UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

SÍLVIO SÉRGIO MOURA DOS SANTOS

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS PARA EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 3^0 E 4^0 GRAUS

Belém, Pará
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

SÍLVIO SÉRGIO MOURA DOS SANTOS

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS PARA EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 3º E 4º GRAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática da Universidade Federal do Pará, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof.Dr. Anderson David de Souza Campelo.

Belém, Pará

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Santos, Sílvio Sérgio Moura, 1981-
Soluções algébricas para equações polinomiais de terceiro e quarto graus / Sílvio Sérgio Moura Santos. - 2015.

Orientador: Anderson David de Souza Campelo.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2015.

1. Polinômios. 2. Equações polinomiais. 3. Soluções algébricas. 4. Equações quárticas. I. Título.

CDD 22. ed. 512.9422

SÍLVIO SÉRGIO MOURA DOS SANTOS

SOLUÇÕES ALGÉBRICAS PARA EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 3^0 E 4^0 GRAUS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática da Universidade Federal do Pará como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em matemática.

Aprovada em 11/03/2015.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo (Orientador)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias (Avaliador interno)
Universidade Federal do Pará - UFPA

Prof. Dr. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro (Avaliador externo)
Universidade Federal do Pará – (UFPA/Abaetetuba)

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof.Dr. Anderson David de Souza Campelo pelo apoio e encorajamento contínuos na pesquisa, aos demais professores da instituição pelos conhecimentos transmitidos, aos colegas de turma pelos conhecimentos compartilhados e aos meus familiares que sempre me apoiaram durante toda minha jornada estudantil.

EPÍGRAFE

"Não se ensina demais o que nunca se aprende o suficiente."

Pietro Aretino

RESUMO

No presente trabalho estudamos alguns métodos algébricos para a solução de equações polinomiais dando ênfase às equações de 3º e 4º graus. Apresentamos algumas ferramentas que facilitam a solução de tais equações, tais como o método de Cardano-Tartaglia, dispositivo prático de Briot-Ruffini, e um método de resolução para equações quárticas. O trabalho tem como proposta proporcionar ao aluno da rede pública um aprendizado mais abrangente, no ensino básico, sobre equações polinomiais.

Palavras-chaves: polinômios, equações polinomiais, soluções algébricas.

ABSTRACT

In the present work, we study some algebraic methods for solving polynomials equations giving emphasis to the 3rd and 4th degrees equations. We show some tools that facilitate the resolution of such equations, such as the method of Cardano-Tartaglia, Briot-Ruffini's rule and a method for solving quartic equations. The aim of this work is provide the student of public school a more comprehensive learning in basic education, on polynomial equations.

Keywords: polynomials, polynomials equations, algebraic solutions.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os alunos da rede pública de ensino que ingressam nas universidades, principalmente, nos cursos da área de exatas encontram muita dificuldade nas disciplinas que exigem conhecimentos matemáticos mais complexos, no cálculo diferencial e integral, por exemplo, é indispensável o domínio de assuntos relacionados a polinômios e resolução de equações polinomiais. Por outro lado, é bem razoável a quantidade de alunos que pretendem ingressar nas escolas militares, porém, o fato é que os exames para ingresso nessas escolas exigem um conhecimento amplo de cada disciplina, assim, é preciso que o professor ofereça ao aluno as ferramentas necessárias e condizentes com as exigências desses exames. Desse modo, por meio do presente trabalho pretendo incentivar os alunos e professores que atuam no ensino básico um aprendizado mais aprofundado a respeito das equações polinomiais, em especial, as equações de grau maior ou igual a três.

Para o desenvolvimento deste trabalho, é indispensável o embasamento através dos conceitos referentes ao corpo dos números complexos e dos polinômios. Ao contrário do que muitos livros afirmam a respeito do surgimento dos números complexos de que sua necessidade decorria da solução de equações polinomiais quadráticas com discriminante negativo, Iezzi (2013, p.50) afirma que:

> O primeiro matemático a operar com números complexos (ao invés de rejeitá-los simplesmente, como acontecia até então) foi Girolamo Cardano (1501 - 1576) resolvendo o problema de dividir o número 10 em duas partes cujo produto é 40, provou (multiplicando) que os números $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$, raízes de $x^2 + 40 = 10x$, são as partes.

A questão é que naquela época ao aplicar a fórmula de Cardano em algumas equações cúbicas da forma $x^3 + px + q = 0$, obtinha-se uma raiz quadrada de número negativo como, por exemplo, o que ocorre na equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$, onde se obtém $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. A partir daí os matemáticos da época passaram a buscar alternativas que pudessem solucionar esse problema.

Uma das alternativas encontradas para a solução do problema foi proposta pelo matemático italiano Rafael Bombelli (1530-1579) como afirma Iezzi (2013, p.50) "(...) Fazendo $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1}$ e $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$, obteve a = 2, b = 1 e daí x = 4. Mas Bombelli foi além, em sua Álgebra (1572) aparece pela primeira vez uma teoria dos números complexos, razoavelmente, bem estruturada, inclusive com uma notação específica(...)"

Posteriormente, após estudos mais profundos a respeito do corpo dos complexos, as interpretações e aplicações desse corpo evoluíram, significativamente, como descreve Iezzi (2013, p.51):

> (...) Caspar Wessel (1745 - 1818), Carl Frederich Gauss (1777 - 1855) e Jean Robert Argand (1768 - 1822) descobriram, independentemente, que esses números admitem uma representação geométrica. Mas enquanto Gauss imaginava essa representação por meio dos pontos de um plano, Wessel e Argand usavam segmentos de reta orientados ou vetores para representá-los. Na verdade Wessel e Argand, dois amadores da matemática, escreveram trabalhos específicos a respeito com enfoques muito parecidos; Gauss, como em outras vezes, apenas deixou bem claro conhecer as ideias subjacentes ao assunto, inclusive utilizando-as. Todos, contudo, perceberam que, mais do que para representar pontos ou vetores, os números complexos podem ser utilizados para operar algebricamente com eles, ou seja, os números complexos se constituem na álgebra dos vetores de um plano. Em um artigo de 1833, apresentado à Academia Irlandesa, William Rowan Hamilton (1805 -1865) introduziu a álgebra formal dos números complexos. Estes, segundo sua ideia básica, passavam a ser encarados como pares ordenados (a, b) de números reais, com os quais se operava segundo as leis (a, b) + (c, d) = (a + b, c + d) e (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)(...).

A respeito das equações, sabemos que havia entre os matemáticos um grande interesse em resolvê-las. O estudo de equações além de revelar grandes nomes da matemática e desafios recíprocos, causou também conflitos de autoria no que se refere ao método utilizado para a solução de certas equações. Alguns desses fatos são descritos por Guimarães (2008, p.90):

> Uma das grandes discussões matemáticas registrada na história é a ocorrida entre os matemáticos italianos Girolamo Cardano e Nicolo Fontana, mais conhecido como Tartaglia (...) em meados do século XVI(...) A história diz que no início do século XVI o matemático Scipione del Ferro descobriu uma solução para as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$, porém faleceu antes de publicá-la. Seu discípulo, Antônio Fior conhecia o método e resolveu

> publicar em uma dessas edições anuais o desafio, afim de, engrandecer seu nome perante os matemáticos contemporâneos. O desafio constava em dar soluções numéricas de equações do tipo que del Ferro havia estudado. O matemático Tartaglia, de origem pobre, aceitou o desafio e respondia todos com respostas diretas e precisas a respeito das raízes, porém não revelava seu método de obtenção das mesmas. Por mais que Fior ousava desafiar Tartaglia este respondia sempre com precisão. Para finalizar a humilhação para cima de Fior, Tartaglia propôs um desafio ao mesmo, que era resolver equações do tipo $x^3 + nx^2 + px + q = 0$. Ao matemático Fior, que não tinha méritos o suficiente para responder ao desafio, restou aceitar a humilhação perante todos os matemáticos contemporâneos. Nesta mesma época, Girolamo Cardano, estava escrevendo um trabalho de álgebra, e solicitou a Tartaglia que revelasse o método de resolução das equações de 3^0 grau para que fosse publicado, com os devidos créditos, no seu livro. Tartaglia recusou, alegando que iria publicar ele mesmo o método. Cardano era conhecido por sua "falsidade", mas mesmo assim conseguiu convencer o matemático Tartaglia a revelar a solução. Quebrando sua promessa, em meados do século, surgiu à publicação Ars Magna contendo a solução das equações de 3^0 grau sem menção alguma ao seu conterrâneo.

O desenvolvimento deste trabalho tem como objetivo apresentar métodos algébricos para a solução de equações polinomiais, de modo a oferecer ao aluno do terceiro ano do ensino médio da rede pública um ensino mais abrangente sobre equações, especialmente, as equações de $3^{\underline{0}}$ e $4^{\underline{0}}$ graus, uma vez que, normalmente, limita-se a encontrar raízes de polinômios de $1^{\underline{0}}$ e $2^{\underline{0}}$ graus, apenas.

A organização do trabalho é feita da seguinte maneira. No capitulo 1, fizemos um estudo do corpo dos números complexos, analisando suas propriedades e operações indispensáveis para o estudo das raízes polinomiais. Nos capítulos 2 e 3 apresentaremos um estudo detalhado a respeito dos polinômios através de definições, operações, teoremas e propriedades que são de grande importância à solução de equações. No capítulo 4 apresentaremos métodos algébricos que visam facilitar a solução das equações de grau superior (entenda-se as equações de grau maior ou igual a 3), partindo de casos mais particulares para os casos mais gerais, além disso, resolveremos alguns problemas contextualizados sobre polinômios com o objetivo de mostrar aplicabilidade dos polinômios na solução de problemas na forma em que é exigido no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

1 – CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

1.1 – DEFINIÇÃO:

Chama-se conjunto dos números complexos ou corpo dos complexos que aqui representaremos por C, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação como veremos a seguir. É usual representar cada elemento $(x, y) \in C$ com o símbolo z; portanto: $z \in C \Leftrightarrow z = (x, y)$, sendo $x, y \in R$. Vamos tomar dois elementos, (a, b) e (c, d), de R^2. Dados dois pares ordenados, estes são iguais se, e somente se, apresentarem primeiros termos iguais e segundo termos iguais, ou seja, $\mathbf{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$.

1.2 – OPERAÇÕES

1.2.1 – Adição

Chama-se soma de dois pares ordenados um novo par ordenado cujos primeiro e segundo termos são, respectivamente, a soma dos primeiros e a soma dos segundos termos dos pares ordenados dados, ou seja, $\mathbf{(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)}$.

Teorema 1:

Sejam z_1, z_2, $z_3 \in C$; $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$, são válidas as propriedades:

I – Propriedade associativa: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\mathbf{(z_1 + z_2) + z_3} &= [(a, b) + (c, d)] + (e, f) \\
&= (a + b, c + d) + (e, f) \\
&= (a + c + e, b + d + f) \\
&= [a + (c + e), b + (d + f)] \\
&= (a, b) + (c + e, d + f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)] = \mathbf{z_1 + (z_2 + z_3)}
\end{aligned}$$

II – Propriedade comutativa: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $\forall z_1, z_2 \in C$.

Demonstração:

$\mathbf{(z_1 + z_2)} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$= (c + a, d + b)$

$= (c, d) + (a, b) = \mathbf{(z_2 + z_1)}$

III – Existência do elemento neutro: $\exists z_A \in C$, tal que $z_A + z = z$, $\forall z \in C$.

Demonstração:

Fazendo $z = (a, b)$, provemos que existe $z_A = (x, y)$ tal que $z_A + z = z$, assim:

$(a, b) + (x, y) = (a, b) \Leftrightarrow a + x = a$ e $b + y = b \Leftrightarrow$ **$x = 0$ e $y = 0$.**

Portanto existe $z_A = (0, 0)$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer complexo z dá como resultado o próprio z.

IV – Existência do elemento simétrico: $\forall z \in C$, $\exists(- z) \in C$, tal que $z + (- z) = z_A$.

Demonstração:

Fazendo $z = (a, b)$, provemos que existe $(- z) = (x, y)$ tal que $z + (- z) = z_A$, assim:

$(a, b) + (x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow a + x = 0$ e $b + y = 0 \Leftrightarrow x = - a$ e $y = - b$.

Portanto, existe $- z = (- a, - b)$, chamado simétrico ou inverso aditivo de z, que somado ao complexo $z = (a, b)$ dá como resultado $z_A = (0, 0)$.

Observação 1:

Decorre do teorema 1 que, dados os complexos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1 + z = z_2$, pois:

$z_1 + z = z_2 \Rightarrow (- z_1) + (z_1 + z) = (- z_1) + z_2 \Rightarrow [(- z_1) + z_1) + z = z_2 + (- z_1) \Rightarrow z_A + z = z_2 + (- z_1) \Rightarrow z = z_2 + (- z_1)$. Esse número é chamado diferença entre z_2 e z_1 e indicado por $z_2 - z_1$, portanto: $z_2 - z_1 = z_2 + (- z_1) = (c, d) + (-a, -b) = (c - a, d - b)$.

1.2.2 – Multiplicação:

Inicialmente, chama-se produto de dois pares ordenados a um novo par ordenado cujo primeiro termo é a diferença entre o produto dos primeiros termos e o produto dos segundos termos dos pares dados e cujo segundo termo é a soma dos produtos do primeiro termo de cada par ordenado dado pelo segundo termo do outro, usando a representação, temos que **(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)**.

Teorema 2:

Sejam z_1, z_2, $z_3 \in C$; $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$, são válidas as propriedades:

I – Propriedade associativa: $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

Demonstração:

$$\begin{aligned}\mathbf{(z_1.z_2).z_3} &= [(a, b).(c, d)].(e, f)\\ &= (ac - bd, ad + bc).(e, f)\\ &= [(ac – bd)e – (ad + bc)f, (ac – bd)f + (ad + bc)e\\ &= [(ace – bde – adf + bcf, acf – bdf + ade + bce]\\ &= [a(ce – df) – b(de + cf), a(de+cf)f+b(ce - df)\\ &= (a, b).(ce – df, cf + de) = (a, b). [(c, d).(e, f)] = \mathbf{z_1.(z_2.z_3)}\end{aligned}$$

II – Propriedade comutativa: $z_1.z_2 = z_2.z_1$, $\forall z_1, z_2 \in C$.

Demonstração:

$(z_1.z_2) = (a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, cb + da) = z_2.z_1$

III – Existência do elemento neutro: $\exists z_M \in C$, tal que $z_M.z = z$, $\forall z \in C$.

Demonstração:

Fazendo $z = (a, b)$, provemos que existe $z_M = (x, y)$ tal que $z_M.z = z$:

$(a, b).(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (a, b) \Leftrightarrow ax - by = a$ e $ay + bx = b \Leftrightarrow$ **x = 1 e y = 0.**

Portanto existe $z_M = (1, 0)$, chamado elemento neutro para a multiplicação, que multiplicado por qualquer complexo z dá como resultado o próprio z.

IV – Existência do elemento inverso: $\forall z \in C^*, \exists z^{-1} \in C$, tal que $z.z^{-1} = z_M$.

Demonstração:

Fazendo z = (a, b), com a ≠ 0 ou b ≠ 0, provemos que $\exists z^{-1} = (x, y); z.z^{-1} = e_M$:

(a, b).(x, y) = (1, 0) ⇔ (ax - by, ay+bx) = (1, 0) ⇔ ax - by = 1 e ay + bx = 0, daí:

$x = \dfrac{a}{a^2+b^2}$ e $x = \dfrac{-b}{a^2+b^2}$.

Portanto, existe $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2}\right)$, chamado inverso ou inverso multiplicativo de z, que multiplicado ao complexo z = (a, b) dá como resultado $z_M = (1, 0)$. Observemos que a condição a ≠ 0 e b ≠ 0equivale a $a^2 + b^2 \neq 0$ e isto garante a existência de z^{-1}.

Observação 2:

Decorre do teorema 2 que, dados os complexos $z_1 = (a, b) \neq (0, 0)$ e $z_2 = (c,d)$, existe um único $z \in C$ tal que $z_1.z = z_2$, pois, $z_1.z = z_2 \Rightarrow z_1^{-1}.(z_1.z) = z_1^{-1}.z_2 \Rightarrow (z_1^{-1}.z_1).z = z_2.z_1^{-1} \Rightarrow z_M.z = z_2.z_1^{-1} \Rightarrow z = z_2.z_1^{-1}$.

Esse número z é chamado quociente entre z_2 e z_1 e indicado por $\dfrac{z_2}{z_1}$:

$$\frac{z_2}{z_1} = z_2.z_1^{-1} = (c,d).\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{ca+bd}{a^2+b^2}, \frac{da-cb}{a^2+b^2}\right)$$

V – Propriedade distributiva:

Em C, a operação de multiplicação é distributiva em relação à adição:

$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

Demonstração:

$\mathbf{z_1.(z_2 + z_3)}$ = (a, b).[(c, d) + (e, f)]

= (a, b).(c + e, d + f)

= [a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]

$= [ac + ae - bd - bf, ad + af + bc + be]$

$= [(ac - bd) + (ae - bf), (ad + bc) + (af + be)]$

$= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be)$

$= (a, b).(c, d) + (a, b).(e, f) = \mathbf{z_1.z_2 + z_1.z_3}$.

1.3 – FORMA ALGÉBRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Um número complexo z na forma algébrica é representado por $z = a + bi$, tal que $x, y \in R$ e i é **chamada unidade imaginária dos números complexos.**

Chamamos de **a** a parte real de z e denotaremos por Re (z) = a e **b** a parte imaginária de z, denotaremos por Im (z) = b.

Observação 3:

Chama-se **real** todo número complexo cuja parte imaginária é nula. Chama-se **imaginário puro** todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não.

1.4 – PROPRIEDADE CÍCLICA DAS POTÊNCIAS DE i

Da definição da unidade imaginária i = $\sqrt{-1} \Rightarrow \begin{cases} i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \\ i^3 = i^2.i = -1.i = -i \\ i^4 = i^3.i = -i.i = -i^2 = 1 \end{cases}$

Usando o mesmo raciocínio indefinidamente, temos que:

$i^0 = i^4 = i^8 = ... = 1$.

$i^1 = i^5 = i^9 = ... = i$.

$i^2 = i^6 = i^{10} = ... = - 1$.

$i^3 = i^7 = i^{11} = ... = - i$.

Podemos generalizar esse resultado da seguinte forma:

$i^n = i^k$, tal que $n, k \in Z$, $n>4$. Onde k é o resto da divisão de n por 4.

Exemplo 1:

$i^{33} = i^1 = i$, pois o resto da divisão de 33 por 4 é igual a 1.

1.5 – CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Chama-se conjugado do complexo z = a + bi ao complexo $\bar{z}$ = a - bi.

Exemplo 2:

$z = 3 + 5i \Rightarrow \bar{z} = 3 - 5i$

Teorema 3:

Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, são válidas as propriedades:

I. Conjugado da soma

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

II. Conjugado do produto

$$\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$$

Observação 4:

Vimos anteriormente na observação 2 como pode ser calculado o quociente de dois números complexos. Agora temos um processo mais prático baseado em que: $z.\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

Dados w = a + bi ≠ 0 e z = c + di, temos:

$\frac{z}{w} = \frac{c+di}{a+bi} = \frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{(ca+db)+(da-cb)i}{a^2+b^2}$, isto é para calcular a divisão z por w basta multiplicar numerador e denominador pelo conjugado do denominador.

III. Conjugado do quociente

Seja $z_1 \neq 0$, então: $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$.

1.6 – PLANO COMPLEXO E MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Uma representação comum dos números reais é distribuí-los uniformemente ao longo de uma reta. Como a parte imaginária de todo complexo nada mais é do que um número real podemos também representar a parte imaginária dos complexos ao longo de uma reta.

Sobre o plano complexo Ávila (2013, p.4) faz a seguinte definição “o plano complexo é o conjunto das representações de todos os números complexos z = x + yi pelos pontos P = (x, y) do plano. É conveniente identificar o número complexo z = x + yi com o ponto P = (x, y)”.

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente. Por meio dela, o número complexo z = a + bi é identificado com o ponto (a, b), ou com o vetor OP de componentes a e b.

.

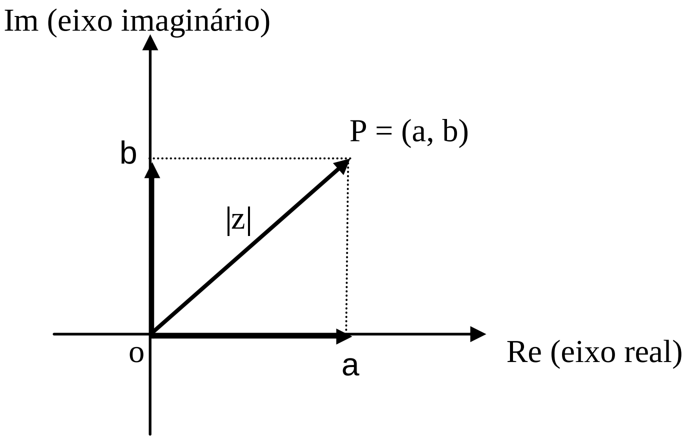

Figura 1

Definimos |z| como sendo a distância do afixo do mesmo à origem do plano complexo. Com um simples teorema de Pitágoras na figura 1, obtemos: $|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2}$.

Observação 5:

O módulo do complexo z também pode ser denotado por ρ, está será, frequentemente, empregada.

1.7 – ARGUMENTO DE UM NÚMERO COMPLEXO

O ângulo que o vetor representante do número complexo faz com o eixo real é chamado argumento de um número complexo e é denotado por arg(z).

A(z) = arg(z) + 2kπ, k∈Z.

.

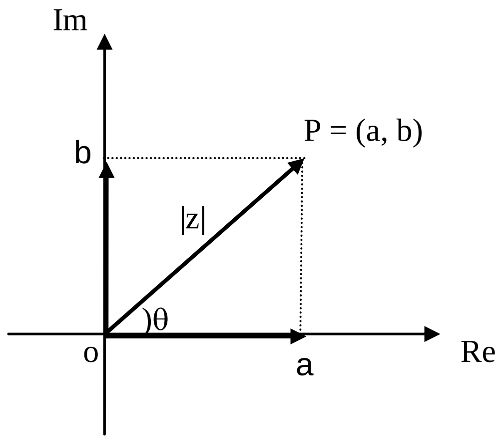

Figura 2

Com a ajuda da trigonometria no triângulo retângulo, temos que:

$$sen\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} = \frac{b}{\rho},\ \cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} = \frac{a}{\rho},\ tg\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} = \frac{b}{a},\ \theta = \arg(z) = \arg tg\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right).$$

Exemplo 3:

Seja z = $\sqrt{3}$ + i, vamos determinar o arg(z). Temos que:

$\rho = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = 2$, $sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta = \frac{1}{2}$. Concluímos que: $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, fazendo k = 0, vamos ter o argumento principal $\frac{\pi}{6}$ = arg(z)..

1.8 – REPRESENTAÇÃO TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dado um número complexo z = a + bi, não nulo. Já sabemos que:

$sen\theta = \frac{b}{\rho} \Rightarrow b = \rho.sen\theta$ e $\cos\theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho.\cos\theta$, logo:

$z = \rho.\cos\theta + \rho.sen\theta i \Rightarrow$ **$z = \rho(\cos\theta + i.sen\theta)$,** forma trigonométrica (ou polar) do complexo z.

Exemplo 4:

Do exemplo 3 do complexo z = $\sqrt{3}$ + i, já sabemos que $\rho = 2$ e arg(z) = $\frac{\pi}{6}$. Assim, a forma polar do complexo z é dada por **$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i.sen\frac{\pi}{6})$**.

Observação 6:

É comum denotar **$\cos\theta + i.sen\theta$** pela abreviação cisθ.

1.9 – Potenciação de um complexo

Teorema 4:

O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores e seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.

Demonstração

Suponhamos dados os números:

$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$ e calculemos o módulo e o argumento de $z = z_1.z_2 = \rho(\cos\theta + i.sen\theta)$.

Temos: $z_1.z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 + i.sen\theta_1).(\cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$, assim:

$\rho_1\rho_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2) + i.(sen\theta_1\cos\theta_2 + sen\theta_2 \cos\theta_1)$.

Portanto, **$\rho(\cos\theta + i.sen\theta) = (\rho_1\rho_2)[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]$**.

Logo, $\rho = \rho_1.\rho_2$ e $\theta = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi$, $k \in Z$. A fórmula que acaba de ser deduzida estende-se ao produto de n fatores (n>2), aplicado a propriedade associativa da multiplicação; $\mathbf{z = z_1.z_2.z_3...z_n = \rho.(\cos\theta + i.sen\theta)}$.

Assim, $\mathbf{z = (\rho_1.\rho_2.\rho_3...\rho_n)[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +...+ \theta_n) + i.sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +...+ \theta_n)]}$.

Portanto: $\rho.(\cos\theta + i.sen\theta) = (\rho_1.\rho_2.\rho_3...\rho_n)[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +...+ \theta_n) + i.sen(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +...+ \theta_n)]$ e finalmente: $\mathbf{\rho = \rho_1.\rho_2.\rho_3...\rho_n}$ **e** $\mathbf{\theta = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 +...+ \theta_n) + 2k\pi, k \in Z}$.

A respeito da forma algébrica Iezzi (2013, p. 34) afirma que "a forma algébrica facilita as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números complexos, porém não é muito prática no cálculo de potências, Se necessitarmos calcular $(x + yi)^n$, com $n \in Z$, teremos de usar a fórmula do binômio de Newton, que é bastante trabalhosa."

Teorema 5 (Primeira fórmula de Moivre):

Dado o complexo $z = \rho.(\cos\theta + i.sen\theta)$, não nulo, e o número inteiro n, temos:

$\mathbf{z^n = \rho^n.(\cos n\theta + i.sen\ n\theta)}$ **ou ainda** $\mathbf{z^n = \rho^n.cis(n\theta)}$.

Demonstração:

Usando o princípio da indução finita, provemos inicialmente que para $n \in N$ a propriedade é válida. Para n = 0.

$z^0 = 1$ e $\rho^0.(\cos 0\theta + i.sen\ 0\theta) = 1$.

Vamos agora admitir que a fórmula valha para n = k - 1. Assim:

$z^{k-1} = \rho^{k-1}.[\cos (k - 1)\theta + i.sen(k - 1)\theta]$ e provemos a validade para n = k:

$z^k = z^{k-1}.z = \rho^{k-1}.[\cos (k - 1)\theta + i.sen(k - 1)\theta]\rho(\cos\theta + i.sen\theta]$

$= \rho^{k-1}\rho.[\cos ((k - 1)\theta + \theta) + i.sen((k - 1)\theta + \theta)]$

$= z^{k-1} = \rho^k.(\cos k\theta + i.sen\ k\theta)$.

Vamos estender a propriedade para $n \in Z_-$. Se n<0, então n = - m, com $m \in N$; portanto a m se aplica a fórmula:

$$z^k = z^{-m} = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{\rho^m(\cos m\theta + i.senm\theta)}$$
$$= \frac{1}{\rho^m}.\frac{(\cos m\theta - i.senm\theta)}{(\cos m\theta + i.senm\theta).(\cos m\theta - i.senm\theta)}$$
$$= \frac{1}{\rho^m}.\frac{(\cos m\theta - i.senm\theta)}{(\cos^2 m\theta + i.sen^2 m\theta)}$$
$$= \rho^{-m}.[\cos(-m\theta) + i.sen(-m\theta)]$$
$$= \rho^n.(\cos n\theta + i.senn\theta)$$

Exemplo 5:

Calcular z^5 sendo z = 2 + i.2$\sqrt{3}$. Temos que $\rho = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4$ e arg(z) = $\frac{\pi}{3}$

Logo, $z = 4.\left(\cos\frac{\pi}{3} + i.sen\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow z^5 = 4^5.\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i.sen\frac{5\pi}{3}\right) = 512 - i.512\sqrt{3}.$

1.10 – RADICIAÇÃO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dado um número complexo z, chama-se raiz enésima de z, e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo z_k tal que $z_k^n = z$.

Teorema 6 (Segunda fórmula de Moivre):

Dado o número complexo z = ρ.(cosθ + i.senθ) e o número natural n(n ≥ 2), então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$z_k = \sqrt[n]{\rho}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$, em que $\sqrt[n]{\rho} \in R_+$ e k∈Z.

Demonstração:

Determinemos todos os complexos z_k tais que $\sqrt[n]{z} = z_k$.

Se z_k = r.(cosω + i.senω), nossas incógnitas são r e ω. Apliquemos a definição de $\sqrt[n]{z}$. Assim $\sqrt[n]{z} = z_k \Leftrightarrow z_k^n = z$. Então: **$r^n$.(cos nω + i.sen nω) = ρ.(cosθ + i.senθ)**, portanto é necessário:

I. $r^n = \rho \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$, r∈$R_+$.

II. cos nω = cos θ

III. sen nω = sen θ, para os itens (II) e (III) nω = θ + 2kπ ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}$.

Supondo 0 ≤ θ ≤ 2π, vamos determinar os valores de k para os quais resultam valores de ω compreendidos entre 0 e 2π:

k = 0 ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n}$

k = 1 ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$

k = 2 ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + 2.\frac{2\pi}{n}$

k = 3 ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + 3.\frac{2\pi}{n}$

....

k = n – 1 ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + (n-1).\frac{2\pi}{n}$

Estes n valores de ω não são congruentes por estarem todos no intervalo [0, 2π[; portanto, dão origem a n valores distintos para z_k.

Consideremos agora o valor de ω obtido para k = n: ⇒ $\omega = \frac{\theta}{n} + n.\frac{2\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi$.

Este valor de ω é dispensável por ser congruente ao valor obtido com k = 0. Fato análogo ocorre para k igual a n + 1, n + 2, n + 3, ...e k igual a -1, -2, -3,...

Portanto para obtermos os valores de z_k é suficiente fazer k = 0, 1, 2,..., n - 1.

Para (Iezzi, 2013, p.40) "todo número complexo z não nulo admite n raízes enésimas distintas, as quais têm todas o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e argumentos principais formando uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$ e razão $\frac{2\pi}{n}$."

Exemplo 6:

Calcular as raízes quadradas de – 1.

Temos z = - 1, então ρ = 1 e arg(z) = θ = π. De acordo com a segunda fórmula de Moivre, temos:

$z_k = \sqrt{1}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi\right)\right]$, k∈{0, 1}.

k = 0 $\Rightarrow$ $z_0 = \sqrt{1}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = i$

k = 1$\Rightarrow$ $z_1 = \sqrt{1}.\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i.sen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -i$

1. 11 – REPRESENTAÇÃO EXPONENCIAL DE UM NÚMERO COMPLEXO

Dependendo da necessidade de cada problema, faz-se necessário conhecermos as variadas formas de representação de um número complexo, assim, além das formas algébricas e trigonométricas já apresentadas, Guimarães (2008, p.29) acrescenta “Uma outra forma de representarmos um número complexo é usando a sua forma exponencial(forma de Euler) $z = |z|.e^{i.x}$ ou $z = \rho.e^{i.x}$”.

Demonstração:

Para Guimarães (2008, p.29):

> Para mostrarmos que todo complexo pode ser escrito nessa forma, devemos mostrar a que para todo x real, vale: **$\cos x + i.\mathrm{sen}x = e^{i.x}$**. Para isso vamos recorrer a um resultado conhecido do Cálculo Diferencial. O Teorema de Taylor diz que as funções deriváveis em qualquer ordem em um ponto de seu domínio podem ser escritas na forma de um polinômio com grau infinito em torno desse ponto (também chamados Séries infinitas).

$\cos x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + ...$

$\mathrm{sen}x = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + ...$

$e^x = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 + ...$

O passo agora é tentar descobrir os coeficientes desses polinômios. Faremos como exemplo a série infinita de cosx.

$\cos x = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + ...$.A expressão deve ser válida para qualquer x.

Fazendo x = 0 $\Rightarrow A_0 = 1$. Derivando a Série de Taylor de cosx em relação a x, obtemos, - senx = $A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + ...$

Novamente a expressão deve ser válida para todo x.

Fazendo x = 0 $\Rightarrow$ - sen0 = $A_1 = 0$. Derivando novamente a Série de Taylor em relação a x, obtemos a igualdade - cosx = $2A_2x + 6A_3x + 12A_4x^2 + ...$

Fazendo x = 0 $\Rightarrow$ - cos0 = $2A_2 \Rightarrow A_2 = -1/2$. Procedendo desta maneira infinitamente, é fácil ver que a série infinita para cosx fica: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + - ...$

Analogamente, as funções senx e e^x, ficam assim representados: $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + - ...$ e $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + - ..$ A partir desses resultados podemos escrever:

$$\cos x + i.senx = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - + ... \text{ e}$$

$$e^{i.x} = 1 + i.x - \frac{x^2}{2!} - i.\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i.\frac{x^5}{5!} - + ...$$

Portanto, cosx + i.senx = $e^{i.x}$.

Observação 7:

Seguem, duas importantes propriedade da forma de Euler do número complexo: $\frac{e^{i.x} + e^{-i.x}}{2} = \cos x$ e $\frac{e^{i.x} - e^{-i.x}}{2} = senx, \forall x \in R.$

2 – POLINÔMIOS

2.1 – FUNÇÃO POLINOMIAL OU POLINÔMIO

Dada a sequência de números complexos (a_0, a_1, a_2, ..., a_n), consideremos a função f: C $\rightarrow$ C dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. A função f é denominada função polinomial.

Onde a_0, a_1, a_2, ..., a_n são denominados coeficientes e as parcelas a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n são os termos do polinômio f(x).

Uma função polinomial de um único termo é denominada função monomial ou monômio, dois termos binômio, três termos trinômio ou ainda polinômios.

Exemplo 7:

A função $f(x) = 2 + 5x - 6x^2$, onde $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = - 6$.

2.2 – GRAU DE UM POLINÔMIO

Seja $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ um polinômio não nulo. Chama-se grau de f, representado por **gr f(x)** o maior número natural entre os expoentes de x.

Exemplo 8:

O grau do polinômio $f(x) = 12 + 6x - 10x^7 + ... + 5x^6$ é 7.

2.3 – VALOR NUMÉRICO E RAIZ DE UM POLINÔMIO

Dados o número complexo $\mathbf{x_0}$ e o polinômio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, chama-se valor numérico de f em $\mathbf{x_0}$ ao valor $f(x_0)$ determinado quando substituímos $\mathbf{x_0}$ no lugar de x do polinômio f(x):

$$f(x_0) = a_0 + a_1.x_0 + a_2.x_0^2 + ... a_n.x_0^n.$$

Se $\mathbf{x_0}$ é um número complexo e f(x) um polinômio, tal que, $\mathbf{f(x_0) = 0}$ dizemos neste caso que x_0 é uma raiz ou zero do polinômio f(x).

Exemplo 9:

Verificar se 4 é raiz do polinômio f(x) = 12 - 3x. Vamos calcular o valor numérico de f(x) para x = 4, logo f(4) = 12 - 3.4 = 12 - 12 = 0. Logo, 4 é raiz de f(x).

2.4 – POLINÔMIO NULO E POLINÔMIOS IDÊNTICOS

2.4.1 – Polinômio nulo

Dizemos que um polinômio f(x) é **nulo (ou identicamente nulo)** quando todos os coeficientes de f(x) são nulos

2.4.2 – Polinômios idênticos

Dizemos que dois polinômios f(x) e g(x) são **iguais (ou idênticos)** se os coeficientes das parcelas de mesmo grau são iguais.

2.5 – OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS

2.5.1 - Adição

Para somarmos dois polinômios, basta somarmos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Observação 8:

Para operação de soma são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existência do elemento neutro e existência de inverso aditivo.

Observação 9:

A operação de subtração é análoga à de soma, porém a ordem da subtração dos coeficientes deve ser mantida.

2.5.2 – Multiplicação

Dados dois polinômios $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_mx^m$ e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$ chama-se produto f(x).g(x) o polinômio $h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_{m+n}x^{m+n}$, cujo coeficiente c_k pode ser assim obtido:

$$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i} \ .$$

Exemplo 10:

Multiplicar f(x).g(x), sendo $f(x) = x + 2x^2 + 3x^3$ e $g(x) = 4 + 5x + 6x^2$.

Dispositivo prático

$$\begin{array}{ll}
4 + 5x + 6x^2 & \leftarrow g \\
\underline{x + 2x^2 + 3x^3} & \leftarrow f \\
4x + 5x^2 + 6x^3 & \leftarrow x.g \\
\quad 8x^2 + 10x^3 + 12x^4 & \leftarrow 2x^2.g \qquad + \\
\underline{\qquad 12x^3 + 15x^4 + 18x^5} & \leftarrow 3x^3.g \\
4x + 13x^2 + 28x^3 + 27x^4 + 18x^5 & \leftarrow f.g
\end{array}$$

Observação 10:

Para operação de multiplicação são válidas as propriedades: associativa, comutativa, existência do elemento neutro e distributiva.

2.5.3 – Divisão

Dados dois polinômios f(x) o dividendo e $g(x) \neq 0$ o divisor, dividir f(x) por g(x) é determinar dois outros polinômios q(x) o quociente da divisão e r(x) o resto da divisão. Porém as condições seguintes devem ser verificadas:

i – q(x).g(x) + r(x) = f(x).

ii – gr r(x) < gr g(x) (ou r(x) = 0, caso em que a divisão é chamada exata e, consequentemente, g(x) divide f(x).

I – Método de Descartes (ou método dos coeficientes)

Dados dois polinômios f(x) o dividendo da divisão e g(x) $\neq 0$ o divisor da divisão, dividir f(x) por g(x). Sejam gr q(x) e gr r(x) o grau do quociente e resto, respectivamente, da divisão de f(x) por g(x). Assim:

a) Constroem-se os polinômios q(x) e r(x), deixando indeterminados os seus coeficientes, tal que, gr r(x) < gr g(x);

b) Determinam-se os coeficientes impondo a igualdade de q(x).g(x) + r(x) = f(x).

Exemplo 11:

Dividir $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$ por $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4x - 1$.

Solução

Temos gr q(x) = 4 - 3 = 1 $\Rightarrow$ q(x) = ax + b

gr r(x) < 3 $\Rightarrow$ gr r(x) $\leq$ 2 $\Rightarrow$ $r(x) = cx^2 + dx + e$.

$q(x).g(x) + r(x) = f(x) = (ax + b)(3x^3 - 2x^2 + 4x - 1) + (cx^2 + dx + e)$

$= 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$.

Desenvolvendo, vamos ter para todo x:

$3ax^2 + (3b - 2a)x^3 + (4a - 2b + c)x^2 + (4b - a + d)x + (e - b) = 3x^4 - 2x^3 + 7x + 2$

Da igualdade de polinômios, temos que 3a = 3 $\Rightarrow$ **a = 1**; 3b - 2a = - 2 $\Rightarrow$ **b = 0**; 4a - 2b + c = 0 $\Rightarrow$ **c = - 4**; 4b - a + d = 7 $\Rightarrow$ **d = 8**; e - b = 2 $\Rightarrow$ **e = 2**.

Portanto, q(x) = x e $r(x) = - 4x^2 + 8x + 2$.

II – Método da chave

Exemplo 12:

Dividir $f(x) = 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1$ por $g(x) = x^2 - 2x + 3$.

Inicialmente determinamos o 1^0 termo de q(x) pela operação $\frac{3x^5}{x^2} = 3x^2$ e construímos o 1^0 resto parcial $r_1(x) = f(x) - (3x^3)g(x) = 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1$, que tem grau maior que gr g(x). A seguir o 2^0 termo de q(x) pela operação $\frac{4x^3}{x^2} = 4x$ e construímos o 2^0 resto parcial $r_2(x) = r_1(x) - (4x)g(x) = - x^2 - x - 1$, que tem grau igual a gr g(x). E por último determinamos o 3^0 termo de q(x) pela operação $\frac{-x^2}{x^2} = -1$ e construímos o 3^0 resto parcial $r_3(x) = r_2(x) - (-1)g(x) = -3x + 2$, que tem grau menor que gr g(x).

$$
\begin{array}{l|l}
f \to 3x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & x^2 - 2x + 3 \to g \\ \cline{2-2}
\quad -3x^5 + 6x^4 - 9x^3 & 3x^3 + 4x - 1 \to q \\ \cline{1-1}
r_1 \to \qquad 4x^3 - 9x^2 + 11x - 1 & \\
\qquad\quad 4x^3 + 8x^2 - 12x & \\ \cline{1-1}
r_2 \to \qquad\qquad -x^2 - x - 1 & \\
\qquad\qquad\quad x^2 - 2x + 3 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad -3x + 2 \to r &
\end{array}
$$

III – Divisão por binômios do 1^0 grau.

Exemplo 13:

$$
\begin{array}{l|l}
f \to 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1 & x - 4 \to g(x) \\ \cline{2-2}
\quad -2x^3 + 8x^2 & 2x^2 + x + 8 \to q(x) \\ \cline{1-1}
r_1 \to \qquad x^2 + 4x - 1 & \\
\qquad\quad -x^2 + 4x & \\ \cline{1-1}
r_2 \to \qquad\quad 8x - 1 & \\
\qquad\qquad -8x + 32 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 31 \to r &
\end{array}
$$

Neste tipo de divisão r(x) é um polinômio constante, pois o grau de g(x) é 1e, portanto, gr r(x) = 0 ou r = 0. Vemos que o valor numérico de r **não depende** do número **a** substituído no lugar de x, isto é, $r(a) = r, \forall a \in C$.

Teorema 7 (Teorema do resto)

O resto da divisão de um polinômio f(x) por x - a é igual ao valor numérico de f para x igual a **a**.

Demonstração:

De acordo com a definição de divisão, temos $q(x).(x - a) + r(x) = f(x)$ em que q(x) e r(x) são, respectivamente, o quociente e o resto. Como x - a tem grau 1, o resto ou é nulo ou tem grau zero; portanto r é um polinômio constante.

Calculemos os valores dos polinômios da igualdade acima em **a**:

$q(a).(a - a) + r(a) = f(a) \Rightarrow r(a) = f(a) \Rightarrow r = f(a)$.

Exemplo 14:

Calcular o resto da divisão de $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ por $x - 1$.

Solução:

Pelo teorema do resto basta calcularmos $f(1) = 2.1^2 + 3.1 - 1 = 4$. Logo o resto da divisão é 4.

Teorema 8 (Teorema de D' Alembert)

Um polinômio f(x) é divisível por x - a se, e somente se, **a** é raiz de f(x).

Demonstração:

De acordo com o teorema do resto, temos r = f(a). Se r = 0, então f(a) = 0. Por outro lado se **a** é raiz de f(x), então f(a) = 0 e, consequentemente, r = 0 e, portanto f(x) é divisível por x - a.

Observação 11:

Fatoração de D'Alembert este sugeriu uma solução para um impasse ao tentar mostrar que dado um polinômio de raiz k, ele pode ser escrito de tal forma que possui o termo (x - k) em sua fatoração. Ou seja, o polinômio $p(x) = x^2 - 5x + 6$, que tem raízes

$x = 3$ e $x = 2$, deve possuir os termos $(x - 3)$ e $(x - 2)$ em sua fatoração, de fato $x^2 - 5x + 6 = (x - 3).(x - 2)$. O mesmo vale para o caso de raízes complexas, por exemplo, $p(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ que possui raízes 1, $1 - i$ e $1 + i$, assim:

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 2 = (x - 1).[x - (1 - i)][x - (1 + i)]$$

Caso geral (demonstração):

Seja k uma raiz qualquer do polinômio genérico:

$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2x^2 + a_1x + a_0$ (I).

Como $x = k$ é raiz, podemos escrever: $0 = a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + ...+ a_1k + a_0$ (II).

Fazendo a subtração (I) - (II) membro a membro, temos:

$p(x) - 0 = a_n(x^n - k^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - k^{n-1}) + ...+ a_2(x^2 - k^2) + a_1(x - k) + a_0$ (III).

Da fatoração conhecida $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b +...+a.b^{n-2} + b^{n-1})$.

Podemos colocar o fator $(x - k)$ em evidência em cada termo do lado direito de (III), logo, temos que $p(x) = (x - k).Q(x)$. De forma geral, podemos fatorar o polinômio de raízes $x_1, x_2, x_3,..., x_n$ e coeficiente do termo de maior grau igual a **a** da seguinte forma: $\mathbf{p(x) = a(x - x_1).(x - x_2).(x - x_3)...(x - x_n)}$.

2.6 – ALGORITMO DE BRIOT - RUFFINI

Dados os polinômios $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} +...+ a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, com $a_n \neq 0$ e $g(x) = x - a$, vamos determinar o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ da divisão de $f(x)$ por $g(x)$.

Façamos: $q(x) = q_0x^{n-1} + q_1x^{n-2} + q_2x^{n-3} +...+ q_{n-2}x + q_{n-1}$ e apliquemos o método dos coeficientes:

$q(x).g(x) = q_0x^n + (q_1 - aq_0)x^{n-1} + (a_2 - aq_1)x^{n-2} +...+ (q_{n-1} - aq_{n-2})x - aq_{n-1}$. Impondo a condição $q(x).(x - a) + r = f(x)$, resultam as igualdades:

$q_0 = a_0$

$q_1 - aq_0 = a_1 \Rightarrow q_1 = aq_0 + a_1$

$q_2 - aq_1 = a_2 \Rightarrow q_1 = aq_1 + a_2$

....

$q_{n-1} - aq_{n-2} = a_{n-1} \Rightarrow q_{n-1} = aq_{n-2} + a_{n-1}$

$r - aq_{n-1} = a_n \Rightarrow r = aq_{n-1} + a_n$

Os cálculos para obter q(x) e r(x) indicados anteriormente tornam-se mais rápidos com a aplicação do seguinte dispositivo prático de Briot – Ruffini.

	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
a	a_0	$a.a_0 + a_1$	$aq_1 + a_2$	....	$aq_{n-2} + a_{n-1}$	$aq_{n-1} + a_n$
	q_0	q_1	q_2	....	q_{n-1}	R

Exemplo 15:

Dividir $f(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ por $g(x) = x - 3$

Solução

	2	0	-7	3	- 1
3	2	3.2 + 0	3.6 – 7	3.11 + 3	3.36 - 1
	2	6	11	36	107

Portanto, $q(x) = 2x^3 + 6x^2 + 11x + 36$ e r = 107.

2.7 – DIVISÃO POR BINÔMIOS DE 1^0 GRAU QUAISQUER E O ALGORITMO DE BRIOT – RUFFINI.

Para obtermos rapidamente o quociente q(x) e o resto r(x) da divisão de um polinômio f(x), com gr $f(x) \geq 1$, por $g(x) = bx - a$, em que $b \neq 0$, notemos que:

$(bx - a)q(x) + r(x) = f(x)$, então $\left(x - \frac{a}{b}\right)\underbrace{(bq(x))}_{q'(x)} = f(x)$ do que decorre a seguinte regra prática:

i. Divide – se f(x) por $\left(x-\frac{a}{b}\right)$ empregando o algoritmo de Briot-Ruffini;

ii. Divide-se o quociente q'(x) encontrado pelo número b, obtendo q(x).

Exemplo 16:

Dividir f(x) = $3x^4 - 2x^3 + x^2 - 7x + 1$ por g(x) = 3x - 5 = $3\left(x-\frac{5}{3}\right)$

Solução:

	3	- 2	1	- 7	1
$\frac{5}{3}$	3	$\frac{5}{3}.3-2$	$\frac{5}{3}.3+1$	$\frac{5}{3}.6-7$	$\frac{5}{3}.3+1$
	3	3	6	3	6

Portanto, q'(x) = $3x^3 + 3x^2 + 6x + 3 \Rightarrow q(x)=\frac{q'(x)}{3} = x^3 + x^2 + 2x + 1$.

3 – DEFINIÇÕES E TEOREMAS RELEVANTES PARA O ESTUDO DAS EQUAÇÕES POLINOMIAIS

3.1. DEFINIÇÕES

Dada a função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$ chamamos **equação polinomial** ou **equações algébricas** a igualdade $f(x) = 0$.

Chamamos **conjunto solução** ou **conjunto verdade** da equação $f(x) = 0$ em C o conjunto S cujos elementos são as raízes complexas da equação.

Exemplo 17:

As raízes da equação $x^2 - 5x + 4 = 0$ são 1 e 4, daí $S = \{1, 4\}$.

Duas equações são chamadas **equivalentes** quando apresentam o mesmo conjunto solução.

Dizemos que uma raiz **a** é uma **raiz múltipla** de um polinômio f(x) quando ela é raiz de f(x) e quando o fator (x - a) aparece mais de uma vez na fatoração de f(x). O número natural **m** de vezes que esse fator aparece indicará a multiplicidade da raiz **a**, por exemplo, se m é igual a três a raiz é tripla ou de multiplicidade 3.

Exemplo 18:

O zero é raiz tripla do polinômio $f(x) = x^3$, pois $f(x) = (x - 0).(x - 0).(x - 0)$.

Dados dois polinômios f(x) e g(x). O M.D.C(máximo divisor comum) entre eles será o polinômio m(x) de maior grau tais que f(x) e g(x) são divisíveis por m(x). Um importante resultado dessa definição é que as raízes comuns entre f(x) e g(x) serão as raízes de m(x). Dados dois polinômios f(x) e g(x). Se o M.D.C(máximo divisor comum) entre eles for igual a um polinômio constante não nulo, então serão ditos polinômios primos entre si.

Derivada de uma função polinomial: dada uma função polinomial f: C→C, definida por $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, em que $a_n \neq 0$ e $n > 0$, chama-se função polinomial derivada de f(x) a função f':C→C, definida por:

$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + (n-2)a_{n-2}x^{n-3} + ... + a_1 + 0$. Se f(x) = k, ∀k∈C, então a função derivada é definida por f'(x) = 0.

Exemplo 19

Calcular a primeira e segunda derivada da função polinomial $f(x) = 3x^4 - 3x^3$.

Solução:

$f'(x) = 4.3x^3 - 3.3x^2 = 12x^3 - 9x^2$ e $f''(x) = 3.12x^2 - 2.9x = 36x^2 - 18x$.

Observação 12:

Podemos definir a função polinomial derivada representada por f'(x) ou $f^{(1)}(x)$. Como f'(x) também é uma função polinomial, é possível determinar a sua função derivada (f'(x))', obtendo a chamada derivada - segunda de f(x), que será denotada por f''(x) ou $f^{(2)}(x)$, e assim por diante. O estudo de derivada é muito amplo, passa por análises gráficas, definições de limites, teoremas e corolários, porém, vamos nos prender apenas nos assuntos que servirão de ferramenta para a solução de equações lineares de uma variável.

3.1.1 – Relações de Girard

As **relações de Girard** são as relações existentes entre os coeficientes e as raízes de uma equação, as demonstrações dessas relações podem ser feitas pelo princípio de indução finita. Abaixo apresentamos as relações existentes para uma equação polinomial de grau n ($n \geq 1$).

Dada a equação $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$, em que $a_n \neq 0$, tal que $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ são as raízes da equação,temos as relações:

$S_1 = k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$S_2 = k_1.k_2 + k_1.k_3 + k_1.k_4 + ... + k_{n-1}k_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$S_3 = k_1.k_2.k_3 + k_1.k_2.k_4 + ... + k_{n-2}.k_{n-1}.k_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$

....

S_m = (soma de todos os $C_{n,\,m}$ produtos de m raízes da equação) = $(-1)^m.\frac{a_{n-m}}{a_n}$

$S_n = k_1.k_2.k_3 ... k_n = (-1)^n.\frac{a_0}{a_n}$

Exemplo 20:

Resolver a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes é igual a um.

Solução:

Temos que:

$k_1 + k_2 + k_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 6$

$k_1.k_2 + k_1.k_3 + k_2.k_3 = \frac{a_1}{a_3} = 3$

$k_1.k_2.k_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -10$

$k_1 + k_2 = 1$.

De $k_1 + k_2 + k_3 = 6$ e $k_1 + k_2 = 1 \Rightarrow k_3 = 5$. De $k_1.k_2.k_3 = -10 \Rightarrow k_1.k_2 = -2$.

De $k_1 + k_2 = 1$ e $k_1.k_2 = -2 \Rightarrow k_1 = -1$ e $k_2 = 2$ (ou vice - versa).

3.2. TEOREMAS IMPORTANTES

Os teoremas a seguir são de grande utilidade para resolução das equações algébricas polinomiais e, portanto, indispensáveis para o presente trabalho.

Teorema 9 (Teorema Fundamental da Álgebra)

Dado o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, ou seja, de grau $n \geq 1$ e coeficientes complexos, então f(x) possui pelo ao menos uma raiz complexa podendo ou não ser imaginária.

Demonstração:

Uma outra forma de interpretar o teorema 10, seria dizermos que se um polinômio tem grau n, então admite exatamente n raízes. Este fato pode ser observado com a ajuda do livro Álgebra Linear, onde Hoffman e Kunze (1970, p.128) diz:

> Um polinômio f de grau n sobre um corpo F tem no máximo n raízes em F. O resultado é obviamente verdadeiro para polinômios de grau 0 e 1. Suponhamos que seja verdadeiro para polinômios de grau n - 1. Se **a** é raiz de f(x), f(x) = (x - a).q(x) onde q(x) tem grau n - 1. Como f(b) = 0, se, e somente se, a = b ou q(b) = 0, decorre de nossa hipótese de indução que f(x) tem no máximo n raízes.

Daí, temos que se a = b e b não é raiz de q(x), então teríamos as n - 1 raízes de q mais a raiz b, totalizando exatamente, n raízes para f. Se b é raiz de q(x) e $b \neq a$ esta será contabilizada nas n - 1 raízes de q(x), assim teríamos as n - 1 raízes de q mais a raiz a, totalizando n raízes para f. Por fim se a = b e b é raiz de q, o número de raízes será n, porém b será uma raiz múltipla.

Observação 13:

Não faz sentido o número de raízes ser menor que o grau n de f, pois ao aplicarmos a fatoração de D'Alembert seria impossível chegarmos a uma identidade polinomial.

Teorema 10 (Teorema da Derivada e a Multiplicidade de uma Raiz)

Se k é raiz de multiplicidade m da equação f(x) = 0, então k é raiz de multiplicidade m - 1 da equação f'(x) = 0, em que f'(x) é a derivada – primeira de f(x).

Demonstração:

$f(x) = (x - k)^m.q(x) \Rightarrow f'(x) = m(x - k)^{m-1}q(x) + (x - k)^m.q'(x)$, portanto, temos:

$f'(x) = (x - k)^{m-1}.[mq(x) + (x - k).q'(x)]$ e, como $m.q(k) + (k - k).q'(k) = m.q(k)$ este não-nulo, logo k é raiz de multiplicidade m - 1 de f'(x) = 0.

Exemplo 21:

Resolva a equação $4x^3 - 20x^2 - 33x - 18 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

Solução:

Fazendo $f(x) = 4x^3 - 20x^2 - 33x - 18$, temos $f'(x) = 12x^2 - 40x + 33$. A raiz dupla é necessariamente, raiz de f'(x).

Aplicando a Regra de Baskara para a equação $12x^2 - 40x + 33 = 0$, obtemos como raízes $\frac{3}{2}$ e $\frac{11}{6}$, porém $f(\frac{3}{2}) = 0$ e $f(\frac{11}{6}) \neq 0$. Assim, a raiz dupla de f(x) é $\frac{3}{2}$.

Aplicando Briot- Ruffini ou Descartes chegaremos a:

$4x^3 - 20x^2 - 33x - 18 = (x - \frac{3}{2})^2(x - 2)$, assim $S = \left\{\frac{3}{2}, 2\right\}$.

Teorema 11 (Teorema da Raiz Complexa)

Dado o polinômio $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, e **coeficientes reais**. Se o imaginário **z é raiz** de f(x) então $\bar{z}$ **o conjugado de z** também é raiz de f(x).

Demonstração:

Seja a equação $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x^1 + a_0 = 0$ de **coeficientes reais** que admite a raiz z, isto é, P(z) = 0. Provemos que $P\left(\bar{z}\right) = 0$.

$$P\left(\bar{z}\right) = a_n\left(\bar{z}\right)^n + a_{n-1}\left(\bar{z}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\bar{z}\right)^{n-2} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0$$

$$= a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \ldots + a_1\bar{z} + a_0$$

$$= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\,\overline{z^{n-2}} + \ldots + \overline{a_1}\,\bar{z} + \overline{a_0}$$

$$= \overline{a_nz_n + a_{n-1}z_{n-1} + a_{n-2}z_{n-2} + \ldots + a_1z + a_0} = \overline{p(z)} = \bar{0} = 0$$

Observação 14:

Uma raiz complexa e sua conjugada têm a mesma multiplicidade.

O teorema a seguir tem as mesmas características do Teorema da Raiz Complexa e vale também o fato dessas raízes terem a mesma multiplicidade.

Teorema 12 (Teorema da Raiz Irracional)

Dado o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, ou seja, de grau n e **coeficientes racionais**. Se o irracional $a + \sqrt{b}$ **é raiz** de f(x) então $a - \sqrt{b}$ também é raiz de f(x) ou vice-versa.

Teorema 13 (Teorema da Raiz Racional)

Dado o polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, ou seja, de grau n e **coeficientes inteiros**. Se a fração irredutível p/q (p e q primos entre si, $q \neq 0$) é raiz de f(x) então **p divide a_0 e q divide a_n**.

Demonstração:

Se p/q é uma raiz de f(x) = 0, temos:

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_{n-2} \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + ... + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

Multiplicando a equação por q^n, temos:

$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + ... + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$.

Isolando $a_n p^n$ e, depois, $a_0 q^n$, temos:

(1) $a_n p^n = - q[a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}]$.

(2) $a_0 q^n = - p[a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}]$.

Como $a_0, a_1, ..., a_n$, p e q são todos inteiros, decorre que:

$\alpha = [a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + ... + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}]$.

$\beta = [a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + ... + a_1 q^{n-1}]$.

Assim, retomando (1) e (2), vem:

$$(1) \frac{a_n p^n}{q} = -\alpha \in Z$$

$$(2) \frac{a_0 q^n}{p} = -\beta \in Z$$

Isso significa que:

(1) $a_n p^n$ é divisível por q e, como p^n e q são primos entre si, a_n é divisível por q.

(2) $a_0 q^n$ é divisível por p e, como q^n e p são primos entre si, a_0 é divisível por p.

Para o teorema 14 nos limitaremos, apenas ao enunciado, uma vez que para o entendimento da demonstração são exigidos conhecimentos da matemática superior. Porém, é válido ressaltar que esse teorema dá origem a um teorema de grande utilidade para o estudo das raízes das equações polinomiais, conhecido pelo Teorema de Bolzano.

Teorema 14 (Teorema do Valor Intermediário)

Se f for continua em [a, b] e se k for um real compreendido entre f(a) e f(b), então existirá pelo ao menos um c em [a, b] tal que f(c) = k.

Teorema 15 (Teorema de Bolzano ou do Anulamento)

Dado o polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x^1 + a_0$, com $a_n \neq 0$, ou seja, de grau n e **coeficientes reais** e]a; b[um intervalo real aberto.

i – Se P(a) e P(b) têm mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes da equação em]a; b[.

ii – Se P(a) e P(b) têm sinais contrários, então existe uma raiz ou número impar de raízes reais em]a; b[.

Demonstração:

Notemos que, se r_i é interno ao intervalo]a, b[, então $a < r_i < b$, isto é, $a - r_i < 0$ e $b - r_i > 0$, logo $(a - r_i)(b - r_i) < 0$.

Notemos também que, se r_e é externo ao intervalo]a, b[, por exemplo, se $a < b < r_e$ resulta $a - r_e < 0$ e $b - r_e < 0$, logo $(a - r_e)(b - r_e) > 0$.

Calculemos agora o produto P(a).P(b):

$$P(a).P(b) = [a_n.Q(a).(a - r_1)(a - r_2)... (a - r_p)][a_n.Q(b).(b - r_1)(b - r_2)... (b - r_p)]$$
$$= a_n^2[Q(a).Q(b)][(a - r_1)(b - r_1)][(a - r_2).(b - r_2)]...[(a - r_p)(b - r_p)] \quad (*)$$

Verificamos que P(a).P(b) é um produto de p + 2 fatores numéricos, a saber:

Um fator é $a_n^2 > 0$, outro fator é $Q(a).Q(b) > 0$, pois $Q(x) > 0$, $\forall x \in R$. E por último os p fatores do tipo $(a - r_m)(b - r_m)$, em que r_m é raiz real da equação dada.

Assim, os únicos fatores negativos do segundo membro da relação (*) são os fatores correspondentes as raízes de P(x) = 0 internas ao intervalo]a, b[, o que permite concluir a existência de duas possibilidades.

1^0) Quando P(a) e P(b) têm mesmo sinal, isto é, $P(a).P(b) > 0$ existe um número par de fatores negativos do tipo $(a - r_i)(b - r_i)$ e, portanto, existe um número par de raízes reais da equação $P(x) = 0$ que são internas ao intervalo]a, b[.

2^0) Quando P(a) e P(b) têm sinais contrários, isto é, $P(a).P(b) < 0$ existe um número impar de fatores negativos do tipo $(a - r_i)(b - r_i)$ e, portanto, existe um número impar de raízes reais da equação $P(x) = 0$ que são internas ao intervalo]a, b[.

Exemplo 22:

Considere $P(x) = x^3 - 3x + 1$. Quantas raízes existem no intervalo]0, 1[?

Solução:

Inicialmente, temos que $P(0) = 0^3 – 3.0 + 1 = 1$ e $P(1) = 1^3 - 3.1 + 1 = - 1$. Logo, pelo Teorema de Bolzano, temos uma raiz ou um número ímpar de raízes entre 0 e 1. Sabemos que o grau do polinômio é três, logo pelo Teorema Fundamental, esse número ímpar só pode ser 1 ou 3.

$P(3) = 3^3- 3.3 + 1 = 1$, ou seja, $P(1) = - 1$ e $P(3) = 1$ têm sinais opostos, assim pelo Teorema de Bolzano existe pelo ao menos uma raiz real em (1, 3). Como (0, 1) não está contido em (1, 3) a única possibilidade é que exista uma única raiz real em (0, 1).

3.3 – TRANSFORMAÇÕES

Dada uma equação algébrica $f(x) = 0$ quando substituímos em x uma expressão com outra variável, obtemos neste momento uma **transformação** da equação $f(x) = 0$ em uma equação na nova variável escolhida. A equação original é chamada **primitiva** e a equação obtida é denominada **transformada.**

Exemplo 23:

$x^4 - x^2 + 2 = 0$, fazendo $x^2 = y$, obtemos a transformada $y^2 - y + 2 = 0$.

Seja a equação algébrica $f(x) = 0$, tal que x é função de uma variável y e $q \in C$.

3.3.1 – Transformada aditiva

Quando substituímos **x = y + q** em f(x) = 0, obtemos a transformada aditiva da primitiva f(x) = 0.

3.3.2 – Transformada multiplicativa

Quando substituímos **x = qy** com q ≠ 0, em f(x) = 0, obtemos a transformada multiplicativa da primitiva f(x) = 0.

3.3.3 – Transformação recíproca

Quando substituímos $x = \frac{1}{y}$**,** com y ≠ 0 em f(x) = 0, obtemos a transformada recíproca (inversa) da primitiva f(x) = 0.

Observação 15:

As transformadas de uma equação algébrica, em muitos casos, servem como ferramenta auxiliar para solucionar algumas equações de grau maior ou igual a três, daí a sua relevância.

3.4 – EQUAÇÕES RECÍPROCAS

Sobre as equações recíprocas Guimarães (2008, p.146) afirma que:

> As equações recíprocas são caracterizadas por possuírem coeficientes eqüidistantes do centro da equação simétricos ou anti - simétricos, tornando assim possível classificá-las quanto a dois tipos. A equação recíproca de primeira espécie os termos eqüidistantes são iguais e na equação recíproca de segunda espécie os termos eqüidistantes são simétricos.

Exemplo 24:

$2x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0$ (equação recíproca de primeira espécie) e;

$- 3x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$ (equação recíproca de segunda espécie)

Exemplo 25:

Resolva a equação P(x) = 0, tal que $P(x) = 2x^6 - 7x^5 + 7x^4 - 7x^2 + 7x - 2$.

Solução:

Inicialmente, temos que P(x) = 0 é uma equação recíproca de segunda espécie, pois os coeficientes equidistantes são simétricos.

É fácil ver que 1 e - 1 são raízes da equação, pois:

$P(1) = 2.1^6 - 7.1^5 + 7.1^4 - 7.1^2 + 7.1 - 2 = 2 - 7 + 7 - 7 + 7 - 2 = 0$.

$P(-1) = 2.(-1)^6 - 7.(-1)^5 + 7.(-1)^4 - 7.(-1)^2 + 7.(-1) - 2 = 2 + 7 + 7 - 7 - 7 - 2 = 0$.

Primeiramente, vamos fatorar a equação através do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

	2	-7	7	0	-7	7	-2
1	2	-5	2	2	-5	2	0
-1	2	-7	9	-7	2	0	

Assim, a equação inicial fica $(x - 1)(x + 1)(2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2) = 0$. Agora, a partir da equação $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ acharemos as raízes restantes. Observemos inicialmente que essa equação é recíproca de primeira espécie e que para equações recíprocas com número de termos ímpar é sempre viável dividir toda a ela pela parte literal do termo central para em seguida formarmos "pacotes algébricos".

Dividindo $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$ por x^2, obtemos:

$2x^2 - 7x + 9 - 7.\frac{1}{x} + 2.\frac{1}{x^2} = 0$, organizando, $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 9 = 0$.

Formando os "pacotes algébricos". Fazendo a transformação $x + \frac{1}{x} = y$ e elevando ambos os membros ao quadrado, vamos ter que $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Obteremos a nova equação $2y^2 - 7y + 5 = 0$, que tem como raízes 5/2 e 1. Atribuindo os valores de y na transformação:

Para $y = 5/2 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 1/2$.

Para $y = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Portanto $S = \{\pm 1, 1/2, 2, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

4 – SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 3^0 E 4^0 GRAUS E APLICAÇÕES

As equações de graus um e dois não são os focos deste trabalho, porém é válido mostrar as formas mais recorrentes de solução.

Na equação de 1^0 grau da forma ax + b = 0, tal que a, b∈R e a ≠ 0, temos que a única solução é dada por x = $-\dfrac{b}{a}$, assim S = $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

Já na equação quadrática (2^0 grau) da forma $ax^2 + bx + c = 0$, tal que a, b, c∈R e a ≠ 0, são duas as formas mais recorrentes de solução.

i. Regra de Baskara

Seja o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, tal que a, b, c∈R e a ≠ 0. Se α é raiz de P(x), então P(α) = 0. Assim:

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = 0 + \left(\frac{b^2}{4a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha^2 + \frac{b}{a}.\alpha + \frac{b^2}{4a^2}\right) = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4.a.c}{4.a^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

Portanto, temos que α é dado por: $\alpha = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$, onde $\Delta = b^2 - 4.a.c$ é chamado discriminante da equação.

Se Δ < 0, então as duas raízes são da forma m + ni; m, n∈R.

Se Δ = 0, então as raízes serão reais e iguais.

Se Δ > 0, então as raízes serão reais e distintas.

Exemplo 26:

Resolver a equação $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Solução:

Inicialmente, comparando com a equação geral os valores dos coeficientes da equação são a = 1, b = - 5 e c = 4. Assim, o discriminante será dado por $\Delta = (-5)^2 - 4.1.4 = 25 - 16 = 9 > 0$, isso nos garante que a equação terá duas raízes reais e distintas.

$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$ e $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$. Portanto o conjunto solução é dado por S = {1, 4}.

ii – Soma e produto

Indicado para equações quadráticas que possuem raízes inteiras. Sendo **S** a soma das raízes e **P** o produto das raízes, então:

Sendo $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}, x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$ as raízes da equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$; a, b, $c \in R$ e $a \neq 0$.

$$S = x_1 + x_2 = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c})}{2.a} + \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c})}{2.a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

$$P = x_1.x_2 = \left[\frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c})}{2.a}\right].\left[\frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c})}{2.a}\right] = \frac{b^2 - b^2 + 4.a.c}{4a^2} = \frac{4.a.c}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

iii – Equações quadráticas incompletas

Podem facilmente ser resolvidas sem, necessariamente, utilizarmos fórmulas ou relações. Para as equações com coeficiente do termo linear igual a zero, ou seja, equações do tipo $ax^2 + c = 0$; a, $c \in R^*$. As raízes serão dadas por:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \Rightarrow S = \left\{-\sqrt{\frac{-c}{a}}, \sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$$

Para as equações com termo independente nulo igual a zero, ou seja, equações do tipo $ax^2 + bx = 0$; $a, b \in R^*$.

$ax^2 + bx = 0$, podemos tirar o termo semelhante x, assim a equação fica fatorada da seguinte forma $x.(ax + b) = 0$. Daí $x = 0$ (sempre será raiz) ou $ax + b = 0$, desta $x = \frac{-b}{a}$. Assim, $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$.

Para as equações da forma $ax^2 = 0$; a é não nulo, temos o zero como raiz de multiplicidade dois, logo $S = \{0\}$.

4.1 – EQUAÇÕES CÚBICAS

São equações da forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, tal que $a, b, c, d \in R$, com $a \neq 0$.

Para a solução das equações de grau maior que dois (em especial as cúbicas e quárticas) começaremos das formas particulares e seguiremos às formas completas.

4.1.1 – Equações cúbicas incompletas

I – Três termos nulos

Fazendo $b = c = d = 0$ a equação cúbica fica reduzida a forma $ax^3 = 0$; $a \neq 0$, tendo como raiz de multiplicidade três o zero, ou ainda, $S = \{0\}$.

II – Dois termos nulos

a) a, b não nulos e c = d = 0

Neste caso a equação cúbica fica reduzida $ax^3 + bx^2 = 0$.

$ax^3 + bx^2 = 0 \Leftrightarrow x^2.(ax + b) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ ou $ax + b = 0$. Assim, temos o zero como raiz de multiplicidade dois e $x = \frac{-b}{a}$ como raízes.

Portanto, $S = \left\{0, \frac{-b}{a}\right\}$.

Exemplo 27:

Resolver a equação $2x^3 + 6x^2 = 0$.

Solução:

$2x^3 + 6x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2.(x + 3) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz de multiplicidade dois) ou $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$. Portanto, S = {- 3, 0}.

b) a, c não nulos e b = d = 0

Neste caso a equação cúbica fica reduzida $ax^3 + cx = 0$.

$ax^3 + cx = 0 \Leftrightarrow x.(ax^2 + c) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $ax^2 + c = 0$. Assim, temos o zero como raiz e $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ as raízes restantes.

Portanto, $S = \left\{0, -\sqrt{\frac{-c}{a}}, +\sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$.

Exemplo 28:

Resolver a equação $3x^3 + 12x = 0$.

Solução:

$3x^3 + 12x = 0 \Leftrightarrow 3x.(x^2 + 4) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 + 4 = 0$. Da equação quadrática anterior, temos que $x = \pm\sqrt{\frac{-4}{1}} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$. Portanto, S = {0, – 2i, 2i}.

c) a, d não nulos e b = c = 0

Neste caso a equação cúbica fica reduzida $ax^3 + d = 0$.

$ax^3 + d = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-d}{a}}$. Como $\frac{-d}{a} \in \mathbb{C}$, aplicaremos os conhecimentos relativos à radiciação de números complexos, e consequentemente, encontraremos as três raízes da equação.

Exemplo 29:

Resolver a equação $2x^3 - 16 = 0$.

Solução:

$2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8}$.

Fazendo, z = 8 = 8 + 0i $\Rightarrow |z| = \rho = 8$ e $\arg(z) = \theta = 0^0$.

Da expressão, $z_k = \sqrt[n]{\rho}.\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}\right)\right]$,tal que k = 0, 1, 2.

Temos que:

Para k = 0 $\Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{8}.\left[\cos\left(\dfrac{0}{3} + 0.\dfrac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\dfrac{0}{3} + 0.\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2(1 + 0i) = 2$

k = 1 $\Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{8}.\left[\cos\left(\dfrac{0}{3} + 1.\dfrac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\dfrac{0}{3} + 1.\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

k = 2 $\Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{8}.\left[\cos\left(\dfrac{0}{3} + 2.\dfrac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\dfrac{0}{3} + 2.\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\dfrac{-1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3}$

Portanto, $S = \{2, -1 + i\sqrt{3}, -1 - i\sqrt{3}\}$.

III – Um termo nulo apenas

a) a, b, c não nulos e d = 0.

A equação cúbica fica reduzida a forma $ax^3 + bx^2 + cx = 0$.

$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x.(ax^2 + bx + c) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $ax^2 + bx + c = 0$ (equação quadrática de onde sairão as duas raízes restantes).

Assim, $S = \left\{0, \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$.

Exemplo 30:

Resolver a equação $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$.

Solução:

$x^3 - 4x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x.(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ e $x_2 = 3$. Portanto, S = {0, 1, 3}.

b) a, b, d não nulos e c = 0.

A equação cúbica fica reduzida a forma $ax^3 + bx^2 + d = 0$. Para este tipo de equação seguiremos os seguintes passos:

1^0 – Verificar se a equação é recíproca, pois pode ajudar em uma possível mudança de variável.

2^0 – Utilizar o teorema das raízes racionais ou tentativas (se possível), Bolzano (para tentar localizar a raiz) para posterior aplicação do algoritmo de Briot-Ruffini.

3^0 – Se nenhum dos passos anteriores solucionar a equação, recorreremos ao processo de eliminação do termo quadrático visando a aplicação da Regra de Cardano que veremos agora.

Regra de Cardano

A regra de Cardano, a princípio, permitia encontrarmos a solução real de uma equação cúbica incompleta da forma $x^3 + cx + d = 0$.

Seja a equação $ax^3 + cx + d = 0$, inicialmente vamos dividir todos os membros da equação cúbica por **a**, assim obtemos uma equação $x^3 + px + q = 0$, onde $p = c/a$ e $q = d/a$.

Estamos interessados em achar uma expressão capaz de calcular a solução da equação $x^3 + px + q = 0$. Vamos pensar em x como a soma de duas parcelas, **u e v,** substituindo em x a soma u + v. Vamos ter:

$x = u + v \Rightarrow x^3 = (u + v)^3 \Rightarrow x^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 \Rightarrow u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$ $\Rightarrow x^3 = u^3 + v^3 + 3uvx \Rightarrow x^3 - 3uvx - (u^3 + v^3)$, comparando com a equação inicial $x^3 + px + q = 0$, temos que: $u^3 + v^3 = - q$; $u.v = -\frac{p}{3}$.

Portanto, $u^3 + v^3 = -q$ e $u^3.v^3 = -\frac{p^3}{27}$.

Vamos agora interpretar u^3 e v^3 como sendo a solução de uma equação quadrática, tal que conhecemos a soma e o produto delas.

Obtemos então a equação $y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$. Utilizando a regra de Baskara, vamos ter:

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 - 4.1.\left(\frac{-p^3}{27}\right)}}{2.1} = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4.\frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} + \frac{\sqrt{\frac{4}{4}.\left(q^2 + 4.\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Sendo v^3 a outra raiz, então:

$$v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 - 4.1.\left(\frac{-p^3}{27}\right)}}{2.1} = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4.\frac{p^3}{27}}}{2} = \frac{-q}{2} - \frac{\sqrt{\frac{4}{4}.\left(q^2 + 4.\frac{p^3}{27}\right)}}{2}$$

$$\Rightarrow v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Como $x = u + v$, portanto a solução da equação é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Exemplo 31:

Resolver a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$. Fazendo a comparação com a equação geral $x^3 + px + q = 0$, temos que $p = -6$ e $q = -9$.

Solução:

Aplicando a regra de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-216)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-216)}{27}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{2187}{108} + \frac{(-864)}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{2187}{108} + \frac{(-864)}{108}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{1323}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{1323}{108}}} = x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$$

Para encontrarmos as ouras duas raízes vamos fatorar o polinômio da equação representado por $x^3 - 6x - 9$, dividindo-o pelo polinômio $x - 3$. A divisão pode ser feita usando o método das chaves, Descartes ou ainda utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, em ambos os casos chegaremos a:

$x^3 - 6x - 9 = (x - 3).(x^2 + 3x + 3)$. Assim, $(x - 3).(x^2 + 3x + 3) = 0$, fazendo $x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$ e $x_2 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$. Portanto:

$$S = \left\{ \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}, 3 \right\}.$$

Na regra de Cardano o termo $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ é chamado discriminante da equação.

Quando o discriminante é zero a expressão fica reduzida a $x = 2.\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$, a raiz é facilmente encontrada.

A única limitação para regra de Cardano era quando o discriminante assumia um valor negativo, porém essa limitação foi suprimida com o aparecimento do corpo dos complexos e em alguns casos com a igualdade desenvolvida pelo matemático Rafael Bombelli, tal igualdade consistia em fazer $\sqrt[3]{x+\sqrt{-y}} = a+\sqrt{b}$ e $\sqrt[3]{x-\sqrt{-y}} = a-\sqrt{b}$.

Apresentaremos agora um processo para solucionar equações cúbicas onde o discriminante é negativo.

Vimos anteriormente na dedução da fórmula de Cardano que:

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \Rightarrow u = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} \text{ e}$$

$$v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Como x = u + v, portanto a solução da equação é:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

Acontece que $\Delta = \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ é negativo. Assim:

$$u^3 = \frac{-q}{2} + i.\sqrt{-\Delta} = |u^3|.(\cos\alpha + i.sen\alpha) \text{ e } v^3 = \frac{-q}{2} - i.\sqrt{-\Delta} = |v^3|.(\cos\beta + i.sen\beta)$$

Vamos agora encontrar a forma trigonométrica desses complexos.

No corpo dos complexos, um complexo e seu conjugado têm o mesmo módulo, logo u^3 e v^3 terão o mesmo módulo, ou seja, $|u^3| = |v^3|$.

$$|u^3| = |v^3| = \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + (-\Delta)^2} = \sqrt{\frac{q}{4}^2 + (-\Delta)} = \sqrt{\frac{q}{4}^2 + \left(\frac{-q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

Temos ainda que:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{-q}{2}}{|u^3|} e \cos\beta = \frac{\frac{-q}{2}}{|v^3|} \Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta.$$

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{-\Delta}}{|u^3|} e sen\beta = -\frac{\sqrt{-\Delta}}{|v^3|} \Rightarrow sen\alpha = -sen\beta.$$

Assim, o argumento será dado por:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{-q}{2}}{|u^3|} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{-q}{2}.\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right).$$

Portanto, as formas trigonométricas serão dadas por:

$$u^3 = \frac{-q}{2} + i.\sqrt{-\Delta} = |u^3|.(\cos\alpha + i.sen\alpha) \text{ e}$$

$$v^3 = \frac{-q}{2} - i.\sqrt{-\Delta} = |v^3|.(\cos\beta + i.sen\beta) = |v^3|.(\cos(-\alpha) + i.sen(-\alpha)) = |v^3|.(\cos\alpha - i..sen\alpha)$$

Pela radiciação de um número complexo, temos que:

$$u = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ e}$$

$$v = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ para k = 0, 1, 2.}$$

Resolvendo os radicais os valores de u e v acima podem ser representados por:

$$u = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ e}$$

$$v = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$$

Para k = 0.

$$u = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] \text{ e } v = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right].$$

Como x = u + v $\Rightarrow$ $x_1 = 2.\sqrt{\frac{-p}{3}}.\cos\left(\frac{1}{3}.ar\cos\left(\frac{-q}{2}.\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right)\right)$

Para k = 1.

$$u = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \text{ e}$$

$$v = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)-i.sen\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$x_2 = 2.\sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{1}{3}.\arccos\left(\frac{-q}{2}.\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

Para k = 2.

$$u = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+i.sen\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] \text{ e}$$

$$v = \sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)-i.sen\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

$$x_3 = 2.\sqrt{\frac{-p}{3}}.\left[\cos\left(\frac{1}{3}.\arccos\left(\frac{-q}{2}.\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right)+\frac{4\pi}{3}\right)\right]$$

Exemplo 32:

Resolver a equação $x^3 - 6x + 4 = 0$

Solução:

Aplicando a fórmula de Cardano chegaremos a x = $\sqrt[3]{-2+\sqrt{-4}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{-4}}$ ou ainda x = $\sqrt[3]{-2+2.i}+\sqrt[3]{-2-2.i}$.

Fazendo:

$$u^3 = -2+2.i \Rightarrow \left|u^3\right| = \sqrt{8} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}, sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e}$$

$$v^3 = -2-2.i \Rightarrow \left|v^3\right| = \sqrt{8} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, sen\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Observemos que, $\left|u^3\right| = \left|v^3\right|$ e que α e β são ângulos opostos, pois sen α = -sen β.

Assim, $u^3 = \left|u^3\right|.(\cos\alpha + i.sen\alpha)$ e $v^3 = \left|v^3\right|.(\cos\beta + i.sen\beta) = \left|v^3\right|.(\cos\alpha - i..sen\alpha)$.

Quanto ao argumento, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} e sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} rad.$

Pela radiciação de um complexo:

$$u = \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ e}$$

$$v = \sqrt[3]{v^3} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \text{ para k = 0, 1, 2.}$$

Resolvendo os radicais os valores de u e v acima podem ser representados por:

Para k = 0.

$$u = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right] \text{e}\, v = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right], \text{ logo:}$$

Como x = u + v $\Rightarrow$ $x_1 = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$

Para k = 1.

$$u = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] \text{e}$$

$$v = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

$$x_2 = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right).$$

Para k = 2.

$$u = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] \text{e}$$

$$v = \sqrt{2}.\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) - i.sen\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\sqrt{2}.\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right).$$

Ao acharmos a raiz x = 2, podemos também aplicar o algoritmo de Briot- Ruffini e encontrar as demais raízes sem depender dos valores dos cossenos acima.

	1	0	- 6	4
2	1	2	- 2	0

Assim, $x^3 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2).(x^2 + 2x - 2) = 0$, resolvendo a equação quadrática, obtemos: $x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$.

Portanto, $S = \left\{2, \dfrac{-2-\sqrt{10}}{2}, \dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}\right\}$.

Como resolver as equações da forma $ax^3 + bx^2 + d = 0$?

Anteriormente, através da regra de Cardano encontramos uma forma para encontrar a solução da equação $x^3 + px + q = 0$. É possível encontrarmos após uma mudança de variável em equação $ax^3 + bx^2 + d = 0$ uma nova equação sem a presença do termo quadrático? A resposta é sim. Para isso vamos fazer uma mudança de variável na equação $ax^3 + bx^2 + d = 0$ através da relação x = y + k. Qual k devemos escolher para que a equação em y não tenha termo quadrático?

Solução

$ax^3 + bx^2 + d = 0$

$\Rightarrow a(y + k)^3 + b(y + k)^2 + d = 0$

$\Rightarrow a(y^3 + 3y^2k + 3yk^2 + k^3) + b(y^2 + 2yk + k^2) + d = 0$

$\Rightarrow ay^3 + (3ak + b)y^2 + (3ak^2 + 2bk)y + ak^3 + bk^2 + d = 0.$

Para eliminar o termo quadrático devemos ter $3ak + b = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-b}{3a}$.

Portanto, para eliminar o termo quadrático de uma equação cúbica basta fazermos $k = \dfrac{-b}{3a}$.

Exemplo 33:

Resolver a equação $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$.

Solução:

Comparando com a equação geral, temos que $k = \frac{-3}{3.1} = -1$. Assim, fazendo a substituição x = y - 1. Vamos ter:

$x^3 + 3x^2 - 2 = 0 \Rightarrow (y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow y^3 \mathbf{- 3y^2.1} + 3y.1^2 - 1^3 + \mathbf{3y^2} - 6y + 3 - 2 = 0 \Rightarrow y^3 - 3y = 0.$

$\Rightarrow y^3 - 3y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 3) = 0 \Rightarrow y = 0$ ou $y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$.

Voltando a equação original.

Para $y = 0 \Rightarrow x = - 1$.

Para $y = -\sqrt{3} \Rightarrow x = -\sqrt{3} - 1$.

Para $y = \sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} - 1$. Assim, $S = \{- 1, -\sqrt{3} - 1, \sqrt{3} - 1\}$.

c) a, c, d não nulos e b = 0.

A equação cúbica fica reduzida a forma $ax^3 + cx + d = 0$. Para este tipo de equação senão acharmos uma solução pelos teoremas aqui apresentados, basta aplicar a **regra de Cardano** vista anteriormente**.** Se $a \neq 1$, então divida a equação por a, antes.

4.1.2 – Equação cúbica completa

Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, tal que a, b, c, d são não nulos. Para resolver uma equação cúbica completa, de um modo geral, procederemos com o seguinte critério:

1^0 – Manipulação algébrica, ou ainda, verificarmos se a equação é recíproca, pois pode facilitar na solução da equação.

2^0 – Utilização do Teoremas aqui apresentados.

3^0 – Eliminar o termo quadrático para em seguida aplicar a regra de Cardano.

Exemplo 34:

Resolver a equação $3x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = 0$.

Solução:

1^0 – Inicialmente, observamos que não tem como manipular algebricamente a equação (normalmente a manipulação se dá em equações recíprocas).

2^0 - Utilização do teorema das raízes racionais. D(- 6) = {±1, ±2, ±3, ±6}, D(3) = {±1, ±2, ±3}. Possíveis raízes {±1, ±2, ±3/2, ±6}. Fazendo o teste, observamos que para $x = 2 \Rightarrow 3.2^3 - 2.2^2 - 5.2 - 6 = 24 - 8 - 10 - 6 = 0$. Assim, x = 2 é raiz daí não precisamos ir para o terceiro critério. Poderíamos, também ter tentado o Teorema de Bolzano para localizar a raiz.

Portanto, $3x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$. Aplicando o método de Descartes, obtemos: a = 3, b = 4, c = 3.

Assim, $3x^3 - 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(3x^2 + 4x + 3) = 0$, fazendo $3x^2 + 4x + 3 = 0$, obtemos $x = \frac{-2 - i2\sqrt{5}}{3}$ ou $x = \frac{-2 + i2\sqrt{5}}{3}$.

Logo, S = $\left\{2, \frac{-2 - i2\sqrt{5}}{3}, \frac{-2 - i2\sqrt{5}}{3}\right\}$.

4.2 – EQUAÇÕES QUÁRTICAS

É toda equação da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, onde a, b, c, d, e$\in$R e $a \neq 0$. Analogamente, ao estudo das equações cúbicas, vamos particularizar os casos para facilitar o aprendizado da solução dessas equações.

4.2.1 – Equações quárticas incompletas

I – Equação quártica com quatro termos nulos

Fazendo b = c = d = e = 0, a equação quártica fica reduzida à forma $ax^4 = 0$. É fácil ver que equação terá como raiz de multiplicidade quatro o zero, assim S = {0}.

II – Equação quártica com três termos nulos

a) a, b não nulos e c = d = e = 0.

A equação fica reduzida à forma $ax^4 + bx^3 = 0$ ou $x^3(ax + b) = 0 \Rightarrow x^3 = 0$ ou $ax + b = 0$. É fácil ver que zero é raiz de multiplicidade três e - b/a a outra raiz, assim S = {0, - b/a}.

Exemplo 35:

Resolva a equação $x^4 - 2x^3 = 0$.

Solução:

De $x^4 - 2x^3 = 0 \Rightarrow x^3(x - 2) = 0$, assim $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz de multiplicidade 3) ou $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Portanto, S = {0, 2}.

b) a, c não nulos e b = d = e = 0.

A equação fica reduzida à forma $ax^4 + cx^2 = 0$ ou $x^2(ax^2 + c) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ ou $ax^2 + c = 0$. É fácil ver que zero é raiz de multiplicidade dois e $x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ são as raízes restantes, assim $S = \left\{0, -\sqrt{\frac{-c}{a}}, \sqrt{\frac{-c}{a}}\right\}$.

Exemplo 36:

Resolva a equação $3x^4 + 27x^2 = 0$.

Solução:

De $3x^4 + 27x^2 = 0 \Rightarrow x^2(3x^2 + 27) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz de multiplicidade dois) ou $3x^2 + 27 = 0 \Rightarrow x = \pm 3i$. Portanto, S = {0, - 3i, +3i}.

c) a, d não nulos e b = c = e = 0.

A equação fica reduzida à forma $ax^4 + dx = 0$ ou $x(ax^3 + d) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $ax^3 + d = 0$. É fácil ver que o zero é uma das raízes, e as raízes restantes sairão da utilização dos conhecimentos relativos à radiciação de um número complexo aplicados na equação $ax^3 + d = 0$.

De $ax^3 + d = 0$, implica $x = \sqrt[3]{\dfrac{-d}{a}}$, basta tomarmos $z = \dfrac{-d}{a}$ e aplicarmos a raiz cúbica. Encontraremos três complexos que serão as três raízes restantes da equação quártica.

Exemplo 37:

Resolver a equação $x^4 + 27x = 0$.

Solução:

$x^4 + 27x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 27) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^3 + 27 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-27}$, fazendo z = - 27, temos que |z| = ρ = 27 e arg z = θ = π.

Da expressão, $z_k = \sqrt[n]{\rho}.\left[\cos\left(\dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\dfrac{\theta}{n} + k.\dfrac{2\pi}{n}\right)\right]$,tal que k = 0, 1, 2.

Temos que:

Para k = 0.

$$x_0 = \sqrt[3]{27}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{3} + 0.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{i3\sqrt{3}}{2}$$

Para k = 1.

$$x_1 = \sqrt[3]{27}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{3} + 1.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3(-1 + 0) = -3$$

Para k = 2.

$$x_2 = \sqrt[3]{27}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{3} + 2.\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 3\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{i3\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, $S = \left\{-3, 0, \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$.

d) a, e não nulos e b = c = d = 0.

A equação fica reduzida à forma $ax^4 + e = 0$. As raízes sairão da utilização dos conhecimentos relativos à radiciação de um complexo aplicados na equação $ax^4 + e = 0$.

De $ax^4 + e = 0$, implica $x = \sqrt[4]{\frac{-e}{a}}$, basta tomarmos $z = \frac{-e}{a}$ e aplicarmos a raiz quarta. Encontraremos quatro complexos que serão as raízes da equação quártica.

Exemplo 38:

Resolver a equação $2x^4 + 32 = 0$.

Solução:

$2x^4 + 32 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[4]{-16}$, fazendo z = - 16 $\Rightarrow$ |z| = ρ = 16 e arg z = θ = π.

Da expressão, $z_k = \sqrt[n]{\rho}.\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right) + i.sen\left(\frac{\theta}{n} + k.\frac{2\pi}{n}\right)\right]$,tal que k = 0, 1, 2.

Temos que:

Para k = 0.

$$x_0 = \sqrt[4]{16}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.\frac{2\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{4} + 0.\frac{2\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Para k = 1.

$$x_1 = \sqrt[4]{16}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 1.\frac{2\pi}{4}\right) + i.sen\left(\frac{\pi}{4} + 1.\frac{2\pi}{4}\right)\right] = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Pelo Teorema das Raiz complexa as raízes restantes serão $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.

Portanto, $S=\{\sqrt{2}-i\sqrt{2},\sqrt{2}+i\sqrt{2},-\sqrt{2}-i\sqrt{2},-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\}$.

III – Dois termos nulos

a) b = c = 0 e a, d, e não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + dx + e = 0$. Para este tipo de equação, devemos tentar os seguintes métodos:

1^0 – Verificar se a equação é recíproca (facilita a manipulação algébrica, formação de "pacotes algébricos")

2^0 – Utilizar os teoremas aqui apresentados.

3^0 – Aplicar o método geral para equações quárticas que veremos mais a frente.

b) b = d = 0 e a, c, e não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + cx^2 + e = 0$. Esta equação é conhecida como equação biquadrada e é de fácil solução. Para isto basta fazermos uma mudança de variável simples que implicará no aparecimento de uma equação do segundo grau (já estudada).

Exemplo 39:

Resolver a equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Solução:

Fazendo a mudança de variável $x^2 = y$, obtemos uma nova equação em y dada por $y^2 - 13y + 36 = 0$.

Como resolver a equação quadrática em y não é foco do exemplo, aplicando os conhecimentos anteriormente expostos no presente trabalho chegaremos às raízes $y_1 = 4$

e $y_2 = 9$. Porém, nos interessa solucionar a equação e x. Substituindo cada valor de y na igualdade $x^2 = y$. Vamos ter:

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ e $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. Assim, S = {- 3, - 2, 2, 3}.

c) b = e = 0 e a, c, d não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + cx^2 + dx = 0$, equivalentemente, a $x(ax^3 + cx + d) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $ax^3 + cx + d = 0$, nesta poderemos aplicar a regra de Cardano já estudada anteriormente.

Exemplo 40:

Resolver a equação $2x^4 - 12x^2 - 18x = 0$.

Solução:

$2x^4 - 12x^2 - 18x = 0 \Leftrightarrow 2x(x^3 - 6x - 9) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Esta já foi resolvida no exemplo 31. Assim, $S = \left\{0{,}3, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

d) c = d = 0 e a, b, e não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + bx^3 + e = 0$. Para este tipo de equação, devemos tentar os seguintes métodos:

1^0 – Verificar se a equação é recíproca (facilita a manipulação algébrica, formação de "pacotes algébricos")

2^0 – Utilizar os teoremas aqui apresentados.

3^0 – Aplicar o método geral para equações quárticas que veremos mais a frente.

e) c = e = 0 e a, b, d não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + bx^3 + dx = 0$, equivalentemente, a $x(ax^3 + bx^2 + d)$. O zero será uma das raízes, as outras três raízes sairão da solução da equação $ax^3 + bx^2 + d = 0$ que pode ser resolvida eliminando o termo quadrático para, posteriormente, aplicarmos a regra de Cardano ou outro método mais simples dependendo da equação.

Exemplo 41:

Resolver a equação $x^4 + 3x^3 - 4x = 0$ utilizando a Regra de Cardano.

Solução:

De $x^4 + 3x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^3 + 3x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$. Agora vamos eliminar o termo quadrático, fazendo uma mudança de variável de tal modo que,

$x = y - \dfrac{3}{3.1} = y - 1.$

Substituindo em x, na equação $x^3 + 3x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (y - 1)^3 + 3(y - 1)^2 - 4 = 0.$

Desenvolvendo as potências, chegaremos a $y^3 - 3y - 2 = 0$.

Comparando com a forma $y^3 + py + q = 0$, temos que $p = - 3$ e $q = - 2$. Logo:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-(-2)}{2} + \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-(-2)}{2} - \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{-27}{27}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{\frac{4}{4} + \frac{-27}{27}}} = \sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - 1}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 1}}$$

$$y = \sqrt[3]{1 + 0} + \sqrt[3]{1 - 0} = \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} \Rightarrow y = 1 + 1 = 2$$

Da relação $x = y - 1 \Rightarrow x = 2 - 1 \Rightarrow x = 1$. Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini.

	1	3	0	- 4	0
1	1	4	4	0	0
0	1	4	4	0	

Temos que $x^4 + 3x^3 - 4x = (x - 0)(x - 1)(x^2 + 4x + 4) = 0$. De $x^2 + 4x + 4 = 0$, $x = - 2$ é raiz de multiplicidade 2, assim, $S = \{0, 1, - 2\}$.

f) d = e = 0 e a, b, c não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$, equivalentemente, $x^2(ax^2 + bx + d) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz de multiplicidade dois) ou $ax^2 + bx + c = 0$, esta fácil resolver, pois se trata de uma equação quadrática.

Exemplo 42:

Resolver a equação $2x^4 + 3x^3 + x^2 = 0$.

Solução:

$2x^4 + 3x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x^2 + 3x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ (raiz de multiplicidade dois) ou $2x^2 + 3x + 1 = 0$ equação quadrática com raízes - 1 e -1/2. Assim o conjunto solução da equação será dado por S = {- 1, - 1/2, 0}.

IV – Um termo nulo apenas

a) Para os casos em que apenas ou b = 0 ou c = 0 ou d = 0.

1^0 – Verificar se a equação é recíproca (facilita a manipulação algébrica, formação de “pacotes algébricos”)

2^0 – Utilizar os teoremas aqui apresentados.

3^0 – Aplicar o método geral para equações quárticas que veremos mais a frente.

b) e = 0 e a, b, c, d, e não nulos

A equação quártica fica reduzida a forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0$, equivalentemente, $x.(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$, ou seja, $x = 0$ (raiz) ou $ax^3+bx^2+cx+d=0$ (equação cúbica completa, vista anteriormente).

4.2.2 – Equação quártica completa

É toda equação da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$.

Para solucionar as equações de quarto grau completas, alguns autores fazem uso de radicais e outros dos métodos numéricos (ou de aproximação). Apresentaremos aqui uma solução geral para equações quárticas da forma $w^4 + Kw^3 + Mw^2 + Rw + L = 0$, tal que $LK^2 = R^2$ como afirma Filho (2009, p.17) “ (...) em qualquer caso podemos resolver a equação”.

O método consiste em, inicialmente, acharmos uma constante **q,** tal que, que a partir da equação original, possamos fazer aparecer “pacotes algébricos” que acompanhados de uma posterior mudança de variável transformaremos a equação quártica original em uma equação quadrática.

Seja a equação $w^4 + Kw^3 + Mw^2 + Rw + L = 0$, tal que $LK^2 = R^2$.

Para $K = 0 \Rightarrow R = 0$, assim a equação $w^4 + Kw^3 + Mw^2 + Rw + L = 0$, em que $LK^2 = R^2$ ficaria reduzida para a forma $w^4 + Mw^2 + L = 0$ uma biquadrada de fácil solução.

Para $K \neq 0 \Rightarrow L = \left(\frac{R}{K}\right)^2 \Rightarrow$ Se $R = 0$, então a equação dada por:

$w^4 + Kw^3 + Mw^2 + Rw + L = 0$, em que $LK^2 = R^2$ se reduz a:

$w^4 + Kw^3 + Mw^2 = 0$, ou equivalentemente, à $w^2.(w^2 + Kw + M) = 0$, com $w = 0$ (raiz de multiplicidade 2) ou $w^2 + Kw + M = 0$ equação quadrática de fácil solução.

Agora, se $K \neq 0$ e $R \neq 0$, então $w = 0$ não é solução, assim para $w \neq 0$, podemos dividir toda a equação $w^4 + Kw^3 + Mw^2 + Rw + L = 0$, em que $LK^2 = R^2$ por w^2, daí, obtemos $w^2 + Kw + M + \frac{R}{w} + \frac{R^2}{K^2w^2} = 0.$ Adicionando à esquerda da equação os termos $\frac{-2R}{K}$ e $\frac{2R}{K}$.

$$w^2 + Kw + M + \frac{R}{w} + \frac{R^2}{K^2 w^2} - \frac{2R}{K} + \frac{2R}{K} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(w^2 + \frac{2R}{K} + \frac{R^2}{K^2.w^2} \right). + \left(Kw + \frac{R}{w} \right) + \left(M - \frac{2R}{K} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(w + \frac{R}{Kw} \right)^2 + K.\left(w + \frac{R}{Kw} \right) + \left(M - \frac{2R}{K} \right) = 0$$

Fazendo z = $w + \dfrac{R}{K.w}$, obtemos a equação quadrática $z^2 + Kz + \left(M - \dfrac{2R}{K} \right) = 0$.

Determinando as raízes de z, determinaremos as raízes de w, pois existe uma relação entre elas.

Consideremos agora uma equação da forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ dividindo-a por **a** obtemos $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$, fazendo x = y + q, tal que **q** é uma constante. Vamos ter: $(y + q)^4 + A.(y + q)^3 + B.(y + q)^2 + C.(y + q) + D = 0$, queremos achar q para obtermos uma equação da forma $y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0$, em que $LK^2 = R^2$.

Desenvolvendo as potências acima e fazendo a comparação com o polinômio $y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L$, temos que:

$K = 4q + A$

$M = 6q^2 + 3Aq + B$

$R = 4q^3 + 3Aq^2 + 2Bq + C$

$L = q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq + D$

Queremos que $LK^2 = R^2$. Assim:

$(q^4 + Aq^3 + Bq^2 + Cq + D).(4q + A) = (4q^3 + 3Aq^2 + 2Bq + C)^2$.

Desenvolvendo ambos os membros e fazendo os devidos cancelamentos e simplificações, obtemos:

$$(8C + A^3 - 4AB)q^3 + (16D + 2AC + A^2B - 4B^2)q^2 + (8AD + A^2C - 4BC)q + A^2D - C^2 = 0$$

Esta equação em q, tem no máximo grau três, pois o grau da equação vai depender do valor de seus coeficientes.

Observe que se $8C + A^3 - 4AB = 0$ e $8AD + A^2C - 4BC = 0$, então:

$8AD + A^2C - 4BC = 0 \Rightarrow A.(8AD + A^2C - 4BC) = 0$, da mesma forma vale que se $8C + A^3 - 4AB = 0 \Rightarrow C.(8C + A^3 - 4AB) = 0$.

$A.(8AD + A^2C - 4BC) - C.(8C + A^3 - 4AB) =$ $\mathbf{8.(A^2D - C^2) = 0}$.

Exemplo 43:

Resolver a equação $x^4 + 5x - 31x^2 - 72x - 36 = 0$.

Solução:

A equação não é recíproca, além disso, e os demais teoremas apresentados, não facilitam a solução da equação. Assim vamos aplicar o método geral visto anteriormente.

Comparando com a equação $x^4 + Kx^3 + Mx^2 + Rx + L = 0$, temos que $K = 5$, $M = -31$, $R = -72$ e $L = -36$. Observamos que $LK^2 \neq R^2$.

Temos que achar um t, tal que ao fazermos $x = y + t$, obteremos uma equação em y, que satisfaça $LK^2 = R^2$.

$(y + t)^4 + K(y + t)^3 + M(y + t)^2 + R(y + t) + L = 0$

$y^4 + (4t + 5)t^3 + (6t^2 + 15t - 31)y^2 + (4t^3 + 15t^2 - 62t - 72)t + (t^4 + 5t^3 - 31t^2 - 72t - 36) = 0$

Queremos que $LK^2 = R^2$. Assim:

$(t^4 + 5t^3 - 31t^2 - 72t - 36).(4t + 5)^2 = (4t^3 + 15t^2 - 62t - 72)^2 \Rightarrow t^3 - 35t^2 - 72t - 36 = 0$, o que implica em $t = -1$. Substituindo em:

$y^4 + (4t + 5)t^3 + (6t^2 + 15t - 31)y^2 + (4t^3 + 15t^2 - 62t - 72)t + (t^4 + 5t^3 - 31t^2 - 72t - 36) = 0$

Obtemos a equação $y^4 + y^3 - 40y^2 + y + 1 = 0$, que satisfaz $LK^2 = R^2$. Dividindo toda a equação por y^2. Obtemos, $y^2 + y - 40 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} = 0.$ Adicionando ao membro da esquerda $\pm\frac{2R}{K} = \pm\frac{2.1}{1} = \pm 2.$ Vamos ter $y^2 + y - 40 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2 - 2 = 0.$

$$y^2 + y - 40 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + 2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 + 2 + \frac{1}{y^2} + y + \frac{1}{y} - 40 - 2 = 0$$

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)-42=0$$

Fazendo $z=y+\frac{1}{y}$. Obtemos a equação $z^2 + z - 42 = 0$. As raízes desta equação são 6 e - 7. Daí:

$$6=y+\frac{1}{y}\Rightarrow y=3\pm\sqrt{8}\Rightarrow x=2\pm\sqrt{8}.$$

$$-7=y+\frac{1}{y}\Rightarrow y=\frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\frac{-9\pm3\sqrt{5}}{2}=\frac{3}{2}\left(-3\pm\sqrt{5}\right).$$

Exemplo 44:

Resolver a equação $25x^4 + 25x^3 + 50x^2 + 25x + 19 = 0$.

Solução:

Primeiramente, vamos dividir toda a equação por 25, assim, obtemos a equação equivalente $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + \frac{19}{25} = 0$. Fazendo $x = y + t$, e substituindo na equação em x, obtemos $(y + t)^4 + (y + t)^3 + 2(y + t)^2 + (y + t) + \frac{19}{25} = 0$, para esta equação em y precisamos achar um **t** real, tal que, após as devidas substituições e operações obtenhamos uma equação em y da forma $y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0$, em que $LK^2 = R^2$.

$(y + t)^4 = y^4 + 4y^3.t + 6y^2t^2 + 4yt^3 + t^4$.

$(y + t)^3 = y^3 + 3y^2t + 3yt^2 + t^3$.

$(y + t)^2 = y^2 + 2yt + t^2$. Substituindo na equação em y, obtemos:

$$y^4 + (4t + 1)y^3 + (6t^2 + 3t + 2)y^2 + (4t^3 + 3t^2 + 4t + 1)y + \left(t^4 + t^3 + 2t^2 + t + \frac{19}{25}\right) = 0.$$

Comparando com a equação

$y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0$, temos que:

$K = 4t + 1$, $M = 6t^2 +3t + 2$, $R = 4t^3 + 3t^2 + 4t + 2$ e $L = t^4 + t^3 + 2t^2 + t + \frac{19}{25}$.

Porém, para aplicarmos o método geral, devemos ter $LK^2 = R^2$. Assim:

$\left(t^4 + t^3 + 2t^2 + t + \frac{19}{25}\right).(4t + 1)^2 = (4t^3 + 3t^2 + 4t + 1)^2$. Desenvolvendo ambos os membros e fazendo as devidas operações, chegaremos à equação:

$t^3 + \frac{4}{25}t^2 - \frac{23}{25}t - \frac{6}{25} = 0$. É fácil ver que t = 1 é raiz da equação .

Voltando à equação em y, fazendo t = 1, obtemos:

K = 5, M = 11, R = 12 e L = $\frac{144}{25}$.

Assim, obtemos a equação $y^4 + 5y^3 + 11y^2 + 12y + \frac{144}{25} = 0$, que satisfaz a condição $LK^2 = R^2$.

Vamos agora focar na solução da equação $y^4 + 5y^3 + 11y^2 + 12y + \frac{144}{25} = 0$.

Inicialmente, vamos dividi – lá por y^2, com o objetivo de fazermos aparecer "pacotes algébricos". Obtemos, $y^2 + 5y + 11 + \frac{12}{y} + \frac{144}{25y^2} = 0.$ Vamos adicionar os termos $\frac{24}{5}$ e $-\frac{24}{5}$ no primeiro membro da equação. Assim:

$$y^2 + 5y + 11 + \frac{12}{y} + \frac{144}{25y^2} - \frac{24}{5} + \frac{24}{5} = 0 \Rightarrow \left(y^2 + \frac{24}{5} + \frac{144}{25y^2}\right) + 5y + \frac{12}{y} + 11 - \frac{24}{5} = 0.$$

Que corresponde a $\left(y + \frac{12}{5y}\right)^2 + 5\left(y + \frac{12}{5y}\right) + \frac{31}{5} = 0.$ Usando a "ponte algébrica" m = $y + \frac{12}{5y}$, obtemos a equação em m dada por $m^2 + 5m + \frac{31}{5} = 0$, equivalentemente, a $5m^2 + 25m + 31 = 0$. Como não é o foco do presente trabalho detalhar a solução das equações forneceremos, diretamente, os valores das raízes, logo $m = \frac{-25 \pm \sqrt{5}}{10}$. O que temos a fazer agora é substituir cada valor de m em m = $y + \frac{12}{5y}$.

Para m = $\frac{-25+\sqrt{5}}{10} \Rightarrow y + \frac{12}{5y} = \frac{-25+\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$ $10y^2 + (25 - \sqrt{5})y + 24 = 0$, obtemos $y = \frac{(\sqrt{5} - 25) \pm i\sqrt{330 + 50\sqrt{5}}}{20}$.

Para m = $\frac{-25-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow y + \frac{12}{5y} = \frac{-25-\sqrt{5}}{10} \Rightarrow$ $10y^2 + (25 + \sqrt{5})y + 24 = 0$, obtemos $y = \frac{(-\sqrt{5} - 25) \pm i\sqrt{330 - 50\sqrt{5}}}{20}$.

Porém, a equação original na qual queremos encontrar a solução é dada por $25x^4 + 25x^3 + 50x^2 + 25x + 19 = 0$. Mas, x = y + t = y + 1, então, fazendo as devidas substituições, obtemos:

$$x = \frac{(\sqrt{5}-5) \pm i\sqrt{330+50\sqrt{5}}}{20} \text{ e } x = \frac{(\sqrt{5}+45) \pm i\sqrt{330-50\sqrt{5}}}{20}.$$

Portanto, a equação possui quatro raízes complexas.

4.3 – APLICAÇÕES

Vamos agora, resolver alguns problemas a respeito de polinômios e a determinação de suas raízes, uma vez que, é indispensável para o aluno além da capacidade de resolver equações ter também a capacidade de interpretar problemas, pois grande parte dos exames de ingresso ou para carreira profissional ou para carreira acadêmica apresentam questões denominadas, contextualizas. O próprio Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) que para muitas Instituições de ensino do país serve como a única prova de seleção, tem como característica principal, a contextualização de suas questões.

4.3.1 – Polinômio e matemática financeira

A receita e a despesa de uma pequena fábrica em certo ano são dadas, respectivamente, por $r(t) = \frac{1}{4}t^3 - 4t^2 + \frac{65}{4}t$ e $d(t) = \frac{1}{8}\left(t^3 - 19t^2 + 91t\right)$. Em que t é o mês (janeiro 1, fevereiro 2,...) e r(t), d(t) são dados em milhares de reais.

a) Escreva um polinômio f(t) para representar o lucro (ou prejuízo) da fábrica, de acordo com o mês do ano.

Solução:

Na matemática financeira para sabermos se uma certa empresa teve lucro ou prejuízo, basta fazermos a diferença entre a receita e a despesa, assim, f(t) = r(t) - d(t).

Logo, temos que f(t) = $\left(\frac{1}{4}t^3 - 4t^2 + \frac{65}{4}t\right) - \frac{1}{8}\left(t^3 - 19t^2 + 91t\right) = \frac{1}{8}\left(t^3 - 13t^2 + 39t\right)$.

b) No mês de janeiro a empresa teve lucro ou prejuízo?

Solução:

Para chegarmos a f(t) fizemos r(t) - d(t), assim se f(t) < 0 $\Rightarrow$ a empresa teve prejuízo, pois a receita seria menor que despesa, por outro lado, se f(t) > 0 $\Rightarrow$ a empresa teve lucro, pois a receita seria maior que a despesa. Para o mês de janeiro temos t = 1, que substituindo em f(t), vamos ter f(1) = $\frac{1}{8}\left(1^3 - 13.1^2 + 39.1\right)$ = $\frac{27}{8}$ > 0, logo a empresa teve receita de 3375 reais.

4.3.2 – Polinômio e a agricultura

No Brasil, uma das utilizações da cana - de - açúcar é na produção de álcool combustível. Em razão da grande procura por este bicombustível, e das novas tecnologias referentes à geração de energia elétrica por meio da queima do bagaço, a cana – de - açúcar tem sido produzida a cada ano em maior escala. A variação de produção de 2001 a 2008, por exemplo, foi de aproximadamente, de 281 milhões de toneladas. Assim, como a produção, a área plantada de cana - de - açúcar também variou de 2001 a 2008, sendo que essa variação pode ser modelada pela função polinomial a(t) = $- 0,0003t^5 + 0,0076t^4 - 0,0547t^3 + 0,1692t^2 - 0,0459t + 4,946$, em que t é o tempo, em anos, a partir do ano 2001 (2001 $\rightarrow$ t = 1), e a é a área plantada, em milhões de hectares. Os valores obtidos por meio da função são aproximações dos valores reais. Determine a variação de área plantada de cana - de - açúcar de 2001 a 2008.

Solução:

Sabemos que para 2001 temos t = 1, assim para 2008 teremos t = 8. Para determinarmos a variação de área plantada, basta fazermos a(8) - a(1).

$a(8) = - 0,0003.8^5 + 0,0076.8^4 - 0,0547.8^3 + 0,1692.8^2 - 0,0459.8 + 4,946$

$= - 9,8304 + 31,1296 - 28,0064 + 10,8288 - 0,3672 + 4,946 = 8,7004$

$a(1) = - 0,0003.1^5 + 0,0076.1^4 - 0,0547.1^3 + 0,1692.1^2 - 0,0459.1 + 4,946$

$= -0,0003 + 0,0076 - 0,0547 + 0,1692 - 0,0459 + 4,946 = 5,0219.$

Logo, a(8) - a(1) = 8, 7004 - 5, 0219 = 3, 6785 milhões de hectares.

4.3.3 – Polinômio e altitude

A altura h de um balão em relação ao solo foi observada durante certo tempo e modelada pela função $h(t) = t^3 - 30t^2 + 243t + 24$ com h(t) em metros e t em minutos. No instante t = 3min o balão estava a 510 metros de altura. Determine em que outros instantes t a altura foi também de 510 metros?

Solução:

Devemos achar t, tal que, $f(t) = 510 \Rightarrow t^3 - 30t^2 + 243t + 24 = 510$, ou equivalentemente, $t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = 0$. Pelo enunciado, temos que três é raiz da equação $t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = 0$, assim, podemos fatorar a equação:

$t^3 - 30t^2 + 243t - 486 = 0$ pode ser fatorado assim:

$(t - 3)(at^2 + bt + c) = at^3 + (b - 3a)t^2 + (c - 3b)t - 3c$.

Igualando os polinômios $t^3 - 30t^2 + 243t - 486$ e $at^3 + (b - 3a)t^2 + (c - 3b)t - 3c$, teremos: $a = 1$, $b - 3a = - 30$, $c - 3b = 243$, $- 3c = - 486$. Assim, $a = 1$, $b = - 27$, $c = 162$.

Portanto, $t^3 - 30t^2 + 243t - 486$ é equivalente a $(t - 3)(t^2 - 27t + 162)$, agora basta encontrarmos as raízes de $t^2 - 27t + 162$. Aplicando o método da soma e produto S = 27 e P = 162, daí temos t = 9 e t = 18 como raízes. Assim, nos instante 9min e 18min a altura do balão atingirá 510 metros.

4.3.4 – Polinômios e eletricidade

Mestre Laureano, técnico e professor de eletrônica, em uma das suas aulas práticas, escolheu três resistores e propôs aos seus alunos que calculassem o valor da resistência de resistor equivalente aos três resistores escolhidos, associados em paralelo ele informou aos alunos que:

- os valores R_1, R_2 e R_3 das resistências dos três resistores escolhidos, medidos em ohms, são as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

- o valor R da resistência, medido em ohms, do resistor equivalente aos três resistores escolhidos, associados em paralelo, satisfaz a relação $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.

Com base nessas informações, qual o valor de R?

Solução:

Temos que $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2.R_3 + R_1.R_3 + R_1.R_2}{R_1.R_2.R_3}$. Assim:

$\frac{1}{R} = \frac{R_2.R_3 + R_1.R_3 + R_1.R_2}{R_1.R_2.R_3}$. Pelas relações de Girard ou relação entre coeficientes e raízes $R_3.R_2 + R_1.R_3 + R_1.R_2 = - 16/1 = - 16$ e $R_1.R_2.R_3 = - 12/1 = -12$.

Substituindo em $\frac{1}{R} = \frac{R_2.R_3 + R_1.R_3 + R_1.R_2}{R_1.R_2.R_3}$,

Obtemos $\frac{1}{R} = \frac{-16}{-12} \Rightarrow$ R = 0, 75 ohms.

4.3.5 – Polinômio e a geometria

Uma caixa d' água de certa residência assume a forma de um paralelepípedo reto e possui dimensões x - 1, x - 2 e x + 2 medidas, em metros. Determine, em valores, as dimensões dessa caixa d'água sabendo que seu volume é dado por $10m^3$.

Solução:

Da geometria sabemos que o volume de um paralelepípedo reto é dado pelo produto de suas dimensões, assim, $V = (x - 1).(x - 2).(x + 2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

Como $V = 10m^3$. Então $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 10 \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x - 6 = 0$.

Fazendo $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$, observamos que $p(2) = 2^3 - 2^2 - 4.2 - 6 = - 10 < 0$ e que $p(4) = 4^3 - 4^2 – 4.4 - 6 = 26 > 0$.

Assim, pelo teorema de Bolzano, existe pelo ao menos uma raiz entre 2 e 4.

Vamos testar o valor 3 em p(x), assim $p(3) = 3^3 - 3^2 - 4.3 - 6 = 0$. Assim, 3 é raiz.

Com a ajuda do algoritmo de Briot-Ruffini, vamos encontrar as outras raízes.

	1	- 1	- 4	- 6
3	1	2	2	0

Logo, $x^3 - x^2 - 4x – 6 = (x - 3)(x^2 + 2x + 2)$.

Ao fazermos $x^2 + 2x + 2 = 0$, temos que o discriminante é igual a - 4, ou seja teremos duas raízes imaginárias que não servirão para contexto do problema.

Portanto, a única raiz coerente com o problema é 3, assim as dimensões da caixa d’água são 1m, 2m e 5m.

CONCLUSÃO

Trabalhar com solução de equações de graus 1 e 2 na educação básica funciona quase como uma paradigma. O que se aprende no ensino fundamental relativo às equações, normalmente, é repetido no ensino médio, ou seja, o aluno passa 12 anos ininterruptos, contando o ensino médio e fundamental, resolvendo esses tipos de equações.

Para uma melhor formação dos nossos alunos, precisamos romper com esse paradigma. Primeiramente, é necessário desde o ensino fundamental proporcionar aos nossos alunos um estudo aprofundado a respeito das expressões algébricas e suas operações. Manipular constantemente polinômios de grau maior que 2, assim o aluno começará a se familiarizar com essas representações. No sétimo e oitavo anos do ensino fundamental, ao calcular valor numérico de uma expressão algébrica, atentar para os polinômios de terceiro, quarto e quinto graus.

Apresentamos neste trabalho ferramentas, entre, definições, teoremas e observações acompanhados de exemplos que aplicados em sala de aula possibilitarão ao aluno resolver equações de 3º e 4º graus. Mostramos como resolver as equações polinomiais de 3º e 4º graus partindo de casos particulares (equações que apresentam coeficiente (s) nulo(s), pois vimos que na maioria dos casos se torna fácil encontrar o conjunto solução), até os casos mais complexos.

Para as equações cúbicas, apresentamos a Regra de Cardano-Tartaglia que faz o uso de radicais, que junto ao processo de eliminação do termo quadrático, possibilita a solução das equações cúbicas completas. Vimos que a utilização da Regra de Cardano-Tartaglia se torna ainda mais trabalhosa e exige certo conhecimento a respeito dos números complexos, em especial, da segunda fórmula de Moivre, quando seu discriminante é negativo. Tal fato, tornou indispensável um estudo aprofundado do corpo dos complexos.

Para as equações quárticas apresentamos um método totalmente algébrico que se baseia em transformarmos uma equação quártica completa (original) em uma nova equação, em outra variável, na qual existirá uma relação específica entre seus coeficientes, que possibilitará formação de ‘pacotes algébricos” visando o posterior aparecimento de uma equação quadrática. O método é complexo, mas eficiente para a solução das equações quárticas.

Quanto às equações de grau maior ou igual a cinco, sabemos que Niels Henrik Abel através de um artigo provou a impossibilidade da resolução geral, por meio de radicais dessas equações, a demonstração dessa impossibilidade é conhecida como teorema de Ruffini-Abel. Porém, independente, deste teorema, não é difícil encontrar raízes para muitas dessas equações, principalmente, das equações incompletas, pois essas equações incompletas, muitas vezes, nos dão a oportunidade de resolvê-las através da aplicação de métodos estudados neste trabalho, tais como: as manipulações algébricas (na qual procuramos identificar um termo semelhante para uma possível redução de grau); podemos também fazer uma análise dos coeficientes da equação visando identificar a existência de uma possível equação recíproca (pois a mesma apresenta alternativas para sua solução); utilização dos teoremas aqui apresentados como o Teorema das Raízes Racionais (visando testar possíveis raízes), Teorema de Bolzano (visando senão um valor exato para raiz, mas pelo ao menos uma aproximação): além da utilização da segunda fórmula de Moivre, em especial, para as equações que apresentam apenas o coeficiente dominante e termo independente.

Na equação $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$, por exemplo, com uma simples substituição de variável ($x^3 = y$), obtemos uma equação quadrática de fácil solução. Na equação $x^7 - x = 0$, ao colocarmos o termo semelhante x em evidência, obtemos, $x(x^6 - 1) = 0$, onde o zero é uma das raízes e as seis raízes restantes sairão da aplicação direta da segunda fórmula de Moivre.

Portanto, para que os alunos da rede pública adquiram uma formação capaz de torná-los competitivos e preparados para futuras necessidades no que se refere as equações polinomiais, é indispensável que os docentes durante processo de escolarização possam proporcionar a esses alunos um ensino mais abrangente, aprofundado e detalhado do assunto.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC. 2013.

FILHO, Edvalter da Silva Sena. Um método de resolução de equações polinomiais de grau 4. Rio de Janeiro: Revista Matemática Universitária, n.46, p.17, 2009.

GUIMARÃES, Caio dos Santos. **Matemática em nível ITA/IME: Números complexos e polinômios**. 1. ed. São José dos Campos: Vestseller. 2008.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear**. **Traduzido** por Adalberto P. Bergamasco. São Paulo: Ed. Univ. São Paulo e Polígono. 1970.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar 6: complexos, polinômios, equações**. 8. ed. São Paulo: Atual. 2013.