



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
REDE NACIONAL - PROFMAT

SIMONE CARLA SILVA SOUZA EVANGELISTA

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA
ABORDAGEM METODOLÓGICA À
LUZ DO ENSINO MÉDIO.

São Cristóvão-SE
2015

SIMONE CARLA SILVA SOUZA EVANGELISTA

**PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO: UMA
ABORDAGEM METODOLÓGICA À
LUZ DO ENSINO MÉDIO.**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Zaqueu Alves Ramos

São Cristóvão-SE

2015

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE**

E92p Evangelista, Simone Carla Silva Souza
Problemas de otimização : uma abordagem metodológica à luz do ensino médio / Simone Carla Silva Souza Evangelista ; orientador Zaqueu Alves Ramos. – São Cristóvão, 2015.
50 f. : il.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, 2015.

1. Otimização matemática. 2. Análise combinatória. 3. Geometria analítica. 4. Funções (matemática). I. Ramos, Zaqueu Alves, orient. II. Título.

CDU 517.9:373.5

Dissertação submetida à aprovação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Sergipe, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Problemas de otimização: uma abordagem metodológica à luz do ensino médio.

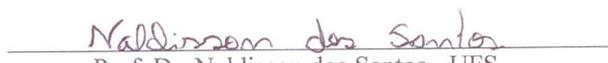
por

Simone de Carla Silva Souza Evangelista

Aprovada pela Banca Examinadora:



Prof. Dr. Zaquieu Alves Ramos- UFS
Orientador



Prof. Dr. Naldisson dos Santos - UFS
Primeiro Examinador



Profª. Dra. Crislene Santos da Paixão - IFS
Segundo Examinador

São Cristóvão, 13 de Abril de 2015.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por ter me dado sabedoria e paciência durante esses dois anos de esforço e dedicação.

A minha mãe, Maria José, por sempre acreditar em mim me incentivando para eu alcançar este sonho. Minha fonte inspiradora!!!!

Ao meu pai, José Carlos (in memoriam), que mesmo não estando entre nós sei que sempre esteve ao meu lado me abençoando e me orientando. Esta vitória também é dele!!

Ao meu esposo, Márcio Wagno, pela paciência e companheirismo durante meus momentos de estresses. Obrigada por está sempre ao meu lado.

Às minha irmãs, sobrinhos, cunhados, afilhadas e amigos que sempre torceram por mim.

Ao meu orientador e amigo, Zaqueu Alves Ramos, pela confiança e por sua dedicação e zelo para este trabalho. Você é um excelente profissional que consegue encher os olhos dos seus alunos, sou sua fã!!

Aos professores Almir Rogério, Danilo Felizardo, Humberto, Débora Lopes, Evilson Vieira, Anderson, Kalasas, Naldisson Santos, Allyson que compartilharam dos seus conhecimentos acadêmicos em prol da nossa evolução profissional.

Aos meus colegas de curso pelos momentos de estudos, aflições, alegrias, brincadeiras e o mais importante pela troca de experiências, em especial, agradeço ao companheirismo e a cumplicidade dos meus queridos amigos Fábio Vilanova e Jefson Santos (Jefinho).

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa de promover o mestrado profissional cujo objetivo é priorizar a capacitação dos professores de matemática da Educação Básica.

À Secretaria de Educação do Município de Aracaju por ter me concedido o afastamento para cursar o mestrado.

Enfim, a todos que contribuíram diretamente e indiretamente para a concretização deste sonho.

Resumo

Problemas de otimização são interessantes tanto do ponto de vista teórico quanto prático. Nesta dissertação abordamos este assunto, apresentando problemas de natureza analítica, algébrica, geométrica e combinatória que podem ser abordados no ensino básico. Nosso principal objetivo é evidenciar como muito dos conteúdos já ensinados na escola podem ser utilizados de forma atrativa para os alunos, através de problemas do cotidiano que podem ser resolvidos com o uso da matemática. Também experimentamos sugerir alguns temas que, embora não façam parte do currículo padrão, podem ser implementados integrando a parte diversificada do currículo.

Palavras Chave: Problemas de Otimização, máximos, mínimos, função custo, grafos.

Abstract

Optimization problems are interesting both from the theoretical and practical point of view. In this thesis we address this subject, presenting problems of analytical nature, algebraic, geometric and combinatorial that can be addressed in basic education. Our main goal is to show how much content already taught in school can be used in attractive way for students through real-world problems can be solved with the use of mathematics. Also tried to suggest some topics that, although not part of the standard curriculum can be implemented by integrating diverse part.

Keywords: Optimization Problems, maximum, minimum, cost function, graphs.

Lista de Figuras

1.1	Pontos A e B no plano cartesiano	14
1.2	Grafo que representa o custo de cada viagem	15
1.3	$a > 0$: ponto de mínimo	19
1.4	$a < 0$: ponto de máximo	20
1.5	Representação do problema	20
1.6	Modelagem geométrica da caixa de papelão	26
1.7	Representação geométrica do problema de Heron	29
1.8	Modelagem do problema	30
1.9	Solução geométrica do problema	31
2.1	Pontes de Königsberg	34
2.2	Grafo utilizado por Euler	34
2.3	Grafo G	35
2.4	Grafo representando o mapa do Brasil	36
2.5	Grafo G	37
2.6	Subgrafo G' de G	37
2.7	4-coloração do mapa do Brasil	38
2.8	Modelagem gráfica do problema	39
2.9	Solução do problema	40
2.10	Exemplo de grafo desconexo	41
2.11	Exemplo de uma árvore gráfica	42
2.12	Rede de cabos	45
2.13	Rede de cabos minimizante	45
2.14	Rede de cabos com função custo	46
2.15	Árvore geradora da rede de cabos com função custo	48

Sumário

Introdução	11
1 Generalidades sobre otimização	13
1.1 Função objetivo	13
1.2 Função objetivo polinomial	17
1.2.1 Função objetivo polinomial quadrática	18
1.2.2 Função objetivo polinomial cúbica	21
1.3 Problema de otimização em geometria euclidiana	28
2 Problemas de otimização envolvendo conteúdos extracurriculares	33
2.1 Um breve apanhado sobre grafos	33
2.2 O teorema das quatro cores	37
2.3 Árvores geradoras	40
2.4 Algoritmo guloso	45
Considerações finais	49
Referências Bibliográficas	50

Introdução

O Ensino da Matemática no ensino básico tem passado por várias mudanças ao longo dos anos, devido a necessidade de que o aluno ao final do Ensino Médio saiba utilizar a Matemática para resolver problemas do seu cotidiano. Em virtude desse fenômeno é que imaginamos este tema sobre problemas de otimização.

Problemas de otimização aparecem nas mais variadas áreas da matemática. De maneira sucinta, podemos dizer que são problemas que envolvem uma função a valores reais e que o objetivo é determinar os valores do domínio da função que minimizem ou maximizem o valor da imagem da função. Dependendo da natureza do domínio da função e/ou da regra que a define, as técnicas utilizadas podem ser algébricas, geométricas, analíticas ou combinatórias.

Usualmente, o primeiro contato com problemas de otimização de maneira mais explícita dar-se nos cursos de cálculo, na graduação. Nesse contexto, é apreciado o poder da derivada como ferramenta para estudar máximos e mínimos de funções a valores reais nos mais diversos exemplos.

O objetivo desse trabalho é reconhecer, em tópicos variados do ensino básico, onde os problemas de otimização podem surgir de maneira natural e atrativa. Também apresentamos algumas situações que, embora não façam parte propriamente da grade curricular do ensino básico, podem compor a parte diversificada do currículo.

Do ponto de vista pedagógico acreditamos que este seja um tema que de fato contribui para o desenvolvimento das seguintes competências contempladas nos PCN's:

- Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
- Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
- Selecionar estratégias de resolução de problemas.
- Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.

Explicamos abaixo, de maneira resumida, como está organizada a estrutura do texto.

No Capítulo 1, iniciamos discutindo, de maneira geral, quais são os ingredientes básicos que compõem um problema de otimização, como por exemplo: função custo, conjunto de restrições, função objetivo e extremos de funções. Logo em seguida, apresentamos como conteúdos ensinados no ensino médio podem ser explorados no contexto de otimização.

No segundo e último Capítulo iniciamos fazendo um breve apanhado sobre grafos. O objetivo é utilizar esta noção para aplicar em alguns problemas de otimização combinatória. Exemplos de resultados e noções que serão utilizados são: problema das quatro cores, árvores geradoras e algoritmo guloso. Embora o tema de grafos não faça parte do currículo padrão, inserimos ele nesse texto como sugestão de um tema atual que pode ser utilizado como recurso para compor a parte diversificada do currículo.

Capítulo 1

Generalidades sobre otimização

Neste capítulo apresentamos os ingredientes matemáticos mais básicos na formulação de um problema de otimização, a saber: função custo, conjunto de restrição, mínimos e máximos de funções a valores reais. Alguns resultados de existência de valores extremos são provados e outros apenas mencionados. Para situações mais elementares resultados mais precisos são apresentados.

1.1 Função objetivo

Em várias contextos o ser humano depara-se com situações de tomada de decisão e em todas elas procuramos a melhor maneira de executar tarefas. Por exemplo:

- **Na administração escolar:** como alocar uma equipe de professores de modo a minimizar a quantidade de intervalos ociosos para todos?
- **Na bolsa de valores:** em que empresa investir de modo a maximizar o lucro?
- **Em uma estrada:** qual o caminho que minimiza distância?
- **No supermercado:** de que maneira distribuir as filas de clientes de modo a minimizar o tempo de espera?

Na maioria das vezes as respostas acabam baseando-se em intuições e experiências anteriores. Todavia, tais decisões podem ser melhor tomadas mediante o uso de modelos matemáticos. Em algumas ocasiões, os modelos matemáticos nos revelam respostas surpreendentes como nos mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.1. Imaginemos dois pontos posicionados como na Figura 1.1. Deseja-se construir uma curva C , ligando A a B , de modo que ao soltarmos uma partícula do ponto A a partícula percorra C e alcance o ponto B no menor tempo possível. Se basearmos nossa resposta apenas na intuição e no conhecimento prévio de que a menor distância entre dois pontos é uma reta, somos levados a crer que a curva C a ser contruída deva ser uma reta. Contudo, contrariando a intuição, modelos matemáticos mostram que a resposta correta é a curva denominada de *braquistócrona*¹. De fato, o primeiro a provar esta propriedade foi Bernoulli, que se baseou no princípio de Fermat sobre a propagação da luz.

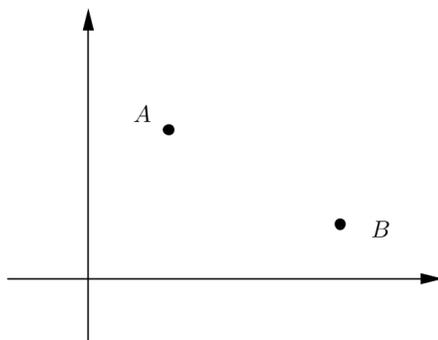


Figura 1.1: Pontos A e B no plano cartesiano

O ramo da matemática que faz uso de modelos matemáticos, estatísticos e algorítmicos para a realização de tomadas de decisão é chamado de *otimização*.

Os ingredientes matemáticos básicos na formulação de um problema de otimização são:

- Um conjunto não vazio S , chamado de *conjunto de restrições* do problema.
- Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, chamada de *função objetivo* do problema.

Em geral, o que procura-se é *minimizar* ou *maximizar* a função objetivo. Para uma melhor formulação matemática dessas duas noções apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.1.2. Sejam D um conjunto não vazio e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dado um elementos $a \in D$ dizemos que:

¹Esta curva nada mais é do que uma ciclóide de cabeça para baixo

- (a) a é valor de *mínimo* da função f se $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in D$.
- (b) a é valor de *máximo* da função f se $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in D$.

Assim, minimizar (resp. maximizar) uma função objetivo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ significa determinar um valor de mínimo (resp. de máximo) de f .

Em algumas situações é conveniente considerar os seguintes enfraquecimentos das noções de valores máximos e mínimos:

Definição 1.1.3. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e A um subconjunto de D . Dado um elemento $a \in A$ dizemos que:

- (a) a é valor de *mínimo relativo da função f com respeito ao subconjunto A* se $f(x) \geq f(a)$ para cada $x \in A$.
- (b) a é valor de *máximo relativo da função f com respeito ao subconjunto A* se $f(x) \leq f(a)$ para cada $x \in A$.

Para uma melhor compreensão dos objetos até aqui mencionados, apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.4. José é um caixeiro viajante que tem clientes em cinco cidades: A , B , C , D e E . Ele precisa planejar uma viagem de negócios com cidade de partida e de destino final A (a cidade onde mora), passando por cada uma das restantes quatro cidades precisamente uma vez. A Figura 1.2 representa o custo de cada viagem em reais (em qualquer um dos sentidos) entre cada par de cidades. Qual o percurso mais barato para essa viagem do José ?

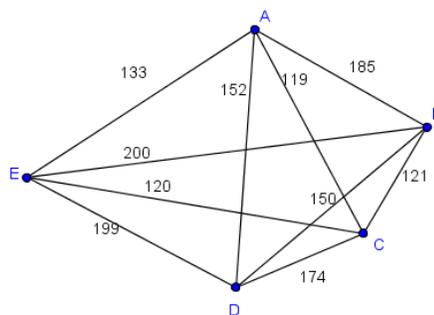


Figura 1.2: Grafo que representa o custo de cada viagem

Notemos que nesse problema o conjunto de restrições consiste de todos os possíveis percursos. Cada percurso é caracterizado por uma permutação das letras B , C , D , E . Daí, a quantidade de percursos possíveis para esse problema é $4! = 24$. A função objetivo aqui é o custo de cada percurso, ou seja, a soma nos custos de uma cidade a outra em cada percurso. Também notemos que percursos que diferem apenas pelo sentido, possuem o mesmo custo. A tabela abaixo lista os 24 percursos possíveis e seus respectivos custos:

Percurso	Custo total	Percurso inverso
A-B-C-D-E-A	$185+121+174+199+133=812$	A-E-D-C-B-A
A-B-C-E-D-A	$185+121+120+199+152=777$	A-D-E-C-B-A
A-B-D-C-E-A	$185+150+174+120+133=762$	A-E-C-D-B-A
A-B-D-E-C-A	$185+150+199+120+119=773$	A-C-E-D-B-A
A-B-E-C-D-A	$185+200+120+174+152=831$	A-D-C-E-B-A
A-B-E-D-C-A	$185+200+199+174+119=877$	A-C-D-E-B-A
A-C-B-D-E-A	$119+121+150+199+133=727$	A-E-D-B-C-A
A-C-B-E-D-A	$119+121+200+199+152=791$	A-D-E-B-C-A
A-C-D-B-E-A	$119+174+150+200+133=776$	A-E-B-D-C-A
A-C-E-B-D-A	$119+120+200+150+152=741$	A-D-B-E-C-A
A-D-B-C-E-A	$152+150+121+120+133=676$	A-E-C-B-D-A
A-D-C-B-E-A	$152+174+121+200+133=780$	A-E-C-B-D-A

Verificamos que há exatamente dois percursos que minimizam o custo: o percurso A-D-B-C-E-A e o percurso A-E-C-B-D-A. Em qualquer dos casos José gasta 676 reais na sua viagem de trabalho e estas são as melhores soluções.

Através desse exemplo podemos ver que o mínimo (resp. máximo) de uma função $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ não é, necessariamente, único. Outra particularidade desse problema, é que o conjunto de restrições tem cardinalidade pequena. Assim, para determinarmos os valores de mínimo da função objetivo podemos recorrer ao processo de exaustão, comparando custo por custo. Contudo, esse método de exaustão é impraticável em situações tais que a cardinalidade do conjunto de restrições é grande. Nesses casos, faz-se necessário o uso de técnicas e resultados oriundos das mais variadas áreas da matemática, como por exemplo: a combinatória, análise, topologia, etc.

Diante de um problema de otimização com função custo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma primeira pergunta que podemos nos fazer é se existe valor de mínimo (resp. máximo) de f . De fato, existem situações em que f não admite valor de mínimo nem máximo. Este é o caso, por exemplo, das funções do teorema a seguir.

Teorema 1.1.5. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente ou decrescente. Então, f não possui valores de mínimo ou máximo relativos em qualquer que seja o intervalo aberto de \mathbb{R} .*

Prova. É suficiente argumentarmos para f crescente, pois para f decrescente a prova é análoga. Ora, suponhamos que f admita um ponto de máximo x_0 em um intervalo aberto (α, β) . Notemos que $x_0 + \frac{\beta - x_0}{2} \in (\alpha, \beta)$ e $x_0 \leq x_0 + \frac{\beta - x_0}{2}$. O fato de x_0 ser valor de máximo relativo em (α, β) nos dá $f(x_0) \geq f(x_0 + \frac{\beta - x_0}{2})$; mas essa desigualdade contradiz a hipótese de f ser crescente. A prova para mostrar a não existência de mínimo relativo é análoga. \square

Em oposição ao teorema acima, existe uma sucessão de resultados que garantem que sobre certas hipóteses no conjunto de restrições e/ou na regra que define a função objetivo temos a garantia da existência de máximos e mínimos. Abaixo listamos algumas dessas situações:

- *Toda função custo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ em que D é finito admite valor de mínimo e máximo.*
- *Toda função custo $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ em que D é um espaço topológico compacto e f é contínua admite valor de mínimo e máximo. (Para as noções envolvidas no enunciado desse resultado bem como a prova do mesmo o leitor interessado pode consultar [4, Cap. 3, Seção 27]).*

1.2 Função objetivo polinomial

Para discutir o problema de minimizar ou maximizar uma função polinomial arbitrária necessitamos, em geral, de técnicas do cálculo diferencial. Contudo, para funções polinomiais quadráticas podemos explorar o conhecimento já presente no ensino básico. Nessa seção, iremos explorar problemas de otimização modelados por funções quadráticas. Também iremos abordar - o que é menos comum na literatura usual a nível básico - problemas envolvendo funções polinomiais cúbicas.

1.2.1 Função objetivo polinomial quadrática

Um função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *função polinomial quadrática* quando é definida pela seguinte regra

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

onde a, b e c são constantes reais, com $a \neq 0$. Esta função é também denominada de *função polinomial do segundo grau*.

No teorema a seguir, apresentamos as principais informações das funções polinomiais quadráticas que são úteis para o contexto da otimização.

Teorema 1.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função polinomial quadrática dada pela regra $f(x) = ax^2 + bx + c$. Suponhamos $\Delta = b^2 - 4ac$. Então:*

- (a) *Se $a > 0$ então f tem único ponto de mínimo em $x = -b/2a$.*
- (b) *Se $a < 0$ então f tem único ponto de máximo em $x = -b/2a$.*

Prova. (a) Podemos reescrever $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte maneira:

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \tag{1.1}$$

$$= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \tag{1.2}$$

$$= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right) \right] \tag{1.3}$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \tag{1.4}$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{1.5}$$

$$= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}. \tag{1.6}$$

Agora notemos que para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0.$$

Equivalentemente, somando a constante $-\frac{\Delta}{4a}$ a ambos os membros dessa desigualdade obtemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geq -\frac{\Delta}{4a^2}$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Como a é positivo, o sentido desta desigualdade não se altera quando multiplicarmos por a , ou seja,

$$a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a} \quad (1.7)$$

para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Contudo, pelo que discutimos no início da demonstração o primeiro membro dessa desigualdade é $f(x)$, e por verificação direta temos que o segundo membro é $f(-b/2a)$. Logo, temos $f(x) \geq f(-b/2a)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Logo, $-b/2a$ é de fato valor de mínimo.

Agora suponhamos d um outro valor de mínimo. Então

$$f(d) = a \left(d + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Logo, $a \left(d + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$. Logo, $d + \frac{b}{2a} = 0$. Logo, $d = -b/2a$ e a unicidade segue. \square

O gráfico cartesiano da função polinomial do segundo grau é uma curva plana denominada parábola. O sinal do coeficiente do termo dominante, a , desta função polinomial indica a concavidade da parábola:

- Se $a > 0$ então a concavidade estará voltada para cima

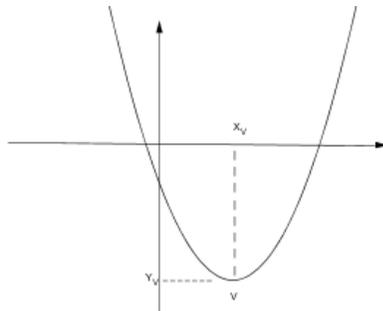


Figura 1.3: $a > 0$: ponto de mínimo

- Se $a < 0$ então a concavidade estará voltada para baixo.

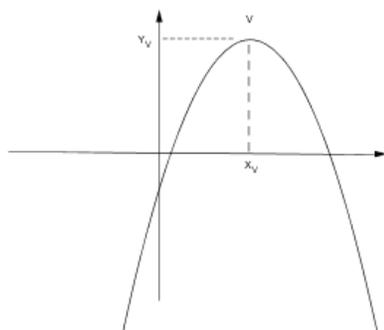


Figura 1.4: $a < 0$: ponto de máximo

Na sequência apresentamos um problema de otimização modelado por função quadrática.

Problema 1.2.2. *Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja limitar uma região retangular junto a um rio para confinar alguns animais. O lado da região retangular junto a margem do rio não é cercado. Quanto deve ser x , a medida em metros da base da região retangular, para que a área cercada seja a maior possível?*

Solução. A modelagem do problema é dada pela figura abaixo, onde a região esverdeada representa a área a ser delimitada.

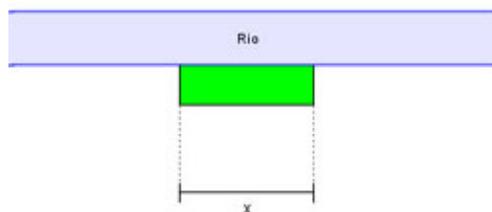


Figura 1.5: Representação do problema

Sejam x e y as dimensões, em metros, dos lados do retângulo. Note que o perímetro da região que deseja-se cercar é:

$$x + 2y = 80 \tag{1.8}$$

Assim, expressando y como função de x vem

$$y = 40 - \frac{x}{2} \tag{1.9}$$

Como sabemos, a área do retângulo é dada por:

$$A = x \cdot y$$

Logo, substituindo o valor de y na equação da área, obtemos:

$$A(x) = x \cdot \left(40 - \frac{x}{2}\right), \quad (1.10)$$

ou seja,

$$A(x) = 40x - \frac{x^2}{2}. \quad (1.11)$$

Pelo Teorema 1.2.1 segue que a função terá valor de máximo em $x = -b/2a = 40 \text{ m}$.

1.2.2 Função objetivo polinomial cúbica

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita *função polinomial cúbica* quando é definida pela seguinte regra:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

onde a , b , c e d são constantes reais, com $a \neq 0$. Esta função é também denominada de *função polinomial do terceiro grau*.

Como é fácil perceber, as funções polinomiais cúbicas distinguem-se das quadráticas essencialmente por um único termo. Todavia, este simples aspecto de distinção entre estas duas classes de funções polinomiais acaba tornando o estudo das funções cúbicas bem mais sofisticado que o das quadráticas. Inclusive, esta sofisticação acaba sendo um fator que inviabiliza o ensino das funções cúbicas no ensino básico.

Na maioria das abordagens para a determinação de valores minimizantes ou maximizantes de funções cúbicas utilizam-se ferramentas do cálculo diferencial. Nesta subseção, procuraremos fornecer uma abordagem que se apoie em noções mais elementares. Vale ressaltar que as idéias aqui contidas são inspiradas nas referências [1] e [2].

O primeiro ponto a ser observado diz respeito a inexistência de mínimos e máximos globais tal como nos revela o seguinte teorema.

Teorema 1.2.3. *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função cúbica então f não possui ponto de máximo ou mínimo.*

Prova. Digamos que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Sem perda de generalidade, assumiremos que $a > 0$ (o caso $a < 0$ é reduzido ao anterior considerando a função cúbica

$h(x) = -ax^3 - bx^2 - cx - d$). Como \mathbb{R} não é um conjunto limitado, então existe x com $|x|$ bastante grande tal que

$$|b| < \frac{a}{4}|x| \quad \text{e} \quad |c| < \frac{a}{4}|x^2|.$$

Daí,

$$\left| \frac{b}{x} \right| < \frac{a}{4} \quad \text{e} \quad \left| \frac{c}{x^2} \right| < \frac{a}{4}.$$

Logo,

$$-\frac{a}{4} < \frac{b}{x} < \frac{a}{4} \quad \text{e} \quad -\frac{a}{4} \leq \frac{c}{x^2} < \frac{a}{4}.$$

Então,

$$-\frac{a}{2} < \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} < \frac{a}{2}.$$

Portanto,

$$\frac{a}{2} < a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} < \frac{3a}{2}. \quad (1.12)$$

Suponhamos x_0 valor de máximo e y_0 valor de mínimo. Para x negativo com $|x|$ bastante grande temos,

$$f(x) = x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) + d < \frac{a}{2}x^3 + d.$$

Em particular, dessa desigualdade temos que para qualquer x negativo com $|x|$ bastante grande a expressão $\frac{a}{2}x^3$ é maior que a constante $f(y_0)$. O que é um absurdo. Logo, f realmente não admite valor de mínimo.

Por outro lado, para x positivo bastante grande temos da primeira desigualdade em (1.12).

$$f(x) = x^3 \left(a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} \right) + d > \frac{a}{2}x^3 + d.$$

Logo, dessa desigualdade temos que para qualquer x positivo bastante grande a expressão $\frac{a}{2}x^3$ é menor que a constante $f(x_0)$. O que é um absurdo. Logo, f também não admite valor de máximo. \square

Com o teorema acima chegamos a conclusão de que funções cúbicas admitem, na melhor das hipóteses, valores de mínimo ou máximo relativos. Assim, o que faremos

é investigar mínimos e máximos relativos de funções cúbicas em intervalos abertos apropriados.

Observação 1.2.4. Uma observação útil para a discussão da sequência é que para estudar os extremos relativos de f podemos reduzir o problema a outra função cúbica mais simples, a saber:

$$g(x) = f\left(x - \frac{b}{3a}\right) - f\left(\frac{-b}{3a}\right).$$

Por exemplo, se q é um valor de máximo relativo de g no intervalo (α, β) então

$$f\left(q - \frac{b}{3a}\right) - f\left(\frac{-b}{3a}\right) = g(q) \geq g(x) = f\left(x - \frac{b}{3a}\right) - f\left(\frac{-b}{3a}\right)$$

para cada $x \in (\alpha, \beta)$. Logo,

$$f\left(q - \frac{b}{3a}\right) \geq f\left(x - \frac{b}{3a}\right)$$

para cada $x \in (\alpha, \beta)$. Logo, $\left(q - \frac{b}{3a}\right)$ é um valor de máximo relativo de f no intervalo $\left(\alpha - \frac{b}{3a}, \beta - \frac{b}{3a}\right)$. Note que a recíproca é também verdadeira por um argumento análogo. Sendo assim, podemos realmente estudar os extremos relativos de f através dos de g .

A vantagem de trabalhar com a função g é que ao expandirmos as contas temos

$$g(x) = ax^3 + \left(\frac{3ac - b^2}{3a}\right)x,$$

ou seja, g possui dois termos a menos, os de grau 2 e 0.

Em virtude da discussão acima, passaremos a considerar apenas funções cúbicas da forma:

$$f(x) = ax^3 + bx.$$

Lema 1.2.5. A função cúbica $f(x) = ax^3 + bx$ é ímpar.

Prova. De fato, para cada $x \in \mathbb{R}$ temos

$$f(-x) = a(-x)^3 + b(-x) = -(ax^3 + bx) = -f(x)$$

o que nos mostra o desejado. \square

Graças a este lema temos que para entender o gráfico de $f(x) = ax^3 + bx$ é suficiente conhecer o que está do lado direito da reta $x = 0$ pois, a outra parte é obtida desta por uma rotação de π radianos centrada na origem O do plano cartesiano.

Lema 1.2.6. *Se a função $f(x) = ax^3 + bx$ possui máximo ou mínimo relativo em um intervalo aberto então f possui três raízes reais distintas.*

Prova. Notemos que $f(x)$ se fatora na forma $f(x) = ax \left(x^2 + \frac{b}{a}\right)$. Para mostrar que f possui três raízes reais distintas é suficiente concluir que o fator $x^2 + \frac{b}{a}$ têm duas raízes reais distintas, ou seja, $\frac{b}{a} < 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $a > 0$. Suponhamos, por absurdo, que $\frac{b}{a} > 0$. Assim, dados $x, y \in \mathbb{R}$ com $0 \leq x < y$ temos

$$0 \leq ax \leq ay \quad \text{e} \quad 0 \leq \left(x^2 + \frac{b}{a}\right) \leq \left(y^2 + \frac{b}{a}\right).$$

Logo,

$$f(x) = ax \left(x^2 + \frac{b}{a}\right) < ay \left(y^2 + \frac{b}{a}\right) = f(y)$$

Desse modo, temos que f é crescente no intervalo $[0, \infty)$. Por simetria, também temos que f é crescente em $(-\infty, 0]$. Logo, f é crescente em toda a reta \mathbb{R} . Pelo Teorema 1.1.5 segue que f não admite máximo ou mínimo relativo em nenhum intervalo aberto. \square

Finalmente, temos o principal resultado desta seção:

Teorema 1.2.7. *Se uma função cúbica $f(x) = ax^3 + bx$ possui valores de máximo e mínimo relativos então estes devem ocorrer nos pontos $q = \pm \sqrt{-\frac{b}{3a}}$. Além disso, os intervalos onde os valores extremos devem ocorrer são $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$.*

Prova. Pelo Lema 1.2.6 e a hipótese de que f admite extremos relativos segue que f possui três raízes distintas: uma delas é zero, e as outras duas são $\pm \sqrt{-\frac{b}{3a}}$. Para facilitar a argumentação iremos supor $a > 0$ (o caso $a < 0$ é similar).

AFIRMAÇÃO : *A função f é crescente no intervalo $(-\infty, -\sqrt{-b/3a}]$ e decrescente no intervalo $[-\sqrt{-b/3a}, 0)$.*

Consideremos $x < y < -\sqrt{-b/3a}$. Temos

$$f(y) - f(x) = (y - x)[a(x^2 + xy + y^2) + b]$$

Como a é positivo, temos que para valores de t maiores ou iguais a $-\frac{b}{a}$ o número $at + b$ é positivo. As desigualdades $x < y < -\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ nos dão $|x| > \sqrt{-\frac{b}{3a}}$ e $|y| > \sqrt{-\frac{b}{3a}}$. Assim,

$$x^2 > -\frac{b}{3a}, \quad y^2 > -\frac{b}{3a} \quad \text{e} \quad xy > -\frac{b}{3a}$$

Logo,

$$x^2 + xy + y^2 > -\frac{b}{a}.$$

Logo,

$$a(x^2 + xy + y^2) + b > 0.$$

Desse modo, $f(y) - f(x) > 0$ e daí segue que f é crescente no intervalo $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right)$.

A prova de que f é decrescente é a mesma. A ressalva é de que escolhendo $-\sqrt{-b/3a} < x < y < 0$ teremos $a(x^2 + xy + y^2) + b < 0$, o que acarreta em $f(y) - f(x) < 0$ e daí o decréscimo de f no intervalo $[-\sqrt{-b/a}, 0)$.

Com esta afirmação concluímos que $q = -\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ é um valor de máximo relativo no intervalo $(-\infty, 0)$ como desejado.

O fato de que $\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ é valor de mínimo relativo no intervalo $(0, \infty)$ segue por simetria, uma vez que f é função ímpar. \square

Corolário 1.2.8. *Se a função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tem máximo e mínimo relativo então eles devem ocorrer nos pontos*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} \tag{1.13}$$

Prova. Consequência imediata da Observação 1.2.4 e o do Teorema 1.2.7. \square

A seguir serão exemplificados dois problemas de otimização dos quais figuram como função custo as funções polinomias cúbicas. O Problema 1.2.9 é mais elaborado, pois requer a habilidade de modelar matematicamente uma situação-problema para encontrar a função custo adequada para resolvê-lo. Já, o segundo é mais elementar,

pois a função custo já está explícita no enunciado.

Problema 1.2.9. *Uma caixa sem tampa deve ser feita a partir de uma folha de papelão medindo 30cm por 50cm, destacando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando-se os lados. Qual é a medida do lado dos quadrados para se obter uma caixa com maior volume?*

Solução: Para facilitar o entendimento, fazemos inicialmente uma representação gráfica do problema.

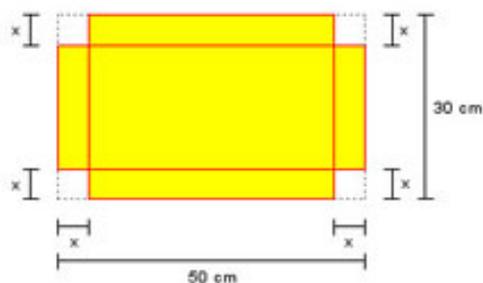


Figura 1.6: Modelagem geométrica da caixa de papelão

Seja x a medida do lado dos quadrados nos quatro cantos do retângulo. A caixa obtida terá base com dimensões $(50 - 2x)$ cm, $(30 - 2x)$ cm e altura x cm. Como as dimensões da caixa são positivas, temos:

$$50 - 2x > 0, \quad 30 - 2x > 0 \quad \text{e} \quad x > 0.$$

Ou seja, a medida de x é tal que $0 < x < 15$. Assim, o volume da caixa será dado por:

$$V(x) = x(50 - 2x)(30 - 2x), \quad \text{com} \quad 0 < x < 15 \quad (1.14)$$

ou, equivalentemente,

$$V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1500x, \quad \text{com} \quad 0 < x < 15 \quad (1.15)$$

Como $a > 0$ o máximo relativo será o valor de x , igual a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{160^2 - 3.4 \cdot 1500}}{3.4}$$

$$x = \frac{160 \pm \sqrt{25600 - 18000}}{12}$$

$$x \cong 20,6\text{cm} \quad \text{ou} \quad x \cong 6,06\text{cm}$$

Portanto, $x \cong 6,06\text{cm}$ de acordo com o domínio de x .

Assim, a medida do lado dos quadrado deve ser 6,06 cm para que tenhamos uma caixa de maior volume. \square

Problema 1.2.10. *Durante várias semanas, o departamento de trânsito de uma certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por um certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$ onde t é o número de horas após o meio-dia e a velocidade v é dada em km/h. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento?*

Solução: Como no problema exposto já é dada a função, não é necessário modelar a situação-problema. Devemos determinar o máximo e o mínimo da função

$$v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$$

no intervalo $1 \leq t \leq 6$. Note que $a > 0$, então o máximo relativo é o menor valor de t e o mínimo relativo é o maior valor de t , desde que estejam dentro do domínio de existência de t .

Utilizando, a fórmula de otimização de funções cúbicas, temos:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

$$t = \frac{10,5 \pm \sqrt{(-10,5)^2 - 3 \cdot 1 \cdot 30}}{3}$$

$$t = \frac{10,5 \pm \sqrt{110,25 - 90}}{3}$$

$$t = 5 \text{ ou } t = 2.$$

Como analisado anteriormente, quando $t = 2$ temos que a velocidade do trânsito é mais rápida e quando $t = 5$ é mais lenta. Assim, o trânsito é mais rápido às 14h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 46 km/h e o trânsito é mais lento às 17h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 32,5 km/h. \square

1.3 Problema de otimização em geometria euclidiana

Nesta seção apresentamos alguns problemas de otimização que podem ser resolvidos à luz da geometria euclidiana plana. O primeiro destes é conhecido como *Problema de Heron*. Este é um problema bastante interessante pois, além de possuir uma belíssima solução, também permite a interdisciplinaridade com a Física. Essa conexão interdisciplinar dar-se essencialmente pelo seguinte princípio aristotélico:

“A natureza nada faz do modo mais difícil”.

Quando traduzimos este princípio para o problema de incidência e reflexão de um raio de luz sobre um espelho devemos ter:

“Se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho M e, então, ao olho E de um observador, ela deve seguir o caminho mais curto”.

A lei que hoje conhecemos sobre a igualdade dos ângulos de incidência e de reflexão são conhecidos desde Euclides e Aristóteles. Todavia foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou *reflexão*), o referido resultado.

A seguir apresentamos o enunciado do problema e na sequência apresentamos a solução.

Problema de Heron: *Dados dois pontos A e B do mesmo lado de uma reta r , qual o menor caminho de A a B passando por r ?*

Solução Inicialmente, faremos a reflexão do ponto A em relação a reta r obtendo o ponto A' , de modo que a reta r seja a mediatriz do segmento AA' . Traçando a reta $A'B$, percebemos que esta corta a reta r no ponto P . Escolhemos arbitrariamente,

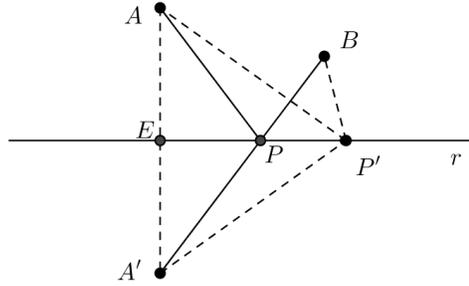


Figura 1.7: Representação geométrica do problema de Heron

um ponto P' sobre a reta r . Vejamos que, se $P \neq P'$ então devemos mostrar que $PA + PB$ é menor que $P'A + P'B$.

De acordo com a Figura 1.7, notemos que, $PA = PA'$ e $P'A = P'A'$, daí :

$$PA + PB = PA' + PB = A'B \quad (1.16)$$

e

$$P'A + P'B = P'A' + P'B. \quad (1.17)$$

Aplicando a desigualdade triangular no $\triangle A'BP'$, temos:

$$A'B < P'A' + P'B. \quad (1.18)$$

Substituindo (1.16) e (1.17) em (1.18), temos:

$$PA + PB < P'A + P'B.$$

Além disso, as medidas de \widehat{APE} , $\widehat{A'PE}$ e $\widehat{BPP'}$ são iguais, pois os ângulos $\angle A'PE$ e $\angle BPP'$ são opostos pelo vértice e portanto $\widehat{A'PE} = \widehat{BPP'}$, e, como a reta r é mediatriz do segmento $\overline{AA'}$, temos que $\widehat{APE} = \widehat{A'PE}$. Logo, $\widehat{APE} = \widehat{A'PE} = \widehat{BPP'}$, ou seja, P é o ponto tal que \overline{PA} e \overline{PB} formam ângulos iguais com a reta r , a soma $AP + PB$ seja a mínima.

Portanto, P é o ponto sobre a reta de tal forma que \overline{PA} e \overline{PB} formam ângulos iguais com a reta r fornece a solução para o problema de Heron. \square

Um outro problema com idéias parecidas com o anterior é :

Problema 1.3.1. *Suponhamos as cidades A e B que situam-se em lados opostos de*

um rio que, para efeito de modelagem, admitiremos possuir margens paralelas (ver na Figura 1.8 a ilustração do problema). Desejamos construir uma ponte perpendicular às margens do rio de tal maneira que se P e Q são os pontos da ponte que tocam as margens do rio então $AP + PQ + QB$ possui o menor comprimento possível.

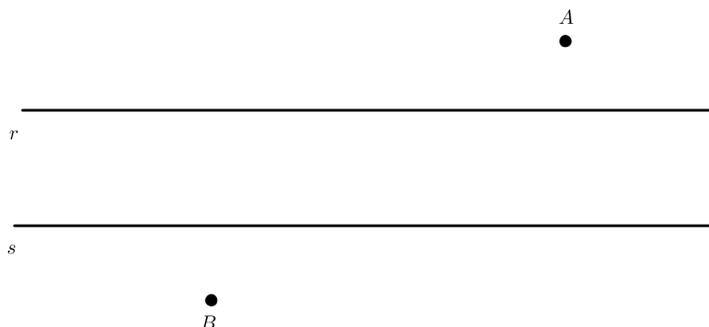


Figura 1.8: Modelagem do problema

Solução: A estratégia da prova será exibir as posições dos pontos P e Q que são candidatos à resolver o problema e depois confirmar que esta é realmente a solução desejada. Para determinar as posições dos candidatos procedemos da seguinte maneira. Primeiro traçamos uma reta perpendicular às margens r e s do rio passando pelo ponto B tal como nos mostra a Figura 1.9. Esta reta perpendicular corta as margem r e s nos pontos R e S , respectivamente. Em seguida, transportando o segmento RS ao longo da reta perpendicular até o ponto B obtemos um novo segmento BB' . Note que por construção temos,

$$SR = BB'. \quad (1.19)$$

Agora construímos um segmento de reta ligando os pontos B' e A . Considere P o ponto de interseção entre o segmento $B'A$ e a margem r e Q o ponto de interseção entre r e sua reta perpendicular passando por P . Como r e s são paralelas também temos,

$$PQ = SR = BB'. \quad (1.20)$$

AFIRMAÇÃO: Para os pontos P e Q construídos acima tem-se que a soma $AP + PQ + QB$ é mínima.

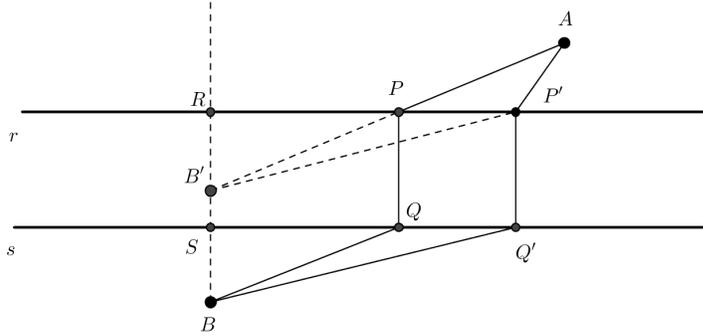


Figura 1.9: Solução geométrica do problema

Para provar esta afirmação consideremos P' um ponto em r diferente de P (tal como ilustrado na Figura 1.9). Seja Q' o ponto de interseção entre s e sua reta perpendicular passando por P' . Mostraremos a desigualdade:

$$AP + PQ + QB < AP' + P'Q' + Q'B$$

Para isso, observamos inicialmente que o quadrilátero $BB'PQ$ é um paralelogramo, pois BB' e PQ são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Dessa maneira,

$$B'P = QB. \tag{1.21}$$

Assim,

$$B'A = AP + B'P = AP + QB. \tag{1.22}$$

Olhando para o triângulo $B'AP'$ e lembrando o fato de que o comprimento do lado de um triângulo é menor que a soma dos outros dois vem

$$B'A < AP' + B'P'. \tag{1.23}$$

Substituindo (1.22) nessa desigualdade obtém -se:

$$AP + QB < B'P' + P'A. \tag{1.24}$$

Por outro lado, também temos que o quadrilátero $BB'P'Q'$ é um paralelogramo, pois BB' e $P'Q'$ são paralelos e possuem o mesmo comprimento. Assim,

$$B'P' = Q'B. \tag{1.25}$$

Substituindo então essa igualdade em (1.24) vem

$$AP + BQ < AP' + Q'B. \tag{1.26}$$

Dessa desigualdade juntamente com o fato de que $PQ = P'Q'$ segue o desejado, ou seja,

$$AP + PQ + QB < AP' + P'Q' + Q'B$$

□

Capítulo 2

Problemas de otimização envolvendo conteúdos extracurriculares

Uma maneira de se realizar a aproximação de teorias matemáticas mais atuais ao conteúdo do ensino médio pode ser feito através da teoria de grafos. Essa afirmação é corroborada pelo documento denominado Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Neste documento são apresentados alguns tópicos que, segundo [5], servem para serem trabalhados em feiras de ciência, laboratórios de matemática ou ainda para compor a parte diversificada do currículo. Entre esses tópicos, os grafos são citados e destacam-se pelo aspecto lúdico no trabalho de construção de modelos concretos ilustrativos. Pode-se perceber a existência dos grafos em muitas situações cotidianas vivenciadas pelos alunos. Por isso se faz necessário a sua exploração e apresentação em aula como um recurso extremamente interdisciplinar ligado a muitas áreas do conhecimento.

2.1 Um breve apanhado sobre grafos

A teoria dos grafos teve seu surgimento no ano de 1736, quando Leonhard Euler se depara com o famoso problema das pontes de Königsberg (atual Kaliningrado). O centro da cidade de Königsberg é dividido pelo rio Pregel em quatro regiões as quais são ligadas por um complexo de sete pontes como mostra a Figura 2.1.

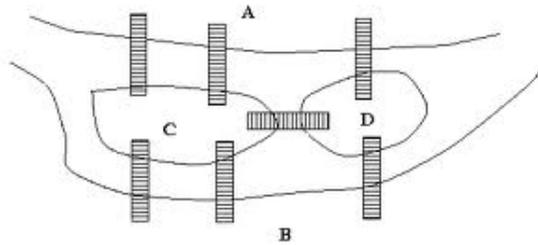


Figura 2.1: Pontes de Königsberg

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes, voltando ao lugar de onde se saiu, sem repetir uma mesma ponte. Havia-se tornado uma lenda popular a possibilidade da façanha quando Euler, em 1736, provou que não existia caminho que possibilitasse tais restrições.

Euler generalizou o problema, de maneira muito elegante, através de um modelo de grafos. Ele o fez da seguinte maneira: a cada ilha e margem ele associou um ponto (vértice) e a cada ponte uma ligação (aresta). Com isso, ele obteve a Figura 2.2:

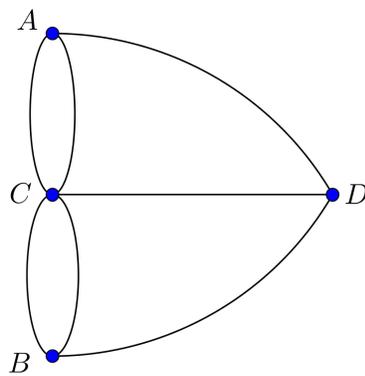


Figura 2.2: Grafo utilizado por Euler

Euler percebeu que existiam vértices com exatamente três arestas incidentes. Por outro lado, como os moradores queriam atravessar cada ponte apenas uma vez, cada vértice deveria ter um número par de arestas. Logo, se tornaria impossível fazer um percurso seguindo as regras impostas pelos moradores.

A definição formal de grafo pode ser dada da seguinte maneira.

Definição 2.1.1. Um *grafo* G é uma tripla ordenada (V, E, I) , onde V e E são conjuntos finitos e $I \subseteq V \times E$ satisfaz

$$1 \leq |v \in V : (v, e) \in I| \leq 2$$

para todo $e \in E$.

Notação: Os elementos dos conjuntos $V := V(G)$, $E := E(G)$ e $I := I(G)$ são chamados, respectivamente, de *vértices*, *arestas* e *incidências* de G .

Definição 2.1.2. É dito que a aresta e é *incidente* ao vértice v , quando $(v, e) \in I$.

Dois vértices em um grafo G serão ditos *adjacentes* (ou *vizinhos*) se existe uma aresta que incide a ambos. Quando duas arestas forem incidentes a um mesmo par de vértices elas serão chamadas de *arestas em paralelo*. Outra possibilidade é uma aresta ser incidente a um único vértice, neste caso diremos que tal aresta é um *laço*.

A representação geométrica de um grafo no plano dar-se da seguinte forma: cada vértice corresponde a um ponto e cada aresta a um segmento de reta, cujos extremos representam os vértices incidentes a esta aresta.

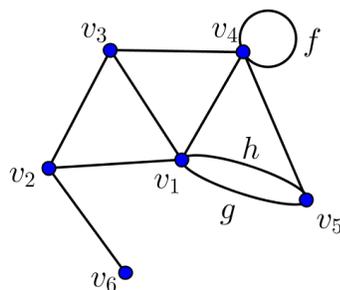


Figura 2.3: Grafo G

A Figura 2.3 ilustra a representação geométrica de um grafo G em que as arestas g e h estão em paralelo e a aresta f é um laço. Notemos que nesse grafo os vértices v_2 e v_6 são exemplos de vértices adjacentes enquanto que v_1 e v_6 não são adjacentes.

Para uso em diversas aplicações é suficiente considerar grafos como na seguinte definição.

Definição 2.1.3. Um *grafo simples* é um grafo sem laços e arestas em paralelo.

Obviamente, o grafo da Figura 2.3 não é simples. Abaixo temos um grafo simples, onde os vértices representam cada estado brasileiro e dois desses vértices estão ligados por uma aresta se os respectivos estados são vizinhos.

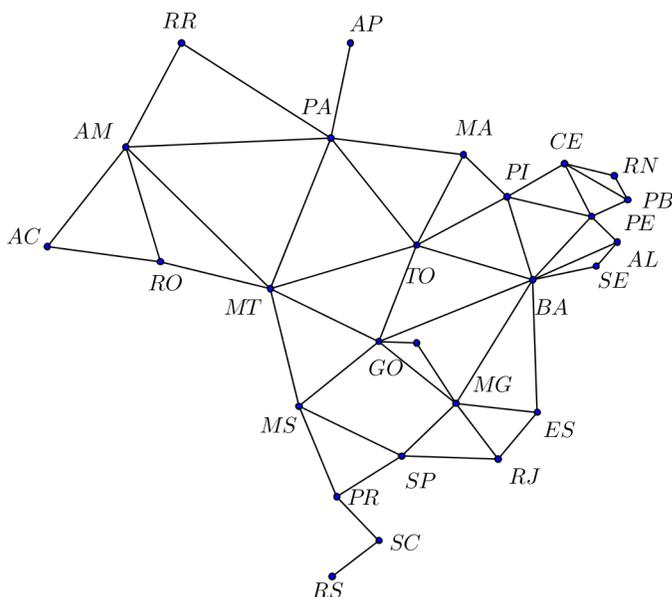


Figura 2.4: Grafo representando o mapa do Brasil

Definição 2.1.4. Sejam $G = (V, E, I)$ e $G' = (V', E', I')$ dois grafos simples. Dizemos que G' é *subgrafo* de G , e denotamos este fato por $G' \subset G$, se $V' \subset V$ e $E' \subset E$.

Dizemos que um grafo $G' = (V', E', I')$ é subgrafo induzido de um grafo $G = (V, E, I)$ se:

- (i) $G' \subset G$, e
- (ii) para cada par de vértices $v_1, v_2 \in V'$, se v_1 e v_2 são adjacentes em G então eles são adjacentes em G' .

Em tal caso, também dizemos que V' *gera* (ou *induz*) G' em G e denotamos este fato por $G' = G[V']$.

Um subgrafo $G' = (V', E', I')$ de um grafo G é dito *subgrafo gerador* de G se $G = G[V']$.

Exemplo 2.1.5. Neste exemplo, ilustrado pelas figuras abaixo, temos que G' é realmente um subgrafo de G . Contudo, ele não é subgrafo induzido pois os vértices v_1, v_2 pertencem aos vértices de G' , são adjacentes em G e não adjacentes em G' .

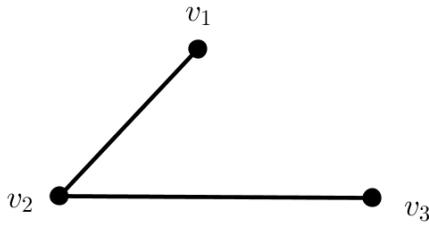


Figura 2.5: Grafo G

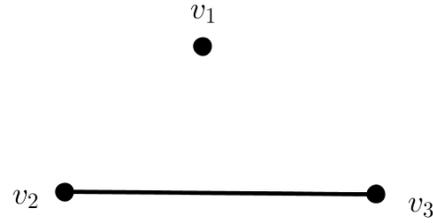


Figura 2.6: Subgrafo G' de G

Dado um grafo $G = (V, E, I)$, considere uma aresta $e \in E$. O subgrafo de G obtido apenas pela exclusão da aresta e é denotado por $G \setminus e$. Chamamos $G \setminus e$ de subgrafo obtido de G pela *remoção* da aresta e . De maneira indutiva, dado $X = \{e_1, \dots, e_n\} \subset E$, definimos $G \setminus X = (G') \setminus e_n$, onde $G' = G \setminus X'$ com $X' = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$.

Observação 2.1.6. Dado um grafo $G = (V, E, I)$ e um subconjunto $X \subset E$, temos trivialmente que $G \setminus X$ é um subgrafo gerador de G .

2.2 O teorema das quatro cores

Depois do problema das pontes de Königsberg, o teorema das quatro cores é o mais famoso problema de Teoria de Grafos. Este teorema foi por mais de um século uma conjectura em aberto. Ela ocorreu a Francis Guthrie enquanto coloria um mapa da Inglaterra. Seu irmão a comunicou a De Morgan em outubro de 1852, que por sua vez a relatou a seus alunos e outros matemáticos, começando por difundi-la. O seu enunciado era aproximadamente o seguinte: porque razão, quando dividimos qualquer figura em zonas coloridas, de modo que duas zonas que tenham fronteira comum fiquem com cores diferentes, precisamos, no máximo, de quatro cores? A simplicidade de seu enunciado parece induzir à suposição de que sua demonstração seria simples também. No entanto foram várias as tentativas de demonstrá-la, o que contribuiu para grandes avanços em teoria de grafos. E foi em 1976 que K. Appel e W. Haken apresentaram uma prova de que a conjectura é correta. Esta prova envolve, além de argumentos elaborados e sofisticados, 1200 horas de cálculo em computador, e é por isso que alguns consideram que não foi ainda resolvido satisfatoriamente.

De maneira formal, o teorema das quatro cores é enunciado como segue:

Teorema 2.2.1. *Todo grafo planar é 4-colorável.*

No enunciado acima, a expressão 4-colorável significa exatamente que os vértices do grafo podem ser coloridos com exatamente 4 cores sem que dois vértices vizinhos tenham a mesma cor. Já a expressão “planar” para defini-la mais precisamente precisaríamos de noções mais elaboradas de topologia, todavia podemos dar uma idéia intuitiva do que seja. De fato, podemos dizer que um grafo é planar se pode ser desenhado no plano de modo que não haja interseção entre suas arestas.

A figura abaixo mostra uma 4-coloração para o mapa do Brasil

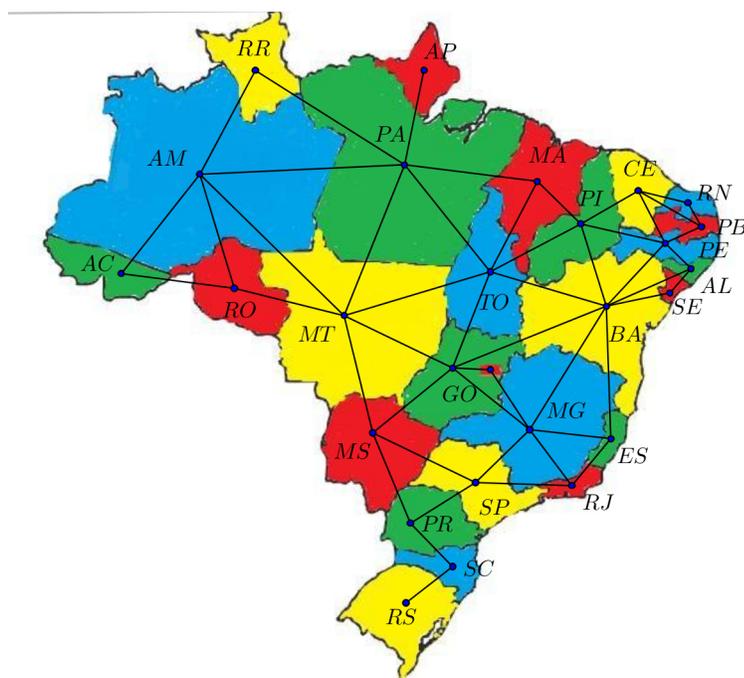


Figura 2.7: 4-coloração do mapa do Brasil

Problema 2.2.2. *A tabela abaixo mostra a distribuição de alunos do 1º ano do ensino médio nos exames finais que eles devem prestar. Duas disciplinas só podem ter exames realizados simultaneamente se não houver alunos comuns. Quantos períodos serão necessários para a realização destes exames?*

Solução: Vamos modelar esse problema através de um grafo G . Para isso, iremos

Alunos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Matemática	X							X				X			X	
Português	X			X							X					X
Física						X				X					X	
Química				X	X		X		X				X			
Biologia			X							X		X		X		X
Geografia			X		X								X			
História		X						X	X		X			X		
Inglês		X				X										

pensar cada vértice do grafo como uma disciplina. Assim,

$$V(G) = \{M, P, F, Q, B, H, G, I\}.$$

Dois vértices desse grafo G estarão ligados se tiverem um aluno em comum. Com isso, temos que a representação geométrica do grafo é dada pela figura abaixo:

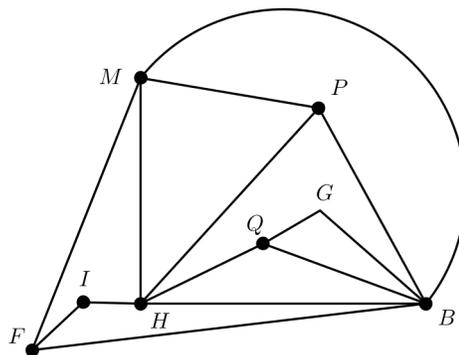


Figura 2.8: Modelagem gráfica do problema

Notemos que o problema de determinar a quantidade de períodos sem que haja disciplinas com alunos comuns num mesmo período equivale a colorir o grafo acima sem que dois vértice vizinhos com a mesma cor. Assim, para resolver nosso problema devemos encontrar o menor número de cores necessário para realizar o desejado. Pelo Teorema das Quatro Cores sabemos que é possível fazer isso com apenas 4 cores. Para mostrar que essa é a menor quantidade possível devemos mostrar que não é possível fazer com menos cores. Essa impossibilidade pode ser observada quando olhamos para o conjunto de vértices $\{M, P, B, H\}$. Os vértices desse conjunto estão dois-dois ligados, logo três cores não seriam suficientes para colori-los. Assim, a quantidade

Definição 2.3.3. Seja $G = (V, E, I)$ um grafo. G é dito *conexo* se, dados quaisquer dois vértices $u, v \in V(G)$, com $u \neq v$, existe um caminho em G que une u a v . Caso contrário o grafo é dito *desconexo*.

Como podemos perceber, o grafo que representa o mapa do Brasil (ver Figura 2.4) é um grafo conexo. Todavia, o grafo da Figura 2.10 é desconexo, por exemplo, não existe caminho em G unindo v_1 a qualquer outro vértice do grafo.

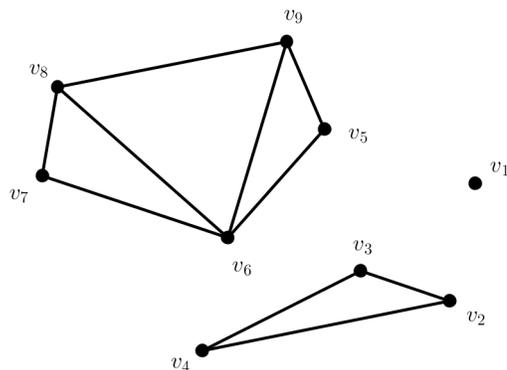


Figura 2.10: Exemplo de grafo desconexo

Definição 2.3.4. Seja $G = (V, E, I)$ um grafo. Uma *componente conexa* C de G é um grafo $C = (V', E')$, tal que $V' \subset V$, $E' \subset E$ e:

1. $E' = \{v_1v_2 \in E : v_1, v_2 \in V'\}$;
2. C é conexo;
3. para todo $v \in V \setminus V'$ e para todo $v' \in V'$, a aresta $vv' \notin E$.

O grafo da Figura 2.10 possui exatamente 3 componentes conexas.

Definição 2.3.5. Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos.

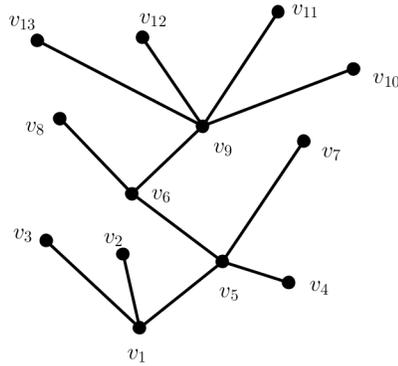


Figura 2.11: Exemplo de uma árvore gráfica

Definição 2.3.6. Uma *floresta* é um grafo simples em que cada componente conexa é uma árvore.

Proposição 2.3.7. *Seja G um grafo conexo. Se $e \in E(G)$, então $G \setminus e$ é desconexo se, e somente se, e não está em nenhum circuito de G .*

Prova. Sejam v e w os vértices de G incidentes a e . Note que $v = w$ quando e for um laço. Primeiro mostraremos que,

(*) *para cada $u \in V(G)$, existe um uv -caminho ou um uw -caminho em $G \setminus e$.*

Seja λ um caminho de menor comprimento de G tendo como vértices terminais u e algum u' em $\{v, w\}$. Pela escolha de λ , λ é simples e $V(\lambda) \cap \{v, w\} = \{u'\}$. Em particular, $e \notin E(\lambda)$. Isto é, λ é um caminho de $G \setminus e$. Portanto (*) segue. Por (*), as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) $G \setminus e$ é conexo;
- (ii) v e w estão na mesma componente conexa de $G \setminus e$;
- (iii) existe vw -caminho simples em $G \setminus e$;
- (iv) existe circuito em G contendo e .

A última equivalência segue porque um uv -caminho simples pode ser completado a um circuito adicionando-se a aresta e . □

Uma consequência imediata dessa proposição é :

Corolário 2.3.8. *Seja G um grafo conexo. Então G contém um subgrafo que é uma árvore geradora de G .*

Prova. Suponha G um grafo que não contém circuitos, então G já é uma árvore e não há o que demonstrar. Caso contrário, escolhamos uma aresta e_1 contida em um circuito de G . Pela proposição anterior, $G \setminus e_1$ é conexo. Se $G \setminus e_1$ não conter nenhum circuito então $G \setminus e_1$ é uma árvore e o resultado fica provado. Caso contrário, escolhamos uma aresta e_2 em um circuito de $G \setminus e_1$ e repetimos o argumento anterior. Continuamos com esse argumento sucessivamente. Note que este argumento deve parar em algum momento, pois a quantidade de arestas de G é finita. Mas esse argumento parar significa exatamente que chegamos a uma aresta e_n tal que $G \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ é um grafo conexo que não contém circuitos, ou seja, $G \setminus \{e_1, \dots, e_n\}$ é uma árvore. \square

Dado um grafo G e um vértice v de G , a quantidade de arestas de G que incidem em v é chamado o *grau* de v em G , e denotamos esse número por $d_G(v)$. Quando $d_G(v) = 1$ dizemos que v é um vértice *terminal* de G . Temos o seguinte resultado de existência a respeito de vértices terminais.

Proposição 2.3.9. *Se G é uma árvore com pelos menos dois vértices, então G possui ao menos dois vértices terminais.*

Prova. Seja γ o caminho simples de maior comprimento em G . Notemos que $|\lambda| \geq 1$. Vamos mostrar que $d_G(v) = 1$ quando v é um vértice terminal de γ . Suponha que $d_G(v) > 1$ e seja e uma aresta incidente a v que não está em γ . Se w é o outro vértice de G incidente a e , então w é um vértice de γ , senão γ, e, w ou w, e, γ seria um caminho simples em G com maior comprimento que γ . Se γ' é o subcaminho de γ tendo w e v como vértices terminais, então γ', e, w ou w, e, γ' é um circuito de G ; uma contradição. Logo e não existe e $d_G(v) = 1$. \square

Esta proposição é útil para obtermos a seguinte relação entre os números de vértices e circuitos em uma árvore.

Proposição 2.3.10. *Seja G uma árvore. Denotemos os números de vértices e arestas de G por $|V(G)|$ e $|E(G)|$, respectivamente. Então:*

$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$

Prova. Faremos a prova aplicando indução sobre $|V(G)|$. Note que para $|V(G)| = 1$ o resultado é imediato. Supondo então o resultado válido para $|V(G)| - 1$ ($|V(G)| > 1$) iremos mostrar que é verdade para $|V(G)|$. Para isso, consideremos uma aresta e que incide em um vértice terminal v . Dessa maneira, teremos que o grafo $G \setminus e$ é desconexo com exatamente duas componentes conexas, uma delas formada apenas pelo vértice v e a outra por um grafo G' contendo exatamente $|V(G)| - 1$ vértices. Note que G' não contém circuitos, pois caso contrário G também teria. Assim, G' é também uma árvore. Logo, pela hipótese de indução devemos ter

$$|E(G')| = |V(G')| - 1. \quad (2.1)$$

Como $|V(G')| = |V(G)| - 1$ e $|E(G')| = |E(G)| - 1$, então substituindo essas duas igualdades em (2.1) temos que, $|E(G)| = |V(G)| - 1$ como desejávamos. □

A versão da proposição acima para um grafo qualquer é :

Corolário 2.3.11. *Seja G um grafo conexo. Então, $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$.*

Prova. Consequência imediata da Proposição 2.3.10 combinado com o Corolário 2.3.8. □

Podemos agora considerar o seguinte problema de otimização:

Problema 2.3.12. *Considere uma rede de cabos de comunicação conectando cidades representado por um grafo G tal como na Figura 2.12. Suponhamos que a comunicação entre duas cidades seja estabelecida desde que haja um caminho conectando-as. Desejamos determinar o subgrafo de G que minimize a quantidade de cabos necessários e de tal modo que quaisquer duas cidades possuam comunicação.*

Solução: A tradução em termos de grafos é que devemos encontrar um subgrafo com menor quantidade de arestas possíveis com a propriedade de ser conexo. Pelos resultados anteriores concluímos que um tal subgrafo deve ser uma árvore geradora de G . Desse modo, podemos ver que uma solução (ver Figura 2.13) para este problema é :

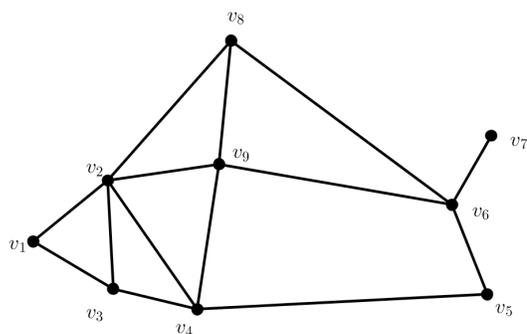


Figura 2.12: Rede de cabos

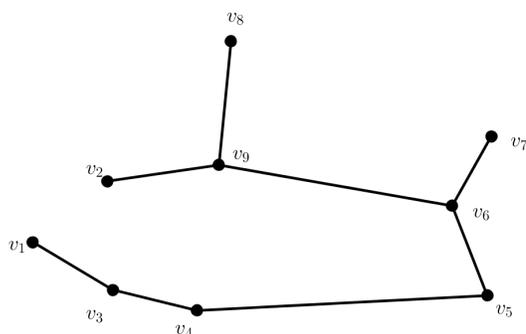


Figura 2.13: Rede de cabos minimizante

2.4 Algoritmo guloso

Dado um grafo G , dizemos que uma função $c : E(G) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é um *custo*. O *custo* de um subgrafo H de G é definido como:

$$c(H) = \sum_{e \in E(H)} c(e)$$

Na seção anterior aprendemos como determinar um subgrafo gerador de G , com G conexo, que minimiza a quantidade de arestas e que mantém a conectividade. Uma questão natural é:

Questão 2.4.1. *Como determinar uma árvore geradora de G com custo mínimo?*

Consideremos essa questão no seguinte problema:

Problema 2.4.2. *No Problema 2.3.12, suponhamos que cada aresta tenha um custo tal como ilustrado na Figura 2.14 abaixo:*

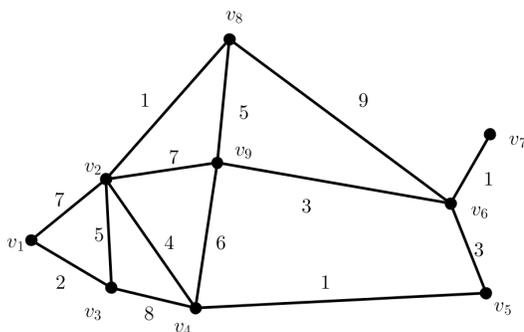


Figura 2.14: Rede de cabos com função custo

Desejamos determinar o subgrafo de G que minimize a quantidade de cabos necessários e de tal modo que quaisquer duas cidades possuam comunicação e que possua custo mínimo.

Antes de resolvermos esse problema iremos considerar o chamado *Algoritmo Guloso*. No seu enunciado, utilizaremos a notação $G|E$ para denotar o subgrafo $G \setminus (E(G) - E)$.

Teorema 2.4.3 (Algoritmo Guloso). *Seja G um grafo conexo com uma função custo c . Uma árvore geradora T de G pode ser obtida executando o seguinte algoritmo:*

- (1) *Escolha um vértice v de G e faça $V := \{v\}$ e $E = \emptyset$.*
- (2) *Se $V = V(G)$, então faça $T := G|E$ e pare.*
- (3) *Senão escolha uma aresta e de G incidente a um vértice em V e outro em $V(G) - V$ possuindo custo mínimo. Faça $V := V \cup w$ e $E := E \cup e$, onde $w \in V(G) - V$ é incidente a e . Volte para segunda etapa.*

Para a demonstração desse resultado remetemos à [6].

Agora, de posse do algoritmo guloso, determinaremos a solução do Problema 2.4.2.

Solução: Notemos que o algoritmo não restringe o vértice que devemos começar. Escolhemos iniciar pelo vértice v_1 . De todas as arestas incidentes a v_1 , escolhemos aquela que tem custo mínimo. Assim,

$$V = \{v_1, v_3\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_3v_2 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_3v_2\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_2v_8 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2, v_8\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_3v_2, v_2v_8\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2, v_8\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_2v_4 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_3v_2, v_2v_8, v_2v_4\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_4v_5 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_2v_2, v_2v_8, v_2v_4, v_4v_5\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_5v_6 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5, v_6\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_3v_2, v_2v_8, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5, v_6\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_6v_7 . Assim,

$$V = \{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5, v_6, v_7\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_8, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7\}.$$

Como $V \neq V(G)$ escolhemos uma aresta incidente a um vértice em $\{v_1, v_3, v_2, v_8, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ e outro em $V(G) - V$ com menor custo, que é v_6v_9 . Assim,

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_8, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9\} \quad \text{e} \quad E = \{v_1v_3, v_2v_3, v_2v_8, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_6, v_6v_7, v_6v_9\}.$$

Note que chegamos ao ponto onde o algoritmo se encerra pois $V = V(G)$. Assim, a solução desejada é :

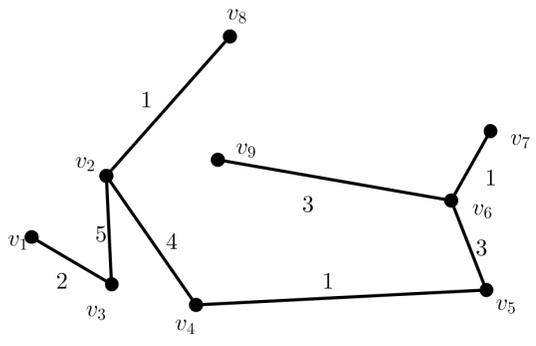


Figura 2.15: Árvore geradora da rede de cabos com função custo

Considerações finais

Este trabalho apresenta uma proposta de como explorar os Problemas de Otimização utilizando conteúdos do Ensino Médio. Nosso objetivo foi mostrar como inúmeras situações do nosso cotidiano envolvem problemas de otimização que podem ser solucionados através da modelagem utilizando embasamento teórico da Geometria Euclidiana, da Teoria dos grafos, entre outros. Também quisemos evidenciar como esses tipos de problemas explorados no Ensino Médio podem oferecer oportunidades ao professor de trabalhar a interdisciplinaridade de forma contundente com outras áreas.

É notório que estas aplicações e exemplos de otimização corroboram para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, fazendo uma ponte entre os conteúdos que são estudados com as atualidades que norteiam as áreas das ciências e tecnologias. Além disso, desperta no aluno um interesse pela matemática fazendo-o perceber que é uma ciência dinâmica sempre com novos estudos a serem descobertos.

Nessa perspectiva é de fundamental importância o papel do professor no ensino da matemática, haja a vista o fato que este deve ser capaz de identificar em sua prática, com criatividade e dedicação, momentos propícios para a implementação de problemas atraentes que envolvam otimização. Como nos diz George Polya:

“Sabemos, naturalmente, que é difícil ter uma boa idéia se conhecemos do assunto e que é impossível tê-la se dele nada sabemos. As boas idéias são baseadas na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos. Para uma boa idéia, não basta a simples recordação, mas não podemos ter nenhuma boa idéia sem lembrar alguns fatos pertinentes”.

Esperamos que este trabalho possa contribuir de alguma forma para que esse tema, que unifica teoria e prática mostrando o poder e beleza da matemática, possa ser mais difundido entre professores do ensino básico.

Referências Bibliográficas

- [1] HANSEN,R., and R. Taylor, *Algebraic Methods for Finding Relative Extreme Values of Cubic Functions*, Proc.H.J.W.S.U. Math Res.3.200.p.21-24
- [2] HANSEN,R., and R. Taylor, *Optimization of cubic polynomial functions without calculus*, Mathematics Teacher, Vol. 101, 2008.
- [3] FERREIRA, V. C de Santana, *De grafos a emparelhamentos: uma possibilidade viável de encantar-se com a matemática*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Sergipe, Brasil (2014).
- [4] MUNKRES, James R., *Topology*, 2nd ed, Prentice Hall (2000).
- [5] Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.Brasília: MEC, 2006.
- [6] LEMOS, Manoel, *Interação entre grafos e matróides*, Pernambuco, 2009. PP 1-14.