui apenas uma variável independente.*

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0.$$

Definição 3. *Se uma Equação Diferencial possui derivadas parciais de mais de uma variáveis independentes, dizemos que a equação é uma* **Equação Diferencial Parcial (EDP)**.

Exemplo 4. *Note que na equação abaixo, temos derivadas parciais em relação a variável x, a variável y e a variável z.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

ou seja, a equação acima é uma EDP.

Exemplo 5. *Observe ainda, que podemos ter EDP com apenas uma variável dependente, como no caso da equação abaixo:*

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = 5$$

1.2.2 Ordem de uma Equação Diferencial

Uma outra caracterização importante para as Equações Diferenciais é quanto a Ordem da Equação.

Definição 4. *A* **Ordem** *de uma Equação Diferencial é a ordem da maior derivada que aparece na equação.*

Exemplo 6. *A EDO abaixo é de terceira ordem, pois é a maior ordem da derivada.*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^y}{dx} = x$$

Exemplo 7. *A EDP a seguir é de primeira ordem:*

$$\frac{dx}{dv} + \frac{dy}{du} = 0$$

1.2.3 Equações Diferenciais Lineares e Não-Lineares

Uma outra classificação muito importante das equações diferenciais é a que as divide em lineares e não lineares.

Definição 5. *Uma equação Diferencial Ordinária é dita* **linear** *quando podemos escrevê-la da seguinte forma:*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Ou seja, uma EDO é linear se a variavél dependente e todas as suas derivadas forem do primeiro grau e cada coeficiente depender apenas da váriavel independente.

Se uma equação não for linear, dizemos que ela é **não-linear**.

Exemplo 8. *A equação:*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

é uma EDO linear de Ordem 3.

Exemplo 9. *Podemos também utilizar uma notação "mais compacta" pra representar as EDOs.*

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0,$$

Onde o ponto sobre a função x representa a derivada de x em relação à t, isto é,

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Portanto o exemplo (9) é uma EDO linear de $2^{\underline{o}}$ ordem

Exemplo 10. *Por outro lado, temos que:*

$$-x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 5y^2 = 0$$

é uma EDO não-linear de $2^{\underline{o}}$ ordem, pois a variável dependente y possui um expoente maior do que 1.

A classificação para EDPs é a mesma para EDOs.

Por mais diversificado que sejam o estudo das equações diferenciais, nesse trabalho enfocaremos apenas nas Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

1.3 Solução de uma EDO

Definiremos agora solução de uma EDO, que será basicamente o nosso objeto de estudo no terceiro capítulo do trabalho.

Definição 6 (Solução de Uma EDO). *A solução da EDO é qualquer função $y = f(x)$ que é definida em $[a, b]$ e tem derivadas até ordem n neste intervalo e que satisfaz a equação diferencial.*

1.4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares

Para provar propriedades importantes de EDO linear, isolaremos de um lado da igualdade pela a derivada de mais alta ordem, ou seja:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right)$$

O nosso objetivo é encontrar soluções para as equações diferenciais, para isso, iremos falar de um teorema muito importante, o Teorema de Existência e Unicidade de uma EDO.

Teorema 1 (Existência e Unicidade de EDO). *Tomemos*

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}), \tag{1.6}$$

$$e\ (y_0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Se:
i) Ω for aberto;
ii) $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right)$ for contínua em Ω;
iii)As derivadas parciais de $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right)$ em relação à $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}$ forém continuas em Ω.

Então por qualquer elemento $(y_0, x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \in \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, passa exatamente uma solução maximal para 1.6.

Demonstração: Ver [4].

1.4.1 EDOs Homogêneas e Não-Homogênea

Para procurarmos soluções de EDOs lineares mais adiante nesse trabalho, será importante saber se a equação diferencial é homogênea ou não.

Definição 7. *Uma EDO linear é dita* **homogênea** *se:*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

Ou seja, ela é homogênea se na definição 5 tivermos $g(x) = 0$.

Exemplo 11. *A EDO*

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

é não homogênea, pois $g(x) = e^x \neq 0$

Exemplo 12. *Por outro lado, a EDO abaixo é Homogênea*

$$\frac{d^5y}{dx^5} - x\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

1.5 Independência Linear

Agora iremos falar sobre funções linearmente independentes, pois no terceiro capítulo será de fundamental importância para garantir que uma solução é a solução completa da EDO linear-homogênea.

Definição 8. *Dizemos que duas funções f e g são linearmente independente em um intervalo I, se $k_1f(x) + k_2g(x) = 0$ então $k_1 = k_2 = 0, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.*

Exemplo 13. *Tome as funções $f(x) = x$ e $g(x) = 5x$ são linearmente dependentes pois:*

Para $k_1 = -5$ e $k_2 = 1$ temos que se $-5f(x) + g(x) = 0$.

Exemplo 14. *As funções $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$ no intervalo $[0, \pi]$ são linearmente independentes.*

Em particular, tomemos $x = \dfrac{\pi}{2}$

$$k_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + k_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Longrightarrow k_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Longrightarrow k_2 = 0.$$

Então temos que $k_2 = 0$, logo:

$$k_1 \cos(x) = 0 \Longrightarrow k_1 = 0.$$

1.5.1 Wronskiano

Definição 9. *Definimos para* $f_1, f_2, ..., f_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *onde* $f_1, f_2, ..., f_n$ *são diferenciáveis até a ordem* n*, o Wronskiano de ordem* n*:*

$$W(f_1, f_2, ..., f_n)(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) \end{bmatrix}$$

Teorema 2. *Duas funções são linearmente dependentes em um intervalo* I*, se o seu Wronskiano for zero para todo* $x \in I$*.*

Exemplo 15. *As funções* $f(x) = 3x$ *e* $g(x) = e^x$*, são linearmente independentes, pois:*

$$W(f, g) = \begin{bmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{bmatrix}$$

Então temos que:

$$W(f, g) = \begin{bmatrix} 3x & e^x \\ 3 & e^x \end{bmatrix}$$

Logo, temos que:
$W(f, g) = 3xe^x - 3e^x = 3e^x(x - 1) \neq 0$
Então são linearmente independentes.

Exemplo 16. *Por outro lado as funções* $h(x) = 5x$ *e* $t(x) = 3x$ *são linearmente dependentes, pois:*

$$W(h, t) = \begin{bmatrix} 5x & 3x \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Então:
$W(h, t) = 15x - 15x = 0.$

1.6 Teorema Fundamental do Cálculo

Veremos agora um dos teoremas mais importantes do Cálculo Diferencial e Integral.

Teorema 3 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja f uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$. Se F for a função definida para x em $[a, b]$, portanto*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

então

$$F'(x) = f(x),$$

$\forall x \in [a, b]$.

Demonstração: Ver [1].

Capítulo 2

EDOs Lineares de Primeira Ordem

Neste capítulo iremos abordar as equações diferenciais lineares de primeira ordem, aprenderemos um método para resolver qualquer equação diferencial de primeira ordem, e ainda mais veremos o que é um Problema de Valor Inicial (PVI) e por fim ainda aprenderemos como obter a solução completa de uma EDO Linear e Não Homogênea.

Definição 10. *Temos que uma EDO linear de primeira ordem, é da seguinte forma:*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), x \in I, \tag{2.1}$$

onde p, q são contínuas em I, onde I é um intervalo aberto qualquer.

O teorema a seguir, apresenta uma maneira de resolver qualquer EDO linear de primeira ordem.

Teorema 4. *Em 2.1 a solução completa é da forma:*

$$y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)dx + Ke^{-P(x)} \tag{2.2}$$

Onde: $P(t) = \int p(t)dt$

Demonstração. De maneira mais sucinta, escrevamos (2.1) como $y' + p(x)y = q(x)$. Suponhamos que exista $u(x) \neq 0$ tal que:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)q(x). \tag{2.3}$$

e ainda que:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = \frac{d}{dx}(u(x)y). \tag{2.4}$$

Mas se $y \neq 0$ e $u(x) \neq 0$, então de 2.4 utilizando a regra do produto, temos:

$$u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)y' + u(x)'y. \tag{2.5}$$

Da onde obtemos que:

$$u(x)p(x)y = u(x)'y \Longrightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = p(x).$$

Mas, observe que:

$$\frac{d}{dx}ln(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)} = p(x).$$

Integrando a igualdade anterior, aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$ln(u(x)) = \int p(x)dx + K. \tag{2.6}$$

Portanto:

$$u(x) = e^{\int p(x)dx+K}. \tag{2.7}$$

De (2.3) e (2.4), temos que:

$$\frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x)q(x).$$

Integrando a equação anterior, obtemos:

$$u(x)y = \int u(x)q(x)dx + K.$$

Então:

$$y = \frac{\int u(x)q(x)dx + K}{u(x)} \tag{2.8}$$

e

$$y = e^{-\int p(x)dx} \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + Ke^{-\int p(x)dx}. \tag{2.9}$$

Tomando, $P(x) = \int p(x)dx$ temos:

$$y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x)dx + Ke^{-P(x)dx}, \tag{2.10}$$

como queríamos demonstrar. □

A expressão (2.10) é chamada solução geral de uma EDO linear de Ordem 1.

Exemplo 17. *Resolva a equação*

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = x^5.$$

Solução: *Colocando a EDO na forma padrão, obtemos*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = x^4.$$

Neste caso $p(x) = \frac{2}{x}$*, então:* $P(x) = \int \frac{2dx}{x} = 2ln(x)$
Desta forma, a solução completa da EDO é:

$$y = -e^{-2ln(x)} \int e^{2ln(x)} x^4 dx + e^{-2ln(x)dx}$$

Então:

$$y = -(x^{-2}).(\frac{x^7}{7}) + Kx^{-2} = -\frac{x^5}{7} + Kx^{-2}.$$

Onde $x \in \mathbb{R}$ *é uma constante que poderá ser determinada com as condições iniciais.*

Observação 1: Na figura (2.1) vemos as infinitas soluções para a EDO acima, mas note que uma curva por mais que variemos o k nunca tocará na outra. Esse fato,significa que fixando um ponto qualquer $x_0 \neq 0$ existe uma única curva que satisfaz tal propriedade, veremos mais na frente que isso acontece pois a EDO que calculemos satisfaz o Teorema de Existência de Unicidade de EDO em todo o plano exceto no ponto $x = 0$.

Observação 2: Vale salientar, que não é interessante "decorar" a fórmula, todas às vezes que chegar em uma equação dessa forma, utilizar o mesmo processo da demonstração pra chegar no resultado.

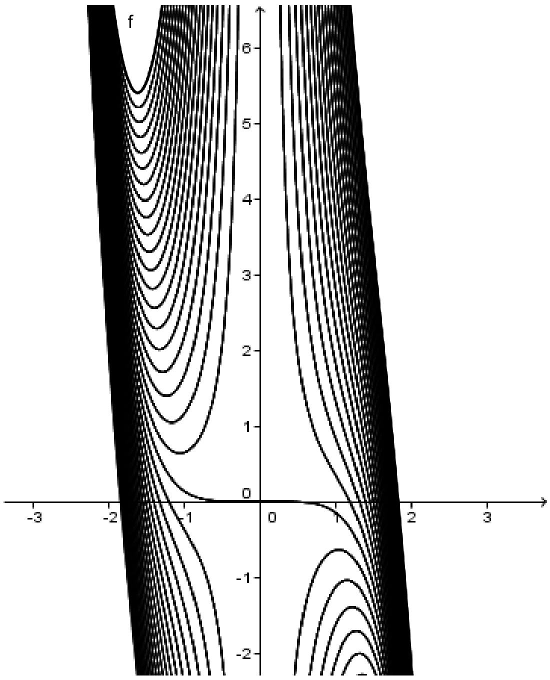

Figura 2.1: Gráfico da função $-\frac{x^5}{7} + Kx^{-2}$ com K variando, $x \neq 0$.

2.1 Problema de Valor Inicial

A questão fundamental aqui é: Será que dado um problema $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$, será que sempre existe solução que passa por um ponto (x_0, y_0)? Se existir será que é sempre única? A resposta, para as duas questões é, em geral Não!

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 18. *Considere a EDO juntamente com a condição inicial a seguir*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= x\sqrt{y} \\ y(0) &= 0. \end{aligned}$$

As funções $y = 0$ *e* $y = \dfrac{x^4}{16}$ *satisfaz tanto a EDO, quanto a condição inicial.*

Vejam geometricamente na figura 2.2:

Neste caso, temos um exemplo com mais de uma solução para o Problema do Valor Inicial.

Agora, o teorema abaixo, nos dá condições suficientes para garantir existência e unicidade de soluções.

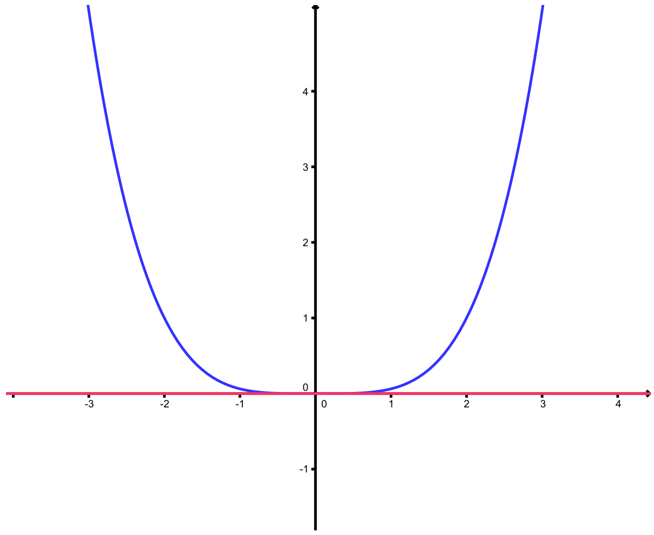

Figura 2.2: As duas soluções da EDO no ponto $x = 0$.

Teorema 5. *Considere o problema de valor inicial.*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

$f(x,y)$ e $\frac{df}{dy}$ forem contínuas em um intervalo aberto I, $I = (a,b)$ contendo o ponto $x = x_0$, então existe uma única solução para o problema de valor inicial.

Exemplo 19. *O Teorema 5 nos garante que existe um intervalo contendo, a condição inicial, $x = 0$ onde $y = 3e^x$ é a única solução para o Problema de Valor Inicial:*

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Considere a função, $y = 3e^x$. Afirmamos que $y(x)$ é solução do Problema de Valor Inicial.

De fato,

$$y = 3e^x \Longrightarrow y\prime = 3e^x = y \text{ e } y(0) = 3.$$

Como $f(x,y) = y$ e $\frac{df}{dy} = 1$ são contínuas em todo o plano, então satisfaz as hipóteses do Teorema (5) para qualquer I.

2.2 Solução Completa de uma EDO-Linear Não-Homogênea

Um teorema de fundamental importância para o trabalho, é a relação entre uma solução da EDO homogênea e da EDO não-homogênea.

Teorema 6. *Considere a EDO linear não homogênea:*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.11}$$

Seja y_p uma solução particular da EDO acima, e y_c a solução completa da EDO homogênea correspondente. A equação $y_p + y_c$ é solução completa de (2.11).

Demonstração: Se y_p é solução particular, então:

$$a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p = g(x). \tag{2.12}$$

Ainda, se y_c é solução completa do Sistema Homogêneo, então:

$$a_n(x)\frac{d^n y_c}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_c}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy_c}{dx} + a_0(x)y_c = 0. \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) temos que:

$$a_n(x)(\frac{d^n y_c}{dx^n}+\frac{d^n y_p}{dx^n})+a_{n-1}(x)(\frac{d^{n-1}y_c}{dx^{n-1}}+\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}})+...+a_1(x)(\frac{dy_c}{dx}+\frac{dy_p}{dx})+a_0(x)(y_c+y_p) = g(x).$$

Ou equivalentemente,

$$a_n(x)\frac{d^n(y_p+y_c)}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}(y_p+y_c)}{dx^{n-1}}+...+a_1(x)\frac{d(y_p+y_c)}{dx}+a_0(x)(y_p+y_c) = g(x).$$

Logo $y_c + y_p$ é solução do Sistema não-Homogêneo e é completo, pois se houvesse outra (sem ser dessa forma), fixando uma condição inicial, teríamos duas soluções diferentes para um mesmo Problema do Valor Inicial, contrariando assim o Teorema da Existência e Unicidade.

Capítulo 3

EDOs Lineares Com Coeficiente Constante

Um conteúdo bastante abordado nos livros de EDO, são as EDOs Lineares com Coeficiente Constantes, tentaremos fazer uma abordagem não tão usual. Comecemos com o caso-Homogêneo.

3.1 Caso Homogêneo

Tomemos a equação linear homogênea om coeficientes constantes:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{3.1}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$

Suponhamos que $y = ce^{rx}$ seja solução da EDO (3.1). Derivando a função y(x), obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= cre^{rx} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= cr^2e^{rx} \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= cr^3e^{rx} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = cr^n e^{rx}$$

Substituindo esses valores em (3.1), temos:

$$cr^n e^{rx} + ca_{n-1} r^{n-1} e^{rx} ... + ca_1 r e^{rx} + ca_0 e^{rx} = 0.$$

Colocando ce^{rx} em evidência, temos:

$$ce^{rx}(r^n + a_{n-1} r^{n-1} ... + a_1 r + a_0) = 0.$$

Como $ce^{rx} \neq 0$, da última igualdade obtemos

$$r^n + a_{n-1} + a_{n-1} r^{n-1} ... + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3.2}$$

O polinômio, $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} ... + a_1\lambda + a_0$ é chamado **Polinômio Característico** associado à EDO (3.1).

Com esses argumentos, demonstramos o seguinte teorema:

Teorema 7. *Se $P(\lambda) = 0$, então $e^{\lambda x}$é uma solução da EDO (3.1).*

Exemplo 20. *Encontrar as soluções da seguinte EDO:*

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0.$$

Temos o Polinômio Característico associado: $P(\lambda) = \lambda^4 - 1$. Resolvendo $P(\lambda) = 0$

Obtemos: $\lambda = \pm 1$

Daí então pelo Teorema 7, obtemos que $y_1 = ce^x$ e $y_2 = ce^{-x}$ são soluções da EDO acima.

O teorema 7 "transforma" o problema de resolver uma EDO linear homogênea com coeficientes constantes, em encontrar as raízes de um polinômio.

Note ainda, que λ pode ser complexo.

Exemplo 21. *Considere a EDO.*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$$

O Polinômio Característico associado é, $P(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Resolvendo $P(\lambda) = 0 obtemos \lambda = \pm 2i$

Então, $y_1 = ce^{-ix}$ e $y_2 = ce^{ix}$, ou ainda pela fórmula de Euler $y_1 = c(\cos x + i \sin x)$ e $y_2 = c(\cos x - i \sin x)$, são algumas soluções da EDO.

Por conveniência, na EDO (3.1), tomemos o operador diferencial

$$\pounds y = \left(\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{d}{dx} + a_0 \right) y$$

Então, temos que:

$$\pounds e^{\lambda t} = (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t}$$

Então:

$$\pounds e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}. \tag{3.3}$$

Chamamos a equação (3.3) de **Equação Característica**, e é uma representação da EDO (3.1).

Teorema 8. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ temos que:*

$$\pounds t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} P^{(q)}(\lambda) t^{p-q} e^{\lambda t}$$

onde $P^{(q)}(\lambda)$ é a derivada de ordem q do polinômio característico.

Demonstração. Derivando a equação característica (3.3) em relação à λ dos dois lados, temos:

$$\pounds te^{\lambda t} = P'(\lambda)e^{\lambda t} + tP(\lambda)e^{\lambda t} \Longrightarrow \pounds te^{\lambda t} = (P'(\lambda) + tP(\lambda))e^{\lambda t}$$

Derivando novamente, Ficamos com:

$$\pounds t^2 e^{\lambda t} = (P''(\lambda) + tP'(\lambda))e^{\lambda t} + te^{\lambda t}(P'(\lambda) + tP(\lambda)) = (P''(\lambda) + 2P'(\lambda) + P(\lambda))e^{\lambda t}$$

Derivando recursivamente até a ordem p, obtemos o resultado:

$$\pounds t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} P^{(q)}(\lambda) t^{p-q} e^{\lambda t}$$

$\square$

Observação 1. *Note que se λ for raíz de multiplicidade m então podemos escrever $P(r) = (r - \lambda)^m q(x)$.*

Temos que $P(\lambda) = 0, P'(\lambda) = 0, P''(\lambda) = 0, ..., P^{(m-1)(\lambda)} = 0$.

Teorema 9. *Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é uma raiz de multiplicidade m do Polinômio Característico então, $\varphi_\lambda(t) = t^p e^{\lambda t}$ são soluções da EDO homogênea, onde $p = 0, 1, ..., m-1$.*

Demonstração. Pelo Teorema 8 temos que:

$$\pounds t^p e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} P^{(k)}(\lambda) t^{p-k} e^{\lambda t}$$

Mas ora, $P'(\lambda) = 0, P''(\lambda) = 0, ..., P^{(k)}(\lambda) = 0$, para $k < m$.Então:

$$\pounds t^p e^{\lambda t} = 0.$$

Como queríamos demonstrar. □

Teorema 10. *Sejam $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ soluções da EDO (3.1), então qualquer combinação linear $K_1y_1 + K_2y_2 + ... + K_ny_n$ é solução de (3.1), onde $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n$.*

Demonstração. De fato, já vimos que podemos representar (3.1) da seguinte forma:

$$\pounds y = 0$$

Mas como $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ são soluções de (3.1), temos que:

$$\begin{gathered} \pounds y_1 = 0 \Longrightarrow K_1 \pounds y_1 = 0 \\ \pounds y_2 = 0 \Longrightarrow K_2 \pounds y_2 = 0 \\ \vdots \\ \pounds y_n = 0 \Longrightarrow K_n \pounds y_n = 0, \text{ para } k_1, ..., k_n \in \mathbb{R} \end{gathered}$$

Somando todas as igualdades acima, temos:

$$K_1 \pounds y_1 + K_2 \pounds y_2 + ... + K_n \pounds y_n = 0.$$

Mas como o operador é linear, então:

$$\begin{gathered} \pounds K_1 y_1 + \pounds K_2 y_2 = 0 + ... + \pounds K_n y_n = 0 \\ \pounds(K_1 y_1 + K_2 y_2 + .. + K_n y_n) = 0. \end{gathered}$$

Como queriamos demonstrar. □

Pelo Teorema 9 temos se λ é de multiplicidade m então $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, ..., t^{m-1} e^{\lambda t}$ são soluções da EDO Linear Homogênea de Coeficientes Constantes, ou seja, sempre obtemos m soluções linearmente independentes. Além disso, pelo Teorema 10 temos que qualquer combinação linear de soluções também é solução, então:

$$S_\lambda = (K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + ... + K_{m-1} t^{m-1}) e^{\lambda t}, \tag{3.4}$$

é uma solução da EDO, para $(K_o, K_1, K_2, ..., K_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$.

Exemplo 22. *Explicite a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Temos o polinômio característico associado a EDO, $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. *Como as raízes são* 1 *e* 2 *então:*

$$y(x) = Ke^x \text{ e } y_2 = Ce^{2x}$$

são soluções, onde $K, C \in \mathbb{R}$.

3.1.1 Caso Complexo

Sabemos também que λ (raiz do polinômio característico) pode ser complexo, nesse caso tomando $\lambda = a + bi$, o conjugado $\bar{\lambda} = a - bi$ também é raiz.

Então já vimos que, se λ é raiz do polinômio característico, então $y = e^{\lambda x}$ é solução. Assim temos que:

$$y = e^{\lambda x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos b + i \sin b).$$

Então, se λ é de multiplicidade m, então temos $2m$ soluções linearmente independentes que são:

$$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, ..., x^{m-1} e^{\lambda x}, e^{\bar{\lambda} x}, xe^{\bar{\lambda} x}, x^2 e^{\bar{\lambda} x}, ..., x^{m-1} e^{\bar{\lambda} x} \tag{3.5}$$

Além disso, observe que

$$c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} = e^{ax}(c_1 e^{xbi} + c_2^{-xbi}) = e^a(c_1(\cos bx + i \sin bx) + c_2(\cos bx - i \sin bx)) =$$

$$e^{ax}((c_1 + c_2)\cos bx + (c_1 - c_2) i \sin bx) = e^a x(K_1 \cos bx + K_2 \sin bx).$$

Portanto, de (3.5) temos $2m$ soluções linearmente independentes da equação homogênea:

$$e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx, xe^{ax}\cos bx, xe^{ax}\sin bx, ..., x^{m-1}e^{ax}\cos bx, x^{m-1}e^{ax}\sin bx$$

Logo, qualquer combinação linear

$$y(x) = (c_0 + c_1 x + ... + c_{m-1}x^{m-1})e^{ax}\cos bx + (k_0 + k_1 x + ... + k_{m-1}x^{m-1})e^{ax}\sin bx \quad (3.6)$$

é solução da (3.1). Além disso, Pelo Teorema Fundamental da Àlgebra, as n raízes geram n soluções linearmente independentes. Logo, pelo Teorema de Existência e Unicidade de solução de EDOs, concluímos que essas combinações formam a solução geral da EDO (3.1).

Exemplo 23. *Encontrar a solução geral da EDO*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0. \quad (3.7)$$

Temos o Polinômio Característico referente a EDO (3.7) é $P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 8$. *As raízes de* $P(\lambda) = 0$, *são* $\lambda = -2 \pm 2i$

Logo pela equação (3.6), temos que a solução geral é:

$$y(x) = ce^{-2x}\cos 2x + ke^{-2x}\sin 2x,$$

onde $c, k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 24. *Encontre a solução completa da EDO*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 0. \quad (3.8)$$

O Polinômio Caracteristico referente a EDO 3.8 é $P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$.

Temos uma raíz tripla $\lambda = -1$. *Note que a parte imaginária é* 0, *mas* $\cos 0 = 1$ *e* $\sin 0 = 0$, *então, pela equação (3.6):*

$$y(x) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2)e^{-x}.$$

Evidentemente, não precisamos "decorar" a equação (3.6), mas ele é obtida recorrentemente ao utilizarmos a idéia de derivar o Polinômio Característico.

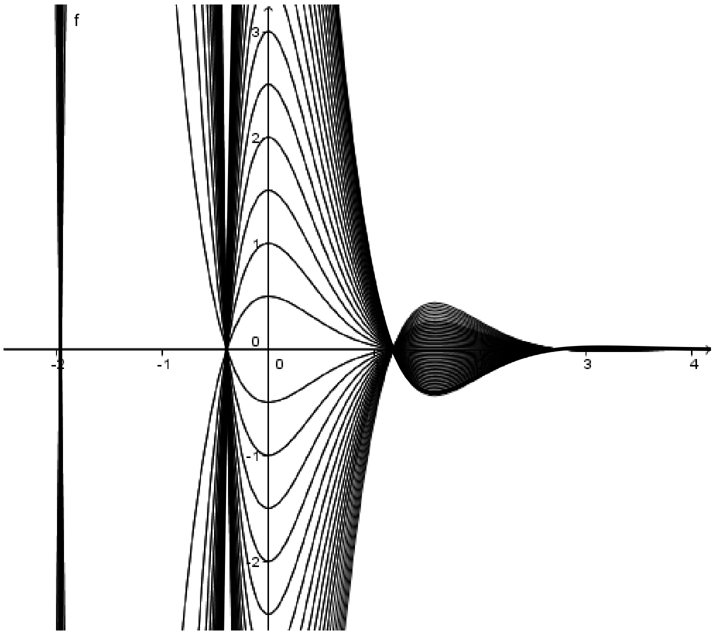

Figura 3.1: Gráfico da função $y(x) = ce^{-2x}\cos 2x + ke^{-2x}\sin 2x$ com c e k variando.

3.2 A Equação Não-Homogênea

Já vimos no Capítulo 2, que dado uma EDO não-homogênea, para encontrarmos a solução completa basta encontrar a solução completa da EDO homogênea e uma solução particular da EDO não-homogênea, e que a soma das duas é a solução geral da EDO não-homogênea, mas na seção anterior, aprendemos a encontrar a solução geral da EDO homogênea, então "basta" encontrar uma solução particular da EDO.

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\frac{dy}{dx} + a_0y = q(x), \tag{3.9}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$.

Iremos discutir tais resoluções partindo de exemplos:

Exemplo 25. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 3x + 4 \tag{3.10}$$

Note que, a solução geral da EDO homogênea é $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^x$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. *Então basta, acharmos uma solução particular, mas evidentemente* $q(x) = 3x+4$ *é um polinômio então, é interessante supor que uma solução particular* y_p *é da forma* $y_p = Ax+B$.

Então

$$\begin{aligned} y_p' &= A \\ y_p'' &= 0, \end{aligned}$$

substituindo em (3.10) temos:

$$0-A-2(Ax+B) = 3x+4 \Longrightarrow -2Ax+2B-A = 3x+4 \Longrightarrow A = -\frac{3}{2}; B = -\frac{5}{4} \quad (3.11)$$

Logo, a solução particular é, $y_p = -\dfrac{3x}{2} - \dfrac{5}{4}$. *Então a solução completa é,* $y = c_1e^{2x} + c_2e^{x} - \dfrac{3x}{2} - \dfrac{5}{4}$.

Na figura 3.2 temos a representação geométrica da solução da EDO (3.10).

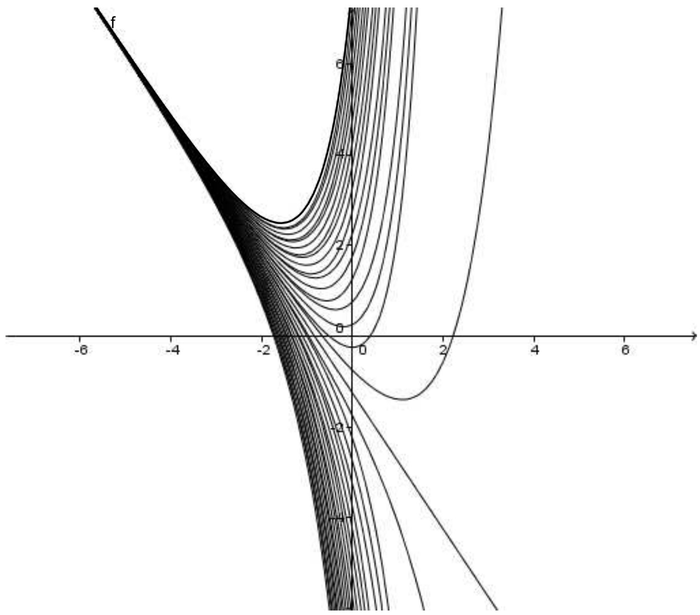

Figura 3.2: Gráfico da função $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{x} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{4}$ com c_1 e c_2 variando.

Exemplo 26. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + y = 3e^{2x}. \quad (3.12)$$

Vimos no exemplo (3.8) que a solução geral da equação homogênea é $y_c = (c_0 + c_1x + c_2x^2)e^{-x}$

È de se esperar que a solução particular seja da forma $y_p = Ae^{2x}$*, partindo do princípio de que a derivada da função exponencial é ainda uma função exponencial.*

Derivando y_p *temos:*

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Ae^{2x} \\ y_p'' &= 4Ae^{2x} \\ y_p''' &= 8Ae^{2x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação 3.12 temos:
$8Ae^{2x} + 12Ae^{2x} + 6Ae^{2x} + Ae^{2x} = 3e^{2x} \Longrightarrow 27Ae^{2x} = 3e^{2x} \Longrightarrow A = \dfrac{1}{9}.$

Portanto a equação particular é, $y_p = \dfrac{e^{2x}}{9}$*. Então a equação completa é,* $y = (c_0 + c_1x + c_2x^2)e^{-x} + \dfrac{e^{2x}}{9}$

Exemplo 27. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = 8e^x. \tag{3.13}$$

Procurando a solução particular no 3.12 temos $y_p = Ae^x$ *Então:*

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^x \\ y_p'' &= Ae^x \end{aligned}$$

.

Substituindo em (3.13) temos que: $0 = 8e^x$ *que é um Absurdo. De onde concluímos que fizemos a escolha errada para* y_p.

Note que a solução completa da equação homogênea correspondente é $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$*, mas observe que a nossa escolha* Ae^x *está presente na solução da equação homogênea, e obviamente* y_p *não é solução da homogênea e de uma não-homogênea simultaneamente, mas recorde que* $y_p = Axe^x$ *também pode ser solução.*

Derivando $y_p = Axe^x$ *temos:*

$$\begin{aligned} y_p' &= Ae^x + Axe^x \\ y_p'' &= 2Ae^x + Axe^x \end{aligned}$$

.

Substituindo em (3.13) temos:

$2Ae^x + Axe^x - 5(Ae^x + Axe^x) + 4Ax^ex = 8e^x \Longrightarrow -3Ae^x = 8e^x \Longrightarrow A = -\dfrac{8}{3}$

Então, $y_p = -\frac{8}{3}xe^x$

Exemplo 28. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{d^y}{dx} - 6y = 3x \tag{3.14}$$

Temos que o Polinômio Característico é $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 11\lambda - 6$

Logo as raízes do Polinômio Característico são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ *e* $\lambda_3 = 3$.

Logo a solução geral da Equação Homogênea correspondente à 3.14 é:

$$c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}.$$

Procuremos agora, uma solução particular. Chutamos que uma candidata a solução particular será da forma y(x)=Ax+B.

Temos portanto que:

$$\begin{aligned} y'_p &= A \\ y''_p &= 0 \\ y'''_p &= 0 \end{aligned}$$

.

Substuindo em (3.14) temos:

$$0 - 6.0 + 11A - 6(Ax + B) = 3x \Longrightarrow 11A - 6Ax - 6B = 3x$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} 11A - 6B &= 0 \\ -6A &= 3 \end{aligned}$$

Concluímos que: $A = -\dfrac{1}{2}; B = -\dfrac{11}{12}$

Logo, uma solução particular é $y_p = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{11}{12}$.

Portanto a solução completa da EDO (3.14) é:

$$y_c = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} - \frac{x}{2} - \frac{11}{12}.$$

Exemplo 29. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = 2\sin(3x). \tag{3.15}$$

Associado a EDO (3.15) temos o polinômio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$.

Portanto as raízes são $\lambda = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. *Logo a solução geral da equação homogênea correspodente:*

$$y_h = c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

Busquemos uma solução particular com a expressão $y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$

$$\begin{aligned} y_p' &= -3A\sin 3x + 3B\cos 3x \\ y_p'' &= -9A\cos 3x - 9B\sin 3x \end{aligned}$$

Substituindo em (3.15) temos:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - (-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + A\cos 3x + B\sin 3x = 2\sin(3x)$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} -8A + 3B &= 0 \\ 3A - 8B &= 2 \end{aligned}$$

,

obtemos que $A = \dfrac{6}{73}; B = -\dfrac{16}{73}$. *Portanto, temos a solução particular:* $y_p = \dfrac{6}{73}\cos 3x - \dfrac{16}{73}\sin 3x$.

Logo a solução completa da equação não-homogênea é:

$$c_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + c_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\sin 3x$$

À luz desses exemplos, vamos estudar uma estratégia geral para encontra solução de EDOs lineares com coeficientes constantes.

Considere o operador diferencial

$$\pounds y = q(x)$$

Se nenhuma função "candidata" a solução particular é solução para a EDO homogênea associada, podemos "chutar" uma forma pra solução particular.

Caso uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a EDO homogênea associada, tomemos a seguinte regra geral: "Se alguma y_{pi} contém termos de multiplicidade s termos em y_c, então multipliquemos y_{pi} por x^{s-1}.

Então se temos $q(x) = ae^{rx}$, chutamos uma solução particular $y_p = Ae^{rx}x^s$.

Se temos, um polinômio $q(x) = a_n x^n + a_{n-1}n^{n-1} + ... + a_0$, chutamos uma solução particular $y_p = (A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + ... + A_0)x^s$

Se temos, combinação linear entre senos e cossenos $q(x) = \sin\theta x + \cos\theta$, chutamos uma solução particular $x^s(A\sin\theta x + B\cos\theta x)$

Se temos uma exponencial $q(x) = ae^{rx}$ chutamos $y_p = Ae^{rx}x^s$

Onde todos s acima são o menor inteiro que elimine a multiplicidade.

Ainda podemos ter combinações desses acima, vejamos esse último exemplo.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9\frac{dy}{dx} + 14y = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x} \tag{3.16}$$

É imediato, que a solução da equação homogênea é da forma:

$$y = c_1e^2x + c_2e^7x$$

Tentamos procurar uma solução particular para a equação, então chutaremos a seguinte solução particular:

Para $3x^2$, escolhemos $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$.

Para $-5\sin 2x$, escolhemos $y_{p2} = D\cos 2x + E\sin 2x$.

Para $7xe^{6x}$, escolhemos $y_{p3} = (Fx + G)e^{6x}$

Por fim, tomamos $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$,

Então a nossa função é da forma:

$y_p = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x + (Fx + G)e^{6x}$

Logo:

$y_p' = 2Ax + B - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x + 6Fxe^{6x} + Fe^{6x} + 6Ge^{6x}$

e ainda:

$y_p'' = 2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 6Fe^{6x} + 36Fxe^{6x} + 6Fe^{6x} + 36Ge^{6x}$

Substituindo em 3.16, temos:

$2A - 4D\cos 2x - 4E\sin 2x + 6Fe^{6x} + 36Fxe^{6x} + 6Fe^{6x} + 36Ge^{6x} - 9[2Ax + B - 2D\sin 2x + 2E\cos 2x + 6Fxe^{6x} + Fe^{6x} + 6Ge^{6x}] + 14[Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\sin 2x + (Fx+G)e^{6x}] = 3x^2 - 5\sin 2x + 7xe^{6x}$

Reduzindo os termos semelhantes e igualando, obtemos o seguintes valores:

$$A = \frac{3}{14}; B = \frac{27}{98}; C = \frac{201}{1372}; D = -\frac{45}{212}; E = -\frac{25}{212}; F = -\frac{7}{4}; G = -\frac{21}{16}$$

Portanto a solução particular da EDO 3.16 é:

$$y_p = \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{201}{1372} + -\frac{45}{212}\cos 2x + -\frac{25}{212}\sin 2x - (\frac{7}{4}x + \frac{21}{16})e^{6x}$$

Logo a solução completa da EDO é:

$$y_c = c_1e^2x + c_2e^7x + \frac{3}{14}x^2 + \frac{27}{98}x + \frac{201}{1372} + -\frac{45}{212}\cos 2x + -\frac{25}{212}\sin 2x - (\frac{7}{4}x + \frac{21}{16})e^{6x}$$

3.2.1 Derivando a Equação Característica

Recordemos que:

$$\pounds t^p e^{\lambda t} = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} P^{(q)}(\lambda) t^{p-q} e^{\lambda t} \tag{3.17}$$

Utilizaremos essa idéia, para encontrar algumas soluções particulares de maneira mais rápida.

Vejamos:

Exemplo 30. *Tomemos a seguinte EDO:*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^x$$

Primeiro encontremos a solução da equação homogênea correspodente, temos que a equação caracteristica é:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 4. \tag{3.18}$$

Resolvendo a equação $P(\lambda) = 0$ obtemos, $\lambda = -1$ (raiz simples), ou $\lambda = 2$ (raiz dupla).

Logo a solução completa da EDO homogênea é $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{3x}$

Como $\lambda = 1$ não é solução, procuremos uma solução particular $y_p = Ae^x$. Sabemos que: $\pounds e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t}$

Então, pela Linearidade do Diferencial:

$$\pounds Ae^t = A\pounds e^t = AP(1)e^t$$

Como $P(1) = 2$, então $\pounds Ae^t = 2Ae^t$.

No entanto, pelas condições do problema, queremos que $\pounds Ae^t = e^t$.

Então temos que, $2Ae^t = e^t \Longrightarrow A = \frac{1}{2}$. Portanto, uma solução particular é $y_p = \dfrac{1}{2}e^x$

Logo a solução completa da (3.18) é:

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{3x} + \frac{1}{2}e^x$$

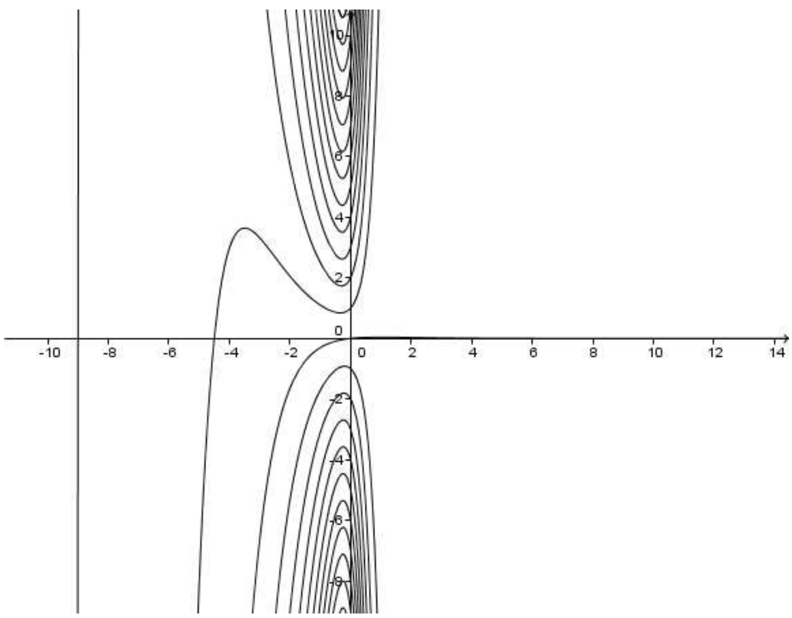

Figura 3.3: Gráfico da função $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{3x} + \frac{1}{2}e^x$ com c_1, c_2 e c_3 variando.

Exemplo 31. *Resolvamos a seguinte EDO*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{-x}$$

No exemplo anterior, calculemos a solução homogênea da equação acima.

Então procuraremos agora uma solução particular, como $\lambda = -1$ *é solução de multiplicidade 1, procuremos uma solução particular da forma* $y_p = Axe^{\lambda x}$.

Pela Linearidade no Diferencial, temos que: $\pounds Axe^{\lambda x} = A\pounds xe^{\lambda x}$

Mas por 3.17,

$$A\pounds xe^{\lambda x} = A(P(\lambda)xe^{\lambda x} + P'(\lambda)e^{\lambda x}) \tag{3.19}$$

Tomando $\lambda = -1$*, temos que* $P(\lambda) = 0$ *e* $P'(\lambda) = 3\lambda^2 - 6\lambda = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$

Então voltando em (3.19):

$$A\pounds xe^{\lambda x} = 9Ae^{-x} \ .$$

Mas queremos que $\pounds Axe^{\lambda x}$*, seja igual a* e^{-x}*, então igualando temos:*

$$9Ae^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow A = \frac{1}{9}.$$

Portanto a solução completa $y_c = y_h + y_p$*, é:*

$$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3xe^{3x} + \frac{1}{9}xe^{-x}$$

Exemplo 32. *Resolvamos a seguinte a EDO.*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{d^y}{dx} + 8y = e^{-2x}\cos 2x \tag{3.20}$$

As raízes do Polinômio Característico são $-2 + 2i$ *e* $-2 - 2i$

Então, sabemos que a solução da equação homogênea é

$$y_c = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)e^{-2x} \tag{3.21}$$

Procuremos, uma solução particular. Observe que: $e^{-2x}\cos 2x = Re(e^{(-2-2i)x})$.

Resolvamos a equação complexa,

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 4\frac{d^z}{dx} + 8z = e^{(-2+2i)x} \tag{3.22}$$

Como $e^{\lambda} = e^{(-2-2i)x}$ *é solução da equação homogênea, chutamos uma equação particular da forma* $Axe^{(-2+2i)x}$

Mas temos que:

$$\pounds Axe^{(-2+2i)x} = A(P'(\lambda) + xP(\lambda))e^{(-2+2i)x}. \tag{3.23}$$

Mas:

$$\begin{aligned} P(-2+2i) &= 0 \\ P'(-2+2i) &= 2(-2+2i)+4 = 4i \end{aligned}$$

Voltando em (3.23), temos que:

$$\pounds Axe^{(-2+2i)x} = 4Aie^{(-2+2i)x}.$$

Mas queremos que:

$$\pounds Axe^{(-2+2i)x} = e^{(-2+2i)x} \tag{3.24}$$

Então,

$$4Aie^{(-2+2i)x} = e^{(-2+2i)x} \Longrightarrow A = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}. \tag{3.25}$$

Então a solução particular da EDO complexa 3.22.

$$y_{p_c} = \frac{-i}{4}xe^{(-2+2i)x} = \frac{x\sin 2xe^{-2x} - ix\cos 2xe^{-2x}}{4}. \tag{3.26}$$

Então a solução particular da EDO 3.20 é:

$$y_p = \frac{x\sin 2xe^{-2x}}{4}. \tag{3.27}$$

Então temos a solução completa:

$$y_c = (c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)e^{-2x} + \frac{x\sin 2xe^{-2x}}{4}. \tag{3.28}$$

3.3 Comparando os Métodos

Neste trabalho, apresentamos dois métodos pra resolver Equações Diferenciais Lineares com Coeficientes Constantes. Agora vamos resolver um mesmo exemplo usando os dois métodos, e fica a critério do leitor, qual dos métodos utilizar.

Exemplo 33. *Vejamos o seguinte exemplo:*

$$3\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = 2\cos x. \tag{3.29}$$

Primeiro Método:

Vamos encontrar a solução particular, note que derivaremos duas vezes e queremos que apareça $2\cos x$, evidentemente podemos tomar $y_p = A\cos x + B\sin x$.

Derivando temos:

$$\begin{aligned} y_p' &= -A\sin x + B\cos x \\ y_p'' &= -A\cos x - B\sin x \\ . \end{aligned}$$

Substituindo em 3.29, temos:

$-3A\cos x - 3B\sin x - A\sin x + B\cos x - 2A\cos x - 2B\sin x = 2\cos x \Longrightarrow \cos x(-3A + B - 2A) + \sin(-3B - A - 2B) = 2\cos x \Longrightarrow A = -\frac{5}{13}; B = \frac{1}{13}$.

Portanto, a solução particular é $y_p = -\frac{5}{13}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$.

Segundo Método: Derivando a Equação Característica

Sabemos que $Re(2e^{ix}) = 2\cos x$

Temos a equação complexa associada :

$$3\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} - 2z = 2e^{ix} \tag{3.30}$$

Como $\lambda = i$ não é solução da EDO homogênea, temos que a solução é da forma $y_p = Ae^{ix}$.

Pela linearidade do diferencial: $\pounds Ae^{ix} = A\pounds e^{ix} = AP(i)e^{ix}$, mas $P(i) = i - 5$

Logo temos, $\pounds Ae^{ix} = A(i-5)e^{ix}$

Igualando com o que queremos, temos:

$$A(i-5)e^{ix} = 2e^{ix} \Longrightarrow A = \frac{2}{i-5} = -\frac{i+5}{13}$$

Então a solução particular da EDO complexa (3.30) é:

$$y_p = -\frac{i+5}{13}e^{ix} = -\frac{i+5}{13}(\cos x + i\sin x)$$

Tomando a parte real, temos que a solução da EDO (3.29) é:

$$y_p = -\frac{5}{13}\cos x + \frac{1}{13}\sin x$$

Exemplo 34. *Encontre a solução geral da seguinte EDO:*

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = e^x \cos 2x \qquad (3.31)$$

Resolvendo usando o método da Derivação da Equação Característica:

Sabemos que, $e^x \cos 2x = Re(e^{(1+2i)x})$

Ainda temos que $\lambda = 1 + 2i$ *é raiz dupla, então tomemos* $y_p = Ax^2 e^{(1+2i)x}$

Mas sabemos a propriedade do diferencial $\pounds Ax^2 e^{\lambda x} = A(P''(\lambda) + 2xP'(\lambda) + Px^2(\lambda))e^{\lambda x})$

Mas como, $P'(1+2i) = P(1+2i) = 0$ *e* $P''(1+2i) = 12(1+2i)^2 - 24(1+2i) + 28 = -32$.

Logo, $\pounds Ax^2 e^{\lambda x} = -32Ae^{(1+2i)x}$.

Daí, igualando temos que:

$$-32Ae^{(1+2i)x} = e^{(1+2i)x} \Longrightarrow A = -\frac{1}{32}.$$

Então temos que a solução da EDO complexa é

$$y_{p^*} = -\frac{x^2 e^{(1+2i)x}}{32} = -\frac{x^2 e^x(\cos 2x + i \sin 2x)}{32}.$$

Portanto, a solução particular que queremos é:

$$y_p = -\frac{x^2 e^x \cos 2x}{32}.$$

Método Tradicional

Nesse tipo de EDO percebemos a grande vantagem do novo método, pois nesse caso teríamos de derivar quatro vezes a candidata a solução particular $y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$*, e ainda substituir tudo da EDO original e agrupar de maneira que possamos encontrar o A e o B, provavelmente encontraríamos pelo menos umas duas páginas de cálculo. Deixamos para o leitor resolver.*

Conclusões Finais

Equações Diferenciais, possui uma infinidades de aplicações na Física, Biologia, na Economia, Engenharia e em uma infinidades situações práticas que não abordamos nesse trabalho, mas sugerimos ao leitor que se interesse ver algumas aplicações (ver algumas aplicações em [2] e [5]).

Além disso, o conteudo de EDOs é bem vasto, e nesse trabalho fizemos apenas um apanhado enfocando principalmente as Lineares. Além disso, apresentamos um método não tão usual de encontrar soluções particulares que foi feito através da derivação da equação característica, e ainda fizemos uma comparação entre o método mais tradicional e o que apresentamos neste trabalho.

Observa-se que, dependendo da EDO, é bem menos trabalhoso resolver pelo metódo apresentado ao invés do método tradicional.

Referências Bibliográficas

[1] ÀVILA, G *Cálculo 1: Funções de uma Variável*, LTC Editora, 1999.

[2] BOYCE, W, E,DIPRIMA, R, C *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, LTC Editora, 8ª Edição, 2003.

[3] FIGUEIREDO, J, RIBEIRO, C *Apontamentos de Equações Diferenciais*, Universidade do Minho,2013.

Disponível em: $http : //repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/27285/1/$

$ApontamentosEDs - CAM.pdf$

[4] JÚNIOR, A.A.C., *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa, 2009.

Disponível em: $http : //w3.impa.br/\ viana/out/edo_castro.pdf$

[5] LIMA, H.G.M., *Equações Diferenciais Lineares*, Universidade Federal de Campina Grande

Disponível em: $http : //www.ccta.ufcg.edu.br/admin.files.action.php?action = download\&id = 2635$

[6] ZILL, D, G,, CULLEN, M, R *Equações Diferenciais*, MAKRON BOOKS, Volume 1, 2001.