2015: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU COM UTILIZAÇÃO DE RÉGUA E COMPASSO

Vilmar de Almeida Lima [1]
Fábio Alexandre de Matos[2]

Resumo: O presente trabalho tem por objetivo apresentar resoluções geométricas de equações do 2º grau, utilizando somente régua e compasso. Com o intuito de incentivar a busca do conhecimento através da tecnologia, realizamos alguns exemplos de construções dessas equações com o auxílio do software GeoGebra.

Palavras-chave: Equação do Segundo Grau. Desenho Geométrico. GeoGebra.

1 Introdução

Este trabalho tem o propósito de apresentar ao leitor uma forma diferenciada de resolução de equações do segundo grau. As equações que trataremos aqui são equações cujos coeficientes são números construtíveis com régua e compasso, isto é, números que representam comprimentos de segmentos de reta construtíveis com régua e compasso através de construções elementares com uma unidade fixada.
Podemos citar como exemplo de construções elementares com régua e compasso: a obtenção da reta mediatriz de um segmento dado, a construção de retas paralelas e perpendiculares ao um segmento dado passando por um ponto fixo. Com estas construções podemos definir duas operações sobre o conjunto de números construtíveis, a saber, a soma e a multiplicação usuais de números reais.
As construções elementares as quais nos referimos acima estão detalhadas na seção 3. O leitor que se sentir familiarizado com tais conceitos pode seguir diretamente para a seção 4. Para maiores informações sobre construções elementares indicamos (WAGNER, 2007).
Historicamente as equações do segundo grau surgiram na busca de resolução de problemas geométricos envolvendo áreas de figuras planas. As ferramentas utilizadas até então eram apenas régua e compasso sem graduação. Daí o nosso interesse em explorar tal assunto, com o objetivo de apresentar um método pouco utilizado na atualidade e que envolve geometria e álgebra.
Inicialmente apresentaremos, as construções geométricas elementares já mencionadas acima e as operações usuais de soma e multiplicação do conjunto dos números reais restritas ao conjunto de números construtíveis. Como requisitos básicos para essas construções podemos citar o Teorema de Tales, as relações métricas no triângulo retângulo e as relações métricas

[1]Aluno de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2015
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: vilmar91@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: fabio.ufsj@gmail.com

na circunferência.
Na seção 3 faremos a resolução geométrica das equações dos tipos $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = bx - c^2$ e $x^2 = c^2 - bx$, em que b e c são números construtíveis e positivos. O método que utilizaremos aqui foi desenvolvido por René Descartes. Ainda utilizando o método desenvolvido por Euclides, apresentaremos as soluções geométricas da equação $x^2 + bx + c = 0$, em que b e c são números construtíveis. Essa equação será resolvida em dois casos distintos, a saber, para $c > 0$ e $c < 0$.
Na última seção apresentaremos, de forma detalhada, como transportar as soluções das equações descritas acima para o GeoGebra. Ressaltamos que o uso do GeoGebra será somente para representar e não resolver as equações do segundo grau.

2 Contexto Histórico

Segundo (BOYER, 1974) e (FRAGOSO, 2000), o estudo de equações do segundo grau começou há mais de quatro mil anos. Foram encontradas evidências de que as mesmas eram estudadas pelos egípcios e babilônios de forma rudimentar. Os indianos são os responsáveis pela famosa "fórmula de Bhaskara"que tem sua origem no século XI d.C.. Já pelos chineses, em 1303, foi apresentada uma técnica especial para a resolução da equação do segundo grau, baseada em aproximações sucessivas. Pode-se dizer que as soluções por Bhaskara eram encontradas com o uso de radicais. Isto diferenciava e ampliava a quantidade de equações solucionáveis através do método de completar quadrados, que foi a origem de tal método de Bhaskara.

Na Grécia, a maneira de os matemáticos apresentarem seus resultados sobre soluções de equações de segundo grau era geométrica (GILBERTO, 2007). Nos Elementos de Euclides, escritos em 300 a.C., a ferramenta geométrica que permite resolver equações de segundo grau que possuíam como coeficientes números positivos e construtíveis, era a aplicação de áreas de figuras planas.

Os árabes assimilaram a Matemática dos gregos e fizeram progressos em várias áreas. Muhammad ben Musa al-Khowarizmi (780-850) apresenta a equação do segundo grau, bem como sua resolução, além de uma comprovação geométrica denominada "Método de completar quadrados". Este método originou a fórmula de Bhaskara.

Na Europa do século XV ao XVII, embora ainda não se usasse o formalismo atual, o processo para resolver problemas envolvendo as atuais equações do segundo grau resumia-se na receita usada por Bhaskara.

Em 1637, René Descartes (1596-1650), além de apresentar uma notação que diferia da utilizada até então somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico para obtenção da raiz positiva. No apêndice La Géométrie de sua obra O Discurso do Método (WAGNER,1991), Descartes resolveu equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$,$x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$ sempre com b e c positivos e construtíveis .

Nos próximos capítulos serão demonstradas as construções geométricas necessárias para a resolução das equações do segundo grau, assim como as formas geométricas de resolução utilizadas por Euclides e Descartes.

3 Construções Geométricas

As construções geométricas têm grande importância no estudo e na compreensão da Matemática, há quase dois mil anos. Como os números racionais e reais ainda estavam há séculos de serem descobertos, as ferramentas utilizadas pelos gregos para representarem uma grandeza, eram as construções de segmentos de reta. Quando descobriram a impossibilidade de resolver algumas equações, foram surgindo novas teorias e novos conjuntos de números com respectivas estruturas algébricas. Alguns anos depois, essa técnica foi aplicada pelos árabes com o objetivo de encontrar soluções de problemas diversos, entre eles o de encontrar soluções de equações do segundo grau. Começaremos então por apresentar as construções geométricas elementares que nos encaminharão às construções de soluções de equações do 2º grau com coeficientes construtíveis.

3.1 Construções Elementares

Mediatriz de um segmento:

Por definição, a mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos que eqüidistam dos pontos A e B. Pode-se mostrar que a mediatriz é, na verdade, a reta perpendicular a este segmento que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{AB}$. É válido ressaltar que a construção da mediatriz acarreta no encontro do ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Construção da mediatriz

Considere o segmento $\overline{AB}$. Com centro em A e em B, traçamos dois arcos de circunferência de mesmo raio de modo que se interceptem. Denote por C e D os pontos de interseção desses arcos (Veja Figura 1.). Afirmamos que a reta r que passa por C e por D é a mediatriz. De fato, se denotarmos por E o ponto de intersecção da reta r com o segmento $\overline{AB}$, temos que o triângulo ABC é isósceles com altura CE. Como a altura de um triângulo isósceles é perpendicular à base e a divide em dois segmentos iguais, podemos concluir que a reta r encontrada é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

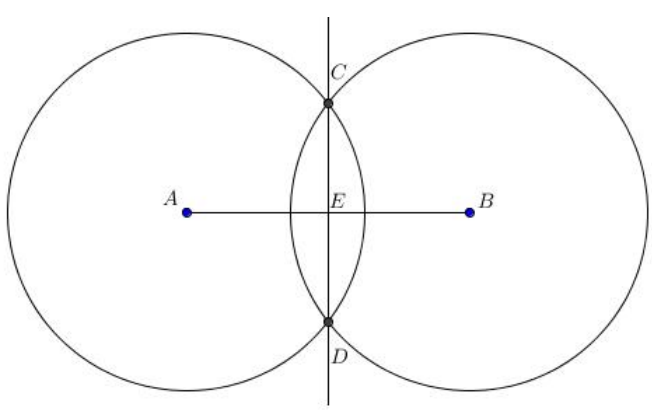

Figura 1: Construção da Mediatriz

De fato, E pertence à mediatriz (ponto médio de $\overline{AB}$), se C pertence a mediatriz, temos que o triângulo AEC é congruente ao triângulo BEC. ($\overline{CE} \equiv \overline{CE}$, $\overline{AE} \equiv \overline{BE}$ e $\overline{AC} \equiv \overline{BC}$)

Daí $C\widehat{E}A$ e $C\widehat{E}B$ são congruentes, como são suplementares, segue-se a definição.

Perpendiculares:

I - Construção da perpendicular a um segmento $\overline{AB}$ por um ponto P.

Considere o segmento $\overline{AB}$ e P um ponto fora do segmento. Com uma abertura do compasso com a ponta seca em P, traça-se um arco determinando, no segmento $\overline{AB}$, os pontos C e D. Executando agora a construção da mediatriz do segmento $\overline{CD}$, encontramos uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por P.

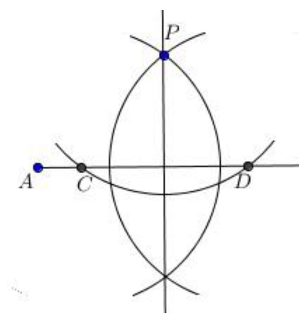

Figura 2: Construção I de Perpendicular

II - Construção de uma reta perpendicular a um segmento $\overline{AB}$ por uma de suas extremidades.

Considere um segmento $\overline{AB}$. Sem perda da generalidade, vamos fazer a construção pela extremidade B. Com centro em B, e com uma abertura qualquer do compasso, faça um arco de circunferência interceptando o segmento $\overline{AB}$ e o prolongamento do segmento $\overline{AB}$ por B. Denote os pontos de intersecção por X e Y. Agora, com a mesma abertura, marque com a ponta seca em X e Y os pontos N e P sobre a circunferência. Agora trace dois arcos de circunferência, com o mesmo raio, com centros em N e P se interceptando em C (Veja Figura 3.) Afirmamos que a reta que passa por C e B é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$. De fato, observe que o segmento $\overline{NP}$ é paralelo ao segmento $\overline{XY}$, pois são bases de um trapézio isósceles. Ainda, o triângulo NCP é isósceles, o que implica, como na construção da mediatriz, que a reta que contém o segmento $\overline{BC}$ é a altura do triângulo NPC, implicando que a reta seja perpendicular ao segmento $\overline{NP}$. Uma vez que $\overline{NP}$ e $\overline{AB}$ são paralelos, esta reta é também perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ passando por B.

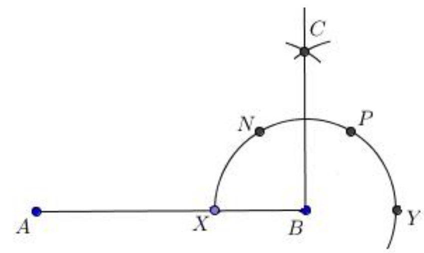

Figura 3: Construção II de Perpendicular

Paralelas:

Dizemos que duas retas r e s são paralelas se a distância de P a s é constante para qualquer ponto P em r.

I -Construção de uma reta paralela à reta r dada passando por um ponto P, onde P não pertence a r

Sejam r uma reta e P um ponto, com P não pertencente a r. Com o compasso centrado em P marque um ponto A sobre a reta r e construa um arco de circunferência. Com a mesma abertura e com centro em A marque um ponto B sobre a reta r. Finalmente com a mesma abertura do compasso e com centro em B faça um arco de circunferência encontrando o ponto Q (figura 4). Afirmamos que a reta que passa por P e Q é paralela a r. De fato, o quadrilátero $ABQP$ é um losango pois possui os quatro lados iguais ao raio escolhido.

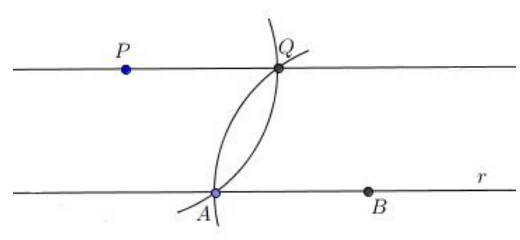

Figura 4: Construção I de Paralelas

Observação: Com os mesmos argumentos utilizados na construção acima podemos construir um par de retas paralelas que eqüidistam da reta r.

3.2 Números Construtíveis

Uma vez conhecidas as construções elementares, passamos à definição de números construtíveis.

Dizemos que um número real a é construtível se for possível, utilizando somente compasso e régua sem graduação, construir um segmento de tamanho $|a|$ com um número finito de passos a partir de uma unidade fixa (JÚNIOR, 2013). Segue, diretamente da definição, que podemos construir todos os números inteiros.

Denotando por $\pounds$ o conjunto dos números construtíveis com régua e compasso, mostraremos que as operações de soma e multiplicação usuais estão bem definidas sobre $\pounds$. Além disso mostraremos também que é possível encontrar o inverso multiplicativo de todo número construtível não nulo.

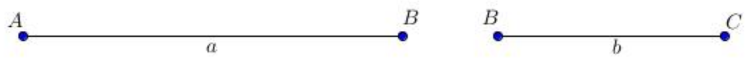

Figura 5: Números Construtíveis (a) e (b)

Adição dos Números Construtíveis $(a+b)$ **:**

Sejam a e b números construtíveis. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $|a| > |b|$. Sobre uma reta r marque um ponto O e com centro em O e raio $|a|$, marque o ponto A na reta r. Agora com centro em A e raio $|b|$ marque os pontos D e E na reta r, conforme a figura abaixo.

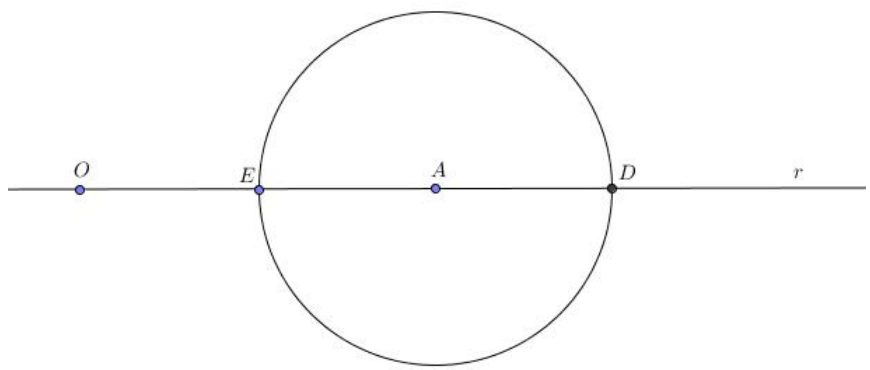

Figura 6: Determinação de $(a+b)$

$\rightarrow$ Se a e b são ambos positivos ou negativos, temos que $a+b$ é representado geometricamente pelo segmento $\overline{OD}$.

$\rightarrow$ se a é positivo e b é negativo ou vice-versa, temos que $a+b$ é representado geometricamente pelo segmento $\overline{OE}$.

Multiplicação de Números Construtíveis (ab)**:**

Sejam a e b números construtíveis. Sobre uma reta r marque o segmento $\overline{OA}$ representando o número a, trace por O uma reta s concorrente a r e marque sobre essa reta o ponto E de forma que $\overline{OE}$ seja o segmento unitário. Com centro em E e raio b marque o ponto D pertencente a s. Denotando por t a reta que passa pelos pontos por E e A encontre a reta u paralela a reta t passando por D. Denote por P o ponto de interseção de u e r. Concluímos que o segmento $\overline{AP}$ possui comprimento ab.

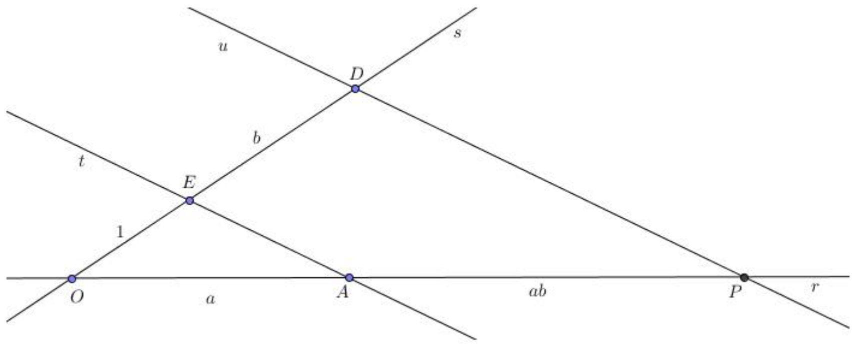

Figura 7: Determinação de (ab)

De fato, os triângulos AOE e POD são semelhantes (basta usar o Teorema de Tales). Então:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}}$$

Seja $x = |\overline{AP}|$, então $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = a + x$
Substituindo as medidas dos segmentos, temos

$$\frac{1}{1+b} = \frac{a}{a+x}$$

Assim,

$$a + x = a + ab$$

E consequentemente

$$x = ab$$

Inverso multiplicativo de Números Construtíveis

Seja a um número construtível. Para construir o inverso de a procedemos de maneira análoga à multiplicação de números construtiveis. Basta ajustar convenientemente os segmentos nas retas transversais e aplicar o Teorema de Tales.

Com as operações de soma e multiplicação e a construção de inverso multiplicativo podemos concluir que é possível construir todos os números racionais.

Por exemplo

$$\frac{1}{a} = \frac{x}{b}$$

Raiz Quadrada ($\sqrt{a}$):

Para construir a raiz quadrada de um número a positivo, usaremos a Média Geométrica (VÁRHIDY, 2010). Relembramos que a média geométrica entre dois números positivos é a raiz quadrada do produto de ambos. Para encontrarmos a MG utilizaremos as relações métricas no triângulo retângulo e uma relação métrica da circunferência, que apresentaremos a seguir.

Dentre as relações métricas no triângulo retângulo destacamos três que representam médias geométricas, são elas:

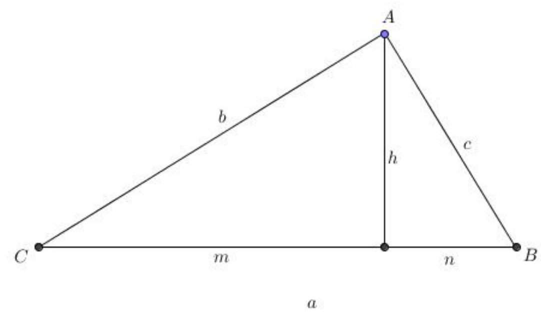

Figura 8: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

i) A altura ao quadrado é igual ao produto das projeções.

$$h^2 = mn$$

(1)

ii) Cada cateto ao quadrado é igual ao produto entre a hipotenusa e sua respectiva projeção.

$$b^2 = am$$

(2)
e

$$c^2 = an$$

(3)

Somando, membro a membro as igualdades acima obtemos o famoso Teorema de Pitágoras. De fato,

$$b^2 + c^2 = am + an$$

implicando em

$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$

e consequentemente

$$b^2 + c^2 = a^2$$

(4)

Vamos apresentar as relações métricas na circunferência, que utilizaremos para encontrar a raiz quadrada de um número construtível a.

Considerando um ponto P, externo a uma circunferência, podemos determinar uma reta $\overrightarrow{PA}$ tangente a ela no ponto A e uma reta secante a essa mesma circunferência nos pontos B e C (B entre P e C) que passa pelo centro O. Podemos identificar o triângulo APO , retângulo em A, visto que toda reta tangente é perpendicular ao raio no ponto de tangência. Aplicando o Teorema de Pitágoras temos que $\overline{PA}$ é a média geométrica de $\overline{PB}$ e $\overline{PC}$.

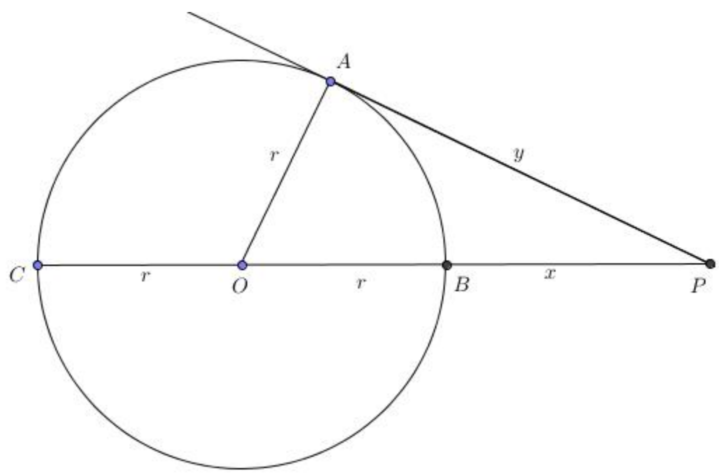

Figura 9: Relação Métrica na Circunferência

De fato,

$$(\overline{PA})^2 + (\overline{AO})^2 = (\overline{PO})^2$$

substituindo, temos,

$$y^2 + r^2 = (x + r)^2$$

desenvolvendo o produto notável, obtemos

$$y^2 + r^2 = x^2 + 2xr + r^2$$

assim,

$$y^2 = x^2 + 2xr$$

colocando x em evidência

$$y^2 = x(x + 2r)$$

e finalmente, substituindo, temos:

$$(\overline{PA})^2 = (\overline{PB})(\overline{PC})$$

(5)

Utilizando as relações acima, vamos à construção geométrica da raiz quadrada de a, em que a é um número construtível.

Considere inicalmente um segmento $\overline{AB} = a$ e o segmento unitário $\overline{BD} = 1$ adjacentes e colineares. Trace a semicircunferência de raio $\frac{\overline{AD}}{2}$ e centro no ponto médio de $\overline{AD}$. Construa uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AD}$ passando por B, obtendo o ponto E na semicircunferência. Note que o triângulo ADE é retângulo em E, visto que o triangulo ADE está inscrito numa semicircunferência.

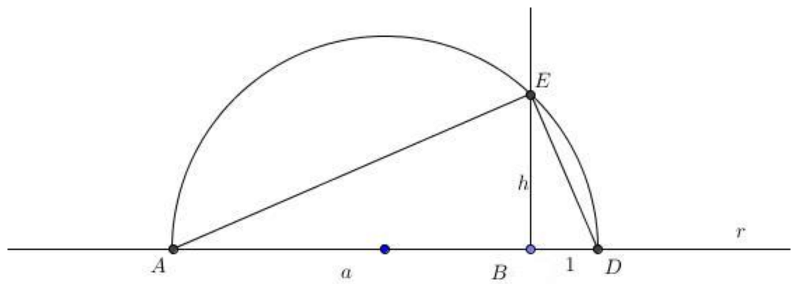

Figura 10: Determinação de $\sqrt{a}$

Pelas relações métricas do triângulo retângulo ($h^2 = m{\cdot}n$), temos que $(\overline{EB})^2 = (\overline{AB})(\overline{BD})$, isto é, $h = \sqrt{a}$

4 Equações do 2º grau

Apresentaremos aqui, como mencionado na introdução, os métodos de resolução geométrica de equações do segundo grau desenvolvidos por Descartes e Euclides. Para esse fim, utilizaremos as construções geométricas apresentadas na seção anterior.

4.1 Resolução Geométrica das Equações do 2º grau

Para encontrar as raízes da equação do tipo $ax^2+bx+c = 0$ utilizaremos técnicas de resolução geométrica bem eficazes, relacionando a álgebra e à geometria, fazendo o aluno colocar em prática seu aprendizado sobre construção de gráficos e resolução de sistemas e criando a possibilidade de visualização do conjunto solução procurado. Para tanto é interessante o uso de algum tipo de programa computacional que construa gráficos (usaremos aqui o GeoGebra) o que tornará as aulas mais dinâmicas e atrativas.

4.1.1 Método de Descartes

René Descartes, no apêndice “La Giomitrie”de sua obra “Discours de La Methóde”(WAGNER,1991) desenvolveu um método para obtenção das raízes positivas das equações do segundo grau. Descartes discriminou as equações em três casos: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, em que b e c são números positivos e construtíveis.

- Para as equações do tipo $x^2 = bx + c^2$

Este método inicia-se com um segmento $\overline{LM}$ de comprimento c. Por L traça-se o segmento $\overline{LN}$ de comprimento $\frac{b}{2}$ perpendicular a $\overline{LM}$ e em seguida uma circunferência de centro N e raio $\overline{LN}$. Prolongando o segmento $\overline{MN}$ obtemos os pontos O e P na circunferência.

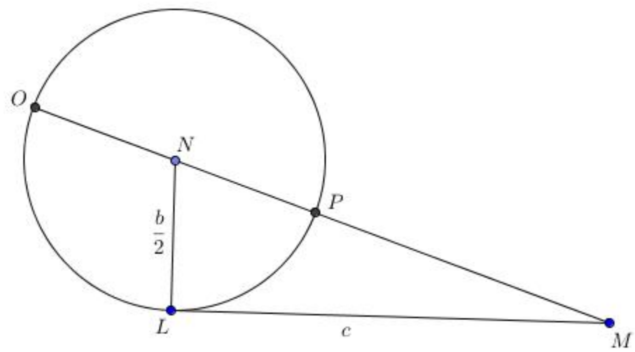

Figura 11: Método de Descartes (I)

Afirmamos que a raiz procurada x corresponde à medida do segmento $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{MN}$.

Denotando por x o comprimento de $\overline{OM}$ temos, pela relação (5), temos que

$$(\overline{OM})(\overline{PM}) = (\overline{LM})^2$$

logo,

$$x(x-b) = c^2$$

assim

$$x^2 = bx + c^2$$

Como, por construção temos que $\overline{LN} = \frac{b}{2}$ e $\overline{LM} = c$, então:

$$(\overline{MN})^2 = (\frac{b}{2})^2 + c^2$$

assim

$$(\overline{MN})^2 = (\frac{b^2}{4}) + c^2$$

portanto

$$\overline{MN} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$$

e, finalmente

$$\overline{MN} = \pm\frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2}$$

Como $\overline{OM} = \overline{ON} + \overline{MN}$ e $\overline{OM} = x$, temos:

$$\overline{MN} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2}$$

Assim, podemos afirmar (segundo Bhaskara) que $\overline{MN}$ é uma raíz da equação.

Concluímos que $\overline{OM}$ representa uma solução positiva para a equação. A outra raiz não foi considerada por Descartes na época por se tratar de uma raiz negativa.

- Para as equações do tipo $x^2 = c^2 - bx$

Considerando ainda a construção representada na figura 11, temos que a raiz positiva procurada é o segmento $\overline{MP} = x$, de fato, como $\overline{MP} = \overline{MN} - \overline{NP}$ e temos:

$$(\overline{OM})(\overline{PM}) = (\overline{LM})^2$$

substituindo

$$x(x + b) = c^2$$

portanto

$$x^2 = c^2 - bx$$

Pela demonstração anterior temos que $\overline{MN} = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2}$ e $\overline{NP} = \frac{b}{2}$ então:

$$\overline{MP} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c^2}}{2} - \frac{b}{2}$$

assim

$$\overline{MP} = -\frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 + 4c^2}}{2}$$

Assim, podemos afirmar (segundo Bhaskara) que $\overline{MP}$ é uma raíz da equação.

- Para as equações do tipo $x^2 = bx - c^2$

Assim como nos tipos anteriores, o método inicia-se com um segmento $\overline{LM}$ de comprimento c , por L traça-se o segmento $\overline{LN}$ de comprimento $\frac{b}{2}$ perpendicular a $\overline{LM}$ e em seguida uma circunferência de centro N e raio $\overline{LN}$. Por M traça-se uma paralela a $\overline{LN}$ obtendo os pontos Q e R na circunferência. As raízes procuradas para esta equação são representadas por $\overline{MQ}$ e $\overline{MR}$.

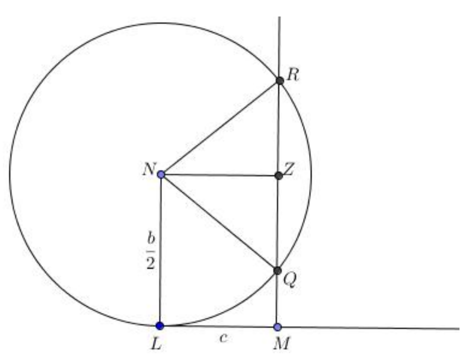

Figura 12: Método de Descartes (II)

De fato, temos que $\overline{MR} = \overline{MZ} + \overline{ZR}$ e por construção $\overline{ZR} = \sqrt{(\overline{NR})^2 - (\overline{NZ})^2}$, visto que o triângulo NRZ é retângulo em Z. Temos ainda $\overline{NR} = \overline{NQ} = \overline{LN} = \overline{MZ} = \frac{b}{2}$, raio da circunferência e $\overline{NZ} = \overline{LM} = c$.
Daí $\overline{ZR} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, logo $\overline{MR} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, daqui você obtém a outra raiz
$\overline{MQ} = \overline{MR} - 2\overline{ZR} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$

Observação: Caso a reta perpendicular MR não corte a circunferência, a equação não possui raiz positiva.

4.1.2 Método de Euclides

Apresentaremos agora o Método de Euclides para resolver as equações do segundo grau do tipo $x^2 + bx + c = 0$ em que b e c são números construtíveis (VALE, 2013). Este método se diferencia do Método de Descartes pois transforma a equação em um sistema não linear, como veremos a seguir (TUNALA, 1988):

1º Caso: Se $c > 0$, temos que as raízes da equação possuem sinais iguais, assim:

$$|x_1| + |x_2| = |b|$$
$$|x_1| \cdot |x_2| = |c|$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja soma seja $|b|$ e cujo produto seja $|c|$ ou simplesmente c , já que $c > 0$.

Sobre uma reta r tracemos três segmentos adjacentes tais que $\overline{MN} = c$, $\overline{NO} = 1$ e $\overline{OP} = |b|$, em seguida tracemos duas semicircunferências tangentes no ponto O, com diâmetros $\overline{MO}$ e $\overline{NO}$ respectivamente. Por N traçamos uma reta s perpendicular à reta r, e obtemos o ponto Q na circunferência de diâmetro $\overline{MO}$. Pelas relações métricas do triângulo retângulo, temos que:

$$\overline{NQ} = \sqrt{c}$$

Por Q tracemos a reta t, paralela a r e obtemos o ponto U na semicircunferência de diâmetro $\overline{OP} = b$. Por U tracemos a reta v perpendicular a r , obtendo G em r . Assim obtemos os segmentos que representam os valores absolutos das raízes da equação $x^2 + bx + c = 0$, $\overline{OG}$ e $\overline{GP}$, respectivamente.

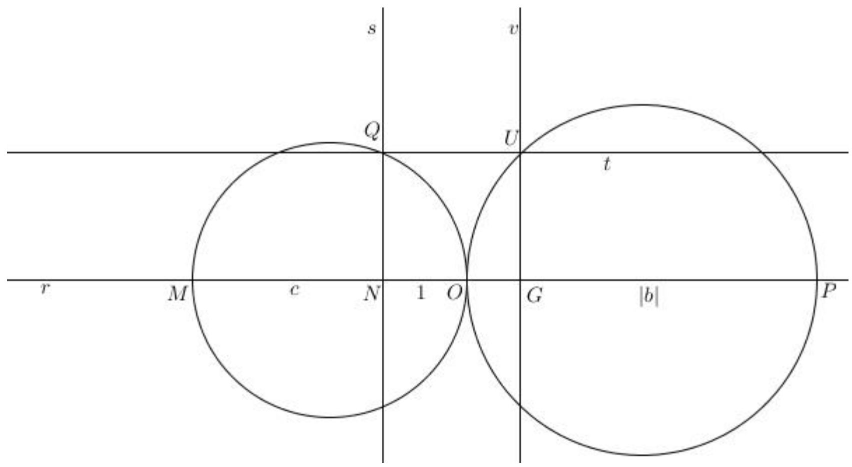

Figura 13: Método de Euclides

De fato, como $\overline{GU} = \overline{NQ} = \sqrt{c}$ e $(\overline{GU})^2 = (\overline{OG})(\overline{GP})$ (pois o triângulo OUP é retângulo em U) temos que $c = (\overline{OG})(\overline{GP})$. Além disso, temos por construção que $|b| = \overline{OG} + \overline{GP}$. Note que:
Se $b < 0$, então as raízes são positivas. E se $b > 0$, então as raízes são negativas.

Observe ainda que caso a reta t, não interceptar a circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, $(\sqrt{c} < \frac{b}{2})$ a equação não possui raízes reais, e sendo assim a construção não nos permite determiná-las. O mesmo ocorrerá quando $b = 0$.

2º Caso: Se $c < 0$, temos que as raízes da equação possuem sinais contrários, assim: Supondo $|x_1| > |x_2|$ temos:

$$|x_1| - |x_2| = |b|$$
$$|x_1| \cdot |x_2| = |c|$$

O problema consiste em determinar dois segmentos de reta cuja diferença seja $|b|$ e o produto deles seja $|c|$.
Analogamente ao 1º caso , determinaremos os pontos M, N, O e P numa reta r e o ponto Q . Transladenos $\overline{NQ} = \sqrt{c}$ numa direção paralela a s e obtemos $\overline{OU}$. Traçando a reta que passa pelos pontos U e I, em que I é o centro da circunferência de diâmetro $\overline{OP}$, obtemos os pontos G e H, e conseqüentemente as raízes $\overline{UG}$ e $\overline{UH}$ da equação dada.
De fato, ao utilizarmos a média geométrica contida nas relações métricas na circunferência obtemos

$$(\overline{OU})^2 = (\overline{UG})(\overline{UH})$$

isto é,

$$c = (\overline{UG})(\overline{UH})$$

Como $\overline{GH} = \overline{OP} = b$ é o diâmetro da circunferência, temos que:

Se $b < 0$, então as raízes são $x_1 = \overline{UH}$ e $x_2 = -\overline{UG}$;

Se $b > 0$, então as raízes são $x_1 = -\overline{UH}$ e $x_2 = \overline{UG}$;

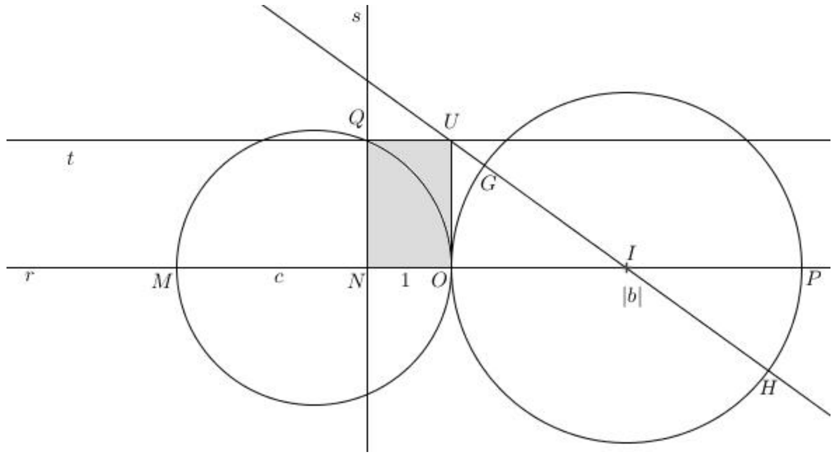

Figura 14: Método de Euclides (II)

No caso de $b = 0$, a circunferência de centro I não existe, assim teremos as raízes simétricas $\overline{OU}$ e $-\overline{OU}$. Para todas as outras situações sempre obteremos solução.

No próximo capítulo faremos alguns exemplos, aplicando os métodos de Descartes e Euclides, utilizando o software GeoGebra.

5 GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica, livre, de fácil instalação, utilização e entendimento, que une a geometria, álgebra e cálculo. O GeoGebra foi elaborado por Markus Hohenwarter em 2001/2002, desenvolvido como sendo parte de sua tese de mestrado e revisado durante o seu curso de doutorado. Após esse momento professores de Matemática de vários países o traduziram para mais de vinte e cinco idiomas diferentes.
No site http://www.geogebra.org, obteremos um manual online e o software pronto para a instalação e um tutorial em pdf, completo e de fácil entendimento. Nesta página será possível realizar seu download para que este fique disponível nos computadores pessoais, sem nenhum custo financeiro. Neste trabalho, utilizaremos algumas das muitas funções e ferramentas disponíveis no programa. No primeiro caso de cada método faremos um tutorial com os principais recursos do software, utilizados para a resolução das equações do 2º grau.

5.1 Utilização do GeoGebra no estudo das Equações do 2º grau

Inicialmente utilizaremos o Método de Descartes. Como Descartes discriminou as equações em três casos: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, em que b e c são números positivos e construtíveis, faremos três exemplos, mostrando cada etapa.

1ºcaso $x^2 = bx + c^2$

Tomaremos como exemplo a equação $x^2 = 6x + 16$, assim $|b| = 6$ e $c^2 = 16$ logo

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

A construção da solução da equação do segundo grau $x^2 - 6x - 16 = 0$ segundo Descartes, inicia-se com a construção de um segmento fixo $\overline{AB}$ de comprimento $\sqrt{c} = 4$, utilizando o comando segmento fixo contido no terceiro ícone da barra de ferramentas do GeoGebra. Importante ressaltar que a obtenção da raiz quadrada de um número natural já foi demonstrada anteriormente. Traça-se por A, utilizando o quarto ícone da barra de ferramentas, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

Traça-se então outro segmento fixo $\overline{AC}$, agora com comprimento $\frac{b}{2} = 3$ (a divisão de um segmento em partes iguais também já foi demonstrada anteriormente). O ponto C aparecerá sobre o segmento $\overline{AB}$. Como queremos que $\overline{AC}$ seja perpendicular a $\overline{AB}$, faremos uma circunferência com centro em A e raio $\overline{AC}$. Para tanto utilizaremos o sexto ícone da barra de ferramentas. O ponto C será então a interseção desta circunferência com a reta perpendicular já construída. Ao utilizarmos o segundo ícone da barra de ferramentas para marcar esta interseção, o ponto será nomeado automaticamente, clicando no botão direito do mouse iremos renomea-lo como C. Além disso, clicando com o botão direito sobre a circunferência e sobre o antigo ponto C, agora (C_1) iremos esconder estes objetos respectivamente (basta clicar em exibir objetos).

Agora com o segmento $\overline{AC} = 3$ perpendicular ao segmento $\overline{AB} = 4$ podemos dar prosseguimento a nossa construção.

Traçaremos uma circunferência de centro em C e raio $\overline{AC}$. Utilizando o terceiro ícone da barra de ferramentas traçaremos uma reta definida pelos pontos B e C. Assim obtemos os pontos D e E (E entre B e C) na interseção entre a reta e a circunferência.

Ainda, utilizando o oitavo ícone da barra de ferramentas, podemos medir o comprimento do segmento $\overline{BD}$ obtendo a solução positiva da referida equação, $\overline{BD} = 8$

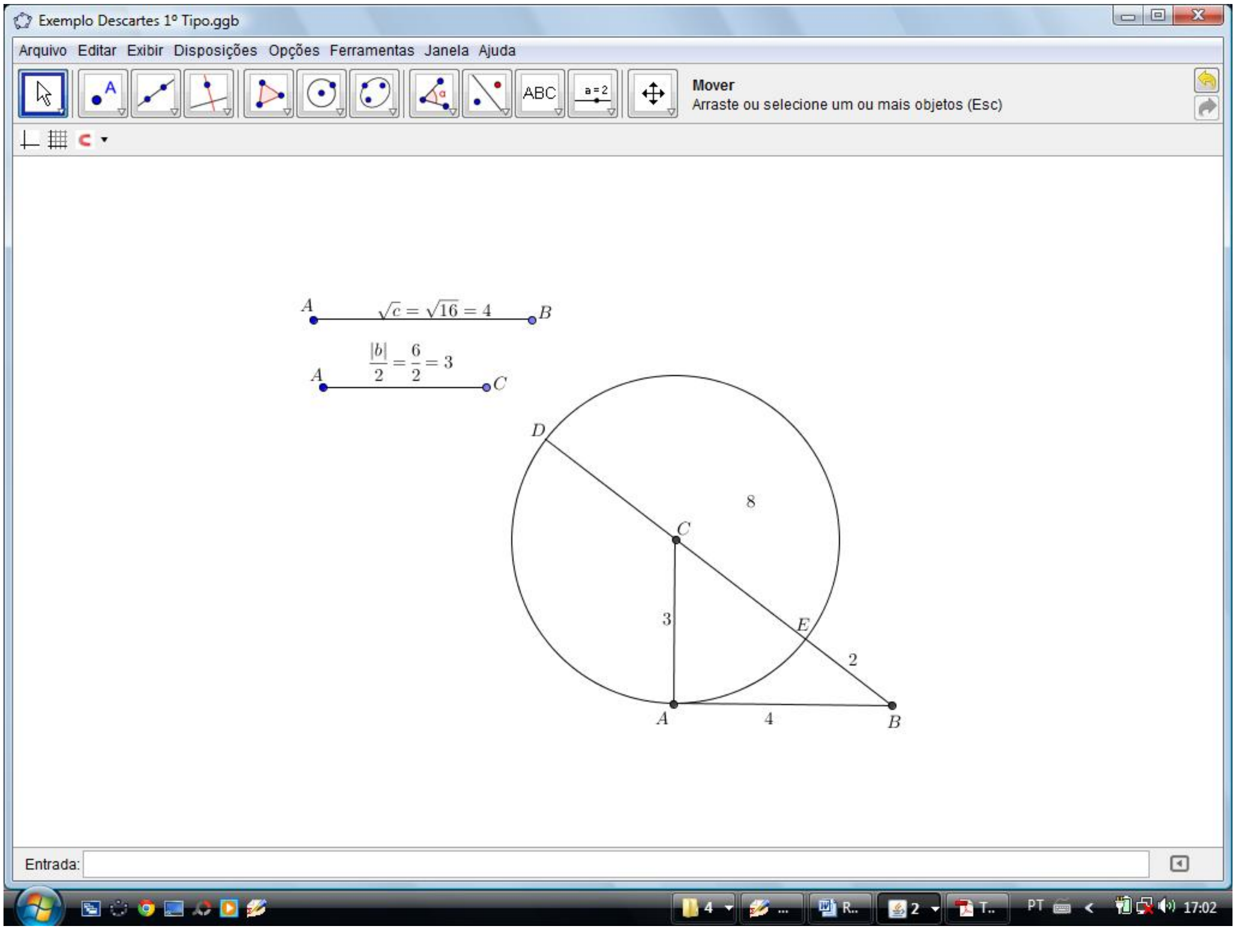

Figura 15: Exemplo do Método de Descartes 1º Caso

De fato, se aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC teremos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC}^2).$$

Logo $\overline{BC} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ e baseando na operações realizadas anteriormente (Figura 11), temos

$\overline{BD} = x = \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2}$ logo $\overline{BD} = x = \frac{6}{2} + \frac{\sqrt{6^2+4\cdot 16}}{2} = 8.$

A outra raiz não é considerada por Descartes na época por se tratar de uma raiz negativa. No entanto é possível perceber na Figura 15 que a outra raiz tem como valor absoluto o segmento $\overline{BE}$, ou seja $x_2 = -2$.

2º caso $x^2 = c^2 - bx$

Para exemplificar este caso consideraremos a equação $x^2 = 9 - 8x$, assim $|b| = 8$ e $c^2 = 9$. Logo

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

Assim como no 1º caso temos $\overline{AB} = \sqrt{c} = \sqrt{9} = 3$ e $\overline{CD} = \frac{|b|}{2} = \frac{|8|}{2} = 4$ respectivamente, logo $\overline{BE}$ é a raiz da equação.

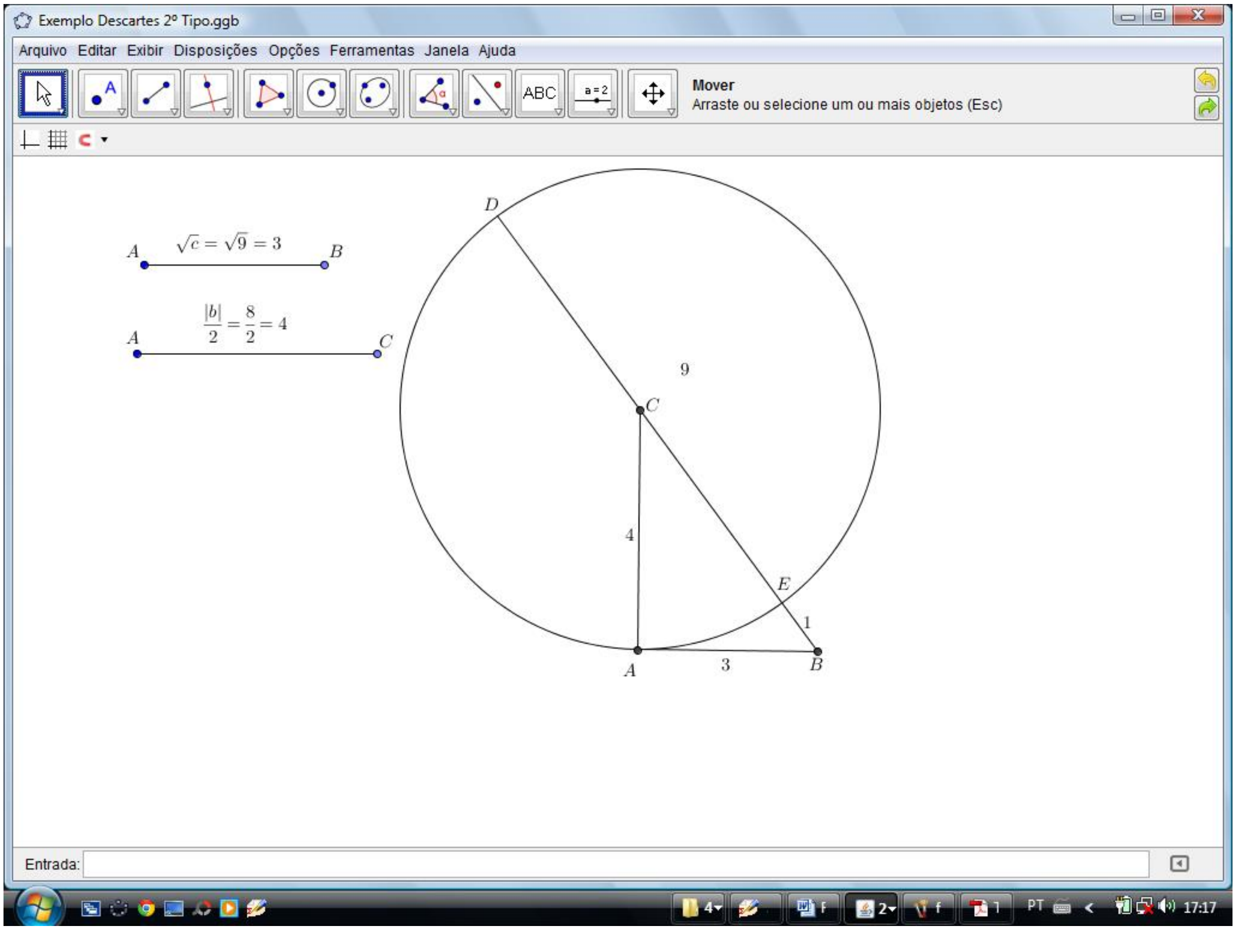

Figura 16: Exemplo do Método de Descartes 2º Caso

De fato, se aplicarmos o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC teremos:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC}^2)$$

Logo $\overline{BC} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} + c^2}$ baseando na operações realizadas anteriormente (Figura 11), temos

$\overline{BE} = x = \frac{\sqrt{b^2+4c^2}}{2} - \frac{b}{2}$ logo $\overline{BE} = x = \frac{\sqrt{8^2+4\cdot 9}}{2} - \frac{8}{2} = 1$.

Como Descartes só considerava raízes positivas, a outra raiz descartada por ele tem como valor absoluto o segmento $\overline{BD}$, ou seja $x_2 = -9$. Esta raiz é perceptível na Figura 16.

Aqui deixaremos a cargo do leitor executar a construção, baseando-se no exemplo anterior, a fim de encontrar o segmento que representa a solução da equação.

3º caso $x^2 = bx - c^2$

Como exemplo tomaremos a equação $x^2 = 10x - 9$, assim $|b| = 10$ e $c^2 = 9$ logo

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

A construção da solução da equação do segundo grau $x^2 - 10x + 9 = 0$, inicia-se utilizando o comando segmento fixo contido no terceiro ícone da barra de ferramentas para a construção de um segmento fixo $\overline{AB}$ de comprimento $\sqrt{c} = 3$. Utilizando o quarto ícone da barra de ferramentas traça-se por A uma reta perpendicular ao segmento AB. Traça-se então outro segmento fixo $\overline{AC}$, agora com comprimento $\frac{b}{2} = 5$.

O ponto C será colinear com os pontos A e B, como queremos que $\overline{AC}$ seja perpendicular a $\overline{AB}$, utilizaremos o sexto ícone da barra de ferramentas para construir uma circunferência com centro em A e raio $\overline{AC}$. O ponto C será então a interseção desta circunferência com a reta perpendicular já construída. Ao utilizarmos o segundo ícone da barra de ferramentas para marcar esta interseção, o ponto será nomeado automaticamente, daí clicando no botão direito do mouse iremos renomeá-lo como C, e ainda, clicando com o botão direito sobre a circunferência, o antigo segmento $\overline{AC}$ (agora $\overline{AC_1}$) e sobre o antigo ponto C (agora C_1) iremos esconder estes objetos (basta clicar em exibir objetos).

Traçaremos uma circunferência de centro em C e raio $\overline{AC}$. Utilizando o quarto ícone da barra de ferramentas obteremos por B uma reta paralela a $\overline{AC}$, obtendo assim os pontos D e E interseções desta reta com a circunferência.

Ainda, utilizando o oitavo ícone da barra de ferramentas, podemos medir o comprimento dos segmentos BD e BE obtendo $\overline{BD} = 9$ e $\overline{BE} = 1$ as duas soluções positivas da referida equação.

Para auxiliar na compreensão da demonstração, utilizando o terceiro ícone da barra de ferramentas, construiremos os $\overline{CD}$ e $\overline{CE}$, e utilizando o quarto ícone, o $\overline{CF}$ paralelo a $\overline{AB}$, onde F é a interseção da reta com o segmento CD.

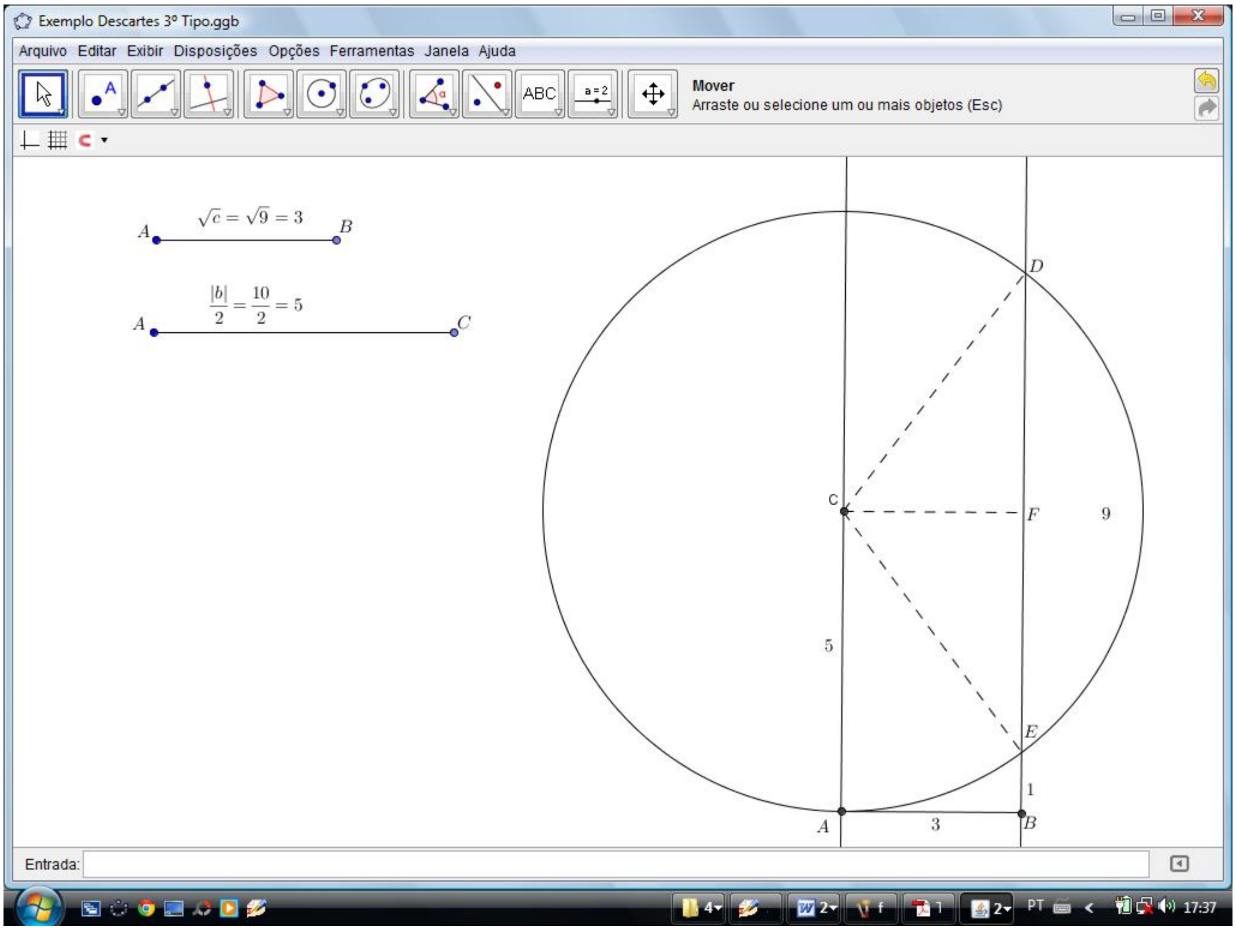

Figura 17: Exemplo do Método de Descartes 3º Caso

De fato como $\overline{BD} = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ e $\overline{BE} = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, as soluções são conhecidas pelos exemplos anteriores. Apenas conferindo temos $\overline{BD} = \frac{10}{2} + \sqrt{\frac{10^2}{4} - 9} = 9$ e $\overline{BE} = \frac{10}{2} - \sqrt{\frac{10^2}{4} - 9} = 1$.

Descartes considera as duas raízes, pois ambas são positivas.

Como vimos anteriormente, Euclides, dividiu as equações do segundo grau em dois caso, $c > 0$ e $c < 0$, já que ele considerava $c \neq 0$. Nesta parte faremos um exemplo de cada caso. No primeiro mostraremos passo a passo a resolução da equação do tipo $x^2 + bx + c = 0$ em que b e c são números construtíveis, utilizando o software GeoGebra.

1º Caso $c > 0$

Para desenvolvermos esta atividade utilizaremos como exemplo a equação do 2º grau

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Para construir a solução, utilizaremos os seguintes procedimentos:

Com terceiro ícone da barra de ferramentas, segmento com comprimento fixo, traçaremos três segmentos adjacentes $\overline{AB} = 10$, $\overline{BC} = 1$ e $\overline{CD} = 7$. Com o segundo ícone da barra de ferramentas determinaremos os pontos médios E e F dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ respectivamente. Com o sexto ícone traçaremos as circunferências de centros E e F e raios $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ respectivamente. Com o quarto ícone, traçaremos por B, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e obteremos com o segundo ícone da barra de ferramentas o ponto G, interseção desta reta com a circunferência de diâmetro $\overline{AC}$.
Com o quarto ícone traçaremos, por G, uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ e obteremos o ponto H, interseção desta com a circunferência de diâmetro $\overline{CD} = 7$. Finalmente traçaremos, por H, uma reta perpendicular a $\overline{GH}$, obtendo o ponto I, interseção desta reta com o segmento $\overline{CD}$. Assim, utilizando o oitavo ícone da barra de ferramentas obtemos os comprimentos de $\overline{CI} = 2$ e $\overline{ID} = 5$, raízes da equação.

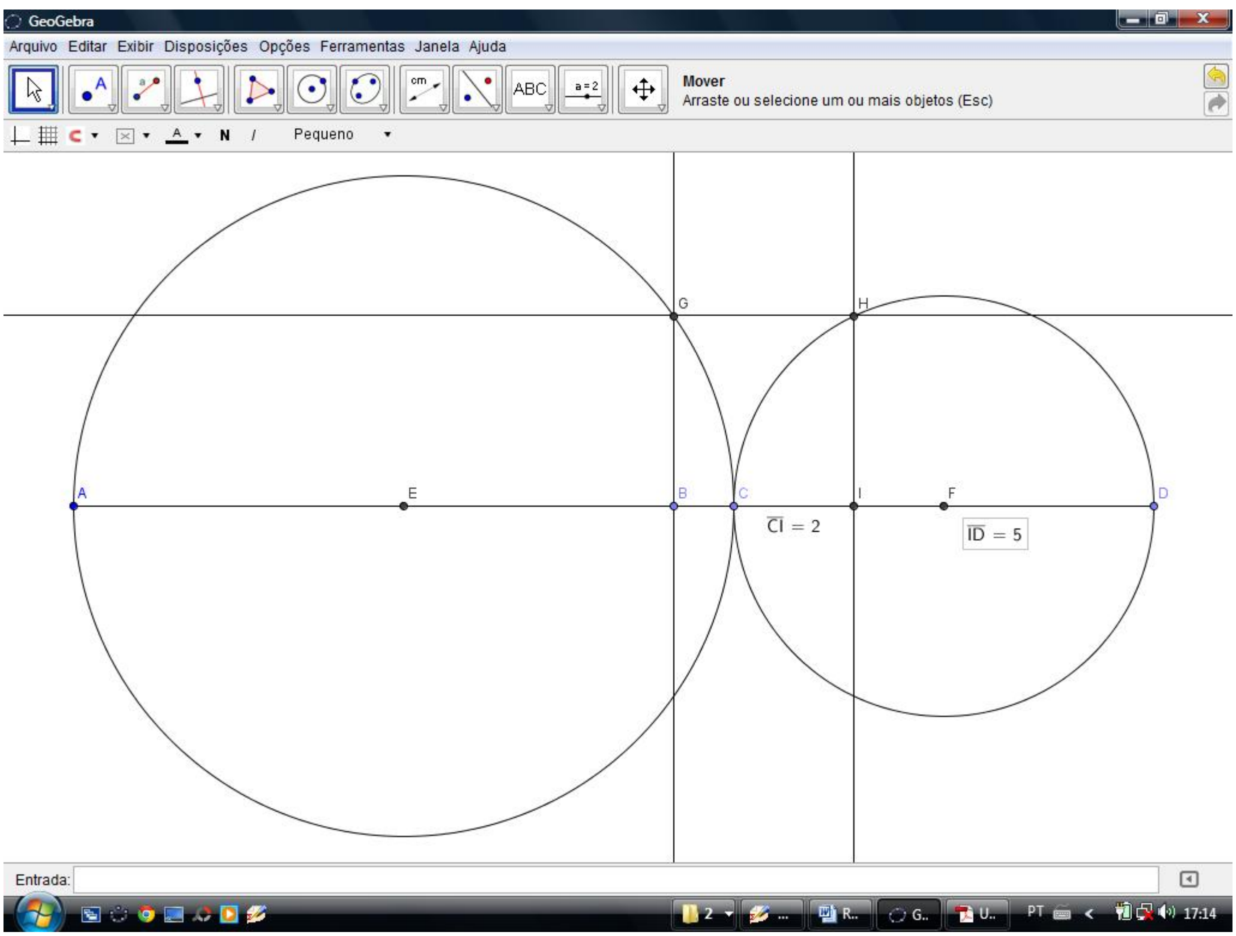

Figura 18: Exemplo do Método de Euclides 1º Caso

De fato, como $\overline{HI} = \overline{BG} = \sqrt{c} = \sqrt{10}$ e $(\overline{HI})^2 = \overline{CI} \cdot \overline{ID}$ temos que $c = \overline{CI} \cdot \overline{ID}$, além disso, temos por construção que $|b| = \overline{CI} + \overline{ID}$. Logo:

$$\overline{CI} + \overline{IC} = |b| = 7$$

e

$$\overline{CI} \cdot \overline{ID} = |c| = 10$$

Assim, se $b < 0$, então as raízes são positivas, e se $b > 0$, então as raízes são negativas.

Observe ainda que caso a reta definida por GH, não intercepta a circunferência de diâmetro $CD = 7$, a equação não possui raízes reais, e sendo assim a construção não nos permite determiná-las. O mesmo ocorrerá quando $b = 0$.

2º caso $c < 0$

Para exemplificar este caso consideraremos a equação

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

Para construir a solução, segundo Euclides utilizaremos os seguintes procedimentos:

Com terceiro ícone da barra de ferramentas, segmento com comprimento fixo, traçaremos três segmentos adjacentes $\overline{AB} = 9$, $\overline{BC} = 1$ e $\overline{CD} = 8$. Com o segundo ícone da barra de ferramentas determinaremos os pontos médios E e F dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ respectivamente. Com o 6º ícone traçaremos as circunferências de centros E e F e raios $\overline{CE}$ e $\overline{DF}$ respectivamente. Ainda, com o quarto ícone, traçaremos por B, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e obteremos com o segundo ícone da barra de ferramentas o ponto G, interseção desta reta com a circunferência de diâmetro $\overline{AC}$.
Com o quarto ícone traçaremos, por G, uma reta paralela ao segmento $\overline{AB}$ e por C, uma reta perpendicular ao segmento $\overline{AC}$ obteremos o ponto H, interseção destas duas retas e, finalmente utilizando o terceiro ícone da barra de ferramentas traçaremos uma reta definida por F e H, e obtemos os pontos I e J, interseções desta reta com a circunferência de diâmetro $\overline{CD} = 8$ (J entre F e H). Assim, utilizando o oitavo ícone da barra de ferramentas obtemos os comprimentos de $\overline{HI} = 9$ e $\overline{HJ} = 1$, como $b < 0$ então as raízes são $x_1 = 9$ e $x_2 = -1$.

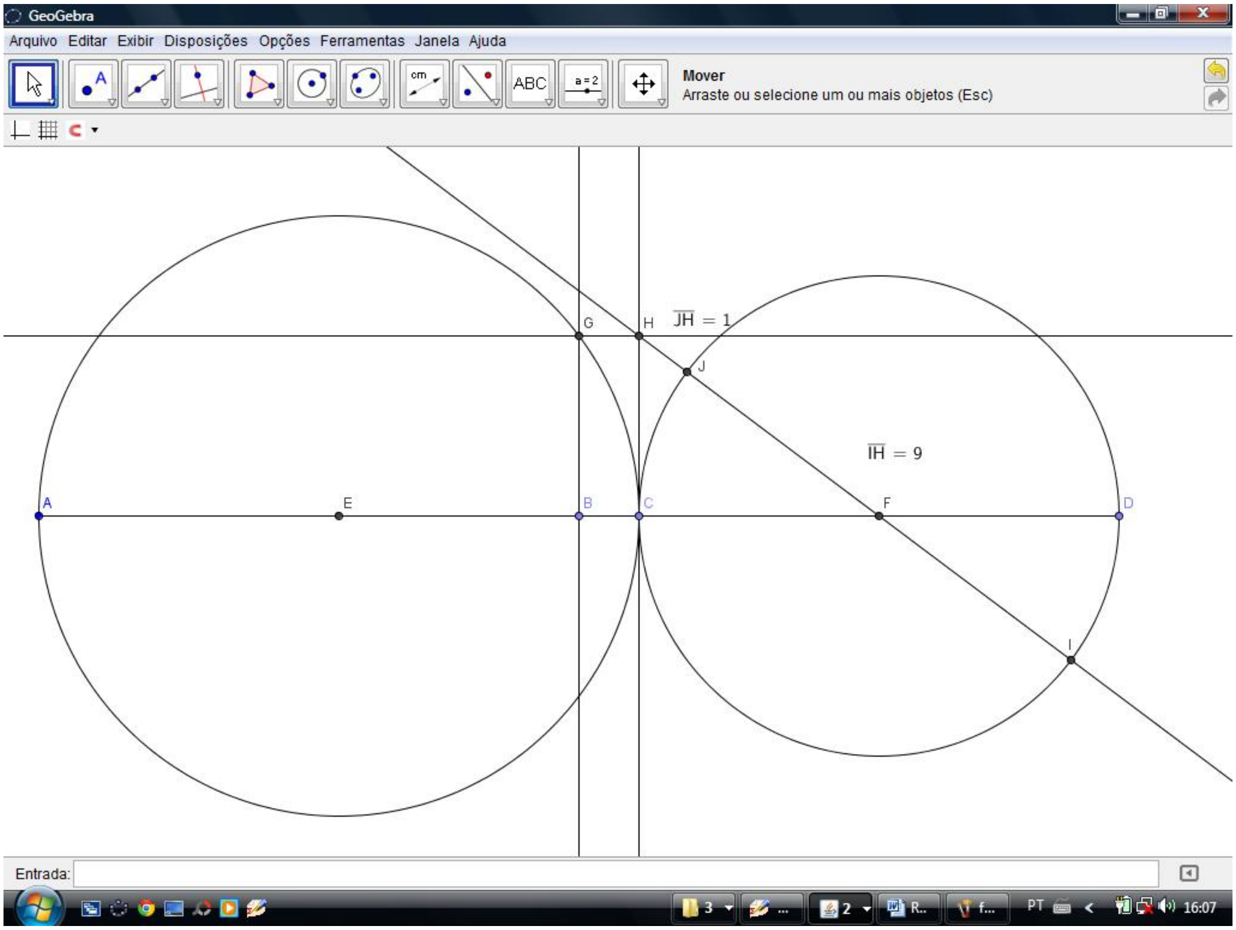

Figura 19: Exemplo do Método de Euclides 2º Caso

De fato, como $\overline{HC} = \overline{BG} = \sqrt{c}$ e $(\overline{HC})^2 = \overline{HJ} \cdot \overline{HI}$ temos que $c = \overline{HJ} \cdot \overline{HI}$, além disto, temos por construção que $|b| = \overline{HJ} + \overline{HI}$, logo:

$$\overline{HJ} - \overline{HI} = |b| = 8$$

$$\overline{HJ} \cdot \overline{HI} = |c| = 9$$

Como $CD = IJ = |b|$ é o diâmetro da circunferência, temos que:

Se $b < 0$, então as raízes são $x_1 = \overline{HI}$ e $x_2 = -\overline{HJ}$ e;

Se $b > 0$, então as raízes são $x_1 = -\overline{HI}$ e $x_2 = \overline{HJ}$.

6 Considerações Finais

O contexto atual da educação escolar requer que o professor diversifique as formas de resolver um mesmo problema a fim de ampliar o campo de visão do aluno aumentando sua assimilação do conteúdo.
Durante toda a história, matemáticos criaram diferentes formas de resolução da equação do

segundo grau e todas elas têm a sua devida importância para o desenvolvimento do ensino.
Neste trabalho tratamos das formas geométricas desenvolvidas por Descartes e Euclides. As demonstrações geométricas apresentadas estão relacionadas às equações do segundo grau na tentativa de proporcionar ao aluno uma forma concreta de resolução, utilizando materiais como régua e compasso e não simplesmente aplicando a famosa fórmula desenvolvida por Bháskara.
Além disso, podemos constatar que o uso do software Geogebra facilita a aprendizagem e a assimilação dos conceitos matemáticos, pois possibilita uma visão mais precisa das demonstrações geométricas.
É importante ressaltar que mesmo sendo um método cativante para os alunos nas aulas de geometria e desenho geométrico, as resoluções algébricas não devem ser esquecidas, muito pelo contrário, as resoluções devem vir com a justificativa algébrica. Ainda, é interessante utilizarmos este método geométrico para obtermos raízes para equações com coeficientes inteiros e pequenos para facilitar a compreensão dos alunos, visto que alguns podem não possuir um material de boa precisão o que poderia fazer com que não encontrem o resultado desejado.

7 Agradecimentos

Agradeço a Deus que me guiou na estrada, nestes 500 km semanais durante os dois anos de curso, fazendo com que tivesse sempre uma boa viagem. À minha amada e maravilhosa esposa, Luísa, que sempre me apoiou e com muita paciência me incentivou durante todo este projeto, principalmente nesta reta final. Ao meu filho Gabriel, que me dá muitas alegrias pelo simples fato de existir. Ao meu amigo, Cap Luiz, colega de mestrado e de trabalho, pelo companheirismo e amizade durante todo este curso. Ao Colégio Militar de Belo Horizonte, em especial ao Cel Everton e ao Maj Fernando, que permitiram e possibilitaram para que eu pudesse frequentar este Mestrado. Ao 11º Batalhão de Infantaria de São João Del Rey que sempre que solicitado me forneceu apoio logístico durante o curso. Aos meus colegas e professores do mestrado, pela dedicação nestes dois anos de muito estudo e esforço. Ao meu orientador, Professor Fábio, pelas orientações na produção deste trabalho. E a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão desse Mestrado.

Referências

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1974.

FRAGOSO, W. C., *Uma Abordagem Histórica da Equação do 2° grau*. Revista do Professor de Matemática, n°43, 2000, p. 20-25

Geogebra. Disponível em ¡http://www.geogebra.org/cms/pt.BR¿. Acesso em 18 jan. 2015.

GILBERTO, G. Garbi. *O Romance das equações algébricas*. 2.ed. São Paulo:Editora livraria da física, 2007.

JÚNIOR, L. P.S., *Construções Geométricas por Régua e Compasso e Números*

Construtíveis. Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia. 2013.

TUNALA, N. *Resolução geométrica da equação do 2o grau.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 12, [199?]

VALE, A.F.A., *As Diferentes Estratégias de Resolução da Equação do Segundo Grau.* Universidade Federal Rural do Semiárido, Campus Mossoró, 2013.

VÁRHIDY, C. G. J. L., *Desenho Geométrico: uma ponte entre a álgebra e a geometria - Resolução de Equações pelo Processo Euclidiano.* Universidade Federal de Ouro Preto, 2010.

WAGNER, E., *Construções Geométricas.* 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

WAGNER, E., *Um pouco sobre Descartes.* Revista do Professor de Matemática nº 19, 1991, p. 9-14.