UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

# CÁLCULO: UMA PROPOSTA POSSÍVEL PARA O ENSINO MÉDIO

KÉLIA RODRIGUES DE QUEIROZ SOUZA

BARRA DO GARÇAS / MT
2014

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT/UFMT

# CÁLCULO: UMA PROPOSTA POSSÍVEL PARA O ENSINO MÉDIO

Kélia Rodrigues de Queiroz Sousa

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva

Barra do Garças / MT
2014

Sousa, Kélia Rodrigues de Queiroz

Cálculo: uma proposta possível para o ensino médio

Kélia Rodrigues de Queiroz Sousa – 2014

97f.: ibl.

Orientador: Prof$^{o}$. Dr. Carlos Rodrigues da Silva.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)

Universidade Federal de Mato Grosso, Barra do Garças, 2014.

1. É Possível Estudar Cálculo no Ensino Médio. 2. Função: Pré-Requisito Fundamental para o Estudo do Cálculo. 3. Falando Sobre Limites. 4. Derivada. 5. Integral. 6. Cálculo no Ensino Médio.

Kélia Rodrigues de Queiroz Sousa

# CÁLCULO: UMA PROPOSTA POSSÍVEL PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal de Mato Grosso como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Professor Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador / Presidente da Banca Examinadora

Professor Dr. Adilson Antonio Berlatto

Professor Dr. Kellcio Oliveira Araújo

Barra do Garças, 24 de outubro de 2014.

# Agradecimentos


À Deus, por me proporcionar mais esta conquista.

Ao meu esposo, Eliandro, pelo companheirismo nestes dois anos de muita dedicação.

Aos membros da banca de avaliação, cujas sugestões engrandeceram o trabalho. Em especial ao professor Carlos, pelas discussões e pelo direcionamento do trabalho.

Aos colegas e aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos e pelas discussões que muito me enriqueceram.

Aos, diretores Alexandre e Veralice, pelo incentivo nos momentos de desânimo.

Aos colegas do PROFMAT da turma de 2012 da UFTM pelo convívio e por todas as trocas de experiências que contribuíram ainda mais para a minha formação docente.

À CAPES pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação e implantação do PROFMAT no Brasil.

À todos vocês meus mais sinceros agradecimentos

# Resumo

O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. Permite que se obtenham novos processos, equipamentos, métodos no processo de transformação da natureza, entre outros. Atualmente, esse conteúdo é muito abordado nos cursos superiores nas áreas de ciências da natureza, engenharias e tecnologias. Sua importância se dá por sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Porém quando se trata do ensino deste conteúdo no ensino médio infelizmente este se torna pouco valorizado. Introduzir conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio auxilia na compreensão de algumas propriedades, entre elas o limite de uma função, ferramenta indispensável para a compreensão de fenômenos físicos, como velocidade, força, etc. Desse modo, o que propomos aqui é a inserção do conteúdo de cálculo no Ensino Médio, que vemos como uma opção viável, desde que abordada de forma contextualizada.

**Palavras-chave**: Cálculo, ensino médio.

# Abstract

The study of differential and Integral Calculus is considered one of the most influential mathematical content in current scientific and technological development. Allows one to obtain new processes, equipment, methods in the process of transformation of nature, among others. Currently, this content is very discussed in upper courses in the areas of natural sciences, engineering and technologies. Its importance is due to its applicability in diverse areas of knowledge. But when it comes to the teaching of this content in high school unfortunately this becomes unappreciated. Introduce concepts of differential and Integral Calculus in high school assists in understanding of some properties, such as the limit of a function, indispensable tool for understanding physical phenomena, such as speed, strength, etc. Thus, what we are proposing here is the insertion of the content of calculus in high school that we see as a viable option, since it dealt with contextualized way.

**Keywords**: Calculus, high school.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Não se pode negar a importância da matemática para o homem moderno, por isso o seu ensino deve ser objeto de estudo da ciência, tendo como base principal a necessidade de se construir, reconstruir e perpetuar os conhecimentos produzidos por ela, e têm como função social capacitar indivíduos para resolverem problemas.

O mundo atual necessita de uma mudança na forma de se conceber o ensino da matemática nos diversos níveis, sendo ele fundamental, médio, ou superior, isso devido ao fato de que com a globalização o ensino enciclopédico, onde o aluno apenas recebe conhecimento e não se posiciona criticamente frente a ele, não faz mais sentido. Isso porque as grandes mudanças que vem ocorrendo, principalmente a partir do final do século passado, têm gerado a necessidade de se pensar na vida do homem moderno, sobretudo no que diz respeito à educação.

Temos o cálculo como uma das grandes ferramentas da matemática, aonde vem sendo desenvolvido desde Arquimedes até chegarem a Newton e Leibniz, dada tamanha importância devemos tratar da conveniência de incluí-lo no ensino médio, devido ao fato de sua relevância na resolução de problemas.

Embora grande parte dos livros de ensino médio inclui o cálculo entre seus tópicos, ainda são muito pouco ensinados e entendemos que descartar o cálculo no ensino médio é grave, pois estamos deixando de lado uma componente relevante para a formação do aluno no contexto de ensino atual, que contribui de maneira expressiva para o resgate do conhecimento no campo da matemática e suas ramificações.

A Lei de Diretrizes e Bases (LDB) em seu artigo 22 diz: “A educação básica tem por finalidade desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornece-lhes meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.”

Isso significa que é direito dos estudantes se ambientarem ainda no ensino médio com os conceitos básicos de cálculo, logicamente com uma abordagem diferente das que são tratadas nos cursos de cálculo, mas fazendo os estudantes interagirem de modo dinâmico com o intuito de desenvolver aptidões, familiarizando o aluno com as novas simbologias, até porque grande parte deles irá estudar alguma disciplina de cálculo no nível superior.

É importante salientar que inserir o cálculo no ensino médio não é tarefa fácil, isso porque o entendimento de novas simbologias é complicado para boa parte dos alunos. Para Lopes (apud MACHADO, 2002, p. 14):

> [...] em todos os países, educadores e matemáticos buscam encontrar métodos que visem facilitar o entendimento do Cálculo por parte dos estudantes. Muito tem se conseguido, mas é importante dizer que nenhuma fórmula mágica foi encontrada até hoje (LOPES apud MACHADO, 2002, p. 14).

Deve-se então haver uma proposta de incentivo aos alunos, procurando métodos que facilitem o entendimento da disciplina, que se apresentada convenientemente pode ser gratificante, haja visto as interessantes aplicações da derivada em resolução de problemas, tais como máximos e mínimos, da função exponencial com problemas de crescimento de populações, entre outros.

Acredita-se que inserindo o cálculo no ensino médio, fazendo com que o aluno entre em contato com a disciplina mais cedo, diminuiria a grande taxa de evasão dos cursos superiores que tem como base fundamental o cálculo. Para Barreto (apud REIS, 2005, p. 4):

> O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina (BARRETO apud REIS, 2005, p. 4).

Sabe-se que o cálculo é de fundamental importância para os cursos de matemática, engenharia, física, ciências da computação, entre outros. Sendo assim, devemos levá-lo mais a sério porque esses alunos entram nas universidades sem estar devidamente preparados, causando então um índice alarmante de desistências e reprovações.

Em suas pesquisas, Barufi (1995/1999) destaca os altos índices de não-aprovação (alunos reprovados por nota, falta ou desistência) na disciplina, chegando a um percentual alarmante de $66,9\%$. Por isso defendemos a ideia de familiarizar o aluno já nos primeiros anos do ensino médio, para que não haja um choque ao deparar com ela no nível superior.

Ávila (Revista do Professor de Matemática (RPM) 60), propõe que os conceitos de funções, derivadas e um pouco de geometria analítica da reta sejam integrados, e não separados em blocos. Para ele o ensino de funções num bloco único e isolado é um exagero. Nesse sentido, o professor deveria iniciar o ensino médio retomando regra de três e proporcionalidade, daí então surgir à ideia da equação da reta $y = mx + n$, podendo nesse momento falar de acréscimos e decréscimos, familiarizando o aluno com a notação $\Delta x$ (delta $x$) e $\Delta y$ (delta $y$), e com o fato de que o declive da reta é $\Delta y/\Delta x$.

Sob esse ponto de vista, entendemos que a ideia intuitiva de limite e derivada podem ser discutidas sem muitos receios no ensino médio. Podemos começar, por exemplo, relacionando essas ideias com problemas cotidianos de nossa sociedade. Quando se fala de limite, uma grande dificuldade encontrada pelo professor é mostrar que quando fazemos um $x$ tender (se aproximar) de um $x_0$, ele nunca, de fato, alcançará esse $x_0$. Isto, aparentemente, nos parece um contra-senso com a nossa ideia de distância.

Podemos, então, fazer uma implementação falando da fiscalização eletrônica de velocidade (radares), que estão espalhados em grande parte das cidades brasileiras, e falar da velocidade instantânea de um determinado veículo, dizendo que o que está sendo calculado, na verdade, é a velocidade média num intervalo de tempo bem pequeno. E dependendo da precisão do equipamento, quanto menor se conseguir esse tempo, melhor a aproximação.

E como nesse caso não vamos ter uma variável de tempo zero, a ideia é fazer essa variação tender a zero. Usando essa simples ideia, podemos, então, introduzir a ideia de limite e derivada para alunos do ensino médio.

Veja bem, o que propomos, então, é um estudo livre de formalizações, sendo muito mais prático. Algo que vá fugir das técnicas usuais, priorizando a reflexão dos conceitos, por parte dos alunos, familiarizando com as novas simbologias e que desperte a curiosidade dos discentes.

Capítulo 1

# É POSSÍVEL ESTUDAR CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO?

> Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2° grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa. (ÁVILA, 1991, p. 5)

O ensino-aprendizagem em matemática tem sido motivo de diversas discussões, desde o ensino fundamental ao ensino superior. Grande parte dos alunos frequentemente demonstra dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos fundamentais. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula. Essas dificuldades não se limitam apenas aos conceitos básicos, uma vez que os conteúdos dessa disciplina se encadeiam, e é necessária a compreensão de uns para o aprendizado dos assuntos seguintes.

Um questionamento plausível é: limites, derivadas e integrais são assuntos viáveis ao entendimento de um aluno do Ensino Médio? Se considerarmos o Cálculo com toda sua linguagem formal, simbólica, seus teoremas e demonstrações, definições e todo o seu rigor, a resposta a esse questionamento seria negativa, pois esses conteúdos repletos de detalhes exigem conhecimentos específicos que ainda não são do domínio de um estudante nesta fase de sua escolaridade. Mas diversos autores defendem que o aluno já nessa fase podem facilmente absorver conceitos simples de cálculo, e que o professor dever inserir o conteúdo e estabelecer princípios para se introduzir os conceitos. Nesse sentido Rezende afirma:

> [...] Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem “do atual” ensino de Cálculo está “fora” dele e é “anterior” inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada “falta de base” dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores. [...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma “falta de base” dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para se aprender as ideias básicas do Cálculo. [...] (REZENDE, 2003, p. 31)

O que estamos propondo neste trabalho é a simples, porém importante, introdução das ideias intuitivas de cálculo, ou seja, das ideias geradoras desses tópicos de estudo no Ensino Superior.

O ensino de elementos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio é algo que está ao alcance dos alunos desse nível de ensino, desde que não seja cheio de formalismos como nos cursos superiores.

Preparar o aluno a partir do primeiro ano do ensino médio para que se obtenha esse conhecimento é de suma importância, pois esse conteúdo se encontra altamente conexo com a ciência moderna, bem como a exploração de competência e habilidades matemáticas que possam a vir ser desenvolvidas pelos próprios alunos.

Em seu artigo Cálculo no segundo Grau, o professor Roberto Costallat Duclos (DUCLOS, 1992), defende o cálculo no ensino médio, desde que seja apresentado de maneira conveniente. Segundo o autor, o Cálculo, ao contrário de ser difícil, é muito gratificante, porque traz ideias inovadoras, pelo poder e pelo alcance de seus métodos. Atualmente alguns livros didáticos de ensino médio apresentam tópicos relativos do Cálculo Diferencial e Integral, como limite, derivadas e integrais (GIOVANNI; BONJORNO, 2005) e (PESSOA; ISHIHARA, 2011).

Mas, infelizmente trazem este conteúdo no 3º ano, ou seja, no final do curso, onde pouco se pode aproveitar do estudo. Entretanto, na maioria das vezes, estes temas não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios. O Cálculo passou a fazer parte do livro didático, mas não do currículo de ensino médio, o que o torna então, pouco valorizado, gerando assim, deficiências na aprendizagem que acabam refletindo no ensino superior.

Para Palis (1995), os cursos superiores que apresentam a disciplina de Cálculo apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso. Estes índices, por si só, já apontam a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas as outras medidas, possam dar conta desse problema que, desde muitos anos, subsiste na universidade.

Observamos com isso que tem faltado aos alunos do ensino médio uma base adequada de conhecimento, para que possam chegar às universidades, podendo mostrar níveis de aprovação satisfatórios, para tanto devemos fazer uma reformulação na matemática do ensino médio, visto que o que temos hoje nos parece insuficiente para que tenhamos uma educação de excelência.

Nesse sentido propomos aqui que se deixe para traz aqueles conteúdos programáticos que são bem extensos, e fazer então uma mudança no que diz respeito ao ensino da matemática no ensino médio, inserindo a problemática do limite, derivadas e integral, logicamente que se devem mostrar algumas aplicações, para que o aluno perceba o quão interessante pode ser se dedicar ao estudo da matemática.

Ávila (1991) destaca que a justificativa que os programas de matemática são extensos e não comportariam a inclusão do cálculo é um equívoco. Segundo o autor, os programas estão mal estruturados. Para o autor, os professores insistem em exercer programas longos, com conteúdos fragmentados sem significados. Em sua opinião, aproveitar o tempo com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações seria mais proveitoso.

Um grande problema que vemos é que para muitos a matemática é vista como uma ciência pronta e acabada e não como uma ferramenta importante para o entendimento de várias disciplinas. Além disso, pode trazer o aluno para um universo de satisfação pelo fato de entender que a matemática não é uma disciplina impossível de se aprender e de difícil aplicação.

A Proposta Curricular de Santa Catarina afirma que:

> A Matemática ainda é vista somente como uma ciência exata - pronta e acabada, cujo ensino e aprendizagem se dão pela memorização ou por repetição mecânica de exercícios de fixação, privilegiando o uso de regras e 'macetes'. [...] a Matemática é entendida apenas como ferramenta para a resolução de problemas ou como necessária para assegurar a continuidade linear do processo de escolarização, não contemplando a multiplicidade de fatores necessários ao desenvolvimento de uma efetiva educação Matemática (SANTA CATARINA, 1998, p. 105).

É evidente que, com esse pensamento, o ensino de qualquer um dos elementos básicos do Cálculo seria muito tormentoso para o aluno do Ensino Médio. Porém, um ensino feito de maneira contextualizada e integrada a um contexto real é uma saída possível para o ensino de limite, por exemplo.

Dessa forma, espera-se que a matemática do Ensino Médio possa ser entendida como uma ferramenta a ser aplicada nas mais diferentes situações, seja na sua vida profissional ou em seus estudos futuros. A partir disso, a antiga concepção de que na matemática é necessária apenas a memorização de fórmulas e a aplicação de mecanismos para efetuar cálculos, muitas vezes desconectados de qualquer problema de utilidade real, poderá ser abandonada.

Rezende (2003, p. 13), destaca a educação básica como um agente de importante influência na determinação de dificuldades em Cálculo e de seu ensino.

> Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem do ensino superior Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação/ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático (REZENDE, 2003, p. 13).

Uma das causas de o Cálculo ser visto como algo difícil está relacionado com a construção da aprendizagem desde que a criança matricula-se na escola, uma vez que os professores do Ensino Fundamental, em geral não desenvolvem com as crianças a curiosidade em saber como teve origem o conhecimento que está sendo estudado.

Sendo a matemática uma disciplina onde o conhecimento é acumulativo e sequencial, seria necessário que desde as séries iniciais fosse desenvolvido o gosto das crianças em perceber que a matemática é mais que um amontoado de números e resolução de "continhas", mas principalmente uma forma de raciocinar sobre determinadas situações.

O que entendemos ter sido um equívoco, em tempos ainda recentes, deve ser repensado, pois em nossa visão, enquanto os estudantes pensarem na matemática como sinônimo de dificuldade não conseguiremos avançar no conhecimento matemático junto a eles.

O conceito de derivada já fez parte dos currículos das escolas secundárias há algumas décadas. Hoje, está presente no currículo de um pequeno grupo de escolas de Ensino Médio. Os poucos livros didáticos, por exemplo, (Guelli, 2003; Machado, A.S. 1991; Iezzi, G., Murakami, C. & Machado, N.J. 2002) que reservam alguns capítulos para tratar do assunto fazem-no através de uma abordagem tradicional do conceito, ou seja, partem da definição formal usando a noção de limite.

Podemos observar obstáculos nesta abordagem. Segundo Cornu (Tall (Ed) 1991), o conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, típico do pensamento requerido na matemática avançada. De acordo com Tall (2002), a definição formal não é o ponto de partida mais adequado para a apresentação de um conceito, ou seja, não funciona como raiz cognitiva adequada. Observamos, ainda, que esta apresentação, ou seja, introduzir o conceito de derivada pela definição formal, pode se tornar tão difícil para o estudante, que, na maioria das vezes, acaba se restringindo às regras de derivação.

Assim, entendemos que está mais do que na hora de realizarmos uma auto-avaliação de nossas práticas docentes e procurarmos uma nova abordagem para a matemática no ensino fundamental e médio, onde os estudantes consigam perceber onde podem aplicar e qual a utilidade da matemática na vida cotidiana. Ávila (1991, p. 2) resume bem a importância do Cálculo no Ensino médio:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2° grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento.

Desta forma a matemática poderia tornar-se muito prazerosa de ser aprendida. Com isso, poderíamos dar início a um processo de mudanças na visão que os alunos têm da matemática, entendendo a mesma, não mais como algo difícil e distante, mas que está presente e é indispensável na vida cotidiana de cada um de nós.

Assim, entendemos que estudar cálculo no ensino médio é um desafio possível de ser realizado.

# Capítulo 2

# FUNÇÃO: PRÉ-REQUISITO FUNDAMENTAL PARA O ESTUDO DO CÁLCULO

> [...] A generalização da noção de função se deve ao desenvolvimento da física após Galileu e Descartes. A ideia de uma variação em função do tempo (que Descartes havia excluído da geometria) é fundamental nos trabalhos de Galileu, onde já encontramos uma certa noção de função, no sentido de uma associação entre duas variabilidades, dada por uma lei de variação que é encarada como um objeto matemático. [...] (ROQUE, 2006, p. 2).

Sabemos que o conceito de função é um dos mais importantes da matemática. Sendo que existem várias abordagens, dependendo da forma como são escolhidos os axiomas. Uma relação entre dois conjuntos, onde há uma relação entre cada um de seus elementos. Também pode ser uma lei que para cada valor $x$ é correspondido por um único elemento $y$, também denotado por $f(x)$.

Existem inúmeros tipos de funções matemáticas, entre as principais temos: função trigonométrica, função linear, função modular, função quadrática, função exponencial, função logarítmica, função polinomial, dentre inúmeras outras. Cada função é definida por leis generalizadas e propriedades específicas. Podendo ainda ser classificadas em: função sobrejetora, função injetora, função bijetora, limitada, ilimitada, etc.

As funções são definidas abstratamente por certas relações. Por causa de sua generalidade, as funções aparecem em muitos contextos matemáticos e muitas áreas da matemática baseiam-se no estudo de funções. Assim como a noção intuitiva de funções não se limita a cálculos usando números individuais, a noção matemática de funções não se limita a cálculos e nem mesmo a situações que envolvam números.

Assim, uma função liga um domínio (conjunto de valores de entrada) com um segundo conjunto, o contradomínio (conjunto de valores de saída), de tal forma que a cada elemento do domínio está associado a exatamente um elemento do contradomínio. O conjunto dos elementos do contradomínio, que são relacionados pela $f$ a algum $x$ do domínio, é o conjunto imagem ou chamado simplesmente imagem.

## 2.1 - Evolução histórica do conceito de função

Para Oliveira (1997, p. 13 apud Youschkevith, 1981, p. 9) o conceito de função compreende três fases: a Antiguidade, onde são verificados alguns casos de dependência entre duas quantidades, onde ainda não se isolou as noções de quantidades variáveis e de funções. A idade Média, a qual se visualizou as noções funcionais sob a forma geométrica, onde cada caso concreto de dependência entre duas quantidades eram representados por gráficos ou descrição verbal. E o período Moderno, no qual começam a aparecer expressões analíticas de funções.

A antiguidade foi a época do primeiro estágio da concepção de função. Encontramos entre os babilônicos em 2000 anos a.C. tabelas de sexagésimos de quadrados e de raízes quadradas, cubos, raízes, entre outros. Entre os pitagóricos aparece a ideia de função no estudo de interdependência quantitativa de diferentes quantidades físicas, como, por exemplo, o comprimento e altura da nota emitida por cordas da mesma espécie pinçadas com tensões iguais. De acordo com Zuffi (2001), a noção de função para os gregos aparece em estudos ligados a fenômenos da natureza.

Mesmo com essas evidências, não há registros concretos de que os povos antigos tenham criado uma noção de função.

Na Idade Média, a noção de função começa a surgir numa forma mais concreta, pois nessa época Nicole Oresme (1323-1382) desenvolveu a teoria das latitudes e longitudes para descrever graus de intensidade das variáveis velocidade e tempo. Galileu Galilei (1564-1642), estudando sobre movimento de corpos em queda livre, expressou relações funcionais através da relação entre causas e efeitos. François Viéte (1540-1603) propôs a representação simbólica de uma quantidade desconhecida, fato que possibilitou exprimir relações através de fórmulas algébricas.

Descartes (1696-1750), em seus estudos sobre equações indeterminadas, introduziu a ideia de que uma equação em $x$ e $y$ é uma forma de expressar uma relação de dependência entre quantidades. (Eves, 2004).

Em 1673, Leibniz (1646-1716) utiliza a palavra "função" em seu manuscrito intitulado "*Methodus tangentium inversa seu de fonctionibus*" para se referir a quantidade, variando ponto a ponto de uma curva. Contudo ele não utiliza ainda a palavra função para designar a relação formal que liga a ordenada de um ponto de uma curva a sua abscissa, o que nos fica claro que ele já tem a ideia do conceito de função.

Por volta de 1698, Bernoulli (1667-1748) usa a palavra "função" para se referir a quantidades que dependem de uma variável e propõe a primeira definição de função como expressão analítica, sem construir uma função a partir da variável independente. A definição segundo Bernoulli: "Chamamos de função uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constante."

O que se pode observar é que os matemáticos do século XVIII não se preocupavam em formalizar o conceito de função, todavia o mesmo não ocorre no século XIX, segundo Zuffi (2001), Cauchy (1789-1857) estudou e aprofundou a concepção de função, porém sua definição era imprecisa. Cauchy definiu função da seguinte forma:

> Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si, de tal modo que, sendo fornecido o valor de uma delas, pode-se obter os valores de todas as outras, concebe-se normalmente estas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que recebe, então, o nome de variável independente; e as outras quantidades, expressas por meio da variável independente, são as que se chamam de funções desta variável. (CAUCHY, 1821, p. 31)

A palavra função foi, posteriormente, usada por Euler (1707-1783) em meados do século XVIII para descrever uma expressão envolvendo vários argumentos, notavelmente introduziu o conceito de uma função, e foi o primeiro a escrever $f(x)$ para denotar a função $f$ aplicada ao argumento $x$. Ele também introduziu a notação moderna para as funções trigonométricas.

> Uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja, por tal quantidade e por números ou quantidades constantes. Será, pois, função de $z$ toda expressão analítica que além da variável $z$ contiver quantidades constantes. Assim, $a + 3z$; $az - 4z^2$; $az + \sqrt{a^2 - z^2}$; $c^z$; etc. são funções de z (EULER, 1748, p. 4).

Com o tempo foi-se ampliando a definição de funções. Os matemáticos foram capazes de estudar "estranhos" objetos matemáticos tais como funções que não são diferenciáveis em qualquer de seus pontos.

Foi Dirichlet (1805-1859) quem criou a definição "formal" de função moderna o qual mais se aproxima do modelo atual:

> [...] se uma variável $y$ está relacionada com uma variável $x$ de tal modo, que sempre que é dado um valor numérico a $x$, existe uma regra segundo a qual um valor único de $y$ fica determinado, então diz-se que $y$ é função da variável independente $x$ (BOYER, 1974, p. 405).

Na definição de Dirichlet, uma função é um caso especial de uma relação. Relação é um conjunto de pares ordenados, onde cada elemento do par pertence a um dos conjuntos relacionados. Nas relações não existem restrições quanto à lei de correspondência entre os elementos dos conjuntos, já para as funções é costume introduzir restrições. Na maioria dos casos de interesse prático, entretanto, as diferenças entre as definições modernas e a de Euler são desprezáveis.

Durante o Século XIX, os matemáticos começaram a formalizar todos os diferentes ramos da matemática. Weierstrass (1815-1897) defendia que se construísse o cálculo infinitesimal sobre a Aritmética ao invés de sobre a Geometria, o que favorecia a definição de Euler em relação à de Leibniz. Mais para o final do século, os matemáticos começaram a tentar formalizar toda a Matemática usando Teoria dos conjuntos, e eles conseguiram obter definições de todos os objetos matemáticos em termos do conceito de conjunto.

Com a apresentação das definições anteriormente citadas, faltava pouco para se estabelecer o conceito de função. Então, com o surgimento da matemática moderna no século XX, Nicolas Bourbaki (pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, em sua maioria francesa, escreveram uma série de livros que expunham a matemática avançada moderna, que começaram a ser editados em 1935), redefiniu os conceitos básicos na linguagem de conjuntos, e propõe a seguinte definição de função:

> Sejam $E$ e $F$ dois conjuntos, distintos ou não. A relação entre uma variável $x$ de $E$ e uma variável $y$ de $F$, é chamada de uma relação funcional em $y$ se, para todo $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está associado, na relação dada, com $x$. Damos o nome de função para a operação que, de alguma forma, associa a cada elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que é associado a $x$ pela relação estabelecida; diz-se que $y$ é o valor da função relativo ao elemento $x$, e que a função está determinada pela relação funcional dada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (KLEINER, 1989, p. 18).

Analisando o contexto histórico, percebemos como foi árduo o desenvolvimento do conceito de função. Para Zuffi (2001), os problemas resolvidos pelos matemáticos no decorrer dos tempos exerceram influência na elaboração do conceito de função. Ela destaca ainda que, entre professores do ensino médio, a linguagem matemática utilizada para expressar suas próprias concepções sobre o conceito de função tem pontos coincidentes com os momentos históricos citados anteriormente.

## 2.2 - Aproximações que podem ser usadas no ensino médio para introduzir a ideia de limite

Segundo os parâmetros curriculares nacionais (PCN) o estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar o ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função, posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras.

O estudo da função quadrática inicia no 9º ano, nesta fase os autores demonstram a relação entre duas grandezas e as suas formas de resolução, além de relacionar seu aspecto histórico e respectivas aplicações. No 1º ano do ensino médio essa linguagem é aprimorada, agora os alunos aprendem a identificar e definir domínio, contradomínio, conjunto imagem, calcular o valor máximo e mínimo da função, resolvem problemas e modelam situações utilizando funções do 2º grau.

Ávila, num artigo da RPM 60 (2006), ressalta a importância de se iniciar o estudo do cálculo ainda no ensino médio. Para ele uma forma simplista de se fazer isso é falando sobre a função de 2º grau que, segundo o autor, é o exemplo mais adequado quando se quer dar início ao conceito de limite. A seguir apresenta a ideia do autor através da função $y = f(x) = x^2$.

Aqui o professor desempenha papel importante, pois deve calcular pausadamente alguns valores de $y$ para valores atribuídos a $x$, como $x = 0, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2, \pm 5/2, \pm 3$. É até conveniente fazer uma tabela desses valores (Veja Tabela 2.1 abaixo).

| $x$ | $y = f(x) = x^2$ |
|---|---|
| -3 | 9 |
| -5/2 | 25/4 |
| -2 | 4 |
| -3/2 | 9/4 |
| -1 | 1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 3/2 | 9/4 |
| 2 | 4 |
| 5/2 | 25/4 |
| 3 | 9 |

Tabela 2.1: Valores que evidenciam a simetria do gráfico da função $f(x) = x^2$.

Um dos benefícios desses cálculos é a facilidade em mostrar ao aluno que $f(x) = f(-x)$, o que permite introduzir o conceito de função par a partir de uma situação bem concreta. De um modo geral, diz-se que uma função $f(x)$ é par se ela estiver definida num intervalo simétrico em relação à origem (isto é, intervalo do tipo $[-a, a]$) e $f(-x) = f(x)$ para todo $x$ nesse intervalo. O aluno vai logo perceber que fica rapidamente difícil "plotar" pontos com valores maiores de $x$, como 4, 5, etc. Não obstante isso costumou "vender" a imagem de que o gráfico tem o aspecto ilustrado na Figura 2.1.

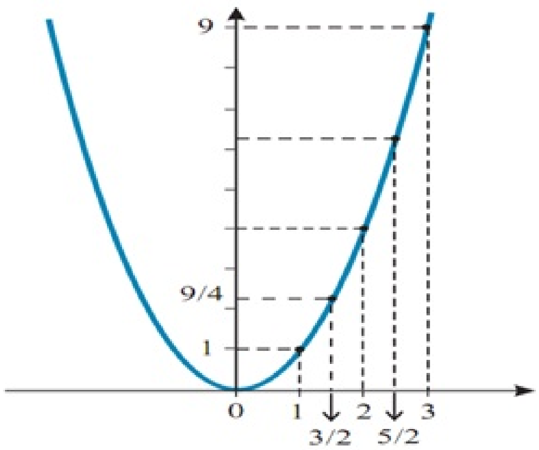



Figura 2.1: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

Mas, como ter certeza de que o gráfico é uma curva que tem a concavidade sempre voltada para cima, se não temos como continuar fazendo o gráfico além de valores relativamente pequenos, como $x = 3$? Será que lá muito longe a curva não vai ter o aspecto ilustrado na Figura 2.2?

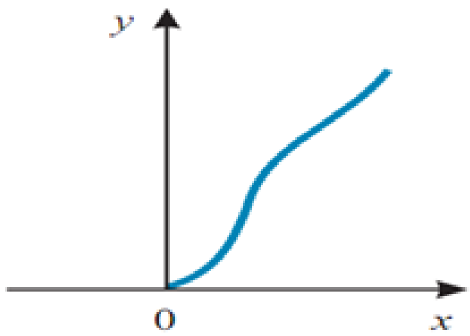



Figura 2.2: Curva cuja concavidade não é voltada para cima.

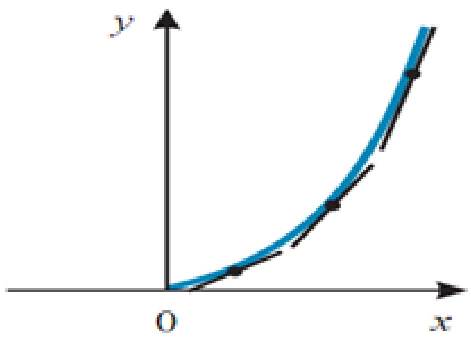



Figura 2.3: Gráfico de $f(x) = x^2$ e algumas de suas retas tangentes.

Para responder a essa pergunta, recorremos ao declive da reta tangente. Com efeito, dizer que a concavidade da curva está voltada para cima significa precisamente que o declive da reta tangente cresce à medida que crescemos valores atribuídos a $x$, como ilustra a Figura 2.3. Mas como saber que esse declive é sempre crescente? A única maneira de responder a essa pergunta é calcular esse declive. Pode parecer um desafio sério, já que nem sabemos como definir reta tangente a uma curva qualquer.

Para ilustrar esta situação, o professor pode, facilmente, utilizar uma animação, no GeoGebra (software utilizado para construir gráficos), de reta tangente ao longo da parábola $y = x^2$. Como, por exemplo, um automóvel percorrendo a parábola e tendo um "farol" laser apontando para frente e para trás. Em uma ideia intuitiva de como o carro sairia pela tangente. Nesse ponto, teríamos a visualização da reta tangente sem, contudo, saber ainda sua equação. O problema pode ser colocado para a turma da seguinte maneira: "Como encontrar a equação da reta tangente, sabendo apenas um ponto onde ela passa?"

Sabemos, da geometria plana, que uma reta no plano é determinada por dois pontos distintos. Fixando, então, o ponto $(x_o, x_o^2)$, da parábola, precisamos encontrar outro ponto da reta. Visualizando a situação, podemos perceber que este outro ponto não está na parábola. Então, com uma aproximação, pegamos um ponto $(x, x^2)$ da parábola, bem próximo do ponto dado. Quanto mais próximo este ponto estiver do primeiro, mais a reta determinada por estes pontos estará próxima da tangente. O professor pode salientar que, na aproximação, sempre se irá precisar de dois pontos distintos, dando a entender que nunca $x$ será $x_o$. Por fim, a conclusão pode ser feita analisando uma tabela de aproximações.

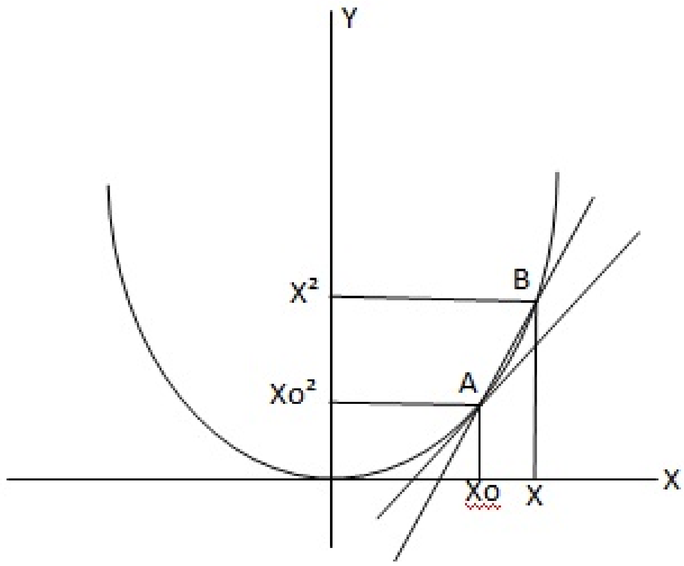



Figura 2.4: Gráfico de $y = x^2$.

A reta que passa por $A = (x_0, x_0^2)$ e $B = (x, x^2)$ tem coeficiente angular $m(x) = \dfrac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}$, para $x \neq x_0$. Simplificando obtemos:

$$m(x) = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0.$$

Assim fica claro que quanto mais próximo $x$ estiver de $x_0$, $m(x)$ estará próximo de $2x_0$. Logo a reta tangente terá coeficiente angular $2x_0$ e assim ela estará inteiramente determinada. Argumentando que este $x_0$ pode ser qualquer valor. Nesse sentido podemos concluir que o gráfico da função $y = x^2$ não pode ser o da Figura 2.2, e sim o da Figura 2.3.

Outro exemplo prático para a ideia de limite é o da velocidade instantânea aproximada pela velocidade média. Se conhecermos a posição do corpo em cada instante de tempo pode-se calcular velocidades médias para diferentes intervalos, conhecendo-se, assim, novos aspectos do movimento. Nesse caso, partimos da (coordenada de) posição em função do tempo para obter as velocidades médias. Se dois movimentos começam e terminam nos mesmos pontos e têm a mesma duração total, a velocidade média total será a mesma. Isto, no entanto, não fornece detalhes sobre o movimento de cada um.

**Exemplo 2.1.** Os pardais medem a velocidade média no intervalo de tempo entre a passagem das rodas dianteiras e as traseiras do carro, por cima de um cabo estendido na estrada e usam esse valor para aproximar a velocidade instantânea do carro ao passar pelo medidor. Faça uma estimativa para esse intervalo de tempo, quando o velocímetro marca 90 km/h. Para fazer o cálculo, estime a distância entre as rodas dianteiras e traseiras.

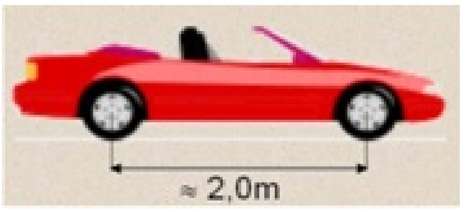



Figura 2.5: Distância aproximada entre as rodas dianteiras e traseiras de um carro.

Denotando $\bar{v}$ como sendo a velocidade média do carro, $\Delta S$ a variação da posição e $\Delta t$ a variação do tempo, temos:

$$\bar{v} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \text{ então } \Delta t = \frac{\Delta S}{\bar{v}}.$$

Como $\Delta S = 2m = 2 \cdot 10^{-3} km$ e $\bar{v} = 90\frac{km}{h}$, segue que

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 10^{-3} km}{90\frac{km}{h}} \approx 2 \cdot 10^{-5} h$$

Logo, $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 3600s \approx 0,08s$ que corresponde a 8 centésimos de segundo.

No exemplo do pardal eletrônico (Exemplo 2.1), um intervalo de tempo de alguns centésimos de segundo para calcular a velocidade média é pequeno o suficiente para considerar a velocidade média calculada pelo medidor como sendo uma boa aproximação para a velocidade instantânea do carro.

Velocidade instantânea é a velocidade do corpo num dado instante de tempo.

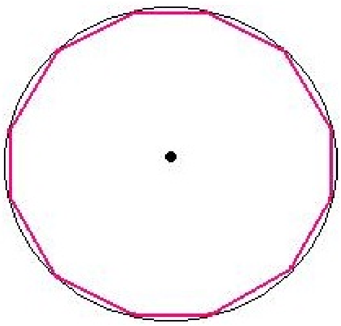
Velocidade instantânea (ou, simplesmente, velocidade) não é definida como a razão entre deslocamento e intervalo de tempo, ao contrário da velocidade média. Mas pode surgir a partir da velocidade média, juntamente com os conceitos matemáticos de limite e derivada.

A velocidade em um dado instante é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo $\Delta t$ até torná-lo próximo de zero. À medida que $\Delta t$ diminui, a velocidade média se aproxima de um valor-limite, que é a velocidade instantânea.

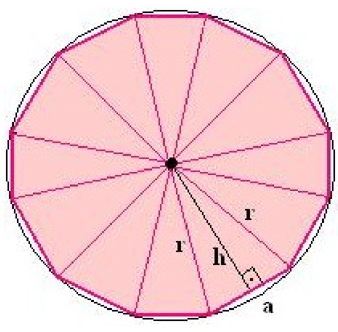
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

**Exemplo 2.2.** Demonstre a fórmula para o cálculo da área de um círculo de raio $r$.

Para demonstrarmos a fórmula utilizada no cálculo da área de um círculo temos que imaginar uma circunferência circunscrita a um polígono regular de $n$ lados:



Os segmentos de reta que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo. Assim, formando $n$ triângulos no polígono regular, podemos dizer que a área de um polígono regular de $n$ lados será igual a $n$ vezes a área de um triângulo:



$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Sendo $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$ o valor do perímetro do polígono regular, temos que

$$A = (\text{perímetro do polígono regular}) \cdot \frac{h}{2}$$

Agora imagine que se aumentarmos o número de lados do polígono regular, a tendência é do seu perímetro ficar cada vez mais parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo. Assim, podemos concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de $n$ lados, como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} A = &\quad (\text{comprimento da circunferência}) \cdot \frac{\text{raio}}{2} \\ = &\quad 2\pi r \cdot \frac{r}{2} \\ = &\quad \pi r^2. \end{aligned}$$

Capítulo 3

# FALANDO SOBRE LIMITES

Ao se estudar funções, é possível identificar o comportamento de uma determinada função em todo seu domínio, ainda que a única ferramenta conhecida seja a tabela de valores. A partir disso pode-se tentar resolver um problema: conhecer o comportamento da função nas proximidades de um número que não pertence ao seu domínio. Com os mesmos instrumentos conseguimos solucioná-lo. No entanto, isso pouco nos dá subsídios para afirmar com exatidão o seu comportamento. Sendo assim, precisaremos estender nossos conhecimentos sobre funções e nos levar ao conceito de limite.

O conceito de Limite de uma função realiza um papel muito importante em toda teoria matemática envolvida com o Cálculo Diferencial e Integral, um campo da matemática que iniciou no século XVII com os trabalhos de Newton e Leibnitz que visava resolver problemas de mecânica e Geometria. Há uma cadeia ordenada muito bem estabelecida no Cálculo: Conjuntos, funções, limites, derivadas e integrais.

Para entender os conceitos mais importantes da lista acima, a Teoria de Limites é fundamental. O motivo para isto é que nem tudo o que queremos realizar, ocorre no meio físico e quase sempre é necessário introduzir um modelo que procura algo que está fora das coisas comuns e esta procura ocorre com os limites nos estudos de sequências, séries, cálculos de raízes de funções. Por exemplo, obter uma raiz de uma função polinomial de grau maior do que 4 somente é possível através de métodos numéricos que utilizam fortemente as ideias de limites e continuidade.

## 3.1 - História dos limites

A história de limites descrita abaixo foi extraída dos livros: Cálculo de George B. Thomas (FINNEY, Ross L., WEIR Maurice D., GIORDANO Frank R.) e A Rainha Das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática de GARBI, Gilberto Geraldo.

Limites nos apresentam um grande paradoxo. Todos os conceitos principais do cálculo como derivada, continuidade, integral, convergência/divergência são definidos em termos de limites. Limite é o conceito mais fundamental do Cálculo; de fato, limite é o que distingue, no nível mais básico, o cálculo de álgebra, geometria e o resto da matemática. Portanto, em termos do desenvolvimento ordenado e lógico do cálculo, limites devem vir primeiro. Porém, o registro histórico é justamente o oposto. Por vários séculos, as noções de limite eram confusas, com ideias vagas e algumas vezes filosóficas sobre o infinito (números infinitamente grandes e infinitamente pequenos e outras entidades matemáticas) e com intuição geométrica subjetiva e indefinida.

O termo limite em nosso sentido moderno é um produto do iluminismo na Europa no final do século XVIII e início do século XIX, e nossa definição moderna tem menos de 150 anos de idade. Até este período, existiram apenas raras ocasiões nas quais a ideia de limite foi usada rigorosamente e corretamente.

A primeira vez que limites foram necessários foi para a resolução dos quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.). No primeiro paradoxo, a Dicotomia, Zenão colocou um objeto se movendo uma distância finita entre dois pontos fixos em uma série infinita de intervalos de tempo (o tempo necessário para se mover metade da distância, em seguida o tempo necessário para se mover metade da distância restante, etc.) durante o qual o movimento deve ocorrer. A conclusão surpreendente de Zenão foi que o movimento era impossível! Aristóteles (384-322 a.C.) tentou refutar os paradoxos de Zenão com argumentos filosóficos. Em matemática, uma aplicação cuidadosa do conceito de limite resolverá as questões levantadas pelos paradoxos de Zenão.

Para suas demonstrações rigorosas das fórmulas para certas áreas e volumes, Arquimedes (287-212 a.C.) encontrou várias séries infinitas, somas que contêm um número infinito de termos. Não possuindo o conceito de limite propriamente dito, Arquimedes inventou argumentos muito engenhosos chamados de redução ao absurdo duplo, que, na verdade, incorporam alguns detalhes técnicos do que agora chamamos de limites.

Cálculo é também algumas vezes descrito como o estudo de curvas, superfícies e sólidos. O desenvolvimento da geometria destes objetos floresceu seguindo a invenção da geometria analítica por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650). A geometria analítica é, essencialmente, o casamento da geometria com a álgebra, e cada uma melhora a outra.

Fermat desenvolveu um método algébrico para encontrar os pontos mais altos e mais baixos sobre certas curvas. Descrevendo a curva em questão por uma equação, Fermat chamou um número pequeno de E, e então fez alguns cálculos algébricos legítimos, e finalmente assumiu $E = 0$ de tal maneira que todos os termos restantes nos quais E estava presente desapareceriam! Essencialmente, Fermat colocou de lado o limite com o argumento que $E$ é "infinitamente pequeno".

Geometricamente, Fermat estava tentando mostrar que, exatamente nos pontos mais altos e mais baixos ao longo da curva, as retas tangentes à curva são horizontais, isto é, têm inclinação zero. Encontrar retas tangentes às curvas é um dos dois problemas mais fundamentais do cálculo. Problemas envolvendo tangentes são uma parte do que chamamos agora de estudo das derivadas. Durante o século XVII, vários geômetras desenvolveram esquemas algébricos complicados para encontrar retas tangentes a certas curvas.

Descartes tinha um processo que usava raízes duplas de uma equação auxiliar, e essa técnica foi melhorada pelo matemático Johan Hudde (1628-1704), que era também o prefeito de Amsterdã. René de Sluse (1622-1685) inventou um método ainda mais complicado para obter tangentes à curvas. Em cada um desses cálculos, o limite deveria ter sido usado em alguma etapa crítica, mas não foi. Nenhum destes geômetras percebeu a necessidade da ideia de limite, e assim cada um encontrou uma maneira inteligente para alcançar seus resultados, os quais estavam corretos, mas com meios que, agora reconhecemos, faltam fundamentos rigorosos.

Determinar valores exatos para áreas de regiões limitadas, pelo menos em parte, por curvas é o segundo problema fundamental do cálculo. Este são chamados freqüentemente de problemas de quadratura, e, intimamente relacionados a eles, estão os problemas de cubatura, encontrar volumes de sólidos limitados, pelo menos em parte, por superfícies curvas. Eles nos levam a integrais. Johanne Kepler (1571-1630), o famoso astrônomo, foi um dos primeiros estudiosos dos problemas de cubatura. Bonaventura Cavalieri (1598-1647) desenvolveu uma teoria elaborada de quadraturas. Outros, tais como Evangelista Torricelli (1608-1647), Fermat, John Wallis (1616-1703), Gilles Personne de Roberval (1602-1675), e Gregory St. Vincent (1584-1667) inventaram técnicas de quadratura e/ou cubatura que se aplicam a curvas e sólidos específicos ou famílias de curvas.

Mas nenhum deles usou limites! Seus resultados eram quase todos corretos, mas cada um dependia de um malabarismo algébrico ou apelavam para intuição geométrica ou filosófica questionável em algum ponto crítico. A necessidade de limites não era reconhecida.

Em quase todos os seus trabalhos, que agora são considerados como cálculo, Isaac Newton (1642-1727), também não reconheceu o papel fundamental do limite. Para séries infinitas, Newton raciocinou meramente por analogia: se fosse possível executar operações algébricas em polinômios, então seria possível fazer o mesmo com o número infinito de termos de uma série infinita. Newton calculou o que ele chamou de flúxions a curvas, não exatamente derivadas, mas muito próximo. O processo que ele usou para esses cálculos era muito próximo do método de Fermat. Neste, e na maioria dos outros trabalhos comparáveis, Newton negligenciou o limite.

Por outro lado, em seu "Principia Mathematica" (1687), talvez o maior trabalho em matemática e ciência, Newton foi o primeiro a reconhecer que o limite deve ser o ponto de partida para problemas de tangência, quadratura e afins. No início do Livro I do Principia, Newton tentou dar uma formulação precisa do conceito de limite: Quantidades, e as razões de quantidades, as quais em qualquer tempo finito convergem continuamente para igualdade, e antes do final daquele tempo se aproximam entre si por qualquer dada diferença, tornam-se iguais no final.

Existiram críticas sobre esta afirmação e sobre a discussão que a seguiu, notadamente por George Berkeley (1685-1753). Mas a genialidade de Newton tinha descoberto o papel fundamental que o limite tinha que desempenhar no desenvolvimento lógico do cálculo. E, apesar de sua linguagem rebuscada, a semente da definição moderna de limite estava presente em suas afirmações.

Infelizmente, para a fundamentação rigorosa do cálculo, por muitas décadas, ninguém observou estas dicas que Newton tinha fornecido. As principais contribuições ao cálculo de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) foram as notações e as fórmulas básicas para as derivadas e integrais (as quais usamos desde então) e o Teorema Fundamental do Cálculo. Com estas ferramentas poderosas, o número de curvas e sólidos para os quais derivadas e integrais podiam ser facilmente calculadas se expandiram rapidamente. Problemas desafiadores de geometria foram resolvidos; mais e mais aplicações do cálculo à ciência, principalmente física e astronomia, foram descobertas; e novos campos da matemática, especialmente equações diferenciais e o cálculo de variações, foram criados. Dentre os líderes desse desenvolvimento do século 18 estavam vários membros da família Bernoulli, Johann I (1667-1748), Nicolas I (1687–1759) e Daniel (1700-1782), Brook Taylor (1685-1731), Leonhard Euler (1707-1783), e Alexis Claude Clairaut (1713-1765).

O cálculo se desenvolveu rapidamente, pelos seus vários sucessos no século XVIII, e pouca atenção foi dada aos seus fundamentos, muito menos ao limite e seus detalhes. Colin Maclaurin (1698-1746) defendeu o tratamento dos fluxions de Newton do ataque de George Berkeley. Mas Maclaurin reverteu a argumentos do século 17 similares aos de Fermat e apenas ocasionalmente usou a redução ao absurdo dupla de Arquimedes. Apesar de suas boas intenções, Maclaurin passou por oportunidades de seguir a sugestão de Newton sobre limites. Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) foi o único cientista daquele tempo que reconheceu explicitamente a importância central do limite no cálculo.

Na famosa Encyclopédie (1751-1776), d'Alembert afirmou que a definição apropriada da derivada necessitava um entendimento do limite primeiro e, então, deu a definição explícita: Uma quantidade é o limite de uma outra quantidade quando a segunda puder se aproximar da primeira dentro de qualquer precisão dada, não importa quão pequena, apesar da segunda quantidade nunca exceder a quantidade que ela aproxima. Em termos gerais, d'Alembert percebeu que, "a teoria de limites era a verdadeira metafísica do cálculo".

A preocupação sobre a falta de fundamento rigoroso para o cálculo cresceu durante os últimos anos do século XVIII. Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim ofereceu um prêmio para um ensaio que explicasse com sucesso uma teoria do infinitamente pequeno e do infinitamente grande em matemática e que poderia, por sua vez, ser usada para colocar uma base sólida para o cálculo.

Embora este prêmio tenha sido dado, o trabalho vencedor "longo e tedioso" de Simon L'Huilier (1750-1840) não foi considerado uma solução viável para os problemas colocados. Lazare N. M. Carnot (1753-1823) produziu uma tentativa popular de explicar o papel do limite no cálculo como "a compensação de erros", mas ele não explicou como estes erros se cancelariam mutuamente perfeitamente.

No final do século XVIII, o grande matemático da época, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), conseguiu reformular toda a mecânica em termos de cálculo. Nos anos que seguiram a Revolução Francesa, Lagrange concentrou sua atenção nos problemas da fundamentação do cálculo. Sua solução, Funções Analíticas (1797), desligou o cálculo de "qualquer consideração do infinitamente pequeno ou quantidades imperceptíveis, de limites ou de flúxions". Renomado por suas outras contribuições ao cálculo, Lagrange fez um esforço heróico (como sabemos agora, com uma falha fatal) para tornar o cálculo puramente algébrico eliminando limites inteiramente.

Ao longo do século XVIII, havia pouca preocupação com convergência ou divergência de seqüências e séries infinitas; hoje, entendemos que tais problemas requerem o uso de limites. Em 1812, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) produziu o primeiro tratamento estritamente rigoroso da convergência de seqüências e séries, embora ele não tenha usado a terminologia de limites. Na sua famosa Teoria Analítica do Calor, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) tentou definir a convergência de uma série infinita, novamente sem usar limites, mas então ele afirmou que qualquer função poderia ser escrita como uma de suas séries, e não mencionou a convergência ou divergência desta série.

No primeiro estudo cuidadoso e rigoroso das diferenças entre curvas contínuas e descontínuas e funções, Bernhard Bolzano (1781-1848) olhou além da noção intuitiva da ausência de buracos e quebras e encontrou os conceitos mais fundamentais os quais expressamos hoje em termos de limites.

No começo do século XVIII, as ideias sobre limites eram com certeza confusas. Enquanto Augustin Louis Cauchy (1789-1857) estava procurando por uma exposição clara e rigorosamente correta do cálculo para apresentar aos seus estudantes de engenharia na École polytechnique em Paris, ele encontrou erros no programa estabelecido por Lagrange. Então, Cauchy começou o seu curso de cálculo do nada; ele começou com uma definição moderna de limite. Começando em 1821, ele escreveu as suas próprias notas de aula, essencialmente seus próprios livros, o primeiro chamado de Cours d'analyse (Curso de Análise).

Nas suas classes e nestes livros-texto clássicos, Cauchy usou o princípio de limite como a base para introduções precisas à continuidade e convergência, a derivada, a integral, e o resto do cálculo. Contudo, Cauchy perdeu alguns dos detalhes técnicos, especialmente na aplicação da sua definição de limite a funções contínuas e à convergência de certas séries infinitas. Niels Henrik Abel (1802–1829) e Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) estavam entre aqueles que desencavaram estes problemas delicados e não intuitivos. Nas décadas de 1840 e 1850, enquanto era um professor do ensino médio, Karl Weierstrass (1815-1897) determinou que a primeira etapa necessária para corrigir estes erros era restabelecer a definição original de Cauchy do limite em termos estritamente aritméticos, usando apenas valores absolutos e desigualdades.

A exposição de Weierstrass é exatamente aquela que encontramos no livro de Cálculo de Thomas. Weierstrass prosseguiu em uma carreira brilhante como professor de matemática na Universidade de Berlim. Lá ele desenvolveu um programa para trazer rigor aritmético para todo o cálculo e à análise matemática.

## 3.2 - Noção intuitiva de limite

O desenvolvimento teórico de grande parte do Cálculo foi feito utilizando a noção de limite e o conceito de limite é uma das ideias que distinguem o Cálculo da Álgebra e da Geometria. Por exemplo, as de noções de derivada e de integral definida, independente de seu significado geométrico ou físico, são estabelecidas usando limites.

Inicialmente apresentaremos a ideia intuitiva de limite, isso devido ao fato de já no ensino médio se deve preparar o aluno para essa concepção, o que se recomenda é uma ideia bem informal para que o aluno, ao se deparar com conceitos novos, não se sinta desmotivado. Muito pelo contrário, o que se quer na verdade é estimular o aluno para uma busca de conhecimento.

A princípio podemos fazer um quadro de sucessões numéricas, mostrando ao aluno o que acontece quando acrescentamos novos números à sequência pré-estabelecida anteriormente. Uma sugestão está descrita na tabela abaixo:

| Sucessões numéricas | | Dizemos que: |
|---|---|---|
| $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ | Os termos tornam-se cada vez maiores, sem atingir um limite | $x \to +\infty$ |
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ | Os números aproximam-se cada vez mais de 1, sem nunca atingir esse valor | $x \to 1$ |
| $1, 0, -1, -2, -3, ...$ | Os termos tornam-se cada vez menor, sem atingir um limite | $x \to -\infty$ |
| $1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{6}{7}, 7, \dots$ | Os termos oscilam sem tender a um limite | |

Tabela 3.1: Quadro de sucessões numéricas.

Através dessa tabela já podemos familiarizar o aluno com a ideia de infinito, e explicar o que significa uma sequência tender a certo valor, ou quando oscilam sem tender a um determinado valor, nesse sentido vai se tendo a ideia de limite.

### 3.2.1 Definição informal de limite

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto em torno de $x_0$, exceto, possivelmente em $x_0$. Se $f(x)$ fica arbitrariamente próxima de $L$ para todos os valores de $x$ suficientemente próximos de $x_0$, então dizemos que a função $f$ tem limite $L$ quando $x$ tende para $x_0$ e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Para fazer com que o aluno entenda melhor a definição, o que podemos fazer é o quadro de aproximações tanto à direita quanto à esquerda. Assim podemos ter uma ideia melhor do que está acontecendo com a função, como por exemplo:

Seja $y = f(x) = 2x + 1$.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1,5 | 4 |
| 1,3 | 3,6 |
| 1,1 | 3,2 |
| 1,05 | 3,1 |
| 1,02 | 3,04 |
| 1,01 | 3,02 |

Tabela 3.2: Aproximação à direita.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0,5 | 2 |
| 0,7 | 2,4 |
| 0,9 | 2,8 |
| 0,95 | 2,9 |
| 0,98 | 2,96 |
| 0,99 | 2,98 |

Tabela 3.3: Aproximação à esquerda.

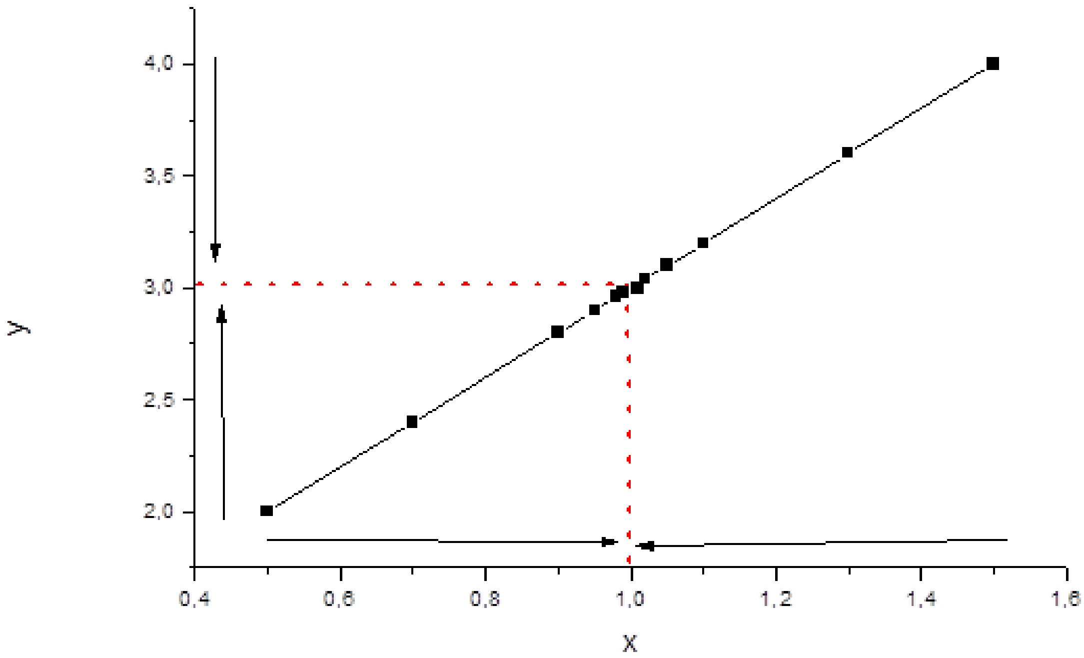



Figura 3.1: Gráfico de aproximações à direita e à esquerda de $x = 1$ para $f(x) = 2x+1$.

Nesse sentido podemos mostrar ao aluno que quando $x$ tende para 1, por quaisquer dos lados, $y$ tende para 3, ou seja, $(x \to 1)$ implica em $(y \to 3)$. Assim, podemos mostrar que a função é expressa da seguinte forma:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x + 1) = 3.$$

No caso apresentado devemos observar que o limite coincide com o valor da função no ponto. Logicamente não vale para todas as situações, então devemos mostrar exemplos simples de cada caso.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

Um exemplo que pode ser citado é o caso da função $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$, pois nessa função $f(x)$ não é definida para $x = 1$, o que fica fácil mostrar ao aluno, isso devido ao gráfico ser de fácil compreensão. Porém, mesmo a função não sendo definida no ponto, o limite existe e é igual 3.

Abaixo mostramos o quadro e o gráfico de aproximações tanto à direita quanto à esquerda, assim podemos ter uma ideia melhor do que está acontecendo com a função

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}.$$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1,4 | 3,4 |
| 1,2 | 3,2 |
| 1,1 | 3,1 |
| 1,05 | 3,05 |
| 1,02 | 3,02 |
| 1,01 | 3,01 |

Tabela 3.4: Aproximação à direita.

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0,5 | 2,5 |
| 0,7 | 2,7 |
| 0,8 | 2,8 |
| 0,9 | 2,9 |
| 0,98 | 2,98 |
| 0,99 | 2,99 |

Tabela 3.5: Aproximação à esquerda.

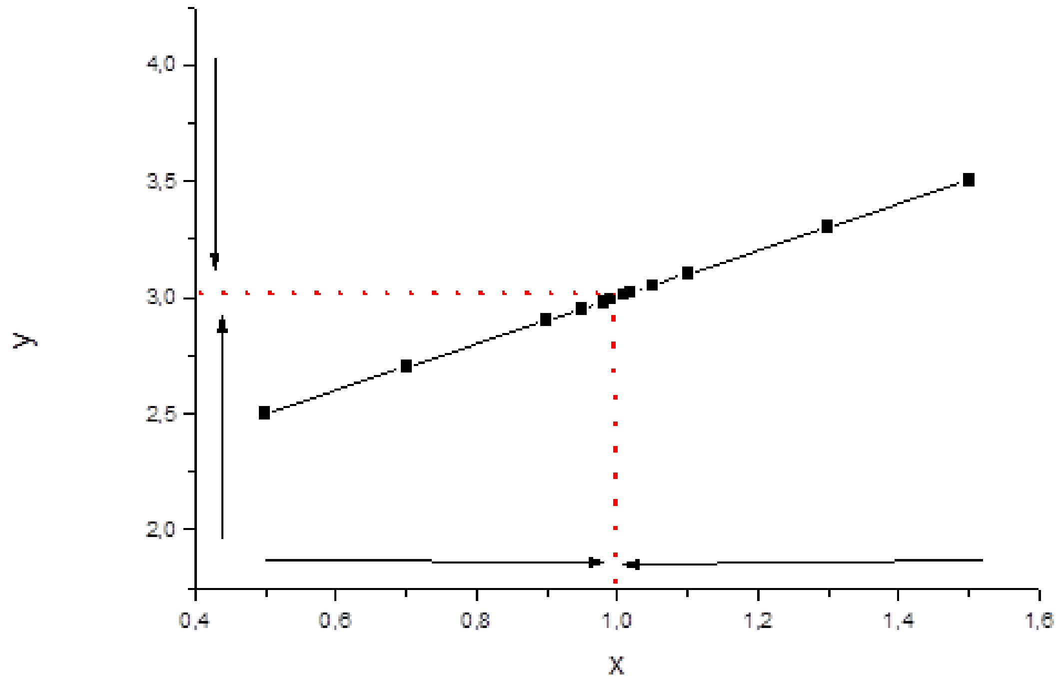



Figura 3.2: Gráfico de aproximações à direita e à esquerda de $x = 1$ para $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

## 3.3 - Limites laterais

Quando faz-se $x$ tender para $a$, por valores menores que $a$, está-se calculando o limite lateral esquerdo. $x \to a^-$

Quando faz-se $x$ tender para $a$, por valores maiores que $a$, está-se calculando o limite lateral direito. $x \to a^+$

Para o limite existir, os limites laterais devem ser iguais: $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

A seguir mostraremos alguns exemplos de como determinar o limite de funções usando a definição de limites laterais.

**1)** Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 3$.

Estudemos o comportamento da função $f(x)$ quando $x$ estiver próximo de 1, mas não for igual a 1.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$$

| $x$ | $f(x) = x + 3$ |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 0,25 | 3,25 |
| 0,75 | 3,75 |
| 0,9 | 3,9 |
| 0,99 | 3,99 |
| 0,999 | 3,999 |

Tabela 3.6: Comportamento de $f(x) = x+3$ para valores de $x$ próximos de 1 pela esquerda.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 4$$

| $x$ | $f(x) = x + 3$ |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 1,5 | 4,5 |
| 1,25 | 4,25 |
| 1,1 | 4,1 |
| 1,01 | 4,01 |
| 1,001 | 4,001 |
| 1,0001 | 4,0001 |

Tabela 3.7: Comportamento de $f(x) = x+3$ para valores de $x$ próximos de 1 pela direita.

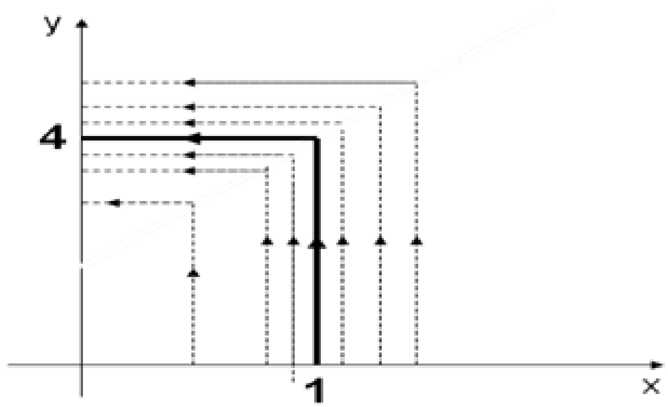



Figura 3.3: Comportamento de $f(x)$ para valores de $x$ próximos de 1.

**2)** Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{para } x \leq 1 \\ x + 3, & \text{para } x > 1 \end{cases}.$$

Determinar, graficamente, $\lim_{x \to 1} f(x)$.

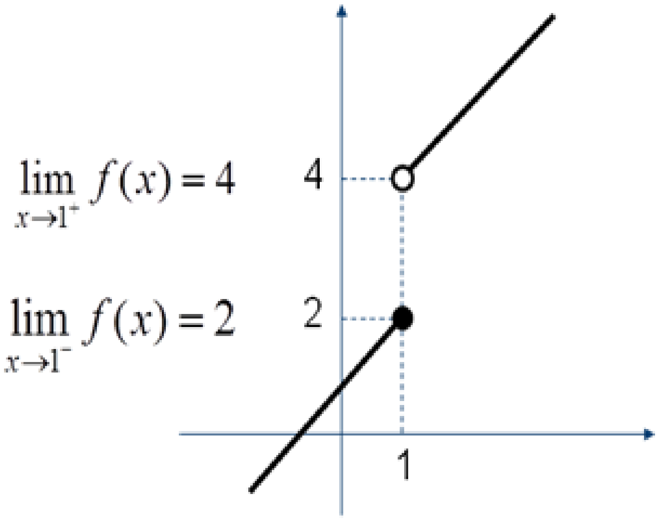



Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = x + 1,$ se $x \leq 1;$ $f(x) = x + 3$, se $x > 1$.

Não existe limite de $f(x)$, quando $x$ tende para 1.

**3)** Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por: $f(x) = x^2$.

**(a)** Através de uma tabela de valores de $f(x)$ calcule o limite da função quando $x$ se aproxima de 2.

aproximação pela esquerda de 2

aproximação pela direita de 2

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1,900 | 3,610000 |
| 1,990 | 3,960100 |
| 1,999 | 3,996001 |
| 2,000 | 4,000000 |
| 2,001 | 4,004001 |
| 2,010 | 4,040100 |
| 2,100 | 4,410000 |

Tabela 3.8: Comportamento de $f(x) = x^2$ para valores de $x$ próximos de 2 e para $x = 2$.

**(b)** Use o gráfico para comprovar o resultado obtido no item (a).

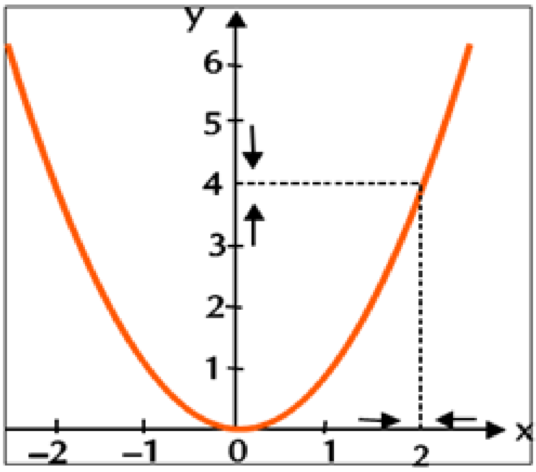



Figura 3.5: Gráfico de $f(x) = x^2$.

O que podemos verificar nessa função é que quando temos $x$ se aproximando de 2 o limite da função $f(x) = x^2$ vai se aproximando de 4. Portanto $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

**4)** Estime o valor dos limites abaixo através dos gráficos:

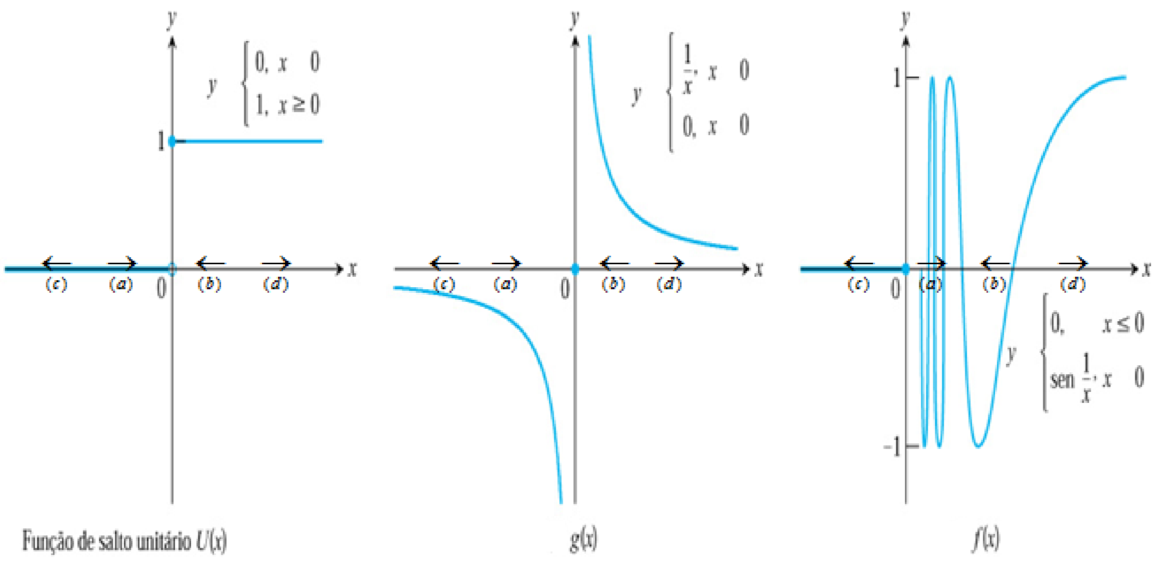



Figura 3.6: Gráficos de algumas funções.

$(a)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} U(x) = 0$

$(b)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} U(x) = 1$

$(c)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} U(x) = 0$

$(d)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} U(x) = 1$

$(a)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$

$(b)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$

$(c)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$

$(b)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

$(a)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$(b)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \quad \nexists$

$(c)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$

$(b)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \quad \nexists$

**5)** Use o gráfico abaixo (Figura 3.7) para concluir se existem os limites da função $f(x)$ quando $x$ se aproxima de $-3$ e $3$.

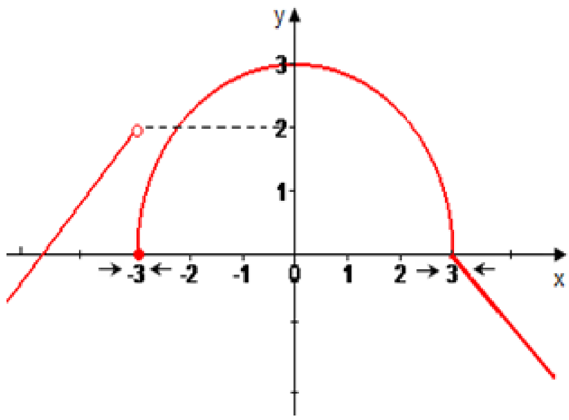



Figura 3.7: Gráfico de uma função cujo limite em $x = 3$ é 0 e em $x = -3$ não existe.

Analisando o gráfico, visualizamos que quando $x$ se aproxima de $-3$ pela esquerda o valor de $f(x)$ se aproxima de 2 e quando $x$ se aproxima de $-3$ pela direita o valor de $f(x)$ se aproxima de 0, logo não existe limite de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de $-3$. Observando o comportamento do gráfico nas proximidades de $x = 3$, percebemos que o valor de $f(x)$ se aproxima de 0 quando $x$ se aproxima de 3 por valores maiores ou menores que 3. Portanto existe limite de $f(x)$ quando $x$ se aproxima de 3 e escrevemos $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$.

**6)** Para a função $y = \sqrt{x-1}$, cujo gráfico é dado na Figura 3.8, verifique que os limites correspondem aos valores dados:

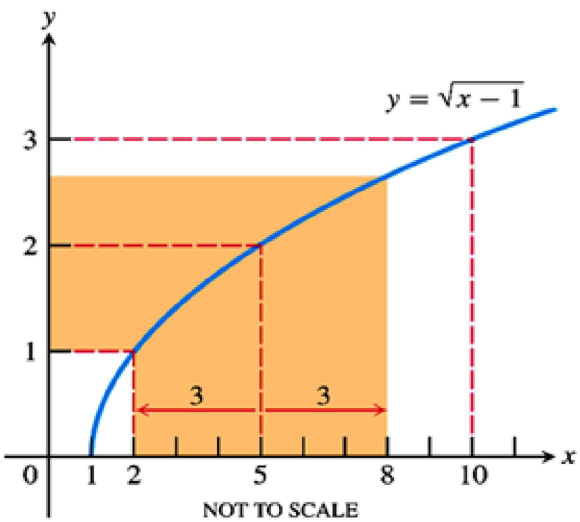



Figura 3.8: Gráfico da função $y = \sqrt{x-1}$.

**(a)** $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 1,2 | 0,44 |
| 1,1 | 0,31 |
| 1,05 | 0,22 |
| 1,02 | 0,14 |
| 1,0001 | 0,01 |
| 1,00001 | 0,003 |

Tabela 3.9: Comportamento de $y = \sqrt{x-1}$ para valores de $x$ próximos de 1 pela direita.

Observando os valores da Tabela 3.9, podemos concluir que $\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x-1} = 0$.

**(b)** $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$

| $x$ | $y$ |
|---:|---:|
| 1000000 | 999,9 |
| 20000000 | 4472,1 |
| 500000000 | 22360,6 |
| 4000000000 | 63245,5 |
| 70000000000 | 264575,1 |
| 152000000000 | 389871,7 |

Tabela 3.10: Comportamento de $y = \sqrt{x-1}$ para $x$ suficientemente grande.

Através dos valores dados na Tabela 3.10 verificamos que quando $x$ se aproxima de $+\infty$, o limite da função é $+\infty$.

**7)** Verifique se existe limite da função $g(x) = \operatorname{tg} x$, quando $x$ se aproxima de $\dfrac{\pi}{2}$.

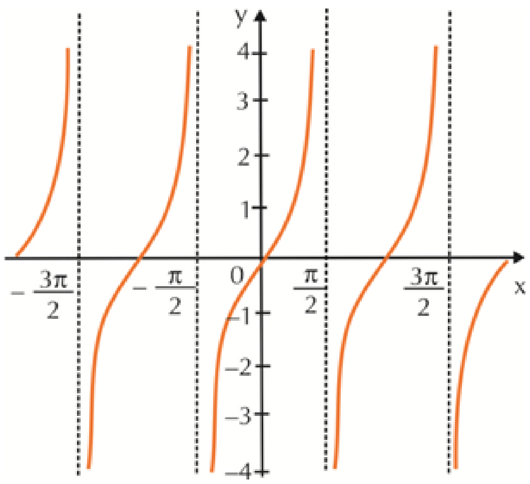



Figura 3.9: Gráfico de $g(x) = \operatorname{tg} x$.

Observemos no gráfico (Figura 3.9) que quando $x$ se aproxima de $\dfrac{\pi}{2}$ por valores menores que $\dfrac{\pi}{2}$, o valor de $g(x)$ tende a mais infinito, e quando $x$ se aproxima de $\dfrac{\pi}{2}$ por valores maiores que $\dfrac{\pi}{2}$ o valor de $g(x)$ se aproxima de menos infinito. Portanto $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$, logo não existe $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$.

Capítulo 4

# DERIVADA

Desenvolvido a cerca de 300 anos por Newton e Leibniz, o cálculo é uma das ferramentas matemáticas mais utilizadas pelas ciências para reduzir a complexidade de problemas diversos. O estudo do Cálculo Diferencial e Integral é considerado um dos conteúdos matemáticos mais influentes no desenvolvimento científico e tecnológico atual. Permitiu a obtenção de novos processos, equipamentos, métodos no processo de transformação da natureza, entre outros.

## 4.1 - História da derivada

A história da derivada descrita abaixo foi extraída dos livros: Cálculo de George B. Thomas (FINNEY, Ross L., WEIR Maurice D., GIORDANO Frank R.) e A Rainha Das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática de GARBI, Gilberto Geraldo.

A derivada tem dois aspectos básicos, o geométrico e o computacional. Além disso, as aplicações das derivadas são muitas: a derivada tem muitos papéis importantes na matemática propriamente dita, têm aplicações em física, química, engenharia, tecnologia, ciências, economia e muito mais, e novas aplicações aparecem todos os dias.

A origem da derivada está nos problemas geométricos clássicos de tangência, por exemplo, para determinar uma reta que intersecta uma dada curva em apenas um ponto dado. Euclides (cerca de 300 a.C.) provou o familiar teorema que diz que a reta tangente a um círculo em qualquer ponto P é perpendicular ao raio em P. Arquimedes (287-212 a.C.) tinha um procedimento para encontrar a tangente à sua espiral e Apolônio (cerca de 262-190 a.C.) descreveu métodos, todos um tanto diferentes, para determinar tangentes a parábolas, elipses e hipérboles. Mas estes eram apenas problemas geométricos que foram estudados apenas por seus interesses particulares limitados; os gregos não perceberam nenhuma linha em comum ou qualquer valor nestes teoremas.

Problemas de movimento e velocidade, também básicos para nosso entendimento de derivadas hoje em dia, também surgiram com os gregos antigos, embora estas questões tenham sido originalmente tratadas mais filosoficamente que matematicamente. Os quatro paradoxos de Zenão (cerca de 450 a.C.) se apoiam sobre as dificuldades para entender velocidade instantânea sem ter uma noção de derivada. Na Física de Aristóteles (384-322 a.C.), os problemas de movimento estão associados intimamente com noções de continuidade e do infinito (isto é, quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes). Na época medieval, Thomas Bradwardine (1295-1349) e seus colegas em Merton College, Oxford, fizeram os primeiros esforços para transformar algumas das ideias de Aristóteles sobre movimento em afirmações quantitativas. Em particular, a noção de velocidade instantânea tornou-se mensurável, pelo menos em teoria; hoje, é a derivada (ou a taxa de variação) da distância em relação ao tempo.

Foi Galileu Galilei (1564-1642) quem estabeleceu o princípio que matemática era a ferramenta indispensável para estudar o movimento e, em geral, ciência: "Filosofia [ciência e natureza] está escrita naquele grande livro o qual está diante de nossos olhos quero dizer o universo, mas não podemos entendê-lo se não aprendermos primeiro a linguagem... O livro está escrito em linguagem matemática..." Galileu estudou o movimento geometricamente; usou as proporções clássicas de Euclides e propriedades das cônicas de Apolônio para estabelecer relações entre distância, velocidade e aceleração.

Hoje, estas quantidades variáveis são aplicações básicas das derivadas. O interesse em tangentes a curvas reapareceu no século 17 como uma parte do desenvolvimento da geometria analítica. Uma vez que equações eram então usadas para descrever curvas, o número e variedade de curvas aumentou tremendamente naqueles estudos em épocas clássicas. Por exemplo, Pierre Fermat (1601-1665) foi o primeiro a considerar a ideia de uma família inteira de curvas de uma só vez. Ele as chamou de parábolas superiores, curvas da forma $y = k\,x^n$, onde $k$ é constante e $n = 2, 3, 4, \ldots$.

A introdução de símbolos algébricos para estudar a geometria de curvas contribuiu significativamente para o desenvolvimento da derivada, da integral e do cálculo. Por outro lado, como conclusões e resultados geométricos poderiam ser obtidos mais facilmente usando raciocínio algébrico que geométrico, os padrões de rigor lógico que tinham sido iniciados pelos gregos antigos foram relaxados em muitos problemas de cálculo, e isto (entre outros fatores) levou a controvérsias espirituosas e até amarguradas. Fermat desenvolveu um procedimento algébrico para determinar os pontos mais altos (máximos) e mais baixos (mínimos) sobre uma curva; geometricamente, ele estava encontrando os pontos onde a tangente à curva tem inclinação zero.

René Descartes (1596-1650) teve o discernimento de prever a importância da tangente quando, em sua Geometria, escreveu "E eu ouso dizer isto [encontrar a normal, ou perpendicular a uma curva, a partir da qual podemos facilmente identificar a tangente] não é apenas o problema mais útil e geral da geometria que conheço, mas até aquele que sempre desejei conhecer." Descartes inventou um procedimento de dupla raiz para encontrar a normal e então a tangente a uma curva.

Como resultado da tradução da Geometria de Descartes para o latim por Frans van Schooten (1615-1661) e as explicações abrangentes por Schooten, Florimonde de Beaune (1601-1652) e Johan Hudde (1628-1704), os princípios e benefícios da geometria analítica tornaram-se amplamente conhecidos. Em particular, Hudde simplificou a técnica da dupla raiz de Descartes para determinar pontos máximos e mínimos sobre uma curva; o procedimento da dupla raiz foi redescoberto por Christiaan Huygens (1629-1695).

Então, modificando o processo da tangente de Fermat, Huygens inventou uma seqüência de etapas algébricas que produziu os pontos de inflexão de uma curva; veremos que isto requer a derivada segunda. René François de Sluse (1622-1685) desenvolveu uma técnica algébrica que levou à inclinação da tangente a uma curva. No final da década de 1650, havia grande correspondência entre Huygens, Hudde, van Schooten, Sluse e outros sobre tangentes de várias curvas algébricas; Hudde e Sluse especialmente procuraram métodos algébricos mais simples e padronizados que poderiam ser aplicados a uma variedade maior de curvas. Para Gilles Personne de Roberval (1602-1675), uma curva era o caminho de um ponto se movendo, e ele desenvolveu um método mecânico para encontrar a tangente para muitas curvas, incluindo a ciclóide.

Mas o método de Roberval não podia ser generalizado para incluir mais curvas. Isaac Newton (1642-1727) começou a desenvolver o seu "cálculo de flúxions" entre os seus primeiros esforços científicos em 1663. Para Newton, movimento era a "base fundamental" para curvas, tangentes e fenômenos relacionados de cálculo e ele desenvolveu seus flúxions a partir da versão de Hudde do procedimento da dupla raiz. Newton estendeu esta técnica como um método para encontrar a curvatura de uma curva, uma característica que agora sabemos ser uma aplicação da derivada segunda. Em 1666, 1669 e 1671, Newton resumiu e revisou seu trabalho de cálculo e estes manuscritos circularam entre um grande número de seus colegas e amigos. Ainda assim, embora tenha continuado a retornar a problemas de cálculo em épocas diferentes de sua vida científica, os trabalhos de Newton sobre cálculo não foram publicados até 1736 e 1745.

Com algum tutoramento e conselho de Huygens e outros, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) desenvolveu seu cálculo diferencial e integral durante o período entre 1673 e 1676 enquanto vivia como um diplomata em Paris. Em uma pequena viagem a Londres, onde participou de um encontro da Sociedade Real em 1673, Leibniz aprendeu o método de Sluse para encontrar tangentes a curvas algébricas. Leibniz tinha pouca inclinação para desenvolver estas técnicas e interesse ainda menor em fundamentações matemáticas (isto é, limites) necessárias, mas ele aperfeiçoou as fórmulas modernas e a notação para derivada no seu famoso artigo "New methods for maximums and minimums, as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantities, and a remarkable calculus for them" (Novos métodos para máximos e mínimos, assim como tangentes, os quais não são impedidos por quantidades fracionárias e irracionais, e um cálculo notável para eles) de 1684.

Aqui está o primeiro trabalho publicado em cálculo e de fato a primeira vez que a palavra "cálculo" foi usada em termos modernos. Agora, qualquer um poderia resolver problemas de tangentes sem ser especialista em geometria, alguém poderia simplesmente usar as fórmulas de "cálculo" de Leibniz. Algumas vezes se diz que Newton e Leibniz "inventaram" o cálculo. Como podemos ver, isto é simplificação exagerada. Em vez disso, como Richard Courant (1888-1972) observou, cálculo tem sido "uma luta intelectual dramática que durou 2500 anos". Depois de 1700, circunstâncias levaram a um dos episódios mais tristes e deselegantes em toda a história da ciência: a disputa entre Leibniz e Newton, e mais ainda entre seus seguidores, sobre quem deveria receber os créditos do cálculo.

Cada um fez contribuições importantes para derivada, integral, séries infinitas e, acima de tudo, para o Teorema Fundamental do Cálculo. As acusações de plágio e outros ataques eram irrelevantes frente à matemática feita por eles, mas as acusações e contra-ataques escalaram para cisões entre matemáticos e cientistas na Inglaterra (leais a Newton) e no continente europeu (seguidores de Leibniz) os quais levaram à xenofobia nacionalista por mais de um século.

O primeiro livro sobre cálculo diferencial foi Analysis of Infinitely Small Quantities for the Understanding of Curved Lines (Análise de quantidades infinitamente pequenas para o entendimento de curvas, 1696) pelo Marquês de l'Hospital (1661-1704). Muito de seu trabalho foi realmente devido à Johann Bernoulli (1667-1748) e seguiu o tratamento de Leibniz para derivadas, máximos, mínimos e outras análises de curvas. Mas o método de L'Hospital para determinar o raio de curvatura era muito parecido com aquele de Newton. Jakob Bernoulli (1654-1705) e seu irmão mais novo Johann lideraram o caminho para espalhar o conhecimento do poder das fórmulas de cálculo de Leibniz propondo e resolvendo problemas desafiadores (o problema da catenária e da braquistócrona são dois exemplos) para os quais o cálculo era necessário. Leibniz, Newton e Huygens também resolveram estes problemas. Este problema e outros levaram ao desenvolvimento das equações diferenciais e do cálculo das variações, novos campos da matemática dependentes de cálculo.

Na Inglaterra, o novo Treatise of Fluxions (Tratado de Flúxions,1737) de Thomas Simpson (1710-1761) forneceu a primeira derivada da função seno. Em 1734, o Bispo George Berkeley (1685-1753) publicou The Analyst (O Analista), um ataque à falta de fundamentos rigorosos para seus flúxions. Berkeley reconheceu a precisão das fórmulas de Newton e a exatidão das suas aplicações abrangentes em física e astronomia, mas criticou as "quantidades infinitamente pequenas" e os "incrementos imperceptíveis" dos fundamentos das derivadas. Colin Maclaurin (1698-1746) tentou defender Newton no seu Treatise of Fluxions (Tratado de Flúxions) (1742) e desenvolveu derivadas para funções logarítmicas e exponenciais e expandiu as fórmulas de Simpson para incluir as derivadas das funções tangente e secante.

No continente, Maria Agnesi (1718-1799) seguiu Leibniz e L'Hospital no seu livro de cálculo Analytical Institutions (Instituições Analíticas,1748). Leonhard Euler (1707-1783) deu um passo importante na direção de estabelecer uma fundamentação sólida para o cálculo no seu Introduction to the Analysis of the Infinite (Introdução à Análise do Infinito, 1748) quando introduziu funções (no lugar de curvas) como os objetos para os quais as derivadas e outras técnicas de cálculo seriam aplicadas. Por função, Euler queria dizer algum tipo de "expressão analítica"; sua concepção não era tão abrangente como a nossa definição moderna. Na sua publicação, também introduziu o termo análise como um nome moderno para cálculo e a matemática avançada relacionada. No seu Methods of Differential Calculus (Métodos de Cálculo Diferencial, 1755), Euler definiu a derivada como "o método para determinar as razões entre os incrementos imperceptíveis, as quais as funções recebem, e os incrementos imperceptíveis das quantidades variáveis, das quais elas são funções", que soa não muito científico hoje em dia.

Mesmo assim, Euler trabalhou com vários casos especiais da regra da cadeia, introduziu equações diferenciais e tratou máximos e mínimos sem usar quaisquer diagramas ou gráficos. Em 1754, na famosa Encyclopédie francesa, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) afirmou que a "definição mais precisa e elegante possível do cálculo diferencial" é que a derivada é o limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero. No final do século 18, Joseph Louis Lagrange (1736-1813) tentou reformar o cálculo e torná-lo mais rigoroso no seu Theory of Analytic Functions (Teoria das Funções Analíticas, 1797).

Lagrange pretendia dar uma forma puramente algébrica para a derivada, sem recorrer à intuição geométrica, os gráficos ou a diagramas e sem qualquer ajuda dos limites de d'Alembert. Lagrange desenvolveu a principal notação que usamos agora para derivadas e o desenvolvimento lógico de seu cálculo era admirável em outros aspectos, mas seu esforço em prover uma base sólida para o cálculo falhou porque sua concepção da derivada era baseada em certas propriedades de séries infinitas as quais, sabemos agora, não são verdadeiras.

Finalmente, no início do século 19, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy (1789-1857) em suas aulas para seus alunos de engenharia.

Em seu Résumé of Lessons given at l'Ecole Polytechnique in the Infinitesimal Calculus (Resumo das Lições Dadas na Escola Politécnica Sobre o Cálculo Infinitesimal, 1823), Cauchy afirmou que a derivada é: O limite de $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quando $i$ se aproxima de 0. A forma da função que serve como o limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar sua dependência, dá-se à nova função o nome de função derivada.

Cauchy prosseguiu para encontrar derivadas de todas as funções elementares e dar a regra da cadeia. De igual importância, Cauchy mostrou que o Teorema do Valor Médio para derivadas, que tinha aparecido no trabalho de Lagrange, era realmente a pedra fundamental para provar vários teoremas básicos do cálculo que foram assumidos como verdadeiros, isto é, descrições de funções crescentes e decrescentes. Derivadas e o cálculo diferencial estão agora estabelecidos como uma parte rigorosa e moderna do cálculo.

## 4.2 - A História da derivada de Mariana

Atualmente, o conteúdo de derivada é muito abordado nos cursos superiores nas áreas de ciências da natureza, engenharias e tecnologias. Sua importância acontece por sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento.

> De fato, a ausência das ideias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo. [...] (REZENDE, 2003, p. 402).

Baldino e Fracalossi em um artigo chamado "A História da Derivada de Mariana: uma experiência didática" nos mostra uma maneira interessante de se introduzir a derivada no ensino médio, e para os autores os resultados foram surpreendentes e nesse sentido achamos interessante colocá-la aqui como um incentivo para os professores surpreenderem os alunos com novas ideias.

Era uma vez uma função que se chamava Mariana. Como toda função que se preza, Mariana se apresentava por seu gráfico, aqui, nesta primeira figura (Figura 4.1); Mariana assinava $f(x)$ (efe de xis).

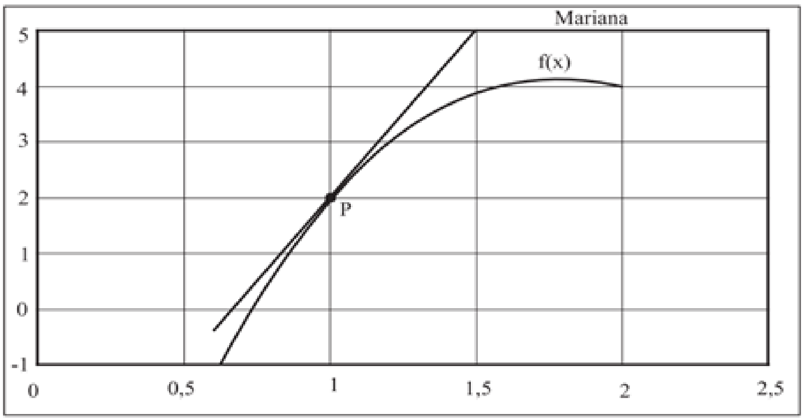



Figura 4.1: Reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P$.

O gráfico de Mariana tinha muitos pontos, todos iguais, cada um ocupando sua posição. Mas tinha um ponto, o Ponto P, muito exibido que queria ser diferente. Tanto incomodou e pediu para ser diferente que Mariana lhe disse:

- Está bem, vou te dar uma reta tangente minha, passando por ti e só por ti. O ponto ficou muito contente, mas quando Mariana lhe perguntou se ele tinha gostado, ele respondeu que não via a tal reta tangente. Vocês sabem por que o ponto não via a reta tangente? É que o país do ponto é muito pequeno... Vocês querem conhecer o país do ponto?

Para viajar ao país do ponto nós precisamos olhar o ponto bem de pertinho. Temos de usar um microscópio muito, muito forte. Então, ampliamos o mundo do ponto na segunda figura (Figura 4.2).

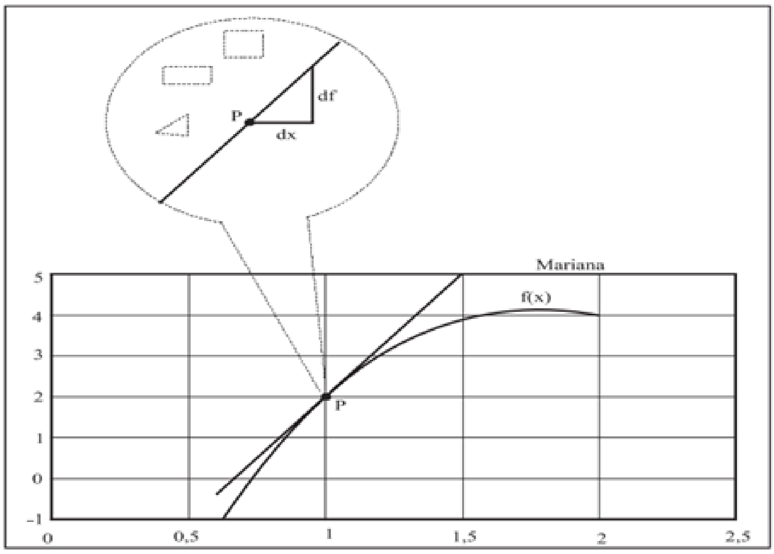



Figura 4.2: Reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P$.

O mundo do ponto chama-se Mônada. Na Mônada mora só um ponto; não pode ter dois, para não brigarem. Na Mônada moram, também, muitas figuras que obedecem ao ponto: quadrados, triângulos, círculos. Todos os habitantes da Mônada são muito, muito pequenos, tão pequenos que nem se pode medi-los. Eles são chamados infinitésimos.

Foi então, que Mariana explicou ao Ponto:

- Olhe bem, você está, sim, vendo a reta tangente. É que na sua Mônada a reta tangente fica bem, bem grudadinha a mim. Por isso parece que sou eu. O ponto ficou satisfeito: olhava para Mariana e via a reta tangente; olhava para a reta tangente e via Mariana.

Porém, na Mônada do Ponto moravam dois infinitésimos muito travessos, o $dx$ e o $df$. O $dx$ e o $df$ viviam brigando, porque o $dx$ só queria andar pra frente e pra trás e o $df$ só queria andar pra cima e pra baixo. Cada um queria que o outro andasse como ele; os dois eram teimosos. Para que eles parassem de brigar, o Ponto chamou os dois e disse:

- Olhem, vocês só podem andar começando aqui, onde eu estou. Cada vez que o $dx$ andar, $df$ tem que começar onde ele parou e andar até a reta tangente. Cada vez que o $df$ andar, o $dx$ tem que começar onde o $df$ parou e andar até a reta tangente. Podem andar para lá e para cá, para cima e para baixo, mas obedeçam.

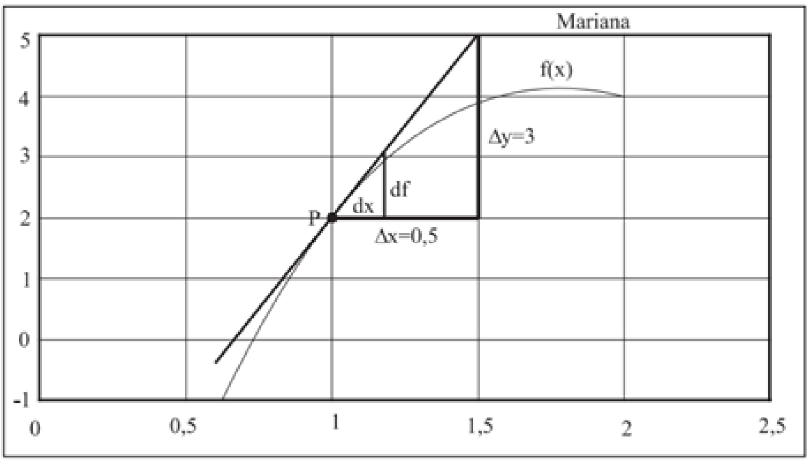



Figura 4.3: Reta tangente ao gráfico de $f$ num ponto $P$.

Como todos os infinitésimos obedeciam ao Ponto, o $dx$ e o $df$ pararam de brigar e se divertiram muito. Um caminhava, o outro continuava. Um se espichava mais, o outro tinha que se espichar também; o outro se encolhia, e este tinha que se encolher também; quando o $dx$ andava para trás, o $df$ tinha de andar para baixo. Descobriram até de quantas maneiras podiam fazer isso.

Mas logo começaram a discutir: queriam saber quem andava mais. Não podiam medir, porque a Mônada era tão pequena que nada se podia medir; eram todos infinitésimos. Então, o $dx$ e o $df$ foram perguntar ao Ponto como poderiam saber quem andava mais. O Ponto pensou, pensou e teve uma ideia:

Já sei, disse:

- Vamos dividir o $df$ pelo $dx$ e vamos fazer a conta. Se der mais que um, por exemplo, se o resultado da divisão for dois, é porque o $df$ caminha duas vezes mais que o $dx$; se o resultado for menor que um, por exemplo, se for $0,5$, é porque o $dx$ caminha duas vezes mais que o $df$. Todos ficaram muito contentes com a ideia que teve o ponto, mas logo surgiu uma dificuldade: como poderiam dividir $df$ por $dx$ se não sabiam quanto cada um media? Eram todos infinitésimos, não se podia medi-los.

Perguntaram a todas as figuras da Mônada, mas ninguém tinha a resposta. Vocês têm alguma ideia? Não tiveram outro jeito senão perguntar à Mariana, que falou assim:

- É muito fácil, vocês não podem medir porque dentro da Mônada não tem medida, mas eu posso. É só vocês se espicharem bem, para que eu possa vê-los. Então, o $df$ e o $dx$ se espicharam, se espicharam até que começaram a aparecer fora da Mônada. Mariana concluiu:

O resultado da conta $\frac{df}{dx}$ que vocês querem calcular é igual ao resultado desta conta aqui. Mariana tomou $\Delta y$ e $\Delta x$ e mediu: $\Delta y = 3$; $\Delta x = 0,5$. Então, concluiu ela:

Vejam: $df$ caminha seis vezes mais que $dx$, porque, ó:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3}{0,5} = 6.$$

Todos os habitantes da Mônada ficaram muito contentes, porque $df$ e $dx$ ficaram muito amigos e pararam de brigar. Logo a notícia se espalhou para as mônadas dos outros pontos do gráfico de Mariana. Em cada uma morava um $dx$ e um $df$. Todos queriam saber qual caminhava mais.

Mariana deu a cada ponto sua reta tangente e calculou $\frac{df}{dx}$ para cada uma. Para não se atrapalhar ela organizou uma tabela, cada ponto com o seu $\frac{df}{dx}$ ao lado. Depois, para mostrar o que tinham feito às outras funções da sua escola, Mariana desenhou um gráfico para representar essa tabela.

Foi então que ela descobriu que tinha inventado outra função. Mariana chamou essa nova função de derivada de Mariana e representou por Mariana' (Mariana Linha) e assinou $f'(x)$ (efe linha de xis).

E todos os infinitésimos de todas as mônadas, de todos os pontos, de todas as funções, de todas as crianças, de todas as escolas viveram em paz por muitos e muitos anos.

Acreditamos que a derivada contada inicialmente dessa forma pode despertar no aluno um interesse maior pela disciplina, pois é uma história bem didática e de fácil entendimento, ela fornece um referencial adequado à determinação do nível de compreensão do conceito em diferentes alunos de diferentes faixas etárias.

## 4.3 - Falando sobre derivada

Em matemática, o mais usual é utilizar o conceito de limite para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da seqüência) vai crescendo e tende para infinito. Os limites são usados no cálculo diferencial e em outros ramos da análise matemática para definir derivadas e a continuidade de funções.

Podemos falar de outras formas de se chegar ao conceito formal de derivada, como por exemplo, iniciar falando de Taxa de Variação Média, pois essa taxa está baseada no estudo de funções e exprime a razão com que a função cresce num dado intervalo do domínio.

Podemos tomar como exemplo o gráfico da função definida por $f(x) = x^2$.

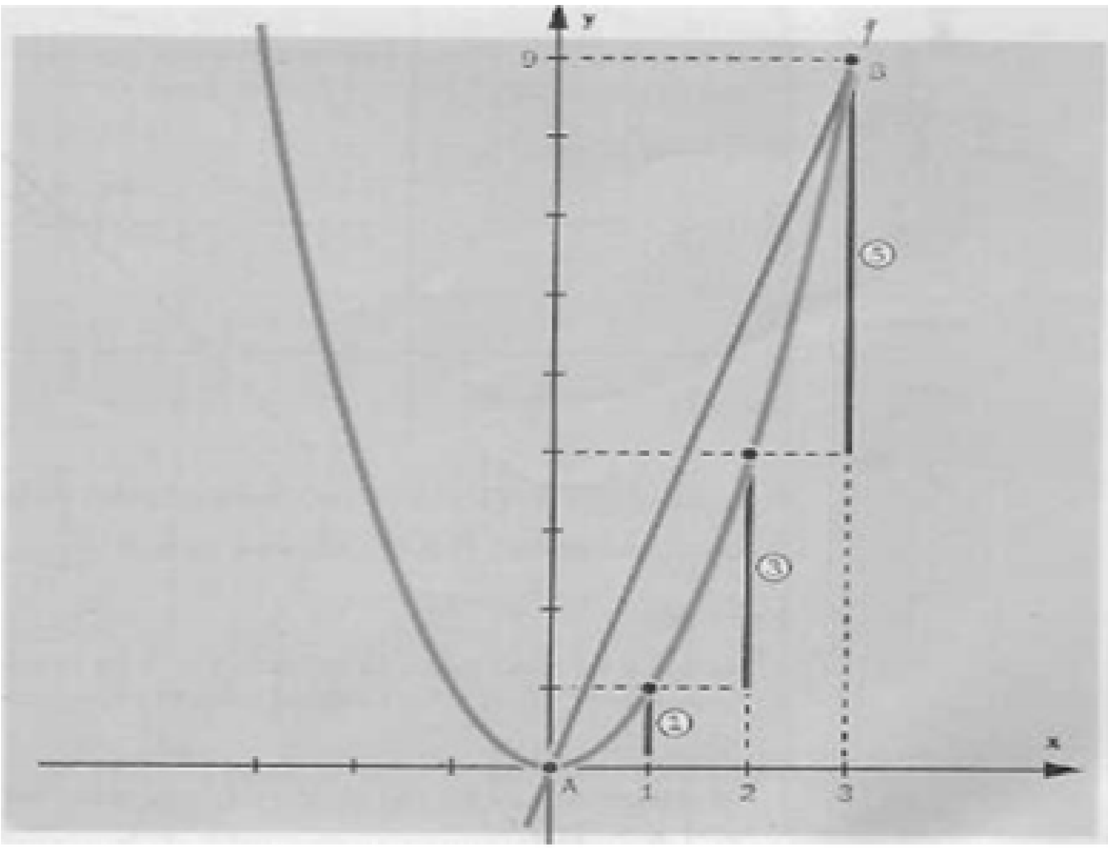



Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = x^2$.

Quanto variou $f(x)$ quando $x$ variou de 0 a 3?

Observando o gráfico, temos que quando $x$ varia de 0 a 3, $f(x)$ varia de 0 a 9, portanto a variação de $f(x)$ é $9 - 0 = 9$.

Qual foi a variação média da função nesse intervalo?

Para o exemplo acima, podemos calcular, em média, a variação de $y$ em um intervalo unitário de $x$, analisando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ em cada intervalo.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9-0}{3-0} = \frac{9}{3} = 3.$$

Definimos taxa de variação média ($TV_m$) de uma função $f$, num intervalo de seu domínio, como o quociente entre a variação ($\Delta y$) de $f(x)$ e a variação ($\Delta x$) da variável $x$ nesse intervalo (Bongiovanni, Vissoto & Laureano, 1993).

Podemos dizer que: a taxa de variação média de uma função $f$ no intervalo $[x_A, x_B]$ com $x_A < x_B$ é definida por:

$$TV_m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

A taxa de variação média de uma função $f$, num intervalo $[x_A, x_B]$, pode ser interpretada geometricamente de acordo com a Figura 4.5 considerando-se a reta $s$ que passa pelos pontos $A(x_A, f(x_A))$ e $B(x_B, f(x_B))$ do gráfico de $f$.

O coeficiente angular da reta $s$ no intervalo $[x_A, x_B]$ é:

$$m = \text{tg} \propto = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TV_m.$$

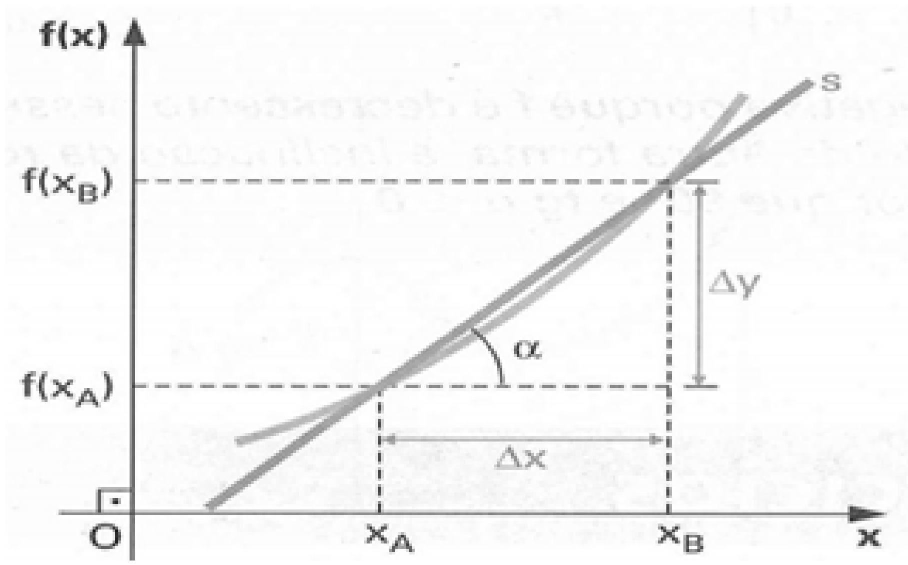



Figura 4.5: Gráfico de uma função $f$ e uma reta $s$ que passa pelos pontos $A$ e $B$.

Ou seja, geometricamente, o coeficiente angular da reta que passa por A e B é a taxa de variação média de $f$ em $[x_A, x_B]$.

Outro exemplo importante é a análise do comportamento das três funções, através dos gráficos abaixo (Figura 4.6), no intervalo $[0, 5]$.

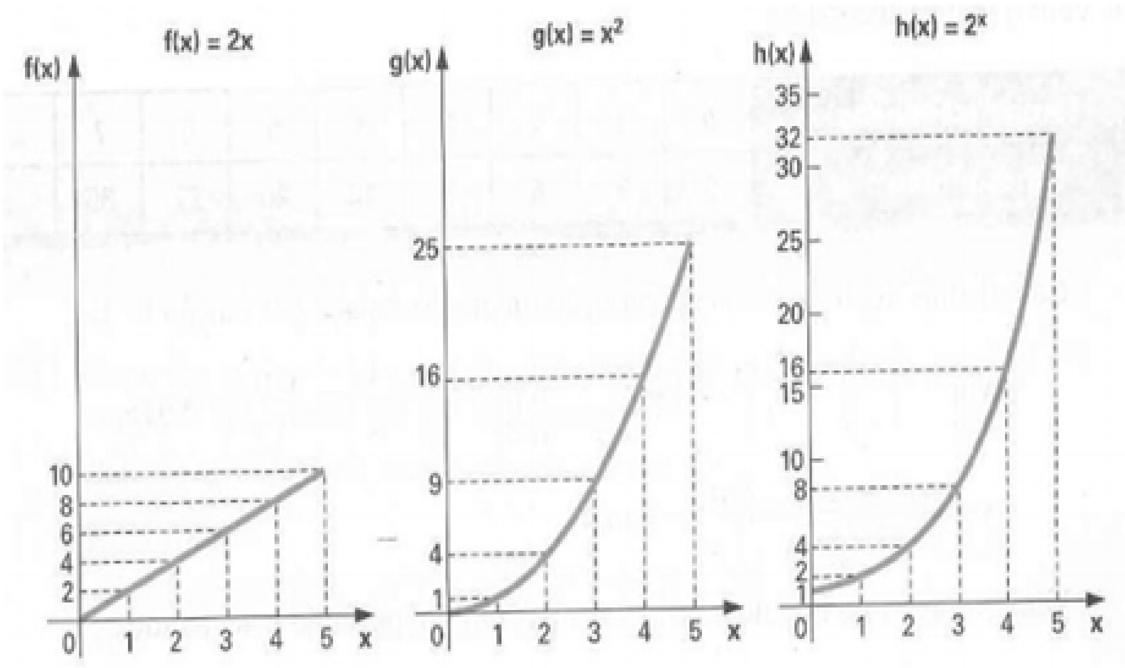



Figura 4.6: Gráficos de algumas funções crescentes no intervalo $[0, 5]$.

Os gráficos das três funções crescentes no intervalo $[0, 5]$ diferem na forma como crescem.

| Intervalo | Taxa de variação média de $f$ $(f(x) = 2x)$ | Taxa de variação média de $g$ $(g(x) = x^2)$ | Taxa de variação média de $h$ $(h(x) = 2^x)$ |
|---|---|---|---|
| $[0, 1]$ | 2 | 1 | 1 |
| $[1, 2]$ | 2 | 3 | 2 |
| $[2, 3]$ | 2 | 5 | 4 |
| $[3, 4]$ | 2 | 7 | 8 |
| $[4, 5]$ | 2 | 9 | 16 |
| | A taxa de variação média é a mesma a cada intervalo. | A taxa de variação média aumenta 2 unidades a cada intervalo. | A taxa de variação média dobra a cada intervalo. |

Tabela 4.1: Variação de três funções crescentes no intervalo $[0, 5]$ (SMOLE & DINIZ, 2003, p. 278).

Podemos afirmar que, apesar de as três funções serem crescentes no intervalo $[0, 5]$, elas crescem com velocidades diferentes (SMOLE & DINIZ, 2003).

Desta forma, observamos que:

**1)** A $TV_m$ da função polinomial do 1º grau é constante e, no exemplo, igual a 2, a qual corresponde ao coeficiente angular da reta que representa a função. A variação foi a mesma em todos os intervalos considerados. É fácil verificar que qualquer função polinomial do 1º grau tem $TV_m$ constante. De fato, se $f(x) = ax+b$, então em qualquer intervalo $[x_1, x_2]$ temos:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a.$$

Reciprocamente, se tomarmos uma função com taxa de variação constante $a$, dados um ponto fixado $(x_0, y_0)$ e um ponto genérico $(x, y)$, temos:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$$

Fazendo o mínimo múltiplo comum obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = & \quad a(x - x_0) \\ f(x) = & \quad a(x - x_0) + f(x_0) \\ f(x) = & \quad ax + f(x_0) - ax_0 \end{aligned}$$

Denotando por $b$ a expressão $f(x_0) - ax_0$, temos:

$$f(x) = ax + b.$$

Logo, qualquer função com taxa de variação média constante é polinomial do 1º grau. Isto é, as funções polinomiais do 1º grau podem ser caracterizadas pela taxa de variação constante.

**2)** No mesmo intervalo de $x$, a função exponencial $h$ cresce mais rapidamente que as outras duas funções. E mais, a função $h$ definida por $h(x) = 2^x$ (cresce) mais rapidamente nos últimos intervalos.

### 4.3.1 A reta tangente a um gráfico

Após nos referirmos à reta tangente para apresentarmos o conceito de Aproximação linear, julgamos necessário discutir, detalhadamente, o conceito de reta tangente a um gráfico.

Observamos que o conceito de tangente é usualmente apresentado para o estudante de matemática no curso de geometria no contexto do círculo. Desta forma, o aluno pode construir uma imagem limitada para o conceito de tangente. (Vinner (1991); Pinto & Moreira (2004); Biza, Christou & Zachariades (2006)). Neste sentido, Tall (1989) observa que quando ideias são apresentadas em contextos restritos, a imagem de Conceitos pode incluir características que são verdadeiras naqueles contextos, mas não de uma forma geral. Por exemplo, a tangente a um círculo toca-o em um único ponto somente e não o atravessa. Vinner (1983, 1991) observou que muitos estudantes acreditavam que uma reta tangente a qualquer curva tocaria esta curva em um único ponto, mas não poderia atravessá-la.

Neste momento torna-se necessário fazer algumas considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto $x_0$.

Sabemos que para uma circunferência ou para uma elipse, por exemplo, a reta tangente é a que tem um único ponto comum com a curva.

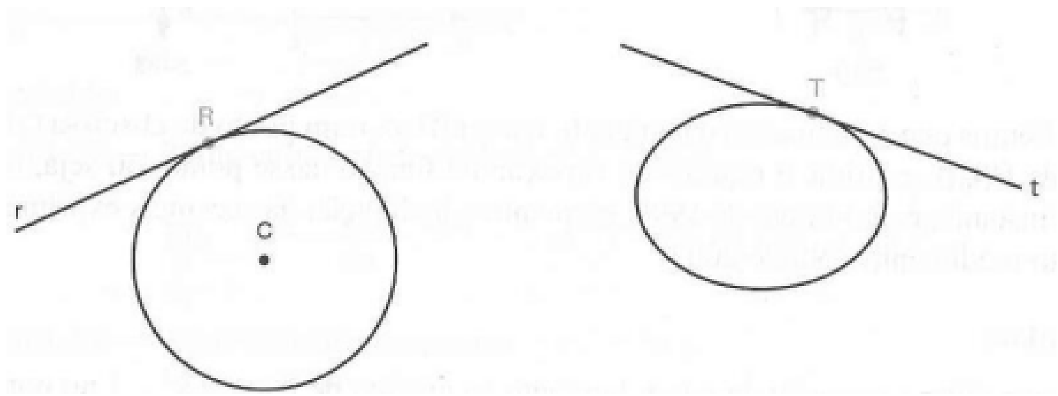



Figura 4.7: Retas tangentes a duas curvas convexas.

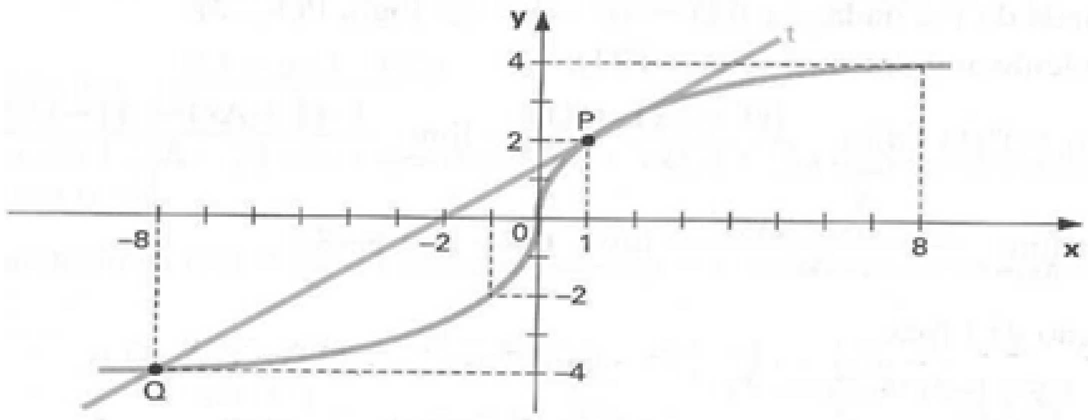



Figura 4.8: Reta tangente a curva no ponto $P$ e secante no ponto $Q$.

No entanto, a reta $t$, tangente ao gráfico, no ponto $P$ corta o gráfico no ponto $Q$. De forma geral, uma tangente a uma curva num ponto pode interceptá-la em vários outros pontos (SMOLE & DINIZ, 2003).

Vejamos outros exemplos nas figuras:

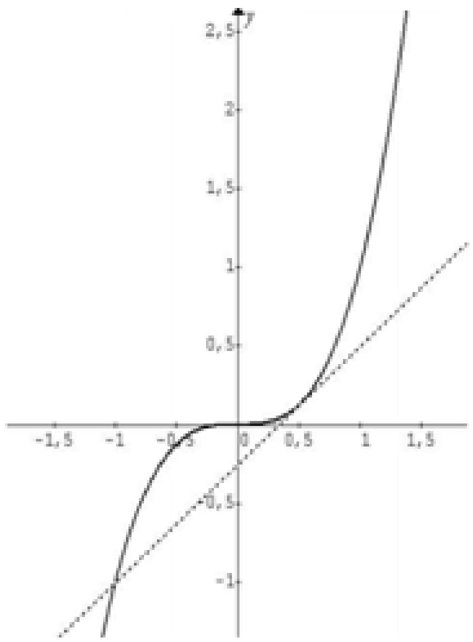


Figura 4.9: Reta $t$ tangente à curva $f_1(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 0,5$.

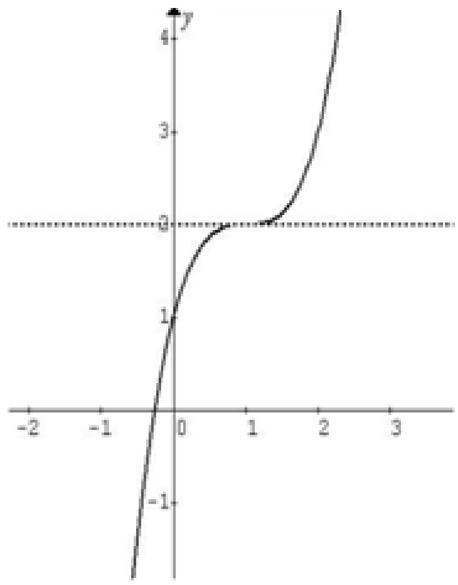


Figura 4.10: Reta $t$ tangente à curva $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ no ponto $x_0 = 1$.

No gráfico da Figura 4.9, a reta tangente corta a curva num outro ponto.

No gráfico da Figura 4.10, a reta tangente atravessa a curva.

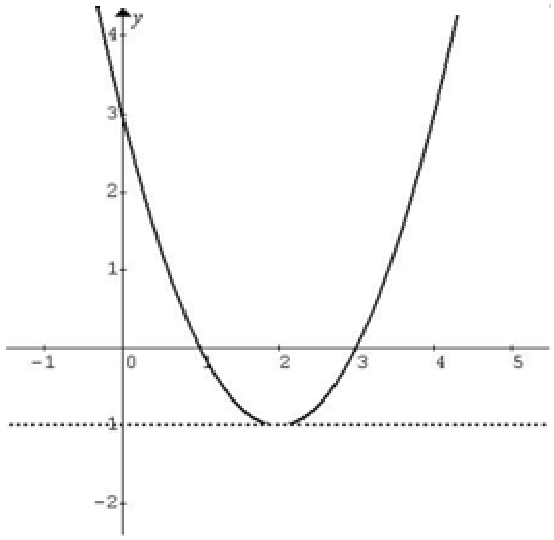


Figura 4.11: Reta $t$ tangente à curva $f_3(x) = x^2 - 4x + 3$ no ponto $x_0 = 2$.

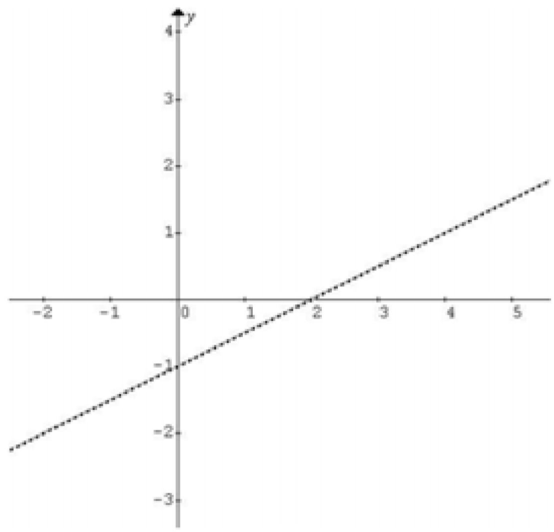


Figura 4.12: Reta $t$ tangente ao gráfico definido por $f_4(x) = \frac{x}{2} - 1$ no ponto $x_0 = 3$.

No gráfico da Figura 4.11, a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas e $x_0$

é ponto de mínimo.

No gráfico da Figura 4.12, a reta tangente coincide com o próprio gráfico.

### 4.3.2 A taxa de variação instantânea e sua interpretação geométrica

Nesta seção relacionaremos os conceitos abordados neste trabalho até o momento, a seguir faremos uma análise buscando uma relação matemática entre os mesmos. São eles:

1. Taxa de variação média num intervalo $[x_A, x_B]$ do domínio;

2. Taxa de variação média da função polinomial do 1º grau é constante para qualquer intervalo do domínio e igual ao coeficiente angular da reta;

3. Magnificação local de uma função elementar e a observação de uma retificação local em torno de um ponto $x_0$ num intervalo muito pequeno do domínio assemelhando-se a um "segmento de reta";

4. Análise do comportamento local em torno do ponto $x_0$ possibilitada pela observação do comportamento da reta com a qual a curva se assemelha no processo de aproximação local;

5. A reta que contém o "segmento" em questão coincide com a reta tangente ao gráfico no ponto $x_0$ (aproximação linear).

Os assuntos relacionados acima nos levam, experimentalmente, à ideia de que é possível analisar a taxa de variação de uma função num ponto $x_0$, pertencente a um intervalo muito pequeno do domínio, através da análise da taxa de variação da reta tangente ao gráfico em $x_0$. Chamaremos de taxa de variação instantânea ($TV_i$) à taxa de variação da função no ponto $x_0$. Geometricamente, esta taxa de variação instantânea é representada pelo coeficiente angular da reta tangente à curva da função $f$ no ponto $x_0$. Para o conceito de derivada, Ávila (1991) comenta:

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como velocidade instantânea. (ÁVILA, 1991, p. 4)

### 4.3.3 Expressando algebricamente a taxa de variação instantânea

Passaremos a analisar a expressão que nos fornece a taxa de variação média num intervalo do domínio. Consideremos uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset D(f)$ com um acréscimo $\Delta x \neq 0$. O número:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

é a taxa de variação média ou taxa de crescimento médio da função $f$ no intervalo de extremos $x_0$ e $x_0 + \Delta x$.

A partir da taxa de variação média chegaremos a uma expressão para a taxa de variação instantânea. Para isso, utilizaremos, oportunamente, a imagem geométrica da secante tendendo à tangente no ponto $x_0$. A atividade anterior permite ao aluno associar a velocidade instantânea (taxa de variação instantânea) ao coeficiente angular da reta tangente no ponto em questão.

Vimos que a taxa de variação média em $[x_0, x_0 + \Delta x]$ é dada pelo coeficiente angular da reta secante à curva nos pontos $x_0$ e $x_0 + \Delta x$. Como o objetivo é analisar o comportamento da função em $x_0$, devemos considerar um intervalo indefinidamente pequeno ao qual $x_0$ pertença. Esquematicamente, teremos: $\Delta x \to 0 \Rightarrow Q \to P \Rightarrow s$ (reta secante) se aproxima de $t$ (reta tangente em $x_0$). Observe o que foi descrito acima na seqüência a seguir.

Esta observação nos leva a formular a seguinte proposição: Se a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

com $\Delta x \to 0$, corresponde ao coeficiente angular da reta secante à curva no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$, então a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

com $\Delta x \to 0$, corresponderá ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto $x_0$. Desta forma temos que a taxa de variação média de uma função contínua num intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ é igual a: corresponderá ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto x0. Desta forma temos que a taxa de variação média de uma função contínua num intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$ é igual a:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

com $\Delta x \to 0$ e a taxa de variação instantânea num ponto $x_0$ é dada pelo valor do qual

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

aproxima-se quando $\Delta x$ se aproxima de 0.

Generalizando para um intervalo $I \subset D(f)$ de uma função, podemos dizer que: A taxa de variação instantânea ($TV_i$) de uma função $f$ num ponto $x_0 \in I \subset D(f)$ é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ \to \ TV_i, \text{ quando } \Delta x \to 0.$$

**Exemplo 4.1.** Função constante: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = k, \ k \in \mathbb{R}$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = 0 \ \to \ TV_i, \text{ quando } \Delta x \to 0, \text{ então } TV_i = 0.$$

**Exemplo 4.2.** Função polinomial do 1º grau: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x}.$$

Aplicando a propriedade distributiva temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{ax_0 + a\Delta x + b - ax_0 - b}{\Delta x} = a.$$

Então $TV_i = a$.

**Exemplo 4.3.** Função polinomial do 2º grau: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{\Delta x} \\
&= \frac{a(x_0^2 + 2\Delta x\, x_0 + (\Delta x)^2) + bx_0 + b\Delta x + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{ax_0^2 + 2a\Delta x\, x_0 + a(\Delta x)^2 + bx_0 + b\Delta x + c - ax_0^2 - bx_0 - c}{\Delta x} \\
&= \frac{2a\Delta x\, x_0 + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x + b.
\end{aligned}$$

Como $\Delta x \to 0$, temos que $TV_i = 2ax_0 + b$.

## 4.4 - A derivada em um ponto e a função derivada

Neste momento, temos condições de conceituar o que é derivada de uma função num ponto $x$ do domínio. Dante (2004b) conceitua da seguinte forma: à taxa de variação instantânea da função $f$ no ponto $x_0$ chamamos de derivada da função em relação à variável $x$ no ponto $x_0$ e representamos por $f'(x_0)$, geometricamente, é o coeficiente angular da reta tangente no ponto considerado. De outra forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow TV_i = f'(x_0), \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Chama-se função derivada de uma função $f$ a uma função $f'$ que fornece a taxa de variação instantânea $f'(x)$ (geometricamente, o coeficiente angular da reta tangente à curva) em qualquer ponto $x$ pertencente ao domínio.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow TV_i = f'(x), \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função $f$ em um ponto $x_0$ fixo, passaremos a determinar a sentença da função, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo $I$ do domínio.

Tall (1989) acredita que a disponibilidade de contra-exemplos pode ser de grande importância, particularmente com conceitos avançados. Desta forma, apresentamos alguns contra-exemplos para a existência da derivada. Para admitir reta tangente em um determinado ponto, o gráfico não pode dar "salto" (não pode ser descontínuo nele) nem mudar bruscamente de direção (formar "bico") nesse ponto. Não admitem tangente em $x_0$ os seguintes gráficos de funções (Figura 4.13):

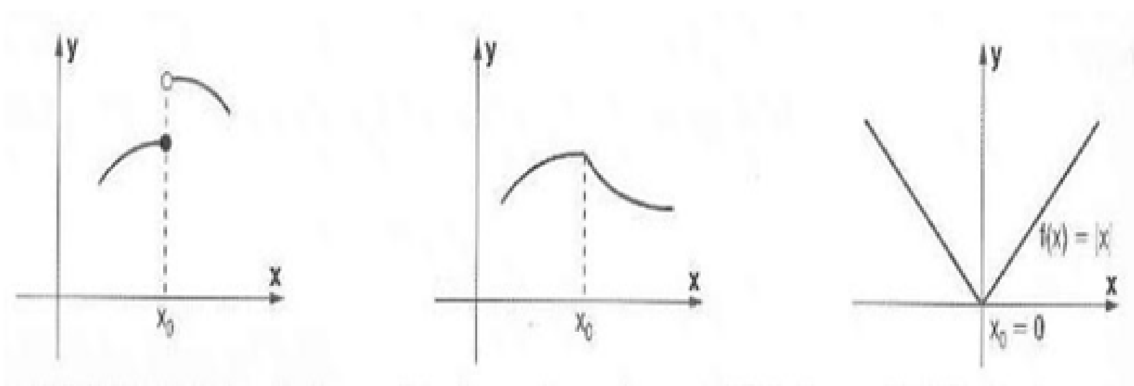



Figura 4.13: Gráficos de algumas funções que não possuem derivada em $x_0$. (Dante, 2004b, p. 264)

Retas paralelas ao eixo dos $y$ não têm coeficiente angular, pois $m = \text{tg } 90°$ não está definido. Assim, se a tangente ao gráfico de uma função num ponto é paralela ao eixo $y$, a função também não admite derivada nesse ponto. Neste caso, existe a tangente ao gráfico por esse ponto, mas não existe a derivada. São exemplos disso as seguintes funções, nos pontos $x_0$ indicados:

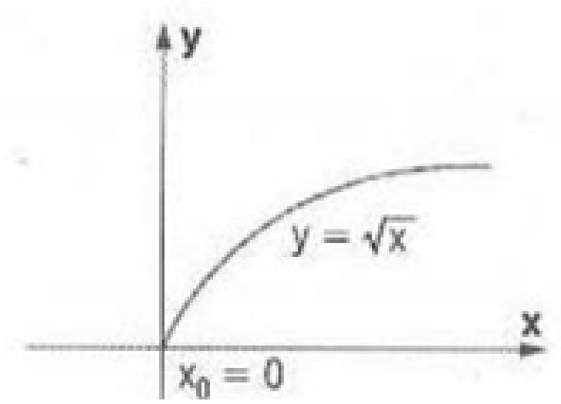



Figura 4.14: Gráfico de uma função não-derivável em $x_0$. (Dante, 2004b, p. 2)

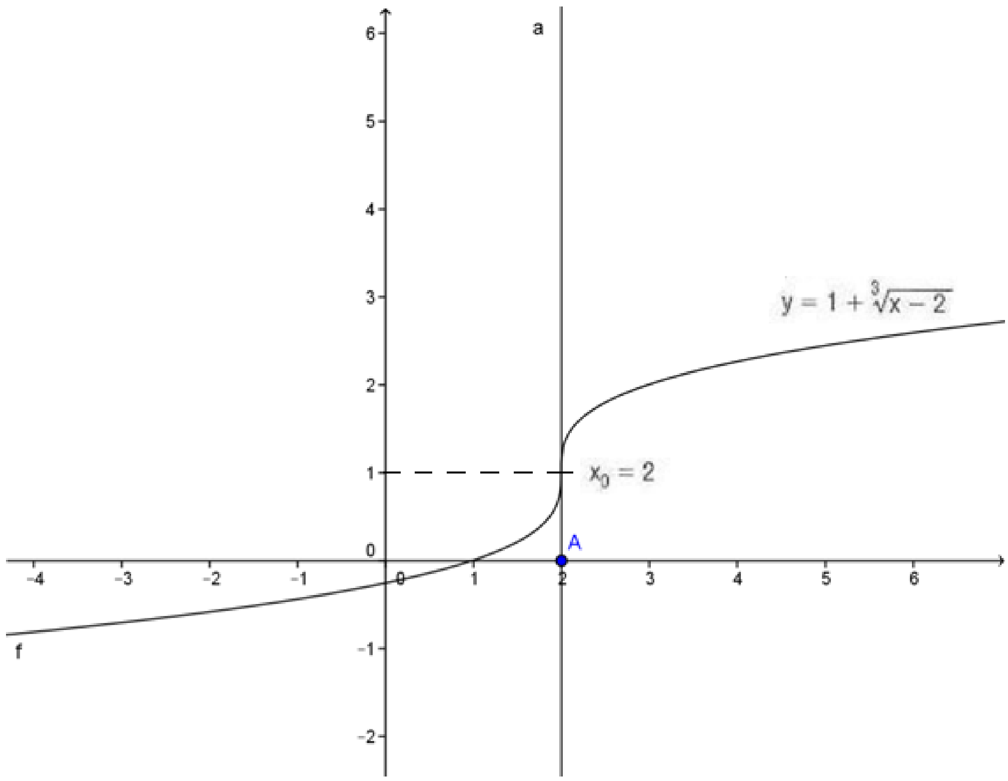



Figura 4.15: Gráfico de uma função em que não existe derivada em $x_0$.

Capítulo 5

# INTEGRAL

A ideia intuitiva para o cálculo de áreas aplicado por Arquimedes é o processo que pode ser utilizado no Ensino Médio, o qual introduz o conceito de integral:

> Para calcular a área sob o gráfico, podemos raciocinar da seguinte maneira: vamos subdividir o intervalo considerado em muitos pequenos intervalos, suficientemente pequenos [...]. Assim, em cada um dos pequenos intervalos, uma fatia da área que buscamos pode ser calculada como se fosse um pequeno retângulo; depois, para se ter a área procurada, basta somar as áreas de todos os retangulinhos. (MACHADO, 2008, p. 3)

A Figura 5.1 representa a ideia do autor:

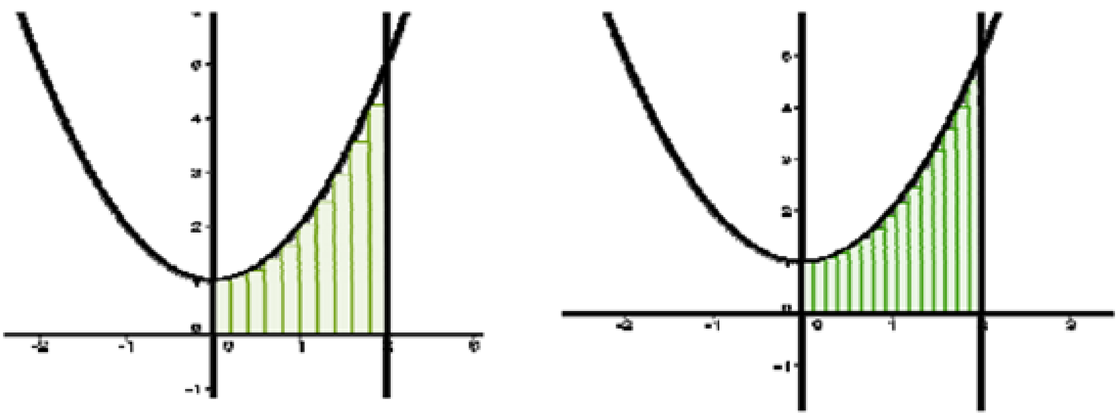


Figura 5.1: Área sob o gráfico de $f$.

Na sequência desse texto o autor complementa: “Integrar é juntar esses pedaços” (Ibid., p. 3). Utilizando o mesmo ponto de vista, a Revista Cálculo na reportagem especial “Cálculo sem pressa é bom”, destaca, em uma linguagem informal, a ideia intuitiva do processo de integração:

> Integração é isso: se o estudante precisa achar a área de uma figura geométrica cheia de curvas, ele fatia a figura, substitui cada fatia por um retângulo (isto é, substitui cada fatia por uma figura cuja área é fácil de calcular), e soma todas as fatias. Conforme o número de fatias aumenta, a área de todos os retângulos somados se aproxima da área real; conforme o número de fatias tende ao infinito, a área de todos os retângulos somados tende à área real exata. (SIMÕES, 2012, p. 32)

Assim, através da visualização do gráfico de determinada função, é possível fazer com que os estudantes identifiquem a região a qual se deseja aproximar a área e efetuem o seu cálculo como indicado acima. Dessa forma intuitiva o conceito de integral pode ser trabalhado na educação básica de modo a ampliar os conhecimentos dos alunos em relação à aplicabilidade da matemática.

Afinal, nos problemas reais envolvendo o cálculo da área de uma plantação, por exemplo, dificilmente a região considerada será exatamente uma figura geométrica regular, sendo que o processo de aproximação pode auxiliar nesse cálculo.

## 5.1 - História da Integral

A história da Integral descrita abaixo foi extraída dos livros: Cálculo de George B. Thomas (FINNEY, Ross L., WEIR Maurice D., GIORDANO Frank R.) e A Rainha Das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática de GARBI, Gilberto Geraldo.

O cálculo integral se originou com problemas de quadratura e cubatura. Resolver um problema de quadratura significa encontrar o valor exato da área de uma região bidimensional cuja fronteira consiste de uma ou mais curvas, ou de uma superfície tridimensional, cuja fronteira também consiste de pelo menos uma curva.

Para um problema de cubatura, queremos determinar o volume exato de um sólido tridimensional limitado, pelo menos em parte, por superfícies curvas. Hoje, o uso do termo quadratura não mudou muito: matemáticos, cientistas e engenheiros comumente dizem que “reduziram um problema a uma quadratura”, o que significa que tinham um problema complicado, o simplificaram de várias maneiras e agora o problema pode ser resolvido avaliando uma integral.

Historicamente, Hipócrates de Chios (cerca de 440 a.C.) executou as primeiras quadraturas quando encontrou a área de certas lunas, regiões que se parecem com a lua próxima do seu quarto crescente. Antiphon (cerca de 430 a.C.) alegou que poderia "quadrar o círculo" (isto é, encontrar a área de um círculo) com uma seqüência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado; segundo um octógono, a seguir um hexadecaedro, etc., etc. Seu problema era o "etc., etc.". Como a quadratura do círculo de Antiphon requeria um número infinito de polígonos, nunca poderia ser terminada. Ele teria que ter usado o conceito moderno de limite para finalizar seu processo com rigor matemático.

Mas Antiphon tinha o início de uma grande ideia agora chamado de método de exaustão. Creditamos a Eudoxo (cerca de 370 a.C.) o desenvolvimento do método de exaustão: uma técnica de aproximação da área de uma região com um número crescente de polígonos, com aproximações melhorando a cada etapa e a área exata sendo obtida depois de um número infinito destas etapas; esta técnica foi modificada para atacar cubaturas também.

Arquimedes (287-212 a.C.), o maior matemático da antigüidade, usou o método de exaustão para encontrar a quadratura da parábola. Arquimedes aproximou a área com um número grande de triângulos construídos engenhosamente e então usou o argumento da redução ao absurdo duplo para provar o resultado rigorosamente e evitar qualquer metafísica do infinito. Para o círculo, Arquimedes primeiro mostrou que a área depende da circunferência; isto é muito fácil de se verificar hoje em dia, uma vez que ambas as fórmulas dependem de $\pi$. Então Arquimedes aproximou a área do círculo de raio unitário usando polígonos regulares de 96 lados inscritos e circunscritos! Seu famoso resultado foi $3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7}$; mas como estas eram apenas aproximações, no sentido estrito, não eram quadraturas. Esta técnica refinou o método de exaustão, assim quando existe um número infinito de aproximações poligonais, chamamos de método da compressão.

O processo de Arquimedes para encontrar a área de um segmento de uma espiral era comprimir esta região entre setores de círculos inscritos e circunscritos: seu método de determinar o volume de um conóide (um sólido formado pela rotação de uma parábola ao redor de seu eixo) era comprimir este sólido entre cilindros inscritos e circunscritos. Em cada caso, a etapa final que estabelecia rigorosamente o resultado era o argumento da redução ao absurdo dupla.

No seu possivelmente mais famoso trabalho, um tratado combinado de matemática e física, Arquimedes empregou indivisíveis para estimar o centro de gravidade de certas regiões bidimensionais e de certos sólidos tridimensionais. Arquimedes reconheceu que, por um lado, seu trabalho sugeria a verdade de seus resultados, e por outro faltava um rigor lógico completo. Se considerarmos uma destas regiões sendo composta de um número infinito de retas, de comprimentos variados, então estas retas são chamadas de indivisíveis. Similarmente, quando a composição de um sólido tridimensional é pensada como um número infinito de discos circulares, de raios variados, mas com espessura zero, então estes discos são conhecidos como indivisíveis.

Matemáticos muçulmanos dos séculos IX a XIII foram grandes estudiosos de Arquimedes, mas nunca souberam da determinação de Arquimedes do volume de um conóide. Assim, um dos mais notáveis de todos matemáticos árabes, Thabit ibn Qurrah (826-901) desenvolveu sua própria cubatura, um tanto complicada, deste sólido; e então o cientista persa Abu Sahl al-Kuhi (século X) simplificou consideravelmente o processo de Thabit. Ibn al-Haytham (965-1039), conhecido no ocidente como Alhazen e famoso por seu trabalho em ótica, usou o método de compressão para encontrar o volume do sólido formado pela rotação da parábola ao redor de uma reta perpendicular ao eixo da curva.

Durante o período medieval no ocidente, foi obtido progresso aplicando as ideias de cálculo a problemas de movimento. William Heytesbury (1335), um membro do notável grupo de estudiosos do Merton College, em Oxford, foi o primeiro a vislumbrar métodos para a determinação da velocidade e a distância percorrida por um corpo supostamente sob "aceleração uniforme". Hoje, podemos obter estes resultados encontrando duas integrais indefinidas ou antiderivadas, sucessivamente. Notícias deste trabalho de Heytesbury e seus colegas de Merton alcançaram Paris posteriormente no século XIV onde Nicole Oresme (1320-1382) representou ambas a velocidade e o tempo como segmentos de reta de comprimentos variáveis. Oresme colocou as retas de velocidade de um corpo juntas verticalmente, como os indivisíveis de Arquimedes, sobre uma reta base horizontal, e a configuração total, como ele a chamou, representava a distância total coberta pelo corpo. Em particular, a área desta configuração era chamada de "quantidade total de movimento" do corpo. Aqui temos precursores dos gráficos modernos e o nascimento da cinemática.

À medida que os europeus começaram a explorar o globo, tornou-se necessário ter um mapa do mundo no qual certas retas representassem rumos sobre a superfície da Terra. Houve diversas soluções para este problema, mas a solução mais famosa foi a projeção de Mercator, embora Gerard Mercator (1512-1594) não tenha explicado seus princípios geométricos. Aquela tarefa foi assumida por Edward Wright (1561-1615) que, além disso, providenciou uma tabela que mostrava que as distâncias ao longo das retas de rumo seriam bem aproximadas somando os produtos ($\sec f$ D$f$ ), onde $f$ é a latitude; isto é, aproximando a integral de $\sec f$. Em seu New Stereometry of Wine Barrels (Nova Estereometria de Barris de Vinho) (1615), o famoso astrônomo Johannes Kepler (1571-1630) aproximou os volumes de vários sólidos tridimensionais, cada qual era formado girando uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para cada um destes volumes de revolução, subdividiu o sólido em várias fatias muito finas ou discos chamados de infinitésimos (note a diferença entre infinitésimos e os indivisíveis de Arquimedes).

Então, em cada caso, a soma destes infinitésimos aproximavam o volume desejado. A segunda lei de Kepler do movimento planetário requeria quadraturas de segmentos de uma elipse, e para aproximar estas áreas, somou triângulos infinitesimais. Bonaventura Cavalieri (1598-1647), um aluno de Galileu, desenvolveu uma teoria de indivisíveis.

Para uma região bidimensional, Cavalieri considerou a coleção de "todas as retas" como sendo um único número, a área da região. Christiaan Huygens (1629-1695) criticou, "Sobre os métodos de Cavalieri: alguém se engana se aceitar seu uso como uma demonstração mas são úteis como um meio de descoberta anterior à demonstração... isto é o que vem primeiro...". Evangelista Torricelli (1608-1648), outro discípulo de Galileu e amigo de Cavalieri, tentou resolver algumas das dificuldades com indivisíveis ao afirmar que as retas poderiam ter algum tipo de espessura. Foi cuidadoso para usar argumentos de redução ao absurdo para provar quadraturas que obteve por indivisíveis. O "Chifre de Gabriel" é uma cubatura "incrível" descoberta por Torricelli.

Pierre Fermat (1601-1665) desenvolveu uma técnica para encontrar as áreas sob cada uma das "parábolas de ordem superior" ($y = kx^n$, onde $k > 0$ é constante e $n = 2, 3, 4, ...$) usando retângulos estreitos inscritos e circunscritos para levar ao método de compressão. Então empregou uma série geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas $y = kx^n$, para $n = -2, -3, -4, ...$. Mas, para sua decepção, nunca foi capaz de estender estes processos para "hipérboles de ordem superior", $y^m = kx^n$. Por volta da década de 1640, a fórmula geral para a integral de parábolas de ordem superior era conhecida de Fermat, Blaise Pascal (1623-1662), Gilles Personne de Roberval (1602-1675), René Descartes (1596-1650), Torricelli, Marin Mersenne (1588-1648) e provavelmente outros. John Wallis (1616-1703) estava fortemente comprometido com a relativamente nova notação algébrica cujo desenvolvimento era uma característica dos matemáticos do século XVII.

Por exemplo, ele tratou a parábola, a elipse e a hipérbole como curvas planas definidas por equações em duas variáveis em vez de seções de um cone. Também inventou o símbolo ¥ para infinito e, ao usar isto, obscureceu lugares onde agora sabemos que deveria ter usado o limite. Estendeu a fórmula de quadratura para $y = kx^n$ para casos quando $n$ era um número racional positivo usando indivisíveis, razões inteligentes e apelos ao raciocínio por analogia. A dependência de Wallis em fórmulas o levou a várias quadraturas interessantes.

Roberval explorou o Princípio de Cavalieri para encontrar a área sob um arco da ciclóide. Roberval e Pascal foram os primeiros a plotar as funções seno e co-seno e a encontrar as quadraturas destas curvas (para o primeiro quadrante). Pascal aproximou integrais duplas e triplas usando somas triangulares e piramidais. Estas não eram cubaturas, mas eram etapas em seu esforço para calcular os momentos de certos sólidos, para cada um dos quais ele então determinou o centro de gravidade.

Finalmente, Gregory St. Vincent (1584-1667) determinou área sob a hipérbole $xy = 1$ usando retângulo estreitos inscritos e circunscritos de larguras diferentes especialmente desenhados e o método de compressão. St. Vincent estendeu esta e outras quadraturas para encontrar várias cubaturas.

Logo depois disto, seu aluno, Alfonso Antonio de Sarasa (1618-1667) reconheceu que a quadratura da hipérbole está intimamente ligada à propriedade do produto do logaritmo! Seguindo uma sugestão de Wallis, em 1657, William Neile (1637-1670) determinou o comprimento de uma seção arbitrária da parábola semicúbica, $y^2 = x^3$, e em 1658, Christopher Wren (1632-1723), o famoso arquiteto, encontrou o comprimento de um arco da ciclóide.

Em 1659, Hendrick van Heuraet (1634 - cerca de 1660) generalizou seu trabalho somando tangentes infinitesimais a uma curva, portanto desenvolveu a essência do nosso método moderno de retificação usando uma integral para encontrar o comprimento de um arco. Na forma geométrica, muito do cálculo nos primeiros dois terços do século XVII culminaram no The Geometrical Lectures (1670) de Isaac Barrow (1630-1677). Barrow deixou sua cadeira de Professor Lucasiano em Cambridge em favor de seu ex-aluno Isaac Newton (1642-1727). Newton seguiu James Gregory (1638-1675) ao pensar na área da região entre uma curva e o eixo horizontal como uma variável; o extremo esquerdo era fixo, mas o extremo direito podia variar. Este truque lhe permitiu estender algumas fórmulas de quadratura de Wallis e o levou ao Teorema Fundamental do Cálculo.

O último trabalho de Newton sobre cálculo, e também o primeiro a ser publicado, foi seu ensaio, "On the Quadrature of Curves" (Sobre Quadratura de Curvas), escrito entre 1691 e 1693 e publicado como um apêndice na edição de 1704 do seu Opticks. Neste, ele montou uma tabela extensa de integrais de funções algébricas um tanto complicadas, e para curvas as quais não podia desenvolver fórmulas de integração, inventou técnicas geométricas de quadratura. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, Newton desenvolveu as técnicas básicas para avaliar integrais usadas hoje em dia, incluindo os métodos de substituição e integração por partes.

Para Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), uma curva era um polígono com um número infinito de lados. Leibniz (1686) fez $y$ representar uma ordenada da curva e $dx$ a distância infinitesimal de uma abscissa para a próxima, isto é, a diferença entre abscissas "sucessivas". Então disse, "represento a área de uma figura pela soma de todos os retângulos [infinitesimais] limitados pelas ordenadas e diferenças das abscissas... e assim represento em meu cálculo a área da figura por ò $y$ $dx$". Leibniz tomou o "S" alongado para a integral do latim summa e $d$ do latim differentia, e estas têm permanecido nossas notações de cálculo mais básicas desde então.

Ele considerava as contas de cálculo como o meio de abreviar de algum modo o clássico método grego de exaustão. Leibniz era ambivalente sobre infinitesimais, mas acreditava que contas formais de cálculo poderiam ser confiáveis porque levavam a resultados corretos. O termo integral, como usamos em cálculo, foi cunhado por Johann Bernoulli (1667-1748) e publicado primeiramente por seu irmão mais velho Jakob Bernoulli (1654-1705). Principalmente como uma conseqüência do poder do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton e Leibniz, integrais eram consideradas simplesmente como derivadas "inversas". A área era uma noção intuitiva, quadraturas que não podiam ser encontradas usando o Teorema Fundamental do Cálculo eram aproximadas. Embora Newton tenha desferido um golpe muito imperfeito sobre a ideia de limite, ninguém nos séculos XVIII e XIX teve a visão de combinar limites e áreas para definir a integral matematicamente. Em vez disso, com grande engenhosidade, muitas fórmulas de integração inteligentes foram desenvolvidas.

Aproximadamente ao mesmo tempo em que a tabela de integrais de Newton tinha sido publicada, Johann Bernoulli desenvolveu procedimentos matemáticos para a integração de todas as funções racionais, o qual chamamos agora de método das frações parciais. Estas regras foram resumidas elegantemente por Leonhard Euler (1707-1783) em seu trabalho enciclopédico de três volumes sobre cálculo (1768-1770). Incidentalmente, estes esforços estimularam o aumento do interesse durante o século 18 na fatoração e resolução de equações polinomiais de graus elevados.

Enquanto descrevia as trajetórias dos cometas no Principia Mathematica (1687), Newton propôs um problema com implicações importantes para o cálculo: "Para encontrar uma curva do tipo parabólico [isto é, um polinômio] a qual deve passar por qualquer número de pontos dados", Newton redescobriu a fórmula de interpolação de James Gregory (1638-1675); hoje, é chamada de fórmula de Gregory-Newton, e em 1711, ele ressaltou sua importância: "Assim as áreas de todas as curvas podem ser aproximadas... a área da parábola [polinômio] será quase igual à área da figura curvilínea ... a parábola [polinômio] pode sempre ser quadrada geometricamente por métodos conhecidos em geral [isto é, usando o Teorema Fundamental do Cálculo]". O trabalho de interpolação de Newton foi estendido em épocas distintas por Roger Cotes (1682-1716), James Stirling (1692-1770), Colin Maclaurin (1698-1746), Leonhard Euler e outros. Em 1743, o matemático autodidata Thomas Simpson (1710-1761) encontrou o que se tornou um caso especial, popular e útil das formulas de Newton-Cotes para aproximar uma integral, a Regra de Simpson.

Embora Euler tenha feito cálculos mais analíticos que geométricos, com ênfase em funções (1748; 1755; 1768), houve vários mal-entendidos sobre o conceito de função, propriamente dito, no século XVIII. Certos problemas de física, como o problema da corda vibrante, contribuíram para esta confusão. Euler identificou tanto funções com expressão analítica, que pensou em uma função contínua como sendo definida apenas por uma única fórmula em todo seu domínio.

A ideia moderna de uma função contínua, independente de qualquer fórmula, foi iniciada em 1791 por Louis-François Arbogast (1759-1803): "A lei de continuidade consiste em que uma quantidade não pode passar de um estado [valor] para outro [valor] sem passar por todos os estados intermediários [valores] ...". Esta ideia tornou-se rigorosa em um panfleto de 1817 por Bernhard Bolzano (1781-1848) e é conhecida agora como o Teorema do Valor Intermediário. Funções descontínuas (no sentido moderno) foram forçadas na comunidade matemática e científica por Joseph Fourier (1768-1830) no seu famoso Analytical Theory of Heat (Teoria Analítica do Calor, 1822). Quando Augustin Louis Cauchy (1789-1857) assumiu a reforma total do cálculo para seus alunos de engenharia na École polytechnique na década de 1820, a integral era uma de suas pedras fundamentais:

"No cálculo integral, me pareceu necessário demonstrar com generalidade a existência das integrais ou funções primitivas antes de tornar conhecidas suas diversas propriedades. Para alcançar este objetivo, foi necessário estabelecer no começo a noção de integrais tomadas entre limites dados ou integrais definidas".

Cauchy definiu a integral de qualquer função contínua no intervalo $[a, b]$ sendo o limite da soma das áreas de retângulos finos. Sua primeira obrigação era provar que este limite existia para todas as funções contínuas sobre o intervalo dado. Infelizmente, embora Cauchy tenha usado o Teorema do Valor Intermediário, não conseguiu seu objetivo porque não observou dois fatos teóricos sutis mas cruciais. Ele não tinha noção das falhas lógicas no seu argumento e prosseguiu para justificar o Teorema do Valor Médio para Integrais e para provar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções contínuas.

Niels Henrik Abel (1802-1829) também apontou certos erros delicados ao usar a integral de Cauchy para integrar todo termo de uma série infinita de funções. A primeira prova rigorosa da convergência da Série de Fourier geral foi feita por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) em 1829. Dirichlet também é responsável pela definição moderna de função (1837). Em 1855, Dirichlet sucedeu Carl Friedrich Gauss (1777-1855) como professor na Universidade de Göttingen. Por sua vez, Georg F. B. Riemann (1826-1866) sucedeu Dirichlet (1859) em Göttingen.

No processo de extensão do trabalho de Dirichlet sobre séries de Fourier, Riemann generalizou a definição de Cauchy da integral para funções arbitrárias no intervalo $[a, b]$, e o limite das somas de Riemann é a formulação no texto. Imediatamente, Riemann perguntou, "em que casos uma função é integrável?" A maior parte do desenvolvimento da teoria de integração foi subseqüentemente verificada por Riemann e outros, mas ainda havia dificuldades com integrais de séries infinitas que não foram trabalhadas até o início do século XX.

## 5.2 - A Integral de Riemann

Em geometria muitas vezes nos deparamos com problemas que recaem no cálculo de áreas de figuras geométricas. O cálculo Integral se originou a partir da necessidade de resolver um problema de quadratura, ou seja, de encontrar o valor exato de área de uma região bidimensional ou de superfície tridimensional, cujas fronteiras são de uma ou mais curvas.

Hipocrátes de Chios (cerca de 440 a.C.) resolveu os primeiros problemas envolvendo quadratura quando encontrou a área de certas lúnulas (regiões que se pareciam com a lua crescente próxima a seu quarto). Antiphon (cerca de 430 a.C.) afirmou que conseguiria "quadrar o círculo", isto é, encontrar a área de um círculo a partir de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, segundo um octógono, a seguir um hexaedro, etc. O problema era essa indução, pois a quadratura do círculo de Antiphon requeria um número infinito de polígonos, que nunca poderia ser terminada. Ele teria de ser usado o conceito moderno de limite para finalizar seu processo com rigor matemático.

Bernhard Riemann (1826 - 1866) foi o precursor da primeira definição rigorosa da integral de uma função num intervalo. A integral de Riemann em $[a, b]$ de uma função positiva pode ser interpretada geometricamente como sendo a área da região do plano limitada pelo gráfico de $f$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$.

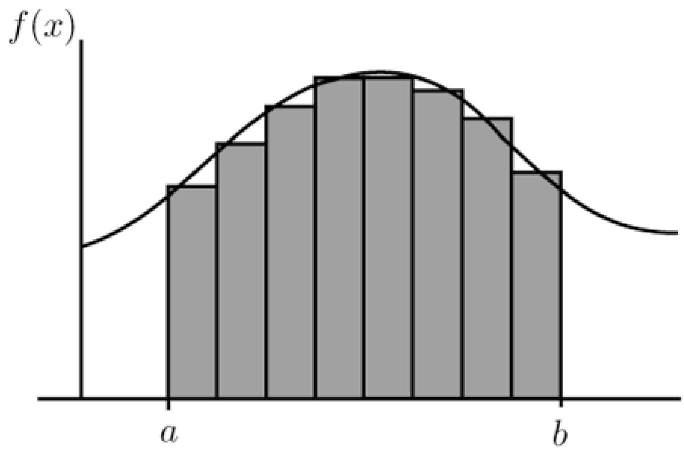



Figura 5.2: Soma de Riemann em $[a, b]$ de uma função.

Se $f$ é uma função contínua definida por $a \leq x \leq b$, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $n$ subintervalos de comprimentos iguais a $C = \dfrac{b-a}{n}$. Sejam $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ os extremos desses subintervalos, e seja $x_i$ o i-ésimo ponto contido no subintervalo

$[x_i, x_{i+1}]$, então a integral definida de $f$ é:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

# 5.3 - Noção Intuitiva de Integral

Sabemos que a derivada de uma função $y(x)$, é dada pelo limite da razão incremental:

$$y'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}.$$

Nesse capítulo mostraremos a parte intuitiva do processo de integração para, posteriormente, evoluirmos para definições mais elaboradas.

## 5.3.1 O método da exaustão

Vamos iniciar com a bem conhecida equação do círculo de raio 1 (um) e tomar o intervalo entre 0 e 1, ou seja, no primeiro quadrante cujo domínio é $[0, 1]$.

$$y(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Pergunta-se: como podemos calcular a área sob a curva? Para responder essa questão, vamos usar o chamado método da exaustão, que, como o nome está dizendo, é um tanto cansativo/demorado. Vamos iniciar supondo que a área pode ser aproximada pelo quadrado mostrado na Figura 5.3.

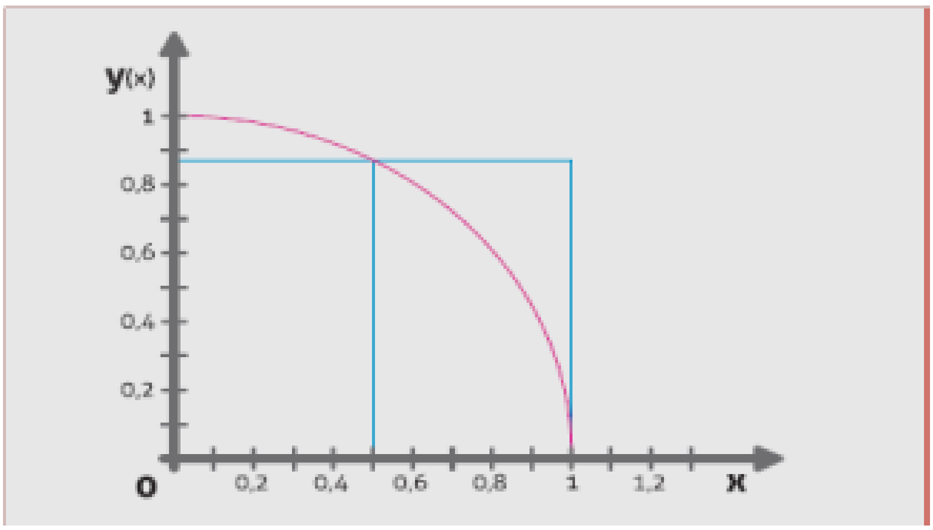



Figura 5.3: Aproximação da área sob a curva $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ no intervalo $[0, 1]$ por 2 retângulos.

Esse quadrado tem base $\Delta x$ igual a 1 e altura dada pelo valor da função calculada na posição correspondente à metade da base. Assim:

$$S_1 = y\Big(\frac{1}{2}\Big) \cdot \Delta x.$$

Como $y\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^2} = \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ e $\Delta x = 1$, logo

$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 1.$$

Calculando a raiz obtemos

$$S_1 = 0,8660.$$

Como já sabemos, o resultado dessa área é $\frac{\pi}{4}$, pois é um quarto da área de um círculo com raio igual à unidade. Com quatro casas após a vírgula, a área deve ser $0,7854$. Como se vê, a área está com valor maior, o que pode ser verificado pela observação da Figura 5.3.

Vamos melhorar um pouco dividindo a base em dois, $\Delta x = \frac{1}{2}$, como mostrado na Figura 5.4.

$$S_2 = \bigg(y\Big(\frac{1}{4}\Big) + y\Big(\frac{3}{4}\Big)\bigg) \cdot \Delta x,$$

como $\Delta x = \frac{1}{2}$, temos:

$$S_2 = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{16}} + \sqrt{1 - \frac{9}{16}}\right) \cdot \frac{1}{2}.$$

Escrevendo as frações com o mesmo denominador:

$$S_2 = \left(\sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} + \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{9}{16}}\right) \cdot 0,5 = \left(\sqrt{\frac{15}{16}} + \sqrt{\frac{7}{16}}\right) \cdot 0,5.$$

Extraindo a raiz quadrada de $\frac{1}{16}$ temos:

$$S_2 = \frac{1}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{7}) \cdot 0,5.$$

Calculando as raízes obtemos

$$S_2 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot (3,8729 + 2,6457) = 0,125 \cdot 6,5186 = 0,8148.$$

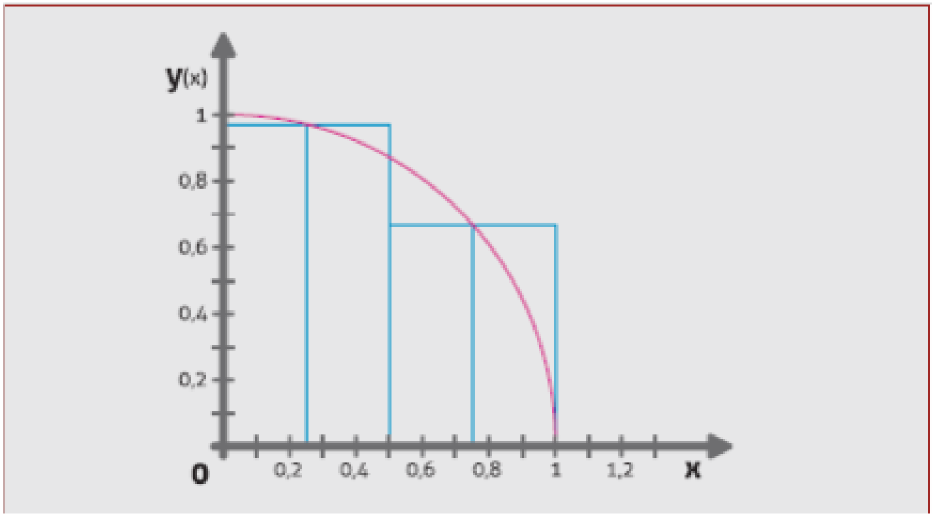



Figura 5.4: Aproximação da área sob a curva $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ no intervalo $[0,1]$ por 4 retângulos.

Continuando o nosso método, na Figura 5.5, tomamos $\Delta x$ igual a $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} S_4 &= \left(y\left(\frac{1}{8}\right) + y\left(\frac{3}{8}\right) + y\left(\frac{5}{8}\right) + y\left(\frac{7}{8}\right)\right) \cdot \Delta x \\ &= \left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{5}{8}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(\sqrt{1-\frac{1}{64}} + \sqrt{1-\frac{9}{64}} + \sqrt{1-\frac{25}{64}} + \sqrt{1-\frac{49}{64}}\right) \cdot \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Escrevendo as frações com o mesmo denominador

$$\begin{aligned} S_4 &= \left(\sqrt{\frac{64}{64}-\frac{1}{64}} + \sqrt{\frac{64}{64}-\frac{9}{64}} + \sqrt{\frac{64}{64}-\frac{25}{64}} + \sqrt{\frac{64}{64}-\frac{49}{64}}\right) \cdot \frac{1}{4} \\ &= \left(\sqrt{\frac{63}{64}} + \sqrt{\frac{55}{64}} + \sqrt{\frac{39}{64}} + \sqrt{\frac{15}{64}}\right) \cdot \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz de $\frac{1}{64}$, obtemos

$$S_4 = \frac{1}{8}\big(\sqrt{63}+\sqrt{55}+\sqrt{39}+\sqrt{15}\big)\frac{1}{4}.$$

Calculando as raízes temos

$$\begin{aligned} S_4 = {} & 0,125 \cdot (7,93 + 7,41 + 6,24 + 3,87) \cdot 0,25 \\ = {} & 0,125 \cdot 25,45 \cdot 0,25 \\ = {} & 0,7960 \\ = {} & \big(y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + y(x_4)\big)\Delta x. \end{aligned}$$

Essa soma de quatro termos pode ser escrita na notação de somatório como:

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4} y(x_i)\Delta x.$$

O resultado de $S_4$ é $0,7960$. Você pode ver que estamos, lentamente, nos aproximando do valor "correto", que é, como já foi dito, $0,7854$ ("correto" entre aspas, pois o valor correto é um número real cujo valor é $\frac{\pi}{4}$). Podemos inferir que quanto maior for o número de retângulos mais próximos estaremos do valor exato.

Partindo deste ponto de vista, vamos generalizar a equação acima para um número genérico de quadrados. A fórmula acima pode ser escrita como:

$$S_4 = \big(y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + y(x_4)\big)\Delta x.$$

Essa soma de quatro termos pode ser escrita na notação de somatório como:

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4} y(x_i)\Delta x.$$

Para um número genérico ($n$) de retângulos, o somatório fica:

$$S_{A_n} = \sum_{i=1}^{n} y(x_i)\Delta x.$$

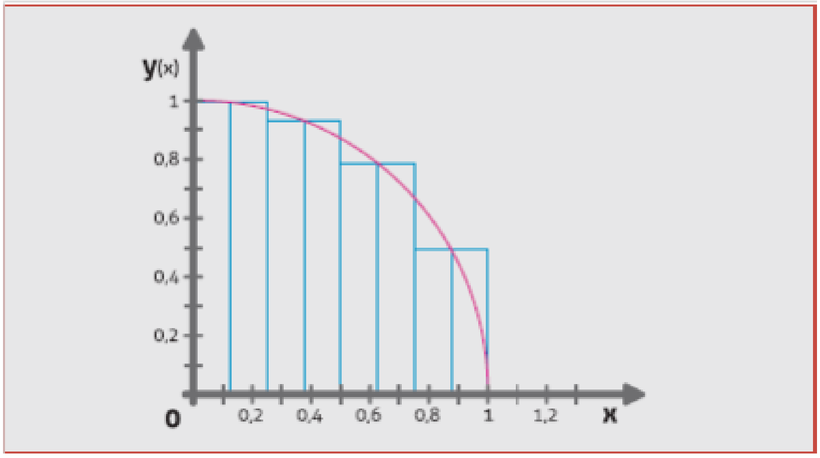



Figura 5.5: Aproximação da área sob a curva $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$ por 8 retângulos.

Como já vimos, quanto maior for o número de retângulos, mais próximo estaremos do valor $\frac{\pi}{4}$. Qual seria o número de retângulos que daria valor correto (agora sem aspas)? Um número muito grande, ou seja, quando o número de retângulos tende ao infinito. Dessa forma, a equação acima pode ser escrita como:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} y(x_i)\Delta x.$$

É uma soma de infinitos termos infinitamente pequenos. Essa soma é simbolizada pela letra $S$ espichada ($\int$), assim:

$$S = \int y(x)\Delta x.$$

Lê-se "área é igual à integral da função y(x)"; $dx$ (diferencial de $x$) é o símbolo usado para $S(x)$ quando este tende a zero. Para sermos mais rigorosos e considerando que a área abaixo da curva, representada pela função $y = \sqrt{1-x^2}$, é calculada entre os pontos 0 e 1, a notação da integral deve conter essa informação. Assim, essa integral é denominada de integral definida no intervalo $[0, 1]$. A notação tem a seguinte forma:

$$S = \int_0^1 y(x)\Delta x.$$

Repetimos que a variável área ($S$) é um número que representa uma área e não é uma função de $x$. Área ($S$) é função dos limites de integração, daqui a pouco veremos que esse fato nos permitirá definir uma nova função. Acabamos de ver que a operação de integração (ou se você quiser: a integral) representa geometricamente a área abaixo de uma curva. Vamos, então, partir dessa ideia, e calcular algumas áreas sob curvas representadas por funções simples. Com isso, vamos dar um passo adiante e tornar a ideia de integral um pouco mais geral (mais abstrata), em que a integral de $f(x)$ é outra função de $x$, a primitiva $F(x)$.

## 5.4 - Área sob funções simples

Vamos calcular agora a área sob uma função muito simples, a função constante, $y(x) = C$, representada na Figura 5.6.

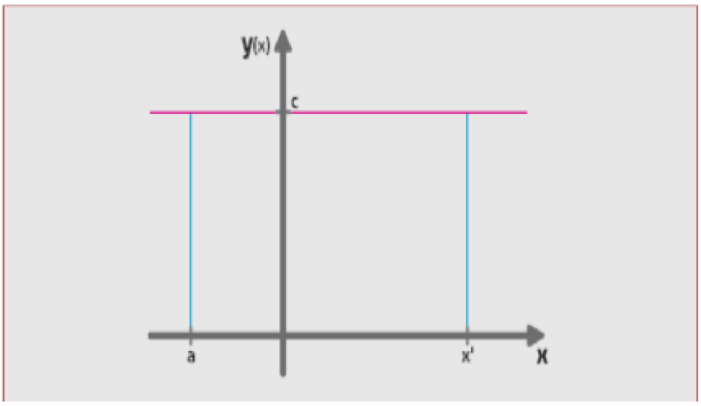



Figura 5.6: Gráfico de uma função constante.

A área do retângulo de altura $C$ e base $x' + a$ é:

$$F_1 = (x' + a)C = Cx' + aC.$$

Aqui, vê-se claramente que $F_1$ é proporcional a $x'$, portanto podemos dizer que $F_1$ é uma função de $x'$, ou seja:

$$F_1(x') = C(x') + Ca.$$

Vamos, agora, calcular a área sob a função linear $y(x) = ax + b$, mostrada na Figura 5.7.

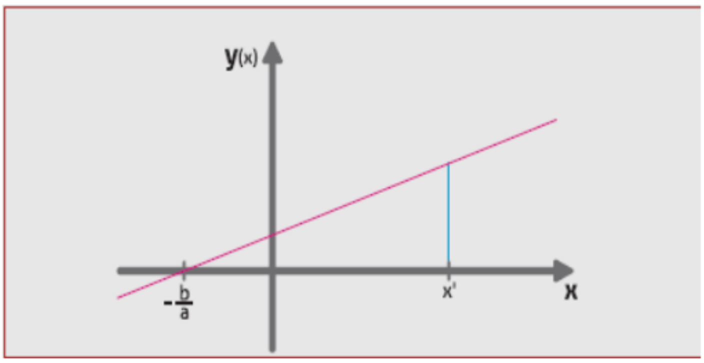



Figura 5.7: Gráfico de uma função linear.

A área do triângulo é dada pela metade do produto entre a base e a altura. Como a base é o comprimento da reta entre $-\dfrac{b}{a}$ e $x'$, temos:

$$F_2(x') = \frac{1}{2}\left(x' - \left(-\frac{b}{a}\right)\right) y(x') = \frac{1}{2}\left(x' + \frac{b}{a}\right)(ax' + b).$$

Aplicando a propriedade distributiva obtemos

$$\begin{aligned} F_2(x') = & \frac{1}{2}\left(ax'^2 + bx' + \frac{b}{a}\,ax' + \frac{b^2}{a}\right) = \frac{1}{2}ax'^2 + \frac{1}{2}bx' + \frac{1}{2}bx' + \frac{b^2}{2a} \\ = & \frac{1}{2}ax'^2 + bx' + \frac{b^2}{2a}. \end{aligned}$$

Agora, observe a Tabela 5.1 na qual mostramos na primeira coluna a função constante, $f(x') = C$, e a linear, $f(x') = ax' + b$; na segunda coluna, estão as funções que representam as áreas $F_1(x')$ e $F_2(x')$ (como $x'$ é, neste caso, uma variável muda, podemos trocar $x'$ por $x$ sem perda de nenhuma informação).

| $f(x)$ | $F(x)$ | $\dfrac{dF(x)}{dx}$ |
|---|---|---|
| $C$ | $Cx + Ca$ | $C$ |
| $ax + b$ | $\frac{1}{2}ax^2 + bx + \frac{b^2}{2a}$ | $\left(\frac{1}{2}\right)' ax^2 + \frac{1}{2}(a)'x^2 + \frac{1}{2}a(x^2)' + (b)'x + b(x)' + \left(\frac{b^2}{2a}\right)'$<br>$\frac{1}{2}a2x + b + 0$<br>$ax + b$ |

Tabela 5.1: Função constante e função linear.

Podemos ver que a operação de derivação das funções $F(x)$ nos levou às funções $f(x)$. Em outras palavras, e sendo um tanto repetitivo, a operação derivada recuperou a função inicial.

Para fixar bem esse conceito: dada uma função $f(x)$ que tem como integral $F(x)$, a derivada de $F(x)$ é a função original $f(x)$. Podemos, então, afirmar que a operação de integração é inversa à operação de derivação.

# Capítulo 6

# CÁLCULO NO ENSINO SUPERIOR

É comum existir nos vários cursos superiores disciplinas que acabam por se tornar símbolos do curso, em parte devido à sua dificuldade, em parte devido a serem formas de conhecimento bem diferentes daquelas a que os alunos estão acostumados. Devido à sua característica e de mitos, essas disciplinas representam um desafio para os alunos, e os relatos das dificuldades encontradas passam de turma em turma, nem sempre de forma fidedigna, contribuindo para aumentar o caráter de mito.

Assim, os alunos acabam por considerar natural um insucesso nessas disciplinas, e os professores estabelecem padrões de reprovação “normais”. Esses padrões tornam aparentemente desnecessária qualquer reflexão sobre os problemas enfrentados na disciplina, já que estão “dentro da normalidade”.

Nos cursos de Ciências Exatas e Tecnologia, a disciplina que mais reúne as características de mito, embora nem sempre seja a que mais reprova, é a disciplina que primeiro apresenta o aluno ao Cálculo Diferencial e Integral, normalmente conhecida como Cálculo I.

Estudos e pesquisas têm apontado que há um grande número de não aprovações nas disciplinas iniciais de Cálculo dos cursos superiores no Brasil que envolvam conteúdos relacionados, principalmente, ao estudo de funções, ou seja, conceitos de limites, derivadas e integrais.

## 6.1 - Para que Serve o Cálculo Diferencial e Integral

No mundo quase tudo depende de várias variáveis: pressão atmosférica, temperatura, densidades de massa ou de carga elétrica, grandezas econômicas, grandezas mecânicas como a posição, a velocidade ou a aceleração.

Algumas destas grandezas são representadas matematicamente por campos escalares; em cada ponto temos um número que significa alguma unidade, por exemplo, uma temperatura, ou uma pressão, ou uma densidade de massa por unidade de volume. Outras grandezas são representadas por campos vetoriais; em cada ponto temos um vetor que representa, por exemplo, uma força aplicada nesse ponto, ou a posição de uma partícula ou a sua velocidade. Não conhecer a matéria deixar-nos-ia incapazes de quantificar e analisar de forma científica quase tudo o que nos rodeia; como se fossemos analfabetos na biblioteca mais rica do mundo.

Para se construir uma estrutura, tem de conseguir responder a várias questões que de imediato se põem, por exemplo: Quanto pesa a cobertura (qual é a sua massa)? Qual é a área que ocupa? Em que pontos devem ser colocados os apoios e que cargas devem poder suportar? Que ângulos com a vertical devem ou podem os apoios fazer?

Para responder a estas questões precisamos de um modelo matemático da estrutura. Como a extensão em comprimento e largura da cobertura é muito maior do que a sua espessura, é muito útil e uma boa aproximação considerar a cobertura como uma superfície.

Após termos a descrição da superfície em termos de uma equação ou de uma parametrização e conhecendo a densidade efetiva de massa por unidade de área, podemos calcular a massa da cobertura, a sua área, os momentos de inércia relativos a vários eixos, o momento de inércia mede a capacidade de rotação da estrutura em torno de um eixo e assim calcular as cargas exercidas sobre os apoios. Podemos também calcular as equações das retas perpendiculares à cobertura.

Em Cálculo tudo isto se aprende a calcular através do estudo de variedades e de integrais em variedades (neste caso mais simplesmente superfícies e integrais de superfície).

O Eletromagnetismo é uma parte da Física estudada em praticamente todas as engenharias.

O Eletromagnetismo é aplicado no estudo das tecnologias como: celulares, televisões, rádios, leitores de CD, computadores, trovoadas, reações químicas, a visão, o radar, a luz das estrelas.

O Eletromagnetismo como a Física é representado por equações matemáticas. Por exemplo, a primeira equação dá origem à Lei de Gauss: a carga elétrica total no interior de uma superfície fechada é proporcional ao fluxo do campo elétrico para o exterior da superfície. Também a Lei de Ampère do magnetismo pode ser entendida de modo semelhante.

Os conceitos fundamentais da Mecânica de posição , velocidade, aceleração e força são grandezas representadas matematicamente por campos vetoriais. O Cálculo Diferencial de Várias Variáveis é essencial para as manipulações mais elementares destas grandezas físicas: por exemplo, o campo vetorial velocidade é a derivada em ordem ao tempo do campo vetorial posição, a aceleração é obtida derivando a velocidade em ordem ao tempo.

A integral de linha é utilizada para calcular o trabalho de uma força ao longo de uma trajetória. Força conservativa é a força cujo trabalho realizado ao longo de qualquer caminho unindo dois pontos fixos arbitrários independe do caminho escolhido.

A estrutura e as aplicações tecnológicas na Mecânica dos Fluidos é afetada pelas leis de movimento dos fluidos. Um exemplo disto é o da aerodinâmica de um avião, associada a um bom desempenho e a um mais baixo consumo de combustível, que é testada em todos os novos protótipos em túneis de vento.

Outro exemplo é o estudo dos problemas do trânsito numa grande cidade que pode ser modelado por um problema de mecânica dos fluidos fazendo-se variar a velocidade, compressibilidade, viscosidade e outras propriedades do fluido consoante a situação concreta que se pretende estudar. Uma das equações fundamentais da Mecânica dos Fluidos é a Equação de Navier-Stokes. A linguagem em que é escrita a Equação de Navier-Stokes é, mais uma vez, a do Cálculo Diferencial de Várias Variáveis, aplicado ao campo vetorial da velocidade do fluido e a outros.

## 6.2 - Reprovações na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral

De acordo com Swokowski, o cálculo foi descoberto no século XVII como instrumento para investigar problemas que envolveram movimento. Para estudar objetos que se movem a velocidade constante e ao longo da trajetória retilínea ou circular, a álgebra e a trigonometria podem ser suficientes, mas se a velocidade varia ou se a trajetória é irregular o cálculo torna-se necessário. Uma descrição cuidadosa de movimento exige definições precisas de velocidades (espaço percorrido) na unidade de tempo e aceleração (taxa de variação da velocidade).

Estas definições podem ser obtidas utilizando-se um dos conceitos fundamentais do cálculo: a derivada. Ambos os conceitos de derivada e integral são definidos por processos de limites. O conceito de derivada é invariavelmente apoiado no conceito de limite: passa-se ao limite da reta tangente, retendo o valor final do coeficiente angular, ou inclinação, e esse é um caminho que se torna cada vez mais difícil para calouros provenientes do ensino médio brasileiro.

A noção de limite é a ideia inicial que separa o cálculo da matemática elementar. Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) descobriram independentemente a conexão entre derivadas e integrais e a invenção do cálculo é atribuída a ambos.

O conceito de derivada, nos cursos de cálculo, normalmente, é apresentado a partir de retas secantes e tangentes. A representação geométrica comum a todos é a de retas tangentes, onde a razão incremental figura unicamente como a inclinação de secantes que tendem a uma tangente. Essa construção tem como raiz cognitiva a noção de limite, talvez o principal obstáculo na compreensão do conceito de derivada (Giraldo & Carvalho, 2002). Cornu (Tall (Ed) 1991) afirma que:

> Uma das maiores dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de limite reside não apenas na riqueza e complexidade, mas também nos aspectos cognitivos, que não podem ser gerados puramente a partir da definição. A distinção entre a definição e o próprio conceito é didaticamente muito importante. Lembrar da definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra. [...] A partir deste ponto de vista, estudantes freqüentemente acreditam que "entenderam" a definição de limite sem realmente apreender todas as implicações do conceito formal. (CORNU, 1991, p. 153).

Sendo assim, a definição formal de derivada não se caracteriza como uma raiz cognitiva para o conceito, pois, fundamenta-se no conceito de limite. Nesse sentido se o aluno não dominar o conceito de limite, não poderia então entender o significado de derivada, pois ambos estão totalmente ligados.

Diversos estudos têm mostrado que o ensino de Matemática em vários cursos superiores de Universidades brasileiras padece do mesmo mal: a falta de conexão entre o que é estudado em sala de aula com a realidade do aluno, ou seja, os professores não enfatizam a aplicabilidade dos conteúdos estudados tanto para o curso de graduação quanto para a futura vida profissional dos estudantes. Segundo Bathelt, (apud FERRUZZI, 2003, p. 30)

> [...] a insatisfação de alunos e professores sobre os resultados escolares nessa ciência, indica que existem problemas sobre sua prática de ensino e aprendizagem que precisam ser encarados. A Matemática tem sido trabalhada nas escolas como um amontoado de regras e procedimentos mecânicos a serem decorados e, oportunamente, utilizados. Trabalhados dessa forma seus conteúdos decorados não têm qualquer significado prático ou teórico para a vida dos alunos. (BATHELT apud FERRUZZI, 2003, p. 30)

No caso específico do Cálculo Diferencial e Integral, tratá-lo de forma desconexa às outras disciplinas do curso, sem contextualização, torna o aprendizado cansativo e sem propósitos. Alia-se a esse fato a forma desestimulante com que muitos professores da disciplina ministram seus cursos, apresentando problemas prontos e acabados que exigem do aluno apenas a aplicação de alguma técnica previamente decorada ou memorizada e não o raciocínio crítico em torno do problema que está sendo proposto, eliminando do processo de ensino-aprendizagem um fator fundamental: a criatividade e o prazer.

Segundo Dacquino (apud MACINTYRE, 2002, p. 48), podemos observar que o índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é creditada à dificuldade que os acadêmicos encontram até mesmo nas operações básicas matemáticas, apresentando um número considerável de desistências e um razoável número de reprovações, reflexo inclusive do elevado número de pessoas que ficam em exame nesta disciplina. Uma das causas destas dificuldades está associada a um Ensino Médio de qualidade questionável, geralmente cursando em condições não ideais.

> Um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "fracasso no ensino de Cálculo". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo (REZENDE, 2003, p. 1).

Rezende cita várias instituições de ensino que apresentam resultados não muito satisfatórios em relação ao aproveitamento dos alunos. Como exemplo, Barufi (1999, apud REZENDE, 2003, p. 1) relata que:

> [...] o índice de não aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45%.

Rezende (Ibid., p. 2) destaca os índices relativos à UFF - Universidade Federal Fluminense. Segundo ele, "a variação do índice de não aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que para o Curso de Matemática este não é inferior a 65%". Essa situação não é particular de uma universidade ou outra, pois os índices também são semelhantes, por exemplo, na Universidade Federal de Santa Maria - UFSM, que foi constatado por Molon (2013) numa pesquisa.

Neste estudo foram levantadas as informações relativas a um período de três anos a contar do segundo semestre de 2009 ao primeiro semestre de 2012. As disciplinas analisadas foram: Cálculo Diferencial e Integral. Essas disciplinas possuem, em geral, a mesma ementa, porém são aplicadas a cursos diferentes na UFSM. A contagem realizada buscou simplesmente avaliar quantitativamente o número de aprovações e não aprovações nas disciplinas de Cálculo.

Destaca-se que, o número geral de não aprovações engloba as reprovações por nota, as reprovações por frequência, o número de trancamentos parciais e o número de cancelamentos de matrícula. Os resultados desse levantamento de dados serão abordados abaixo. Observa-se que ao citar a disciplina de Cálculo, no decorrer desse trabalho, estará se fazendo referência às disciplinas citadas anteriormente.

No segundo semestre de 2009, ou seja, no período 2009/02, houve 521 alunos matriculados nas disciplinas citadas. Desses, o índice de não aprovação foi de 58,93%, isto é, 307 alunos.

No período 2010/01 houve 552 alunos matriculados nas disciplinas citadas. Desses, o índice de não aprovação foi de 51,09%, ou seja, 282 alunos. Já no período 2010/02 foram matriculados nas disciplinas iniciais de Cálculo, na UFSM, 622 alunos. Nesse semestre o índice de não aprovação foi de 57,56%, ou seja, 358 alunos.

No ano de 2011 os índices seguiram o mesmo padrão. No primeiro semestre, de um total de 560 alunos, 47,42% dos alunos obtiveram aprovação, ou seja, a maioria, 295 alunos não foi aprovada.

No segundo semestre de 2011 os dados levantados são ainda mais díspares, uma vez que o número de alunos que não obtiveram sucesso nas disciplinas analisadas foi de 386 alunos de um total de 644 matrículas.

O último semestre analisado foi o período 2012/01, onde se verificou de um total de 557 alunos matriculados nas disciplinas acima destacadas, somente 31,42% de aprovação.

Para finalizar o levantamento de dados de Molon (2013) na UFSM, destacamos que no total foram analisadas 3457 matrículas nas disciplinas iniciais de Cálculo, no período de três anos. Desse total, 1447 alunos foram aprovados. O índice geral de não aprovação nesse período foi de 58,14%.

Os índices de não aprovações nas disciplinas de cálculo na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), do Campus Universitário do Araguaia, também são alarmantes. Foram analisados os cursos do ICET (Instituto de Ciências Exatas e da Terra), os cursos que pertencem ao ICET são: Agronomia, Engenharia de Alimentos, Ciência da Computação, Licenciatura em Matemática, Licenciatura em Química, Licenciatura em Física e Engenharia Civil.

Na disciplina de Fundamentos de Matemática (na estatística foram inclusos os alunos dos cursos de Biomedicina e Licenciatura em Ciências Biológicas) no primeiro semestre de 2012 foram matriculados 505 alunos. Destes 253 foram não aprovados, totalizando 50,1% de não aprovados.

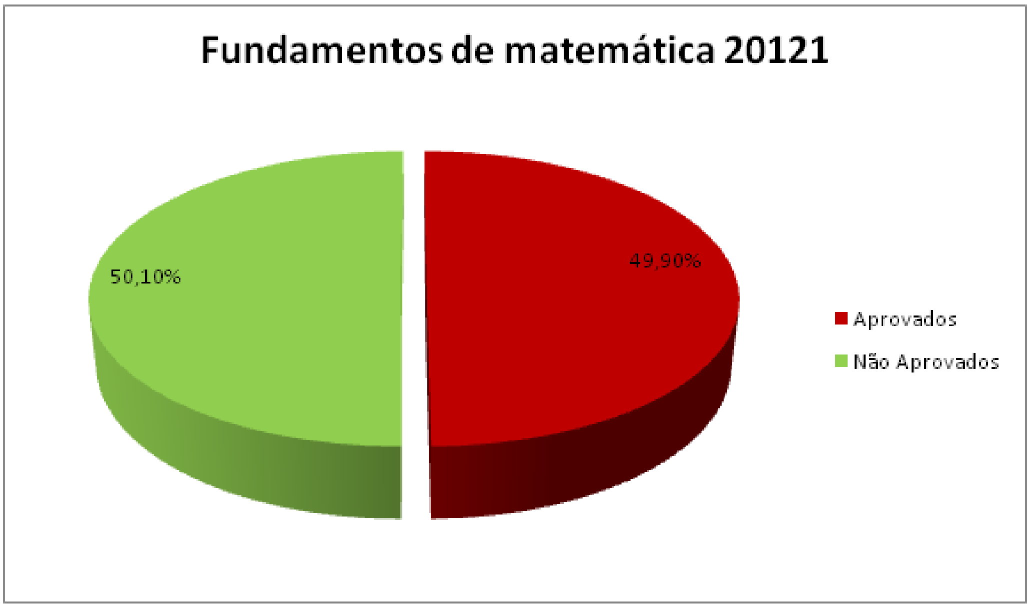



Figura 6.1: Índice de aprovação na disciplina Fundamentos de Matemática, período 2012/1.

No primeiro semestre de 2012 os dados levantados são ainda mais díspares, uma vez que o número de alunos que não obtiveram sucesso na disciplina de Calculo I foi de 60 alunos de um total de 93 matrículas. O índice geral de não aprovação nesse período foi de 64,5%.

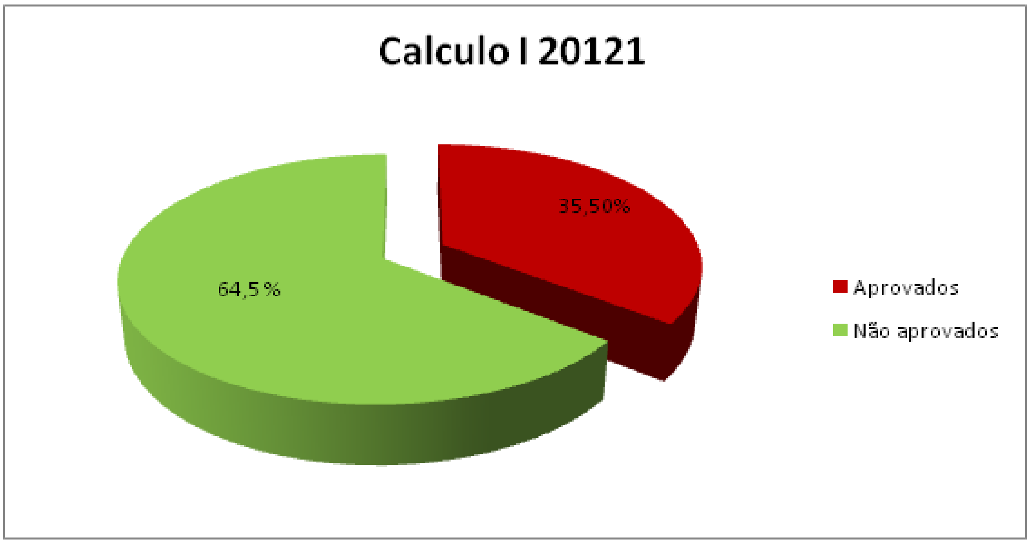



Figura 6.2: Índice de aprovação na disciplina Cálculo I, período 2012/1.

No primeiro semestre de 2012, foram matriculados 93 alunos na disciplina de Cálculo II destes 44 alunos foram não aprovados, totalizando 47% de reprovações.

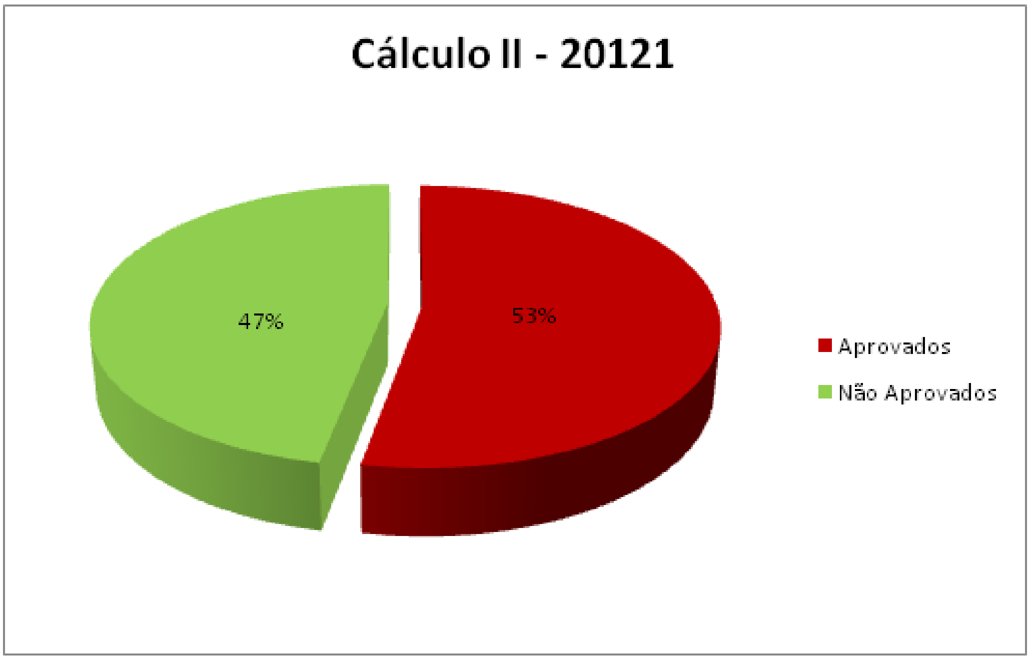



Figura 6.3: Índice de aprovação na disciplina Cálculo II, período 2012/1.

No ano de 2013, a estatística mostra que dos 409 alunos matriculados na disciplina de Fundamentos de Matemática, 227 foram não aprovados, ou seja 55,5% são de não aprovados.

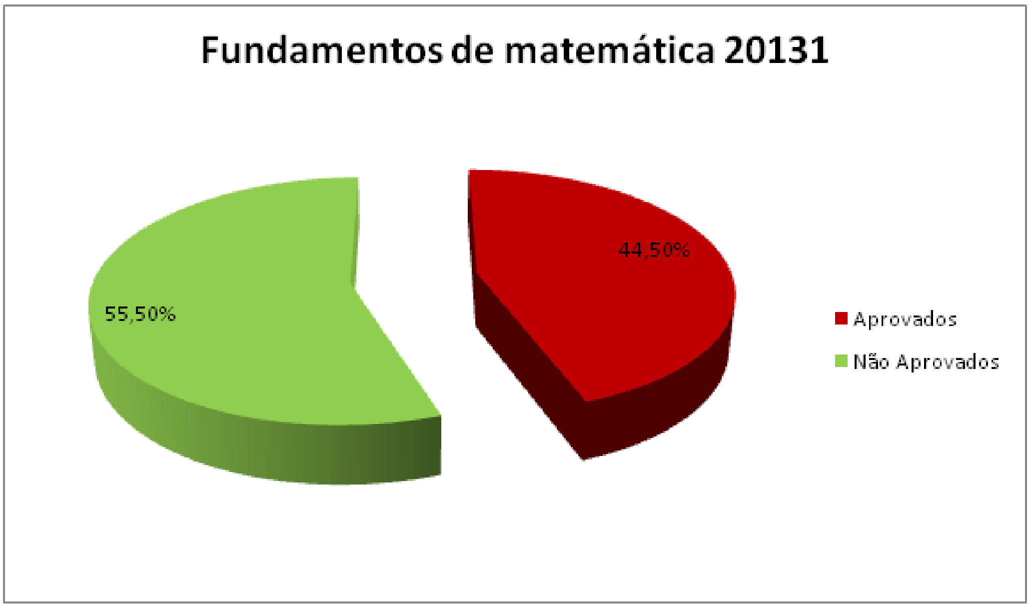



Figura 6.4: Índice de aprovação na disciplina Fundamentos de Matemática, período 2013/1.

A estatística mostra que no primeiro semestre de 2013 houve 71,50% de não aprovações na disciplina de Cálculo I, dos 91 matriculados apenas 26 foram aprovados.

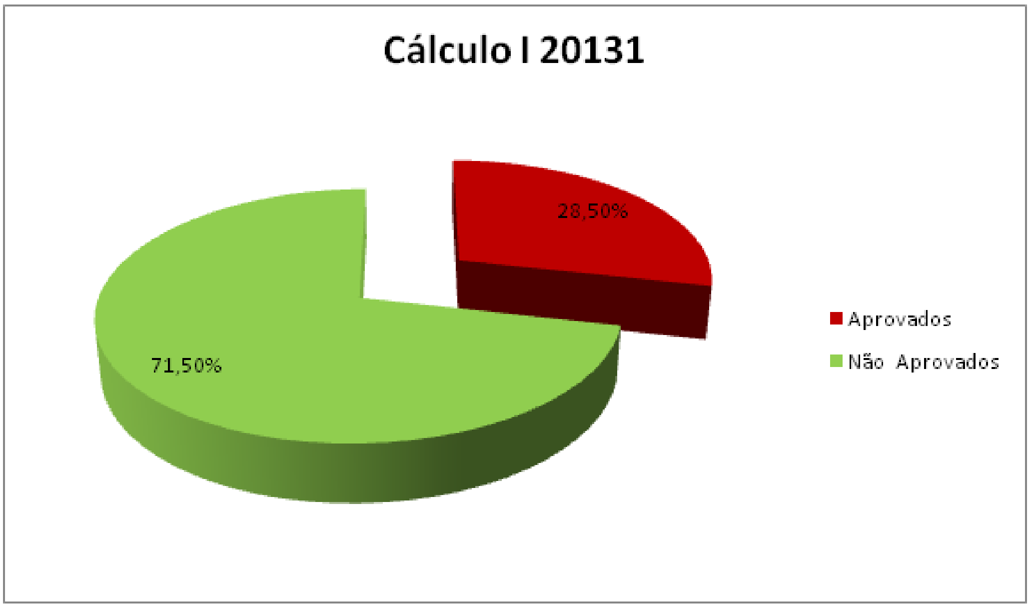



Figura 6.5: Índice de aprovação na disciplina Cálculo I, período 2013/1.

No ano de 2013 primeiro semestre na disciplina de Cálculo II foram matriculados 84 alunos, destes 28,5% foram não aprovados.

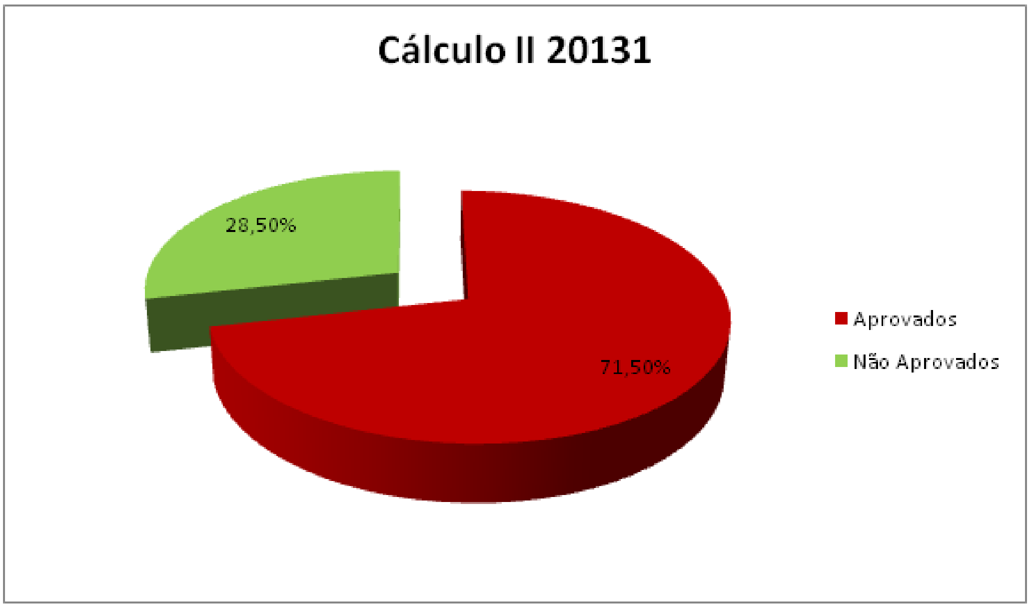



Figura 6.6: Índice de aprovação na disciplina Cálculo II, período 2013/1.

A partir desses dados podemos observar que o insucesso dos alunos nas disciplinas de Cálculo é grande, e infelizmente o aluno já chega à universidade com grandes dificuldades, pois o índice de não aprovações em fundamentos de matemática é bem alta, então devemos repensar como é trabalhada essa matemática no ensino médio, visto que o aluno não está sendo preparado devidamente para adentrar ao ensino superior e se deparar com a disciplina de cálculo.

Para finalizar a estatística fazemos abaixo uma comparação do desempenho dos alunos do ICET nas disciplinas de Fundamentos de Matemática, Cálculo I e Cálculo II, podemos perceber que houve aumento dos alunos não aprovados nas disciplinas de Fundamentos de Matemática e Cálculo I.

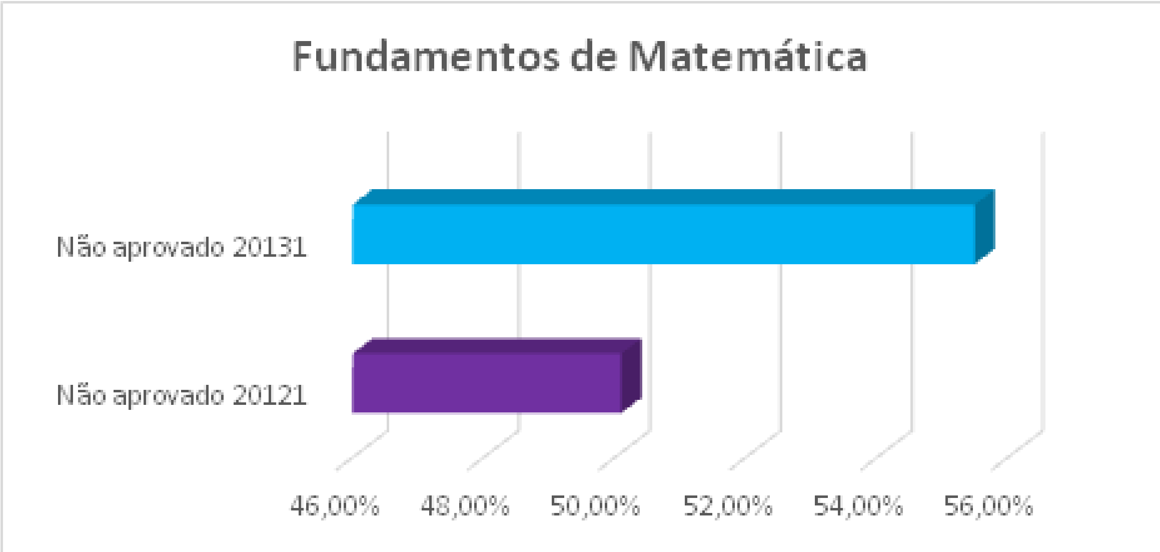



Figura 6.7: Fundamentos de Matemática - comparações dos não aprovados dos anos de 2012/1 e 2013/1.

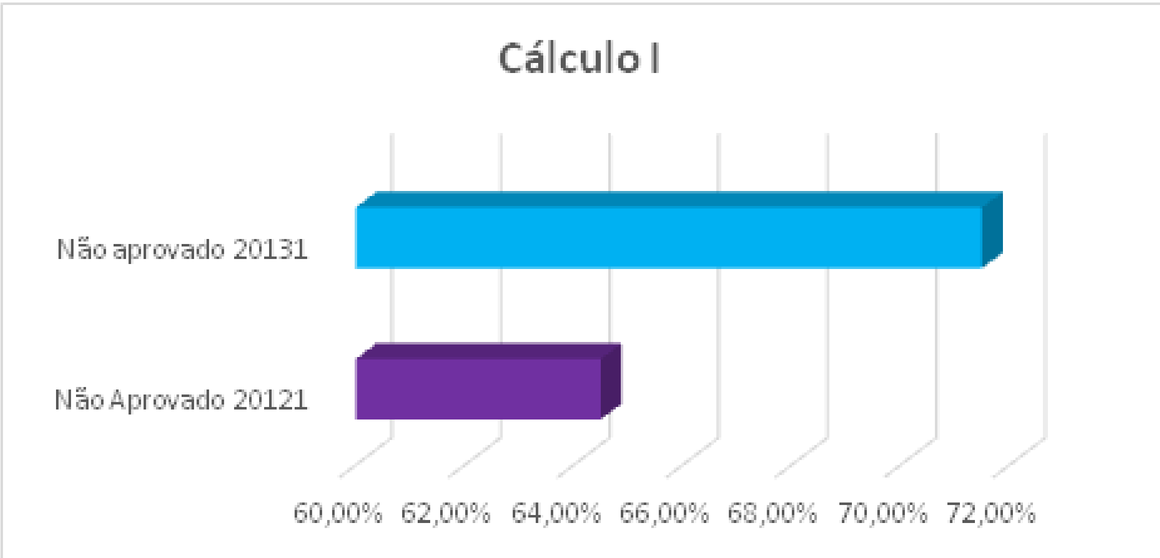



Figura 6.8: Cálculo I - comparações dos não aprovados dos anos de 2012/1 e 2013/1.

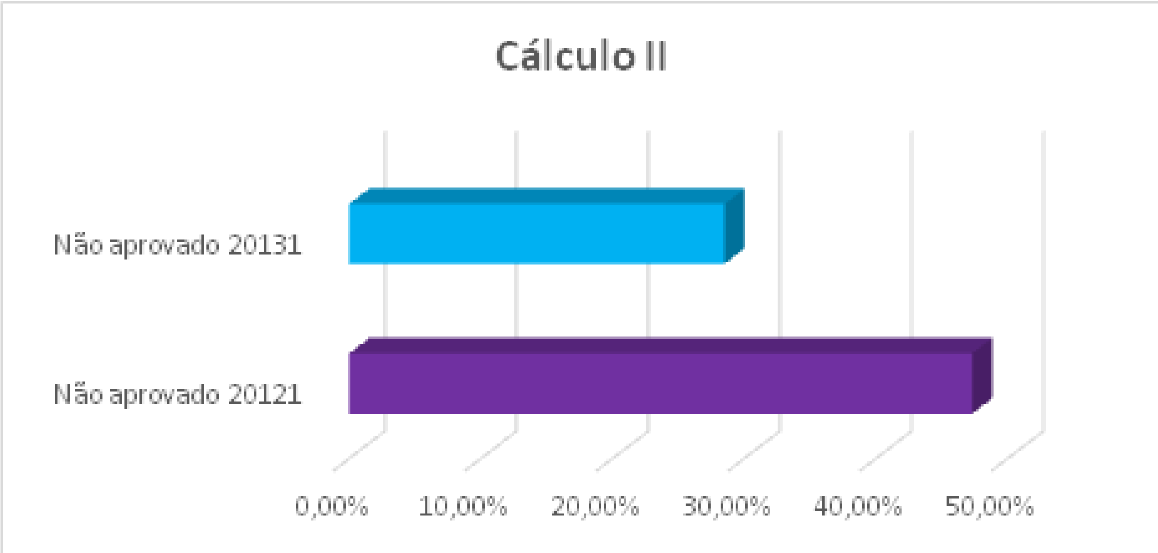



Figura 6.9: Cálculo II - comparações dos não aprovados dos anos de 2012/1 e 2013/1.

Por outro lado, com base nas pesquisas feitas por Cabral (1992) e Reis (2001), nos parece unânime que, entre os professores de Cálculo, a grande culpada pelos altíssimos índices de reprovação nesta disciplina é a falta de base dos alunos vindos do Ensino Médio. De fato, concordamos que a formação matemática dos alunos da escola básica é muito deficiente, conforme mostram a estatística de não aprovados na disciplina de Fundamentos de Matemática.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

A disciplina de Cálculo é responsável por um grande número de reprovações e desistências de alunos nos cursos de graduação, uma vez que os mesmos, ao ingressarem em um curso superior na área das Ciências Exatas e Tecnologia, se deparam com atividades muitas vezes sem contextualização e aprofundadas, sem este estudo prévio, ou seja, sem a construção das ideias fundamentais para a compreensão da disciplina em questão.

Nesse sentido, tivemos como propósito avaliar a possibilidade e a necessidade da inserção das noções intuitivas do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio, ainda no primeiro ano, aliado ao estudo de funções. Ao deixar de trabalhar essas ideias, ainda no ensino médio, se perde uma possibilidade de ampliar o conhecimento dos estudantes e de mostrar a aplicação dos conceitos matemáticos que estão presentes no currículo desse ano.

Entendemos que uma maior atenção à aplicação, à experimentação e a visualização dos conceitos matemáticos nesta fase da escolaridade, pode reverter o quadro de dificuldades e altos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo no Ensino Superior.

Segundo dados do Ministério da Educação, o desinteresse pela matemática vem afugentando os alunos de cursos de graduação nas áreas de Engenharia e Ciências Exatas e da Terra. A inclusão do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio de forma contextualizada pode ser uma das formas de se reverter tal quadro, mesmo que algumas propostas apontam como solução para esse problema cursos de nivelamento nos meses que precedem o início das atividades educacionais nos cursos superiores.

Assim, em longo prazo, os alunos que ingressarem no Ensino Superior nas disciplinas de Cálculo terão condições melhores de compreender os conceitos necessários e, então, os índices de não aprovação nessas disciplinas e outras relacionadas, poderão deixar de ser tão altos.

Tornar a matemática mais fácil e possível de ser compreendida pode ser uma tarefa intimamente ligada à metodologia adotada para se ensinar cada conteúdo. É provável que, se o professor buscar relacionar os conteúdos com situações reais, que exijam dos estudantes a reflexão e o raciocínio, a partir de contextos que, para ele, façam sentido, um obstáculo das dificuldades em Matemática, já está sendo vencido. Isso já representa um passo em busca da melhoria no rendimento dos estudantes nessa disciplina, seja no Ensino Médio ou Superior.

O conteúdo de cálculo é uma realidade em vários livros do ensino médio e cabe aos formadores de novos professores instigarem os acadêmicos de matemática a efetivar o ensino desse conteúdo na Educação Básica.

O Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que investe na formação dos professores, representa um grande avanço para a melhoria da qualidade do ensino de matemática na Educação Básica do país.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ÁVILA, G. O ensino de Cálculo no 2º grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 18. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

ÁVILA, G. **Introdução à Análise Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio? In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 60. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

BALDINO, R. R.; FRACALOSSI, A. S. A História da Derivada de Mariana: uma experiência didática. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, SP, v. 26, n. 42B, p. 393-407, abr. 2012. Disponível em: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223574001>. Acesso em: 02 set. 2014.

BARRETO, A. **O Ensino de Cálculo I nas Universidades**. Rio de Janeiro: Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1995. v. 6, p. 4-5.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. 1999. 184 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo.

BIZA, I.; CHRISTOU, C. & ZACHARIADES, T. **Students' thinking about the tangent line**. University of Atenas: PME30, 2006. v. 2, p. 177.

BONGIOVANNI, V.; VISSOTO, O. R.; LAUREANO, J. L. T. **Matemática e Vida**. São Paulo: Ática, 1993. v. 1.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução de E. F. GOMIDE. São Paulo: Edgard Blücher, 1974, 488 p.

BRASIL, **Lei de Diretrizes e Bases - Lei 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996, p. 20.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias - PCNEM. Brasília: MEC, 2000.

CABRAL, T. C. B. **Vicissitudes da Aprendizagem em um Curso de Cálculo**. 1992. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro.

CAUCHY, Augustin-Louis. **Coursd Analyse de LÉcole Royale Polytechnique**. Paris, 1821. (re-impresso em Ouvres Completès, série 2, v. 3. Paris: Gauthier-Villars, 1899).

CORNU, B. (1991). **Limits**. Em D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking (p. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto & aplicações**. São Paulo: Ática, 2004. v. 3.

DUCLOS, R. C. Cálculo do 2º grau. In: **Revista do Professor de Matemática**, n. 20. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p. 26-30.

EULER, L. **L'Introduction à l' analyse infinitésimale, par Leonard Euler**. Tradução de J. B. LABEY, do latim para o francês. Paris: Bachelier, 1748.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de H. H. DOMINGUES. Campinas: UNICAMP, 2004, 844 p.

FERRUZZI, E. C. **A modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem do cálculo diferencial e integral nos cursos superiores de tecnologia**. 2003. 154 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis.

FINNEY, R. L.; WEIR M. D.; GIORDANO F. R. **Cálculo de George B. Thomas**. 10. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2002. v. 1.

GARBI, G. G. **A Rainha Das Ciências: Um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2006, 345 p.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2005. v. 1.

GUELLI, O. **Matemática - série Brasil**. Ensino Médio. Volume Único. São Paulo: Ática, 2003.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. **Fundamentos da Matemática Elementar**: limites, derivadas e noções de integral. São Paulo: Atual, 2002. v. 8.

ISHIARA, C. A.; PESSOA, N. **Matemática**. Brasília: Cisbrasil - CIS, 2011. v. 3.

KLEINER, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. **The College Mathematics Journal**, v. 20, n. 4, p. 282-300, 1989.

MACHADO, A. S. **Matemática, Temas e Metas - Funções e Derivadas**. São Paulo: Atual, 1991. v. 6.

MACHADO, L. E. de M. **O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral**. 2002. 94 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis.

MACHADO, N. J. **Cálculo Diferencial e Integral na Escola Básica**: possível e necessário. São Paulo: USP, 2008.

MACINTYRE, A. B. L. **Tecnologia e Prazer - O ensino da Matemática aplicada à Administração**. 2002. 107 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - UFSC, Florianópolis.

MOLON, J. **Cálculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com o auxílio do Software Geogebra**. 2013. 195 p. Dissertação - UFSM, Santa Maria.

MOREIRA, V. G. & PINTO, M. M. F. **Technical school student's conceptions of tangent lines**. PME28 RR273. Universidade Federal de Minas Gerais. Brasil. 2004.

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de Função: Uma abordagem do processo ensino-aprendizagem**. 1997. 132 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - PUC, São Paulo.

PALIS, G. de la R. Computadores em Cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma. Temas e Debates. **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática**, São Paulo, ano 8, n. 6, p. 22-38, Abr. 1995.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos**. 2001. 302 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas.

REZENDE, W. M. **Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite**. 1994. 153 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. 2003. 450 p. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, USP, São Paulo.

ROQUE, T. A. Matemática através da história. **Notas de aula do curso de História da Matemática**. Módulo 4., p. 1 e módulo 8, p. 2. 2006.

SANTA CATARINA. Secretaria de Estado da Educação e do Desporto. **Proposta curricular de Santa Catarina: educação infantil, ensino fundamental e médio**. Disciplinas curriculares. Florianópolis: COGEN, 1998.

SIMÕES, M. Cálculo sem pressa é bom. **Cálculo: Matemática para todos**. 13. ed. São Paulo: Segmento, 2012. p. 24-33.

SMOLE, K. S. & DINIZ, M. I. **Matemática**: ensino médio. Unidade 11. São Paulo: Saraiva, 2003. v. 3, p. 277-285.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Associação Brasileiro de Direitos Reprográficas, 1994.

TALL, D. O. Concept Images, Computers, and Curriculum Change. **For the Learning of Mathematics**, University of Warwick, U.K., v. 9, n. 3, p. 37-42, nov. 1989.

Tall, D. **The psychology of advanced mathematical thinking**. Em D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 3-21.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. **International Journal of Education in Science and Technology**, v. 14, p. 293-305, 1983.

VINNER, S. **The role of definitions in the teaching and learning of mathematics**. Em D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 65-81.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 9/10, p. 10-16, abr. 2001.