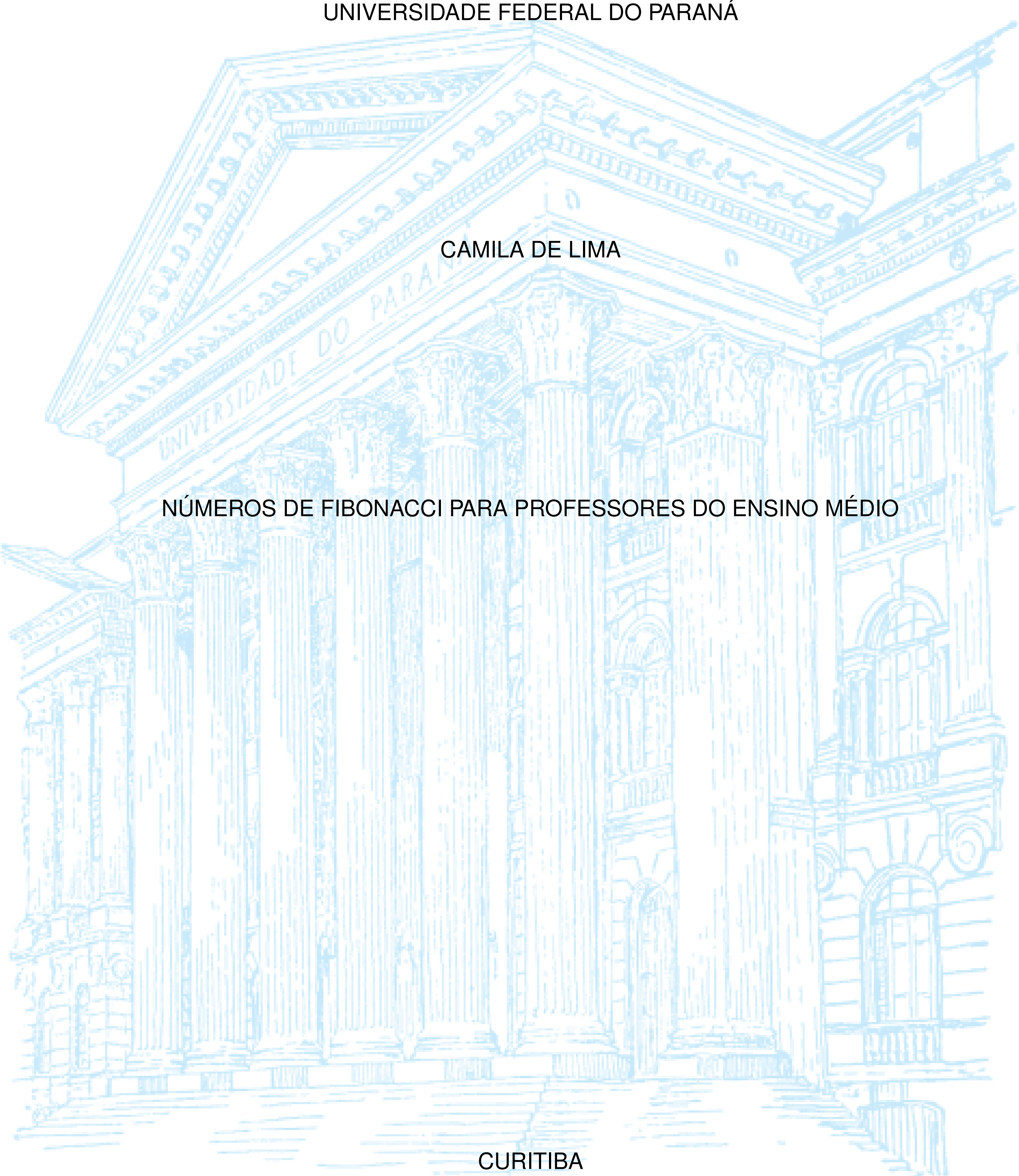
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CAMILA DE LIMA



NÚMEROS DE FIBONACCI PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

CURITIBA

2024

CAMILA DE LIMA

NÚMEROS DE FIBONACCI PARA PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

CURITIBA

2024

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Lima, Camila de
Números de Fibonacci para professores do ensino médio / Camila de Lima. – Curitiba, 2024.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Luiz Antonio Ribeiro de Santana

1. Indução (Matemática). 2. Sequências (Matemática). 3. Frações contínuas. 4. Divisão. 5. Geometria Euclidiana . I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). III. Santana, Luiz Antonio Ribeiro de. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **CAMILA DE LIMA** intitulada: **Números de Fibonacci para professores de Ensino Médio**, sob orientação do Prof. Dr. LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.
A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 19 de Abril de 2024.

Assinatura Eletrônica
20/04/2024 02:16:04.0
LUIZ ANTONIO RIBEIRO DE SANTANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
22/04/2024 15:40:15.0
CRISTIAN SCHMIDT
Avaliador Externo (PONTIFICA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANA)

Assinatura Eletrônica
20/04/2024 19:39:22.0
ALEXANDRE LUIS TROVON DE CARVALHO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

A meu u_{n-1}, e meu u_{n+1}, sem os quais essa u_n não teria sentido.

Agradecimentos

A meu orientador, professor Luiz Antonio Ribeiro de Santana, que performou o impossível me resgatando para esse trabalho, e me mostrou que o cuidado com o educando também existe no Ensino Superior.

Ao professor Alexandre Trovon, que sempre acreditou em meu potencial.

A Helena, pela paciência e parceria irrestritas.

A minha família, em especial meus pais, meus irmãos e minha tia, que sempre estiveram disponíveis no cuidado com meu filho para que eu tivesse tempo disponível na dedicação a esse trabalho.

A meus pais, novamente. A meu pai, por ter enchido a casa com livros de matemática, inclusive com sua própria pesquisa sobre os números de Fibonacci; e a minha mãe, por ter me passado sua paixão pela educação, leitura e estudo.

"Life is good for only two things, discovering mathematics and teaching mathematics."

Siméon Denis Poisson

Resumo

Esse trabalho é uma tradução adaptada do livro *Fibonacci Numbers*, de Nikolai Vorob'ev, voltado para professores do Ensino Médio, com foco especial em indução matemática, divisibilidade e frações contínuas.

Palavras-chave: Indução matemática, divisibilidade, sequências recursivas, frações contínuas, geometria euclidiana.

Abstract

The present work is an translation of the book *Fibonacci Numbers*, by Nikolai Vorob'ev, adapted to High School teachers, its main focus being mathematical induction and divisibility rules.

Keywords: Recursive sequences, mathematical induction, divisibility, continued fractions, euclidean geometry.

Sumário

Prefácio

Existem alguns problemas dentro da matemática elementar que ultrapassam a barreira do seu criador, adquirindo uma aura de "folclore matemático", muitas vezes dissociando-se completamente de seu autor. Tais problemas estão espalhados na literatura da matemática popular (or recreativa) e é muito complicado de localizar sua fonte exata. Esses problemas comumente circulam em diferentes versões. Algumas vezes, muitos deles se combinam num problema único e mais complexo, noutras ocorre o contrário e um problema se divide em vários outros mais simples, caso em que é difícil distinguir entre o fim de um deles o começo de outro. Devemos ter em mente que em cada um desses problemas estamos lidando com pequenas teorias matemáticas, cada uma com suas próprias histórias, complexidades, e métodos característicos, todas contudo conectadas de perto com a história e métodos dos "grandes matemáticos".

Uma dessas teorias é a teoria dos números de Fibonacci. Ela vem de um famoso problema, que tem mais que 750 anos, sobre um par de coelhos. Os números de Fibonacci ainda hoje fornecem um dos capítulos mais fascinantes da matemática elementar. Problemas conectados com números de Fibonacci aparecem em muitos livros populares de matemática, são discutidos em encontros matemáticos e comumente aparecem em olimpíadas.

O presente texto é uma tradução e adaptação de um livreto o qual contém uma série de problemas-tema de diversas reuniões do Clube Matemático da Universidade de Leningrado no ano acadêmico de 1949 - 1950. De acordo com os desejos dos participantes, as questões discutidas foram majoritariamente de teoria dos números, um tema que é desenvolvido em detalhes aqui. O original desse livro foi pensado para principalmente alunos de 16 ou 17 anos de idade, participantes da educação russa. Essa tradução adaptada é voltada para professores de Ensino Médio na educação brasileira. Aos leitores que se interessarem muito por séries recorrentes, é recomendada a leitura de uma pequena apostila chamada "Indução Matemática", de Abramo Hefez ou também o livro Aritmética, mais completo, também de Abramo, que consta tanto na bibliografia do PROFMAT quanto nas referências desse trabalho.

Na introdução há a apresentação histórica do problema de *Fibonacci*, o problema continua sendo explorado durante todo o texto, mas cada capítulo possui foco sobre um tópico específico que pode ser explorado com essa sequência: indução matemática, divisibilidade, frações contínuas e geometria. Na conclusão são citados novos problemas a serem explorados.

Introdução

O mundo antigo era rico em excelentes matemáticos. Muitas conquistas dos antigos matemáticos são admiradas até hoje pela perspicácia de seus autores. Nomes como Euclides, Arquimedes e Heron são conhecidos por aqueles que frequentaram a escola básica. As coisas são diferentes quando falamos sobre a matemática da Idade Média. Com exceção de François Viète, que viveu já no século XVI, e alguns matemáticos mais próximos do nosso tempo, a matemática escolar não menciona um único nome conectado à Idade Média. E isso não é por acaso. Nessa época, a ciência se desenvolveu extremamente devagar, e matemáticos de forte estrutura foram poucos. Como citado em (BERLINGHOFF, 2003) página 47, há pouco registro da Matemática desenvolvida no período.

O mais notável deles foi o italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por seu apelido Fibonacci (uma abreviação de *filius Bonacci*) e o seu maior trabalho foi o *Liber Abacci* (O livro do ábaco). Esse livro, escrito em 1202, temos acesso apenas a sua segunda versão, de 1228. Podemos ler mais sobre isso no capítulo 14 de (BOYER UTA C. MERZBACH, 1991). *Liber Abacci* é um trabalho volumoso, contendo quase todo o conhecimento aritmético e algébrico daqueles tempos. Desempenhou uma parte notável no desenvolvimento da matemática na Europa Ocidental nos séculos subsequentes. Por exemplo, foi com esse livro que os europeus ficaram familiarizados com os algarismos indo-arábicos. A teoria contida no *Liber Abacci* é ilustrada por muitos exemplos, que compõe uma parcela significativa do livro. Considere um desses exemplos, que pode ser encontrada nas páginas 123-124 do manuscrito de 1228: "Quantos pares de coelhos nascem de um único par em um ano?". Teremos a seguir a transcrição do problema como ele consta no livro:

"Alguém colocou um par de coelhos em um certo lugar, cercado em todos os lados, para descobrir quantos pares de coelhos nasceriam ali durante um ano, assumindo que em todo mês cada par de coelhos produz um novo par de coelhos, e que coelhos começam a se reproduzir dois meses após seu nascimento.

Como o primeiro par se reproduz já no primeiro mês, nesse mesmo mês já teremos 2 pares. Um desses pares, o primeiro, reproduzirá também no mês seguinte, de modo que no segundo mês teremos 3 pares. Dois desses três se reproduzirão no mês seguinte, produzindo dois novos pares no terceiro mês, totalizando 5 pares de coelhos nesse mês; dos cinco, três estarão prontos para reproduzir no quarto mês, fazendo com o total de pares de coelho suba para 8. Dos oito, cinco produzirão novos cinco, que somados aos oito existentes, totalizarão 13 pares no quinto mês. Do novo total, cinco ainda não estão maduros para reprodução, mas os outro oitos estão, nos dando um resultado de 21 pares no sexto mês. Adicionando os treze pares que nascerão no sétimo mês, 34 pares são obtidos. Adicionados aos vinte e um nascidos no mês oito, teremos 55 pares nesse mês. A esses, somados os trinta e quatro nascidos no mês nove, o total será 89; que será acrescido de novo em cinquenta e cinco pares, nascidos no décimo mês, com 144 pares de coelho resultantes. Adicionando oitenta e nove mais pares, que nascem no décimo primeiro mês, chegamos a 233 pares, nesses adicionamos finalmente os cento e quarenta e quatro pares nascidos no último mês. Chegamos então a 377 pares: esse é o número de pares procriados a partir do primeiro único par ao fim de um ano."

Início: um único par (1)	
Mês	Número de pares
Primeiro	2
Segundo	3
Terceiro	5
Quarto	8
Quinto	13
Sexto	21
Sétimo	34
Oitavo	55
Nono	89
Décimo	144
Décimo Primeiro	233
Décimo Segundo	377

Tabela 1 – Números de pares oriundos de um único par.

Na tabela acima podemos ver como chegamos ao total: adicionamos o primeiro e o segundo números, 1 e 2; o segundo ao terceiro; o terceiro ao quarto; o quarto ao quinto; e dessa maneira, um após o outro, até adicionarmos o décimo ao décimo primeiro (144 e 233) e obtermos o número total de pares de coelhos; e é possível fazer isso dessa maneira por um número infinito de meses."Agora, iremos de coelhos para números e examinaremos a seguinte sequência numérica:

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \tag{1}$$

na qual cada termo é a soma dos dois termos anteriores, isto é, para todo $n \geq 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{2}$$

Sequências como essa são muito comuns na Matemática, em que cada termo é definido de acordo com o termo anterior, e são chamadas de *sequências recursivas*, como consta no capítulo 3 de (LIMA, 2016) e também no capítulo 7 de (MORGADO, 2015). O processo da definição sucessiva dos elementos dessas sequências é chamado de *processo recursivo* e a equação (2) é chamada de *relação recursiva*. O leitor pode saber mais sobre os elementos da teoria geral de sequências recursivas no livro de (HEFEZ, 2009) citado acima.

A condição (2) não é suficiente para determinar (1). Há um número infinito de sequências que satisfaz esse critério. Alguns exemplos:

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50 \dots$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 \dots$$

$$-1, -5, -6, -11, -17, \dots$$

Isso significa que para a construção da sequência oriunda da situação com os coelhos, a condição (2) é incompleta, precisamos de algumas especificações. Por exemplo, podemos definir os primeiros termos da sequência (1). Quantos termos teríamos que definir para que seja possível calcular todos os outros usando apenas a condição (2)?

Para responder a essa pergunta, devemos observar que para a determinação de um termo da sequência, necessitamos de dois termos precedentes. Não há termo precedente para u_1 e há apenas um termo precedente para u_2. Portanto, além da condição (2), ao definirmos os dois primeiros termos, poderemos determinar a sequência. Isso é obviamente o suficiente para que determinemos qualquer termo de uma sequência definida por (1) e (2). Determinamos u_3 como a soma de u_1 e u_2, seus dois precedentes; u_4, como a soma de u_3 e u_2; u_5 como a soma de u_4 e u_3 e continuamos dessa maneira por um número infinito de termos. Desse modo, dois termos vizinhos sempre definem o termo que os seguem imediatamente, podemos alcançar o termo com qualquer índice que se queira e calculá-lo.

Vamos agora nos voltar para o caso importante e particular da sequência (1), onde temos $u_1 = 1$ e $u_2 = 1$. Como observado acima, a condição (2) nos permite calcular sucessivamente os termos dessa série. É fácil de verificar que, nesse caso, os primeiros 14 números serão

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,$$

números esses que já vimos no problema dos coelhos. Para homenagear o autor do problema, essa sequência é chamada de *sequência de Fibonacci* e seus termos são conhecidos como *números de Fibonacci*.

Os *números de Fibonacci* e suas variadas propriedades serão o tema explorado nesse livro.

1 Propriedades de soma

Essa seção apresenta e prova 13 propriedades envolvendo a sequência de Fibonacci. Para algumas propriedades, a prova é bem intuitiva, outras exigirão métodos mais refinados de prova e algum conhecimento prévio, como a soma telescópica.

1.1 Soma dos primeiros n termos da sequência.

Começamos esse capítulo somando os n primeiros termos da *sequência de Fibonacci*. A definição formal da sequência será dada por duas condições:

$$u_1 = u_2 = 1 \tag{1.1}$$

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \tag{1.2}$$

Reorganizando a equação (1.2), temos $u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$, e com isso podemos tratar cada termo como:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - u_2 \\ u_2 &= u_4 - u_3 \\ u_3 &= u_5 - u_4 \\ u_4 &= u_6 - u_5 \\ &\cdots \\ u_{n-1} &= u_{n+1} - u_{n-1} \\ u_n &= u_{n+2} - u_{n-1}. \end{aligned}$$

Um fato interessante acontece ao somar todas essas equações: no lado esquerdo, temos o somatório de u_1 a u_n, e no lado direito, vemos que u_3 da primeira equação será subtraído pelo u_3 da segunda. Analogamente, u_4 da segunda com u_4 da terceira e assim sucessivamente até a última equação, restando apenas o $-u_2$ da primeira com o u_{n+2} da última (detalharemos um pouco mais esse método de soma nas seções seguintes).

A soma de todas as equações então será dada por $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots+u_{n-1}+u_n = u_{n+2} - u_2$ ou, usando a notação de somatório,

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = u_{n+2} - 1. \tag{1.3}$$

1.2 Soma dos primeiros termos ímpares da sequência

A equação (1.2) pode ser representada por $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ (observemos que isso é válido para $n \geq 3$ e que $u_1 = u_2$), logo:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ u_3 &= u_4 - u_2 \\ u_5 &= u_6 - u_4 \\ u_7 &= u_8 - u_6 \\ &\dots \\ u_{2n-1} &= u_{2n} - u_{2n-2}. \end{aligned}$$

Somando todas as equações termo a termo, teremos termos se anulando novamente, resultando apenas em $u_1 + u_3 + u_5 + u_7 + \cdots + u_{2n-1} = u_{2n}$:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{2n-1} = u_{2n}. \tag{1.4}$$

Esse resultado nos indica que a soma dos ímpares nos dá o termo seguinte ao último ímpar somado. Por exemplo, $u_1 + u_3 = u_4$, $u_1 + u_3 + u_5 = u_6$, ... Isto quer dizer que somando dois ímpares obtemos o termo de índice 4, somando três ímpares, o termo de índice 6, quatro ímpares, o termo 8... Somando os primeiros n ímpares, temos o termo u_{2n}.

1.3 Soma dos primeiros pares da sequência

Para determinar a soma dos termos pares da *sequência de Fibonacci*, usaremos as duas propriedades que acabamos de provar: tiraremos da soma dos primeiros termos a soma dos primeiros termos ímpares. A prova não é tão imediata quanto soa. Reescrevendo a propriedade encontrada em (1.3): $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n+u_{n+1}+\cdots+u_{2n-1}+u_{2n} = u_{2n+2}-1$ de modo que tenhamos a soma dos $2n$ primeiros termos. Agora podemos subtrair a soma dos ímpares que é dada por $u_1+u_3+u_5+\cdots+u_{2n-1} = u_{2n}$ como acabamos de provar em (1.4). Subtraindo as duas equações acima, temos $u_2+u_4+u_6+\cdots+u_{2n} = u_{2n+2}-1-u_{2n}$. Porém, sabemos pela equação (1.2) que a soma de dois vizinhos resulta no consecutivo deles, ou seja $u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n+2}$, portanto $u_{2n+2} - u_{2n} = u_{2n+1}$.

Temos então:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{2n} = u_{2n+1} - 1. \tag{1.5}$$

1.4 Soma alternada dos termos da sequência

Um outro resultado interessante pode ser obtido ao subtrairmos a soma dos pares (1.5) da soma dos ímpares (1.4): $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = u_{2n} - (u_{2n+1} - 1)$.

Reescrevendo o lado direito e usando novamente a relação (1.2): $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} = 1 - u_{2n-1}$. Essa é a soma alternada de um número par de termos da *sequência de Fibonacci*. Vamos adicionar o termo seguinte em ambos os lados da equação anterior:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} = 1 - u_{2n-1} + u_{2n+1}. \tag{1.6}$$

Novamente, pela relação (1.2), $u_{2n+1} - u_{2n} = u_{2n-1}$.

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1. \tag{1.7}$$

Por fim, as equações (1.6) e (1.7) podem ser escritas de uma maneira um pouco mais organizada: para termos a soma alternada dos n primeiros termos da sequência, não importando se par ou ímpar, podemos unir as expressões mencionadas acima, conforme segue:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1. \tag{1.8}$$

1.5 Soma dos quadrados dos primeiros n termos

As fórmulas (1.3) e (1.4) foram obtidas ao somarmos uma série de equações que vieram pela definição da sequência. A esse tipo de soma, onde termos subsequentes se anulam, chamamos de soma telescópica. Podemos utilizar esse procedimento para a nossa próxima prova. Ao multiplicarmos os dois membros da igualdade (1.2) por u_n obtemos:

$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_n u_{n-1}.$$

Vamos lembrar ainda de parte da definição da sequência dado por (1.1), sobre os dois termos iniciais serem iguais a um. Somando termo a termo a série de equações abaixo

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1 u_2 \\ u_2^2 &= u_2 u_3 - u_1 u_2 \\ u_3^2 &= u_3 u_4 - u_2 u_3 \\ &\cdots \\ u_n^2 &= u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n, \end{aligned}$$

temos:

$$\sum_{i=1}^{n} u_n^2 = u_n u_{n+1}. \tag{1.9}$$

1.6 Equação da soma de índices

Falaremos agora sobre um conceito muito importante para a continuidade desse texto e um dos motivadores desse trabalho: o Princípio de Indução Matemática (PIM). O

PIM não é conteúdo explícito na BNCC, apesar de que há alguns pontos sobre a formação do raciocínio algorítmico, e indução não é comumente ensinado no Ensino Médio brasileiro. Não estamos em um momento em que falta informação, muito pelo contrário, temos muita informação ao nosso dispor, o tempo inteiro. O que está em falta hoje é o uso da lógica para lidar com essa informação toda, nos falta compreensão do que lemos e maneiras de usar essa informação em argumentação lógica. O PIM pode nos ajudar com tudo isso, como citado na introdução de (HEFEZ, 2009). Aqui, o usaremos para provar muitas relações dentro da *sequência de Fibonacci*. (Todas que provamos até agora também poderiam ter sido provadas utilizando o PIM.)

O método de indução afirma que para provar que uma certa proposição está correta para qualquer número natural basta estabelecer que a sentença é verdadeira para 1; e sendo verdadeira a sentença para um n natural qualquer, segue que é verdadeira para o número $n+1$.

Qualquer prova indutiva de uma proposição verdadeira é constituída dessas duas partes. Na primeira parte, às vezes chamado de passo básico da indução, é estabelecido que a proposição é verdadeira para $n = 1$. Na segunda parte da prova, a certeza da proposição é assumida para um valor fixo (mas arbitrário) n e, a partir dessa assunção, chamada de hipótese, a dedução é feita de que a proposição é também verdadeira para $n + 1$. A essa segunda parte chamamos *passo indutivo* ou *transição indutiva*. O leitor poderá ler mais sobre os tipos de indução matemática em (HEFEZ, 2009).

A apresentação detalhada do método de indução e numerosos exemplos da aplicação de suas diferentes formas podem ser encontrados em (SOMINSKII, 1961) e em (HEFEZ, 2009). Então, em particular, uma versão do método com a transição indutiva "de n e $n+1$ para $n+2$"empregado por nós a seguir é dado por (SOMINSKII, 1961). Provaremos agora por indução a seguinte fórmula:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1}. \tag{1.10}$$

Faremos a indução sobre m. Então, ao passo básico, seja $m = 1$:

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2.$$

Lembrando que nos referimos a sequência de Fibonacci e que os dois primeiros termos são iguais a 1, chegamos em $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$, que é obviamente verdadeira pois faz parte da definição da sequência e já a trabalhamos muito até aqui. Só para um novo exemplo, podemos observar que a fórmula (1.10) também é verdadeira para $m = 2$:

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} + u_n + u_n = u_{n+1} + u_n.$$

A base da indução está provada, vamos ao passo indutivo. A transição pode ser feita da seguinte maneira: precisamos supor verdadeira a fórmula (1.10) para $m = k$ e para

$m = k+1$, vamos mostrar que ela também é verdadeira para $m = k+2$. Para isso, seja $u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k_1}$ e $u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$. Adicionando as duas equações acima termo a termo, obtemos

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}u_k + u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+1} + u_n u_{k+2}.$$

Reorganizamos para

$$u_{n+k} + u_{n+k+1} = u_{n-1}(u_k + u_{k+1}) + u_n(u_{k+1} + u_{k+2}).$$

Lembrando ainda mais uma vez sobre a soma de termos vizinhos nos levar ao consecutivo, chegamos a

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3},$$

que é o resultado que buscávamos.

Vamos agora observar alguns resultados que podem ser concluídos a partir dessa fórmula que acabamos de provar. Em primeiro lugar, seja $m = n$, isto é, $u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n-1} = u_n(u_{n-1}+u_{n+1})$. Essa igualdade nos mostra que u_{2n} é divísivel por u_n. No próximo capítulo, vamos provar um resultado ainda mais abrangente. Como $u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$, a igualdade acima pode ser escrita assim:

$$u_{2n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} + u_{n+1}),$$

ou seja, $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$. Isto é, a diferença entre os quadrados de dois números de Fibonacci que diferem de duas posições é outro número de Fibonacci.

De maneira semelhante, ao tomarmos $m = 2n$, podemos mostrar uma outra identidade envolvendo dessa vez u_{3n}, conforme segue: Reescrevendo (1.10), temos

$$u_{n+2n} = u_{n-1}u_{2n} + u_n u_{2n+1}.$$

Como $u_{2n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$,

$$\begin{aligned} u_{3n} &= u_{n-1}(u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2) + u_n u_{2n+1} \\ &= u_{n-1}u_{n+1}^2 - u_{n-1}^3 + u_n u_{2n+1} \\ &= u_{n-1}u_{n+1}^2 + u_n u_{2n+1} - u_{n-1}^3. \end{aligned}$$

Observemos que: $u_{2n+1} = u_{n+n+1} = u_{n+1+n} = u_n u_n + u_{n+1}u_{n+1} = u_n^2 - u_{n+1}^2$. Então:

$$\begin{aligned} u_{3n} &= u_{n-1}u_{n+1}^2 + u_n(u_n^2 + u_{n+1}^2) - u_{n-1}^3 \\ &= u_{n-1}u_{n+1}^2 + u_n^3 + u_n u_{n+1}^2 - u_{n-1}^3 \\ &= u_{n+1}^2(u_{n-1} + u_n) + u_n^3 - u_{n-1}^3 = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3. \end{aligned} \tag{1.11}$$

1.7 Nada muito especial aqui até agora.

Queremos agora provar a seguinte fórmula, que será útil no restante do texto.

$$u_{n+1}^2 = u_n u_{n+2} + (-1)^n. \tag{1.12}$$

Faremos uma indução sobre n. Para o passo básico, $n = 1$:

$$u_2^2 = u_1 u_3 - 1 = 1 \cdot 2 - 1 = 1,$$

o que é obviamente correto. Passando para a transição indutiva, precisamos supor verdadeira a equação (1.12) para um valor n inteiro. Adicionando $u_{n+1}u_{n+2}$ nos dois lados da equação, temos:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_{n+2} &= u_n u_{n+2} + u_{n+1}u_{n+2} + (-1)^n \\ u_{n+1}(u_{n+1} + u_{n+2}) &= u_{n+2}(u_n + u_{n+1}) + (-1)^n \\ u_{n+1}u_{n+3} &= u_{n+2}^2 + (-1)^n, \end{aligned}$$

isto é $u_{n+2}^2 = u_{n+1}u_{n+3} + (-1)^{n+1}$, o que confirma que a fórmula (1.12) é válida para todo n natural.

1.8 Três pequenas propriedades

De maneira parecida, temos as seguintes propriedades que também poderão ser provadas por indução sobre n:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{2n-1}u_{2n} = {u_{2n}}^2, \tag{1.13}$$

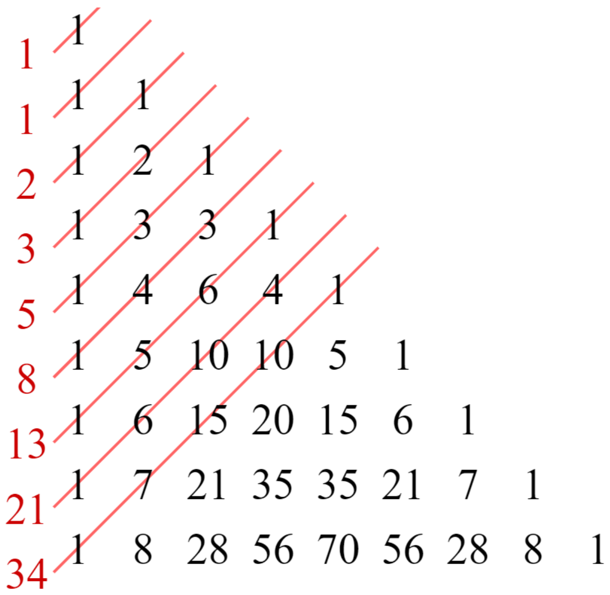
$$\sum_{i=1}^{n} u_{2n}u_{2n+1} = {u_{2n+1}}^2 - 1, \tag{1.14}$$

e

$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \cdots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n-4} - (n+3). \tag{1.15}$$

1.9 A sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal

Existe uma conexão entre os números de Fibonacci e outro importante conjunto numérico, os coeficientes binomiais. Para aprofundar essa relação, iremos utilizar o *triângulo de Pascal*, mais informações e aplicações sobre ele, assim como sua definição, pode ser encontrado na seção 4.3 de (LIMA, 2016). Aqui, iremos focar em suas relações com os *números de Fibonacci*.



Formamos diagonais a partir de um número para o número acima e à direita, as chamamos de diagonais ascendentes. A soma dos elementos da primeira é formada apenas pelo 1 inicial, da segunda também por 1, a soma da terceira nos resulta 2, aí 3, 5, 8, 13... Para provar que a soma das diagonais nos fornece os números de Fibonacci, é suficiente que mostremos que a soma de todos os números formando as diagonais de número $(n-2)$ e $(n-1)$ do triângulo de Pascal é igual a soma dos números que formam a n-ésima diagonal (dado que o n-ésimo número de Fibonacci é formado pela soma de seus dois antecessores), a prova pode ser consultada em (LIMA, 2016) página 108. Sabemos que cada linha do triângulo de Pascal é formada pelos coeficientes binomiais referentes àquele índice, considerando a primeira linha como linha zero e a primeira coluna também como linha zero.

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
 & & & & \cdots & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & C_n^4 & C_n^5 & C_n^6 & \ldots C_n^n
\end{array}.
$$

A primeira diagonal então é composta unicamente pelo elemento C_0^0, a segunda pelo elemento C_1^0, a terceira pela soma $C_0^2 + C_1^1$, a quarta pela soma $C_0^3 + C_1^2$, a quinta por $C_0^4 + C_1^3 + C_2^2$. A diagonal de número $(n-2)$ será então $C_{n-3}^0 + C_{n-4}^1 + C_{n-5}^2 + \ldots$ e a de número $(n-1)$: $C_{n-2}^0 + C_{n-3}^1 + C_{n-4}^2 + \ldots$ Somando as duas temos $C_{n-2}^0 + (C_{n-3}^0 + C_{n-3}^1) + (C_{n-4}^1 + C_{n-4}^2) + \ldots$. Sabemos que em coeficientes binomiais temos que $C_k^i + C_k^{i+1} = C_{k+1}^{i+1}$

e também que $C^0_{n-2} = C^0_{n-1} = 1$, então:

$$C^0_{n-1} + C^1_{n-2} + C^2_{n-3} + C^3_{n-4} + \dots$$

Que é a soma da n-ésima diagonal do triângulo.

Dessa prova e da fórmula (1.3), temos que a soma de todos os coeficientes binomiais que estão acima da n-ésima diagonal ascendente do triângulo de Pascal (incluindo a própria diagonal) é $u_{n+2} - 1$, dado que estamos somando todos os primeiros n termos da sequência. Usando as fórmulas (1.4), (1.5), (1.9) e outras parecidas, poderemos chegar a outras identidades similares que conectam os números de Fibonacci e os coeficientes binomiais (VOROB'EV, 2011) (p.15). Em (DUNHAM, 1991) (p.167) há também mais sobre o interesse de Newton na expansão binomial, bem como sua própria versão para a expansão, particularmente útil para expoentes negativos e racionais.

1.10 A fórmula de Binet

Até agora, nós definimos os números de Fibonacci com um processo de recorrência, isto é, indutivamente e usando seus antecessores. Porém, qualquer número de Fibonacci pode ser definido diretamente, como uma função de seu próprio sufixo. Para chegarmos a esse resultado, investigaremos várias sequências que satisfazem a relação (1.2: $u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$), podemos também nos referir a estas várias sequências como soluções da equação (1.2). Sejam as sequências:

$$V = v_1, v_2, v_3 \dots$$
$$V' = v'_1, v'_2, v'_3 \dots$$
$$V'' = v''_1, v''_2, v''_3 \dots$$

Para começar, considere os dois lemas a seguir:

<u>Lema 1.</u> Se V é solução da equação (1.2) e c um número arbitrário, então a sequência $cV(= cv_1, cv_2, cv_3, \dots)$ é também uma solução de (1.2).

<u>Lema 2.</u> Se as sequências V' e V'' são soluções de (1.2), então sua soma $V' + V''$ é também uma solução de (1.2).

Agora, sejam V' e V'' duas soluções não proporcionais de (1.2). Mostraremos que qualquer sequência V que é solução de (1.2) pode ser escrita como uma combinação linear de V' e V'': $c_1V'_1 + c_2V'_2$, com c_1 e c_2 constantes, podemos nos referir a essa combinação linear como a solução geral da equação (1.2). Ora, se as soluções V' e V'' não são proporcionais, então:

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \tag{1.16}$$

(essa prova pode ser feita por contradição e é sugerida como um exercício ao leitor). Agora, tomemos uma certa sequência V, que seja solução de (2). Essa sequência, como apontamos na Introdução, só é inteiramente definida se seus primeiros dois termos são dados. A ver, sejam c_1 e c_2 tais que:

$$\begin{cases} c_1 v_1' + c_2 v_1'' = v_1 \\ c_1 v_2' + c_2 v_2'' = v_2 \end{cases} \tag{1.17}$$

De acordo com os Lemas 1 e 2 que acabamos de definir, $c_1 V' + c_2 V''$ nos dá a sequência V.

Observando a condição (1.16), temos que o sistema (1.17) é possível em relação às constantes c_1 e c_2, para quaisquer valores de v_1 e v_2. São eles:

$$c_1 = \frac{v_1 v_2'' - v_2 v_1''}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'} \qquad \text{e} \qquad c_2 = \frac{v_1' v_2 - v_2' v_1}{v_1' v_2'' - v_1'' v_2'}. \tag{1.18}$$

Alocando os valores c_1 e c_2 na combinação linear citada acima, temos a definição da sequência V. Isso nos diz que para descrever todas as soluções da equação (1.2), é suficiente determinar quaisquer duas soluções não proporcionais. Vamos procurar soluções de (1.2) que também sejam progressões geométricas (PG), seja uma PG com primeiro termo igual a 1:$1, q, q^2, \dots q^{n-2}, q^{n-1}, q^n$. Já que essa PG é solução de (1.2), temos que

$$q^{n-2} + q^{n-1} = q^n, \tag{1.19}$$

ou ainda, dividindo os dois lados da equação por q^{n-2}:

$$1 + q = q^2. \tag{1.20}$$

As raízes dessa equação quadrática são as raízes das progressões que atendem aos nossos critérios. Importante ressaltar que a soma dessas raízes é 1 e seu produto é igual a -1. Sendo as raízes:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Portanto, duas raízes diferentes, que gerarão duas progressões não proporcionais. Tendo em mente a combinação linear inicial, os lemas 1 e 2, podemos afirmar que todas as sequências da forma

$$c_1 + c_2, c_1\alpha + c_2\beta, c_1\alpha^2 + c_2\beta^2, \dots, c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1} \tag{1.21}$$

são soluções de (1.2). Em particular, para certos valores c_1 e c_2, a sequência (1.21) deverá também resultar na sequência de Fibonacci. Para isso, como comentamos anteriormente, é necessário que determinemos c_1 e c_2 que satisfaçam:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = u_1 \\ c_1\alpha + c_2\beta = u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para c_1 e c_2, chegamos a

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Lembrando que $u_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1}$, podemos desenvolver o n-ésimo termo da *sequência de Fibonacci* através de seu sufixo como:

$$u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right)\left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{1.22}$$

Ou, de maneira similar:

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

A fórmula (1.22) é chamada de *fórmula de Binet* (DIDOMENICO, 1997) em homenagem ao primeiro matemático que a provou, apesar de já ser conhecida por Abraham deMoivre. Obviamente, fórmulas similares podem ser alcançadas partindo de outras soluções de (1.2). O leitor poderá determinar novas para as sequências sugeridas na introdução.

1.11 Uma consequência do uso da fórmula de Binet

Com a ajuda da fórmula de Binet, é possível calcular a soma de várias séries que envolvem a sequência de Fibonacci. Por exemplo, vamos calcular a soma de $u_3 + u_6 + u_9 + \cdots + u_{3n}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_{3n} &= \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^6 - \beta^6}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{\alpha^{3n} - \beta^{3n}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^3 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^{3n} - (\beta^3 + \beta^6 + \cdots + \beta^{3n})].\end{aligned}$$

Aplicando a soma das progressões geométricas tanto em α quanto em β:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^3 + \alpha^6 + \cdots + \alpha^{3n} - (\beta^3 + \beta^6 + \cdots + \beta^{3n})]\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3+3n} - \alpha^3}{\alpha^3 - 1} - \frac{\beta^{3+3n} - \beta^3}{\beta^3 - 1}\right).\end{aligned}$$

Vamos lembrar que α e β satisfazem a equação (1.19):

$$\alpha^3 - 1 = \alpha + \alpha^2 - 1 = \alpha + \alpha + 1 - 1 = 2\alpha.$$

Da mesma maneira, $\beta^3 - 1 = 2\beta$. Portanto:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_{3n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha} - \frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2}{2} - \frac{\beta^{3n+2}-\beta^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right).\end{aligned}$$

Pela fórmula de Binet, podemos afirmar que

$$\sum_{i=1}^{n} u_{3n} = \frac{1}{2}(u_{3n+2} - u_2),$$

ou ainda, que:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{3n} = \frac{u_{3n+2}-1}{2}. \tag{1.23}$$

1.12 Soma dos cubos dos n primeiros números de Fibonacci

Como um outro exemplo do uso da fórmula de Binet, iremos calcular a soma dos cubos dos n primeiros números de Fibonacci.

Notemos que

$$u_k^3 = \left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3 = \frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k}-3\alpha^{2k}\beta^k+3\alpha^k\beta^{2k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}\right)$$

Reorganizaremos essa equação para que apliquemos a fórmula de Binet.

$$\begin{aligned}u_k^3 &= \frac{1}{5}\left[\frac{\alpha^{3k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}} - 3\alpha^k\beta^k\left(\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{5}}\right)\right]\\ u_k^3 &= \frac{1}{5}(u_{3k} - 3(\alpha\beta)^k u_k).\end{aligned}$$

Lembremos que o produto $\alpha\beta$ nos retorna -1, já que são raízes de (1.20).

$$u_k^3 = \frac{1}{5}(u_{3k} - (-1)^k 3u_k) = \frac{1}{5}(u_{3k} + (-1)^{k+1} 3u_k)$$

Portanto:

$$u_1^3 + u_2^3 + \cdots + u_n^3 = \frac{1}{5}[(u_3 + u_6 + \cdots + u_{3n}) + 3(u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n)].$$

Chegamos ao resultado da soma de termos alternados da sequência na fórmula (1.8) e temos o resultado (1.23) da seção anterior, então:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} u_n^3 &= \frac{1}{5}\left[\frac{u_{3n+2}-1}{2} + 3 - (-1)^{n+1}u_{n-1})\right]\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{u_{3n+2}-1}{2} + 3 - 3(-1)^{n+1}u_{n-1}\right]\\ &= \frac{1}{5}\left[\frac{u_{3n+2}-1+6-6(-1)^{n+1}u_{n-1}}{2}\right] = \frac{u_{3n+2}+6(-1)^{n+1}u_{n-1}+5}{10}.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Esse resultado usou não apenas a *fórmula de Binet*, como também outras ferramentas já provadas no texto. Esse fato se repetirá ao longo dos capítulos.

1.13 Uma aproximação suficiente

Mostraremos que o inteiro mais próximo de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ é u_n. Com calma. É interessante que pensemos o quão rápido os números de Fibonacci estão crescendo. A fórmula de Binet também pode nos ajudar a responder a essa questão.

Teorema 1.13: O número de Fibonacci dado por u_n é o número inteiro mais próximo do n-ésimo termo a_n da progressão geométrica em que o primeiro termo é igual a $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ e a razão vale α.

Prova: O caminho que iremos tomar é provar que a diferença absoluta entre u_n e a_n é sempre menor do que $\frac{1}{2}$. Explicitando a diferença entre os termos:

$$|u_n - a_n| = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

Lembrando que $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e que $2 < \sqrt{5} < 3$, podemos afirmar que $|\beta| < 1$ e ainda que $|\beta|^n < 1$ para todo n. Como ainda temos a divisão por $\sqrt{5}$ e $\sqrt{5} > 2$, podemos afirmar que, sim, $\frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$. ■

É também possível discutir o conceito de limites com os alunos, o teorema (1.13) pode ser provado usando o fato de que

$$\lim_{x\to\infty} |u_n - a_n| = 0.$$

Essa conclusão é interessante pois nos permite, por exemplo, responder mais rapidamente à questão dos coelhos, que seria o número de coelhos gerados ao fim de um ano, ou seja, o valor de u_{14} (qualquer dúvida, rever lista no fim da introdução). Acabamos de mostrar que esse valor será o valor inteiro mais próximo de $\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}}$ e podemos facilmente verificar que esse valor será 376.9, sendo o inteiro mais próximo 377, como visto na tabela da introdução que usamos para responder a esse problema inicialmente.

2 Divisibilidade

Este capítulo tratará de alguns fatos importantes na teoria de números, retomando algumas das principais propriedades da área, tais como a definição de divisão por subtrações sucessivas, segmentos comensuráveis, a definição do máximo divisor comum e suas propriedades mais úteis para então seguir com suas consequências vistas em números de Fibonacci.

2.1 Uma definição da divisão

Sejam os inteiros a e b, tal que $a > b$. Iremos descobrir quantas vezes o número b cabe no número a através de sucessivas subtrações, não importando ainda se esse resultado será inteiro ou não. O número de vezes que b caberá inteiramente em a será denorado por q, e o restante que não preencha, será chamado de r. Denominamos a de divisor, b de dividendo, q de quociente e r de resto. Para exemplo, sejam os números 13 e 4.

$$\begin{aligned} 13 - 4 &= 9 \\ 9 - 4 &= 5 \\ 5 - 4 &= 1 \end{aligned}$$

Podemos "tirar"do número 13, 3 vezes o número 4, nos restando 1 unidade. Isto é, a divisão de 13 por 4 resulta em 3 e sobra 1. Ou ainda,

$$\begin{aligned} 13 &= 4 + 9 \\ 13 &= 4 + 4 + 5 \\ 13 &= 4 + 4 + 4 + 1. \end{aligned}$$

De modo, então, $13 = 4 \times 3 + 1$. Ou seja: $a = b \times q + r$. Na próxima seção, definiremos o *algoritmo Euclidiano* que será de grande valia para o desenvolver do texto e também o usaremos para estruturar o *máximo dividor comum*. O máximo divisor comum entre dois números pode ser definido como o maior inteiro que divide exatamente (sem resto) esses dois números previamente dados.

2.2 Algoritmo Euclidiano

Vamos indicar o processo de determinar o máximo divisor comum entre os números a e b, ambos inteiros. Precisamos supor que a divisão de a por b resulte em um quociente q_0 e um resto r_1. Logo, $a = bq_0 + r_1$, com $0 \leq r_1 < b$, com $a < b$, $q_0 = 0$.

Ao dividir b por r_1, obtemos q_1 e resto r_2, logo $b = r_1q_1 + r_2$, novamente com $0 \leq r_2 < r_1$. E como $r_1 < b$, logo $q_1 \neq 0$. Então, dividindo r_1 por r_2, temos que determinar $q_2 \neq 0$ e r_3 tal que $r_1 = q_2r_2 + r_3$ e $0 \leq r_3 < r_2$. Seguimos nesse processo enquanto possível. Não demorará muito para que o processo termine, dado que os números $r_1, r_2, r_3, \ldots$ são diferentes e cada um deles é menor do que b, nos indicando que o número máximo de passos tomados seja o próprio b. Mas só terminará, de fato, quando a divisão for exata, isto é, quando o resto daquela divisão for zero sendo impossível que qualquer coisa seja dividida por ele. Esse processo que descrevemos é o *algoritmo Euclidiano*.

Faremos dois exemplos para ilustrar nosso ponto. Veremos como acontece com os pares $(30, 18)$ primeiro.

$$\begin{aligned}
30 &= 18 \times 1 + 12 \\
18 &= 12 \times 1 + 6 \\
12 &= 6 \times 2 + 0.
\end{aligned}$$

Agora, tomemos o par $(320, 118)$:

$$\begin{aligned}
320 &= 118 \times 2 + 84 \\
118 &= 84 \times 1 + 34 \\
84 &= 34 \times 2 + 16 \\
34 &= 16 \times 2 + 2 \\
16 &= 2 \times 8 + 0.
\end{aligned}$$

O último resto não nulo do exemplo acima, 2, divide, obviamente, o 16, se ele divide o 16 (e logicamente, ele mesmo), ele também divide o 34, consequentemente, dividirá o 84, o 118 e o 320.

Explicações como essa que podem parecer confusas ao aluno por conterem muitos passos subsequentes podem ser explicadas mais eficientemente com o auxílio do PIM. Iremos montar a situação para que o PIM possa ser aplicado na demonstração da prova do *algoritmo Euclidiano*.

$$\begin{aligned}
a &= bq_0 + r_1 \\
b &= r_1q_1 + r_2 \\
r_1 &= r_2q_2 + r_3 \\
&\cdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= r_nq_n.
\end{aligned}$$

Tendo esse conjunto de operações como base, podemos mostrar a validade do *algoritmo Euclidiano* utilizando o *Princípio de Indução Matemática*, como r_n é divisor de r_{n-1}, por consequência dividirá também r_{n-2} e por aí vai... A cada vez que quisermos nos referir ao *máximo divisor comum* (MDC) entre os números a e b, utilizaremos a notação (a, b). Vamos agora, determinar o MDC entre dois números da sequência de Fibonacci utlizando o *algoritmo Euclidiano*, (u_{20}, u_{15}):

$$6765 = 610 \times 11 + 55$$
$$610 = 55 \times 11 + 5$$
$$55 = 5 \times 11.$$

Então, $(u_{20}, u_{15}) = 5 = u_5$. O fato do MDC entre dois números da sequência ter nos retornado outro número da sequência não é uma coincidência e será provado logo mais.

2.3 Segmentos Comensuráveis

Existe uma analogia entre o algoritmo Euclidiano e um processo da geometria em que a medida comum a dois segmentos é encontrada. Sejam dois segmentos, um de medida a e um de medida b, tal que $a > b$. Iremos subtrair b de a quantas vezes possível e nos referir a medida restante por r_1. Obviamente, $r_1 < b$. Agora, subtrairemos de b o comprimento de r_1 quantas vezes possível, nos restando r_2. Continuando assim uma sequência de restos decrescente. É possível observar aqui que ao último par de segmentos, teremos o equivalente à última linha do Algorimo Euclidiano. Nesse caso, dizemos que os segmentos a e b são comensuráveis, ou seja, podemos utilizar o b para medir o a, temos uma razão bem definida entre eles.

Porém, isso só acontecerá caso os dois segmentos tenham medidas racionais. Caso contrário, esse processo de subtração continuará eternamente; os chamamos então de segmentos não comensuráveis (ou incomensuráveis). Foi com essa ideia sobre comensurabilidade que Hipáso de Metaponto tentou determinar uma razão para a diagonal do quadrado; fato esse que culminou na sua morte (DUNHAM, 1991) (p.10). Fontes como (BOYER UTA C. MERZBACH, 1991) nos dizem que ele apenas foi expulso da ordem por insubordinazação.

2.4 Propriedades úteis

Vamos agora provar cinco propriedades de divisibilidade que nos serão úteis mais tarde. Para isso precisamos definir o operador $|$, como em $a|b$, isso nos diz que *a divide b*, ou ainda, que b é divisor de a, $a, b \in \mathbb{N}$. Mais propriedades como essa podem ser encontradas em (HEFEZ, 2016).

- $(a, b)|(a, bc)$. Seja m o MDC(a, b). Por definição, m é divisor tanto de a quanto de b. Se m divide b, logicamente, m divide também bc. Isso significa que m dividirá também (a, bc).

- $(ac, bc) = (a, b)c$. Seja o processo representado na seção 2.1 para a representação do *algoritmo Euclidiano*. Ao multiplicarmos cada uma dessas equações por c, temos o mesmo processo aplicado agora para os números (ac, bc). O último resto não nulo será $r_n \times c$, ou seja, $(a, b)c$.

- $(a, b) = 1 \implies (a, bc) = (a, b)$. Se $(a, c) = 1$, então $(a, bc) = (a, b)$. De fato, de acordo com 4.3, (a, bc) divide (ab, bc). Mas, de acordo com o item anterior,

$$(ab, bc) = b(a, c) = b \times 1 = b.$$

  Então, (a, bc) divide b. Por definição, (a, bc) também divide a. Se divide a e divide b, divide também (a, b). De acordo com o primeiro item dessa seção, $(a, b)|(a, bc)$, portanto, $(a, b) = (a, bc)$.

- $b|a \implies (a, b) = b$. É óbvio que a só é divisível por b somente se $(a, b) = b$.

- $b|c \implies (a, b) = (a + c, b)$. Precisamos supor novamente verdadeiro o conjunto de equações do algoritmo Euclidiano. Aplique o algoritmo aos números $(a + c)$ e b. Como c é divisível por b, podemos representá-lo por $c = c_1 b$, de modo que o primeiro passo do algoritmo seria $a + c = (q_0 + c_1)b + r_1$ e todo o resto das equações seria exatamente igual ao mostrado na demonstração do algoritmo nos deixando como último resto não nulo o mesmo r_n. Portanto, $(a, b) = (a + c, b)$.

2.5 A divisibilidade entre os números de Fibonacci

Agora chegamos às propriedades relativas aos números da sequência. Iremos provar o seguinte teorema.

Teorema 2.4: Se n é divisível por m, então u_n é também divisível por u_m. Prova: Sabemos que $1|2$, pois $2 = 1 \times 2$ e que $u_1|u_2$ dado que $u_1 = 1 = u_2$. Está estabelecido o passo básico da indução.

Assuma que $u_n = k_1 u_m$, para algum $n = km$, com $k, k_1 \in \mathbb{Z}$, ou seja $u_{mk} = k_1 u_m$. Considere agora $u_{m(k+1)}$, ou ainda u_{mk+m}, pela equação (1.10):

$$u_{mk+m} = u_{mk-1}u_m + u_{mk}u_{m+1}$$

Aplicando nossa hipótese:

$$u_{mk+m} = u_{mk-1}u_m + k_1 u_m u_{m+1} = u_m(u_{mk-1} + k_1 u_{m+1}).$$

Mostranto, então, que u_n é múltiplo de u_m.

2.6 Números compostos na sequência de Fibonacci

Ainda sobre a natureza de divisores na sequência, provaremos que para um número composto $n \neq 4$, u_n é também um número composto. Importante lembrar que estamos falando de números na sequência de Fibonacci, obviamente inteiros. Um n composto, pode ser escrito como $n = n_1 n_2$, definimos $n_1 > n_2$, ambos maiores que 1 e menores que n e pelo menos um dos dois maiores que 2. De acordo com o teorema (2.4) que acabamos de provar, u_n deve ser múltiplo de u_{n1}, e como $u_1 = 1$ e $u_1 < u_{n1}$, temos que u_n é um número composto.

Vamos agora provar que consecutivos em Fibonacci são primos entre si. Tomemos u_n e u_{n+1} com um divisor comum $d > 1$, contradizendo o que queremos provar. Então, a sua diferença $u_{n+1} - u_n$ deve também ser divisível por d. Como $u_{n+1} - u_n = u_{n-1}$, logo, u_{n-1} deve ser divisível por d. Lembremos que como estamos trabalhando em uma sequência recorrente, esse processo pode (por indução) ir para $u_{n-2}, u_{n-3}, \ldots, u_2, u_1$. Como $u_1 = 1$, ele não pode ser dividido por $d > 1$, chegando assim a um absurdo, mostrando que, sim, números vizinhos são primos entre si.

Um novo teorema que utilizaremos irá provar que $(u_m, u_n) = u_{(m,n)}$.

<u>Teorema 2.7:</u> Para qualquer $m, n; (u_m, u_n) = u_{(m,n)}$.

<u>Prova:</u> Seja $m > n$, pelo algoritmo Euclidiano:

$$\begin{aligned} m &= nq_0 + r_1 \\ n &= r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 &= r_2 q_2 + r_3 \\ &\cdots \\ r_{t-2} &= r_{t-1} q_{t-1} + r_t \\ r_{t-1} &= r_t q_t. \end{aligned}$$

Como sabemos, o último resto não nulo é o máximo divisor comum, $(m, n) = r_t$. Lembrando que $m = nq_0 + r_1$, $(u_m, u_n) = (u_{nq_0 + r_1}, u_n)$. Voltando à relação (1.10):

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0 - 1} u_{r_1} + u_{nq_0} u_{r_1 + 1}, u_n)$$

Já que nq_0 é divisível por n, u_{nq_0} é divisível por u_n, como visto duas seções atrás. E também, como vimos anteriormente, se $b|c, (a, b) = (a + c, b)$, podemos reescrever:

$$(u_m, u_n) = (u_{nq_0 - 1} u_{r1}, u_n)$$

Novamente, $n(q_0 - 1)$ é múltiplo de n:

$$(u_m, u_n) = (u_{r_1}, u_n)$$

Vamos guardar essa informação como um resultado parcial e trabalhar nela um pouco mais, tendo em mente a sequência de equações no algoritmo Euclidiano acima.

$$\begin{aligned}(u_n, u_{r_1}) &= (u_{r_1 q_1 + r_2}, u_{r_1}) \\ &= (u_{r_1 q_1 - 1} u_{r_2} + u_{r_1 q_1} u_{r_2+1}, u_{r_1}) \\ (u_n, u_{r_1}) &= (u_{r_1 q_1 - 1} u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_2}, u_{r_1}).\end{aligned}$$

Da mesma maneira, teremos que

$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2}) = (u_{r_4}, u_{r_3}) = \cdots = (u_{r_n}, u_{r_{n-1}})$$

Pela definição do algoritmo, r_{n-1} é múltiplo de r_n, como discutido no início do capítulo. E já mostramos as relações entre a multiplicidade dos índices, temos então que $u_{r_n} | u_{r_{n-1}}$, logo $(u_{r_n}, u_{r_{n-1}}) = u_{r_t}$. Lembremos que $r_t = (m, n)$, que é justamente o resultado que buscávamos.

Um resultado particular dessa prova pode mostrar a recíproca do teorema (2.6): se u_n é divisível por u_m, então, n é divisível por m. Se u_n é divisível por u_m, então, de acordo com o teorema (2.5),

$$(u_n, u_m) = u_m. \tag{2.1}$$

Considere que acabamos de provar

$$(u_n, u_m) = u_{(n,m)}. \tag{2.2}$$

Combinando (2.1) e (2.2), podemos concluir que:

$$u_m = u_{(n,m)}$$

Isto é, $m = (n, m)$, o que garante que $m|n$.

2.7 Critérios de divisibilidade nos números de Fibonacci

Combinando o teorema (2.6) e o corolário anterior, podemos afirmar que u_n é divisível por u_m se, e somente se, n é divisível por m. Isso nos permite estudar a divisibilidade dos números de Fibonacci apenas estudando os seus sufixos. Vamos tentar determinar alguns critérios de divisibilidade nos números de Fibonacci, buscaremos indícios para mostrar se um número de Fibonacci é divisível por um certo número dado.

- Um número de Fibonacci é par se, e somente se, seu sufixo for divisível por 3;
- Um número de Fibonacci é divisível por 3 se, e somente se, seu sufixo é divisível por 4;

- Um número de Fibonacci é divisível por 4 se, e somente se, seu sufixo é divisível por 6;
- Um número de Fibonacci é divisível por 5 se, e somente se, seu sufixo é também divisível por 5; E,
- Um número de Fibonacci é divisível por 7 se, e somente se, seu sufixo é divisível por 8.

As provas para esses critérios de divisibilidade e outros semelhantes podem ser feitas utilizando as propriedades expostas nesse capítulo, especialmente as últimas. Com o mesmo raciocínio, provamos que não existe número de Fibonacci que deixe um resto 4 quando dividido por 8, e também não há número de Fibonacci divisível por 17.

2.8 Se há um múltiplo de m na sequência, então há infinitos

Seja um número inteiro m. Se existe pelo menos um número de Fibonacci u_n divisível por m, é possível obter quantos queira de tais números na sequência, serão eles $u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, \ldots$ Tentaremos descobrir se é possível encontrar pelo menos um número de Fibonacci divisível pelo inteiro m. Veremos que isso é possível. Para isso, seja $\overline{k}$ o resto da divisão de k por m, e vamos representar a sequência de pares das divisões dos termos da sequência por esse m:

$$< \overline{u}_1, \overline{u}_2 >, < \overline{u}_2, \overline{u}_3 >, < \overline{u}_3, \overline{u}_4 >, \ldots < \overline{u}_n, \overline{u}_{n+1} >, \ldots \tag{2.3}$$

Se considerarmos que os pares $< a_1, b_1 >$ e $< a_2, b_2 >$ são iguais quando $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$, o número de pares diferentes dos restos das divisões por m será m^2, pois o número possíveis do resto de divisão por m é o próprio m, e considerando as posições, teremos $m \times m$ possíveis pares. Pelo Princípio da Casa dos Pombos, deveremos ter pares iguais de restos nos primeiros $m^2 + 1$ termos da sequência (2.3). Vamos provar agora que o primeiro tal par que se repete é o par $< u_1, u_2 >$, ou seja, $< 1, 1 >$. Para isso, tomemos como verdadeiro o contrário, que o primeiro par que se repete é formado por $< \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1} >$, com $k > 1$.

Acabamos de mostrar que teremos um par que repete, portanto deve existir um $l > k$ que:

$$< \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1} > = < \overline{u}_l, \overline{u}_{l+1} > .$$

Como os pares são iguais, podemos afirmar:

$$\begin{cases} \overline{u}_k = \overline{u}_l \\ \overline{u}_{k+1} = \overline{u}_{l+1} \end{cases}$$

Ao subtrairmos a primeira equação da segunda, temos:

$$\overline{u}_{k+1} - \overline{u}_k = \overline{u}_{l+1} - \overline{u}_l$$

Mantendo sempre em mente a relação (1.2), temos que $\overline{u}_{k-1} = \overline{u}_{l-1}$. Segue pela nossa hipótese que $< \overline{u}_{k-1}, \overline{u}_k > = < \overline{u}_{l-1}, \overline{u}_l >$, como esse par viria antes do par $< \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1} >$ na sequência (2.3). Temos uma contradição com a nossa premissa, de que o par $< \overline{u}_k, \overline{u}_{k+1} >$ seria o primeiro a ter repetição. Ou seja, a nossa afirmação de que $k > 1$ estava errada, portanto, $k = 1$. A conclusão é que o par $< 1, 1 >$ é o primeiro que se repete na sequência (2.3). Seja o par que se repete o que está na t-ésima posição (já que $1 < t < m^2 + 1$), isto é, existe $< \overline{u}_t, \overline{u}_{t+1} > = < 1, 1 >$. Isso significa que tanto u_t quanto u_{t+1} deixam resto 1 quando divididos por m. É fácil provar que se dois números deixam o mesmo resto quando divididos por um número dado, a sua diferença será divisível por esse número. No nosso caso, $u_{t+1} - u_t$ será divisível por m, em outras palavras, u_{t-1} é divisível por m. Acabamos de provar que:

Teorema (2.9): qualquer que seja o inteiro m, pelo menos um número divisível por m pode ser encontrado entre os primeiros m^2 números de Fibonacci. Isso não diz nada sobre qual é exatamente esse número de Fibonacci divisível por m. Apenas nos garante que o primeiro número de Fibonacci divisível por m não deve ser particularmente grande.

3 Frações contínuas

Esse capítulo tem foco as frações contínuas e suas propriedades relacionadas a números racionais e, especialmente, irracionais. O trabalho de definição será detalhado e então chegaremos nas suas relações com os números e com a sequência de Fibonacci.

3.1 Como representar um racional com frações contínuas

Considere a expressão abaixo.

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \dots}}} \tag{3.1}$$

Em que $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ sejam inteiros positivos e q_0 inteiro *não negativo*, ou seja, q_0 é o único número que poderia ser igual a zero. Devemos ter isso em mente, pois é um detalhe importante para o desenvolvimento da seção. A expressão (3.1) é chamada de *fração contínua* e os números $q_0, q_1, \dots, q_n$ são chamadas de denominadores parciais dessa fração. O proceso de transformação de um certo número em uma fração contínua é chamado de *expansão* desse número em uma fração contínua. Veremos agora como podemos encontrar os denominadores parciais em uma dessas expansões de um racional $\frac{a}{b}$. Apliquemos o algoritmo Euclidiano em a e b.

$$\begin{gathered} a = bq_0 + r_1 \\ b = r_1 q_1 + r_2 \\ r_1 = r_2 q_2 + r_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \\ r_{n-1} = r_n q_n. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Pela primeira dessas equações, podemos notar que:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}$$

e pela segunda equação do conjunto:

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}.$$

Juntando as duas últimas sentenças, temos:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}.$$

Tomando a terceira equação do conjunto e repetindo o processo, teremos

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

e portanto,

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}.$$

Continuando esse processo até a última linha, podemos deduzir facilmente que o resultado final será a equação:

$$\frac{a}{b} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}}.$$

Pela própria definição do algoritmo Euclidiano, $q_n > 1$, pois caso fosse, então $r_{n-1} = r_n$ e r_{n-2} seria divisível por r_{n-1} e o algoritmo teria terminado um passo antes. Por isso, podemos reescrever q_n como $(q_n - 1) + \frac{1}{1}$, considerando $(q_n - 1)$ como o penúltimo denominador parcial e 1 como o último. Isso será conveniente para seguirmos adiante.

O algoritmo Euclidiano aplicado em um par de naturais a e b é realizado completa e definitivmente de maneira única. Os denominadores parciais da expansão de $\frac{a}{b}$ em uma fração contínua são também definidos unicamente pelo sistema de equações que descreve o algoritmo (como vemos em (3.2)). Isso nos garante que qualquer racional $\frac{a}{b}$ pode ser expandido em uma fração contínua em uma, e apenas uma, maneira.

3.2 Frações convergentes das frações contínuas

Seja

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{3.3}$$

uma fração contínua e vamos considerar a seguinte sequência de números

$$q_0, q_0 + \frac{1}{q_1}, q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \dots$$

Esses números, quando escritos em forma de frações simples

$$\begin{aligned} \frac{P_0}{Q_0} &= \frac{q_0}{1} \\ \frac{P_1}{Q_1} &= q_0 + \frac{1}{q_1} \\ \frac{P_2}{Q_2} &= q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}} \\ &\dots \\ \frac{P_n}{Q_n} &= \omega. \end{aligned}$$

São chamados de *frações convergentes* da fração contínua ω. A transição entre $\frac{P_k}{Q_k}$ e $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ é feita substituindo o último denominador parcial q_k por $q_k + \frac{1}{q_{k+1}}$.

3.3 Três relações em frações contínuas

Temos um lema composto por três relações, iremos prová-las agora e as três provas serão feitas por indução em k. Esse lema será essencial para o desenvolvimento desse capítulo.

Lema: Para cada fração contínua ω (3.3), as seguintes relações podem ser obtidas:

$$P_{k+1} = P_k q_{k+1} + P_{k-1} \tag{3.4}$$

$$Q_{k+1} = Q_k q_{k+1} + Q_{k-1} \tag{3.5}$$

$$P_{k+1} Q_k - P_k Q_{k+1} = (-1)^k. \tag{3.6}$$

Provaremos o passo básico para as três com $k = 1$ e $k = 2$:

Primeiro, seja $k = 1$.

$$\frac{P_1}{Q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1} = \frac{q_0q_1 + 1}{q_1}$$

Como os números $q_0q_1 + 1$ e q_1 são primos entre si (facilmente provável por redução ao absurdo), a fração $\frac{q_0q_1+1}{q_1}$ é irredutível, logo $P_1 = q_0q_1 + 1$ e $Q_1 = q_1$.

Agora, $k = 2$.

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \cfrac{1}{\cfrac{q_2q_1 + 1}{q_2}}$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = q_0 + \frac{q_2}{q_2q_1 + 1} = \frac{q_0(q_1q_2 + 1) + q_2}{q_1q_2 + 1}$$

Para provar que $\frac{P_2}{Q_2}$ é irredutível podemos usar as conclusões iniciais do capítulo anterior. Os denominadores e numeradores da equação acima são iguais a:

$$P_2 = q_0(q_1q_2 + 1) + q_2 = q_0q_1q_2 + q_0 + q_2 = q_2(q_0q_1) + q_0 = q_2P_1 + q_0$$
$$Q_2 = q_1q_2 + 1 = Q_1q_2 + Q_0.$$

As duas equações acima confirmam o passo básico para as relações (3.4) e (3.5), vamos agora mostrar a (3.6), utilizando ainda as conclusões acima:

$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = (q_2(q_0q_1) + q_0)q_1 - (q_0q_1 + 1)(q_1q_2 + 1)$$
$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = q_0q_1^2q_2 + q_1q_2 + q_0q_1 - q_0q_1^2q_2 - q_0q_1 - q_1q_2 - 1 = (-1)$$
$$P_2Q_1 - P_1Q_2 = (-1)^1.$$

Podemos então supor verdadeiras as três equações (3.4), (3.5) e (3.6). Considere a fração convergente

$$\frac{P_{k_1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_kq_{k_1} + P_{k-1}}{Q_kq_{k+1} + Q_{k+1}}$$

e lembrando que a transição entre $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ e $\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$ deve ser feita substituindo o último denominador parcial q_{k+1} por $q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}} &= \frac{P_k(q_{k+1} + \frac{1}{q_{k+2}}) + P_{k-1}}{Q_k(q_{k+1}\frac{1}{q_{k+2}}) + Q_{k-1}} \\
&= \frac{P_kq_{k+1} + \frac{P_k}{q_{k+2}} + P_{k-1}}{Q_kq_{k+1} + \frac{Q_k}{q_{k+2}} + Q_{k-1}} \\
&= \frac{P_kq_{k+1}q_{k+2} + P_k + P_{k-1}q_{k+2}}{Q_kq_{k+1}q_{k+2} + Q_k + Q_{k-1}q_{k+2}} = \frac{P_{k+1}q_{k+2} + P_k}{Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Único detalhe agora é provar que (3.7) é irredutível. Mais uma vez, faremos isso por contradição. Assuma então que os números $P_{k+1}q_{k+2} + P_k$ e $Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k$ possuam um divisor $d > 1$, desse modo, a expressão:

$$(P_{k+1}q_{k+2} + P_k)Q_{k+1} - (Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k)P_{k+1}$$

deveria também ser dividida por esse fator $d > 1$. Porém, nossa hipótese (3.6), essa expressão vale $(-1)^{k+1}$, não sendo portanto divísivel por $d > 1$. Isso significa que

$$\begin{aligned} P_{k+2} &= P_{k+1}q_{k+2} + P_k \\ Q_{k+2} &= Q_{k+1}q_{k+2} + Q_k. \end{aligned}$$

Tendo fim a indução para as duas primeiras relações. Mais uma vez, nos falta mostrar a terceira, o que segue o mesmo padrão que fizemos para o passo básico.

Estão provadas as três relações do lema. Uma consequência da lema que será essencial mais adiante no capítulo é que:

$$\begin{aligned} P_0 < P_1 < P_2 < \dots \\ Q_0 < Q_1 < Q_2 < \dots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Esse resultado é alcançado subtraindo P_k na relação (3.4) e Q_k na relação (3.1), com isso, temos que tanto $P_{k+1} - P_k$ como $Q_{k+1} - Q_k$ são sempre positivos, o que mostra que as duas sequências são crescentes. Isso justifica o resultado acima.

Ainda, dividindo (3.6) por Q_kQ_{k+1} chegamos a corolário:

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} - \frac{P_k}{Q_k} = \frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{3.9}$$

Logo mais, o utilizaremos para compor novas propriedades.

3.4 Se a fração contínua tem n denominadores parciais iguais a 1, essa fração é $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Conectando agora à sequência de Fibonacci, vamos aplicar o lema da seção anterior para descrever todas as frações contínuas com denominadores parciais unitários. Para essas frações, nós temos o seguinte teorema que será especialmente interessante para nós.

Teorema (3.4): Se uma fração contínua tem n denominadores parciais e cada um desses denominadores são iguais a um, essa fração será igual a $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Prova: Vamos chamar a fração contínua com n denominadores parciais iguais a um de a_n. Então, obviamente,

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

serão as frações convergentes consecutivas de a_n. Seja

$$a_k = \frac{P_k}{Q_k}.$$

Como $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$ e $a_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$, então temos que $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$. Ainda, pela equação (3.4), $P_{n+1} = P_n q_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$. Portanto, pela definição da sequência e pelos resultados obtidos acima, $P_n = u_{n+1}$. Analogamente, $Q_1 = 1, Q_2 = 1$ e $Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1}$. Logo, $Q_n = u_n$. Juntando as duas conclusões:

$$a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \tag{3.10}$$

3.5 Uma igualdade gigantesca

Sejam duas frações ω e ω':

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n}}}} \qquad \omega' = q'_0 + \cfrac{1}{q'_1 + \cfrac{1}{q'_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q'_n}}}}$$

tais que

$$q'_0 \geq q_0, q'_1 \geq q_1, q'_2 \geq q_2, \ldots \tag{3.11}$$

Denotando as frações convergentes para ω e para ω':

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \ldots \qquad \frac{P'_0}{Q'_0}, \frac{P'_1}{Q'_1}, \frac{P'_2}{Q'_2}, \ldots$$

Pelo lema (3.8) e por (3.11):

$$P'_0 \geq P_0, P'_1 \geq P_1, P'2 \geq P_2, \ldots \qquad \text{e} \qquad Q'_0 \geq Q_0, Q'_1 \geq Q_1, Q'2 \geq Q_2, \ldots$$

O menor valor de qualquer denominador parcial é um. Isso nos diz que se todos os denominadores parciais de uma fração contínua são iguais a um, os numeradores e denominadores de suas frações convergentes crescem mais vagarosamente que aqueles de quaisquer outras frações contínuas.

Vamos estimar o quanto esse crescimento é devagar. Claramente, ao desconsiderar as frações contínuas compostas apenas de denominadores parciais iguais a um, a próxima a crescer mais lentamente seria a que é composta por um denominador parcial igual a 2 e os outros ainda iguais a 1. Essas frações contínuas também se conectam à *sequência de Fibonacci* como mostrado no lema a seguir.

Lema: Se a fração contínua ω tem seus denominadores parciais $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$, em que $q_0 = q_1 = q_2 = \ldots q_{i-1} = q_{i+1} = \cdots = q_n = 1$, com $q_i = 2$ e $(i \neq 0)$, então:

$$\omega = \frac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}. \tag{3.12}$$

Provaremos mais uma vez por uma indução sobre i, notando que n segue sendo n durante toda essa prova. No passo básico, tomemos $i = 1$, lembrando que o primeiro denominador parcial q_0 é igual a 1, assim como os $n-1$ denominadores parciais posteriores a $i = 1$:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1}}}},$$

Ou ainda, como provamos no início do capítulo:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2u_n + u_{n-1}}{u_n}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+2} + u_n}{u_{n+2}}.$$

Se considerarmos $u_0 = 0$ e lembrarmos que $u_1 = u_2 = 1$, podemos reescrever a equação acima como:

$$\omega = \frac{u_2 u_{n+2} + u_1 u_n}{u_1 u_{n_2} + u_0 u_n},$$

finalizando a base para a indução.

Agora, consideraremos o denominador 2 em qualquer posição maior que q_1, temos um total de i denominadores parciais tais que:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-i}}}}}.$$

Lembremos que nossa hipótese é que esse mesmo ω é o ω com validade na equação (3.12). Precisaremos agora considerar a fração contínua de ω com $i+1$ denominadores parciais:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_{n-i-1}}}}}. \tag{3.13}$$

Porém, considerando que, a partir da segunda linha da equação acima, ela é exatamente a nossa hipótese, a equação (3.12), podemos construir a composição seguinte:

$$\omega = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1}}{u_i u_{n-i+3} + u_{i-1}u_{n-i+1}}},$$

o que poderá ser reescrito para

$$\omega = \frac{u_{i+2}u_{n-i+2} + u_{i+1}u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2} + u_i u_{n-i}}.$$

Isso conclui nosso passo indutório e nossa prova para o lema.

Corolário: Se nem todos os denominadores parciais da fração contínua ω são iguais a 1, $q_0 \neq 0$, e não temos menos que n desses denominadores parciais, então, ao escrever ω como uma fração ordinária $\frac{P}{Q}$ nos temos que:

$$P \geq u_{i+1}u_{n-i+3} + u_i u_{n-i+1} > u_{i+1}u_{n-i+2} + u_i u_{n-i+1} = u_{n+2},$$

e também

$$Q > u_{n+1}.$$

A maior parte da justificativa para tal é, sobretudo, o lema (3.3), considerando que obtemos apenas frações irredutíveis na contração de uma fração contínua para uma fração comum.

3.6 Relação entre números de passos no algoritmo Euclidiano e indíce na sequência de Fibonacci

Teorema (3.6): Para um certo a, o número de passos no algoritmo Euclidiano aplicado nos números a e b será $n-1$ se $b = u_n$, e para qualquer a será menor do que $n-1$ se $b < u_n$.

Prova: A primeira parte do teorema pode ser provada rapidamente, basta que tomemos a como o número de Fibonacci que segue b, ou seja, u_{n+1}. Isto é:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a_n.$$

A fração contínua a_n possui n denominadores parciais, o que nos diz que o número de passos no algoritmo Euclidiano aplicado entre os números a e b é igual a $n-1$.

Para provar a segunda parte do teorema (3.6), suponhamos o contrário, que o número de passos desse algoritmo em particular não é menor do que $n-1$. Vamos expandir a razão $\frac{a}{b}$ em uma fração contínua ω. Logicamente, ω não terá menos do que n denominadores parciais (de fato, um passo a mais do que o número de passos no algoritmo Euclidiano). Como b não é um número de Fibonacci, nem todos os denominadores de ω são iguais a 1, então, de acordo com o corolário (3.5), $b > u_n$, o que contradiz as condições iniciais.

O que provamos é que o algoritmo Euclidiano, quando aplicado em números consecutivos de Fibonacci é "mais longo"que em outros pares.

3.7 Limites de frações contínuas infinitas

Chamamos a expressão

$$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_n + \dots}}}} \tag{3.14}$$

de fração contínua infinita. As definições e resultados que obtivemos nas seções anteriores podem ser extensíveis para as frações contínuas infinitas. Seja a sequência

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots \frac{P_n}{Q_n}, \dots \tag{3.15}$$

formada pelas frações convergentes da fração contínua infinita (3.14). Vamos mostrar que embora a sequência 3.15 possua infinitos termos, ela é uma sequência limitada.

Para isso, vamos analisar separadamente os termos pares e ímpares da sequência acima.

$$\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \dots$$

e

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \dots$$

Por (3.8), visto na seção 4.3, podemos afirmar que:

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{(-1)^{2n+1}}{Q_{2n+1}Q_{2n+2}} \qquad \text{e} \qquad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{(-1)^{2n}}{Q_{2n}Q_{2n+1}}.$$

Somando as duas equações acima temos:

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}} - \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{1}{Q_{2n}Q_{2n+1}} - \frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n+2}} > 0.$$

Podemos afirmar por (3.9), então, que a sequência dos pares é uma sequência crescente. Analogamente, com os termos $2n+3, 2n-2$ e $2n-1$, segue que a sequência dos ímpares é decrescentes, como podemos observar abaixo.

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}} - \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = \frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}} - \frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}} < 0.$$

Qualquer termo na sequência dos ímpares é maior do que na sequência dos pares. Vamos examinar os números $\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$ e $\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$, seja o ímpar k maior que $2n$ e que $2m+1$. Sabemos por (3.9) que $\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$. Como k é ímpar e a sequência ímpar decresce, $\frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}$. E como $k+1$ é par e a sequência par cresce, $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$. Ora, como

$$\frac{P_k}{Q_k} > \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}, \qquad \frac{P_k}{Q_k} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}} \qquad \text{e} \qquad \frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} > \frac{P_{2n}}{Q_{2n}},$$

por transitividade, podemos afirmar que

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}.$$

Então, qualquer termo da porção decrescente da sequência é maior que qualquer termo da porção crescente dela. Ainda analisando o corolário (3.9), por valores absolutos temos que:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Junte a isso a conclusão (3.8) e podemos ainda afirmar que

$$\frac{1}{Q_{n+1}Q_n} < \frac{1}{n^2},$$

o que nos conta que o valor absoluto da diferença entre dois termos quanto mais longe formos na sequência tenderá a zero.

As considerações acima nos deixam concluir que as sequências formadas pelos elementos pares e ímpares possuem o mesmo limite, que é o próprio limite da sequência (3.15). Esse limite é o que chamamos de valor da fração contínua infinita (3.14).

É importante ressaltar que cada fração contínua, não importa se finita ou infinita, possui um valor único e cada número se expande em uma única fração contínua. Como um número racional pode sempre ser expandido em uma fração contínua finita, segue desse fato que cada fração contínua infinita necessariamente deve ser um número irracional (OLDS, 1963). A teoria de expansão de números irracionais em frações contínuas infinitas é um ramo vasto e rico da teoria de números. Nós vamos explorar um pouco o conceito o relacionando aos números de Fibonacci.

3.8 Limite de números consecutivos da sequência com n tendendo a infinito

Vamos determinar o valor da fração contínua

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}.$$

Como vimos o valor dessa fração contínua infinita pode ser calculado como

$$\lim_{n \to \infty} a_n.$$

Na seção (1.13), provamos que u_n é o número inteiro mais perto de $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$, com $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, o que significa que

$$u_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n,$$

com $|\theta| < \frac{1}{2}$, para qualquer n. Sabemos por (3.10) que $a_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, então:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}} + \theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}} + \theta_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1} + \sqrt{5} \times \theta_{n+1}}{\alpha^n + \sqrt{5} \times \theta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha + \frac{\sqrt{5}\times\theta_{n+1}}{\alpha^n}}{1 + \frac{\sqrt{5}\times\theta_n}{\alpha^n}}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty}(\alpha + \frac{\sqrt{5}\times\theta_{n+1}}{\alpha^n})}{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{\sqrt{5}\times\theta_{n+1}}{\alpha^n})}.$$

Acabamos de ver que $|\theta_{n+1}|$ é limitado, $\sqrt{5}$ obviamente também é limitado, e α^n continua a crescer conforme n tende a infinito (já que $\alpha > 1$). Com tudo isso, podemos concluir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5} \times \theta_{n+1}}{\alpha^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{5} \times \theta_n}{\alpha^n} = 0$$

e também que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Acabamos de provar que a razão entre números vizinhos da sequência de Fibonacci tende a α quanto maior for seu sufixo. Esse resultado pode ser usado para determinar um valor aproximado de α. Apesar de ser o limite da sequência e normalmente associamos a precisão a termos muito elevados, resultados aceitáveis podem ser obtidos até com termos menores, como exemplo, calculemos

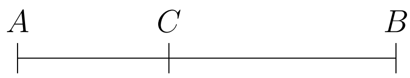
$$\frac{u_{10}}{u_9} = \frac{55}{34} = 1,6176$$

Se considerarmos apenas essas primeiras casas decimais, $\alpha = 1,6180$, o que nos dá um erro menor do que 0.1%.

4 Geometria

4.1 Seção Áurea

Vamos dividir o segmento unitário $\overline{AB}$ em duas partes tal que a maior parte é a média geométrica entre a menor parte e o segmento inteiro.



Para este fim, chamamos de x o comprimento da maior porção do segmento ($\overline{CB}$). Obviamente, o comprimento da menor parte ($\overline{AC}$) será $1-x$ e essa situação nos apresenta a proporção

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}, \tag{4.1}$$

Logo,

$$x^2 = 1 - x. \tag{4.2}$$

Como estamos nos referindo a uma medida do segmento unitário, iremos apenas considerar a raiz positiva de (4.2), portanto $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, então as razões da proporção (4.1) são iguais a

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

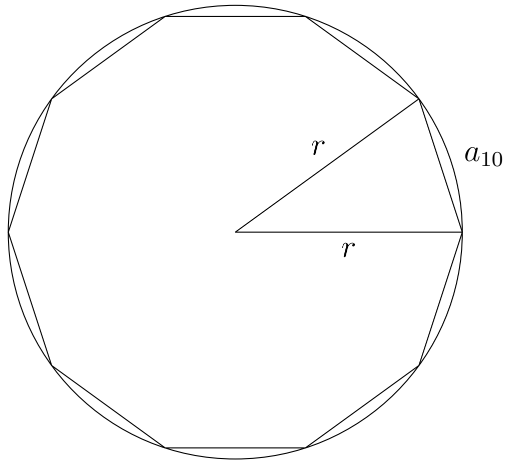
Essa divisão que podemos chamar de seção mediana é também chamada de *seção áurea*. Se considerarmos a solução negativa de (4.2), teremos um segmento exterior ($\overline{DA}$) ao segmento unitário original ($\overline{AB}$), o que chamamos de seção externa. E mesmo nesse caso temos também a seção áurea.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DA}} = \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x},$$

4.2 Decágono

A seção áurea aparece frequentemente em problemas de geometria. O lado a_{10} de um decágono regular inscrito em um círculo de raio r pode ser definido como

$$a_{10} = 2r \times \operatorname{sen}\left(\frac{360°}{2\times 10}\right) = 2r \times \operatorname{sen}(18°).$$



Vamos então calcular o seno de dezoito graus:

$$\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ,$$

$$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ.$$

Portanto,

$$\sin 72^\circ = 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ = 4\sin 18^\circ \cos 18^\circ(1 - 2\sin^2 18^\circ).$$

Como 72° e 18° são ângulos complementares, $\sin 72^\circ = \cos 18^\circ$, e então

$$1 = 4\sin 18^\circ(1 - 2\sin^2 18^\circ),$$

e podemos afirmar que $\sin 18^\circ$ é uma das raízes da equação

$$1 = 4x(1 - 2x^2),$$

ou ainda

$$8x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Adicionando e subtraindo $4x^2$ na equação acima, podemos reescrevê-la como

$$8x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 0$$

$$2x(4x^2) + 2x(2x) + 2x(-1) - 1(4x^2) - 1(2x) - 1(-1) = 0$$

$$2x(4x^2 + 2x - 1) - 1(4x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x - 1) = 0.$$

As raízes da última equação são:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \qquad x_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4},$$

Sabemos que 18° está no primeiro quadrante e que é diferente de 30°, então $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Voltando ao início da seção

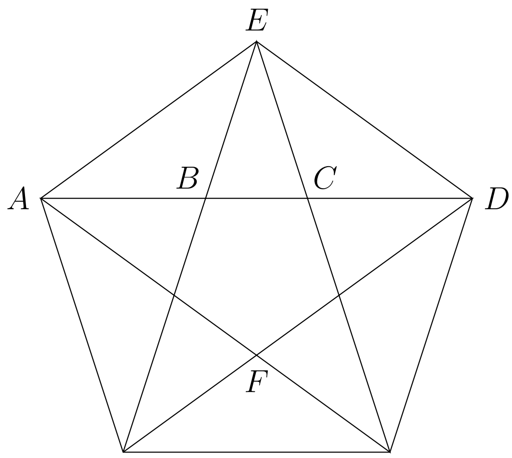
$$a_{10} = 2r \times \frac{\sqrt{5}-1}{4} = r \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{r}{\alpha}.$$

Mantendo a definição incial do capítulo em mente, o que acabamos de ver é que a_{10} é igual a maior parte do raio quando esse é dividido de acordo com a seção áurea.

Na prática, para calcular a_{10} podemos usar a razão entre números vizinhos de Fibonacci ao invés de α e dizer que, aproximadamente, a_{10} é $\frac{8r}{13}$ ou até mesmo $\frac{5r}{8}$.

4.3 Pentágono

Vamos agora olhar para o pentágono regular. Suas diagonais formam uma estrela pentagonal, também chamada de pentagrama.



O ângulo $A\hat{F}D$ vale 108° e o ângulo $A\hat{D}F$ vale 36°. Com a lei dos senos no triângulo ADF:

$$\frac{AD}{AF} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ.$$

Lembrando que $\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ$ e que $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AF} &= 2 \times \left[1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\right] = 2 \times \left[1 - 2\left(\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{16}\right)\right] \\ &= 2 \times \left[1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right] = 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha. \end{aligned}$$

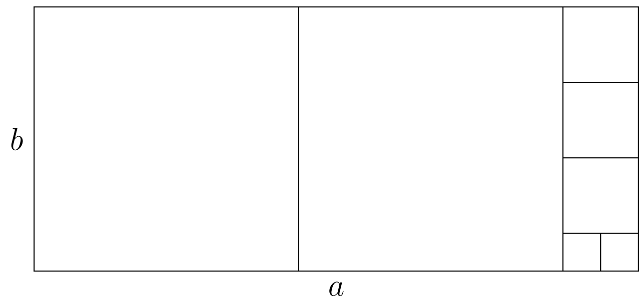
Como $\frac{AD}{AF} = \frac{AD}{AC}$, as duas razões também são iguais a α, o que nos diz que o segmento AD é dividido em C de acordo com a seção áurea. Lembrando que a seção áurea pode ser aplicada em um segmento externo, temos que $\frac{AC}{CD} = \alpha$, como sabemos que $AB = CD$, temos que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \alpha.$$

Então, os segmentos BC, AB, AC, AD estão em uma progressão geométrica de razão α. Por raciocínio semelhante, temos que também $\frac{AD}{AE} = \alpha$.

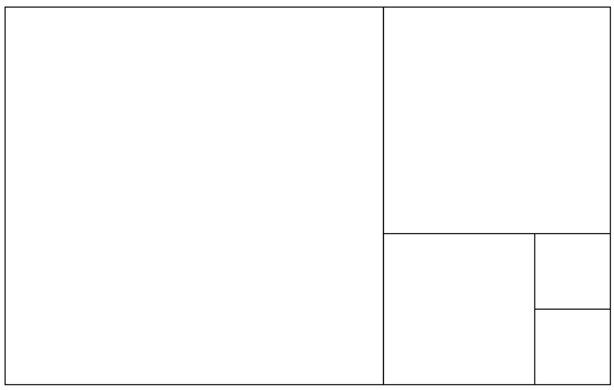
4.4 Retângulo áureo

Seja um retângulo de lados a e b. Vamos inscrever progressivamente o maior quadrado possível sempre, e o maior número possível de quadrados também, como mostrado na figura abaixo:

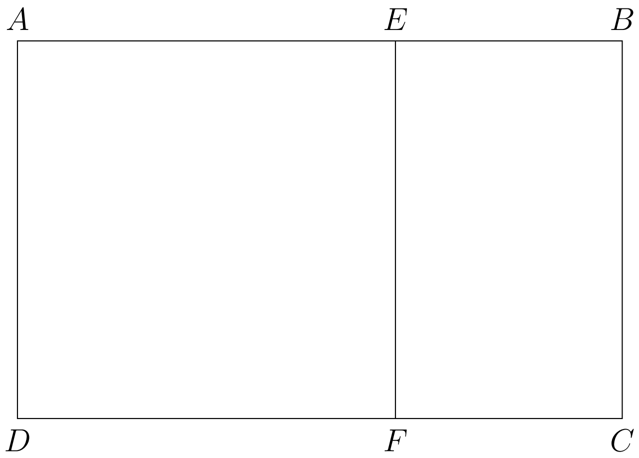


Como vimos na seção correspondente aos segmentos comensuráveis (2.2), esse processo de alocar b em a se assemelha como o algoritmo Euclidiano. O número de quadrados irá corresponder ao denominador parcial da expansão de $\frac{a}{b}$ em uma fração contínua.

Seja um retângulo que tem como lados números vizinhos de Fibonacci, quando ele for dividido em quadrados, com base em (4.4), teremos apenas um quadrado de cada tamanho, com excessão do último, pois teremos dois.



Agora, seja um retângulo cujas dimensões estejam em uma razão de α. Nós chamaremos esse retângulo de *retângulo áureo*. Nós iremos provar agora que, após inserir o maior quadrado possível em um retângulo áureo, obteremos um novo retângulo áureo.



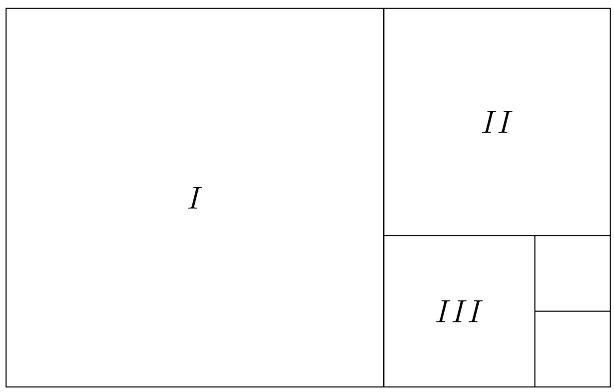
De fato, $\frac{AB}{AD} = \alpha$ e $AD = AE = EF$, já que $AEFD$ é um quadrado. Isso nos diz que

$$\frac{EF}{EB} = \frac{AD}{AB - AD} = \frac{1}{\frac{AB-AD}{AD}} = \frac{1}{\frac{AB}{AD} - 1} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Lembremos que $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

$$\frac{EF}{EB} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}-2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Como podemos observar na figura a seguir, um retângulo áureo pode ser completo, por exaustão, com os quadrados mencionados. E a cada vez que o completamos com um desses quadrados, temos um novo retângulo áureo. De maneira similar, se inserirmos um retângulo áureo dentro de um quadrado, teremos novamente um retângulo áureo como subproduto.

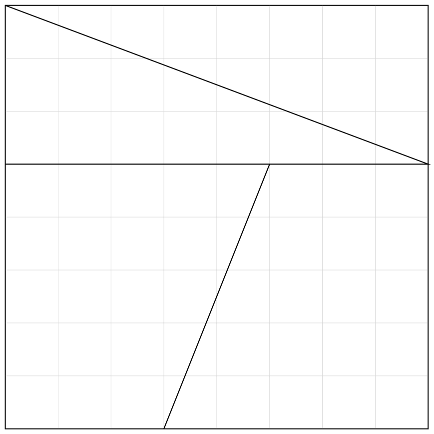


Retângulos áureos parecem ser mais proporcionais que outros retângulos e nós o consideramos mais agradáveis de se olhar. Usamos a proporção para a maioria dos cartões de visita e cartões de crédito, por exemplo. Temos ainda maletas, caixas de fósforo, livros, cadernos, blocos, portas...

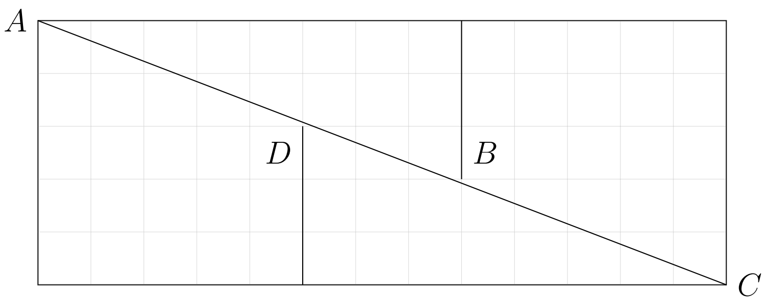
Ao longo do tempo, foi se criando toda uma mística em torno do número áureo, que ficou mais conhecido por ϕ. Muitas dessas teorias não tem nada de científico, mas o número virou quase um fenômeno pop (BRESSLER, 2020).

4.5 Uma pequena anedota

Iremos terminar esse capítulo com uma pequena piada geométrica. Com essa piada, iremos demonstrar uma "prova"de que $64 = 65$. Para isso, iremos cortar um quadrado de lado oito em quatro partes diferentes, conforme indicado na figura abaixo.

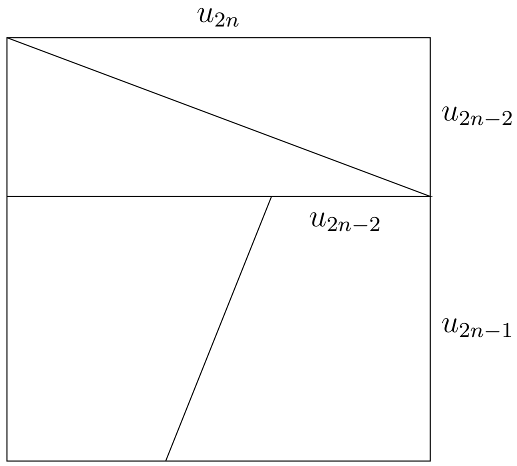


Juntaremos agora essa figura para que montemos um retângulo de lados treze e cinco, conforme indicado em uma nova figura. Logicamente, a área desse novo retângulo é 65 o que é um absurdo ao lembrar que a forma veio de um quadrado de lado oito, ou seja, de área 64.

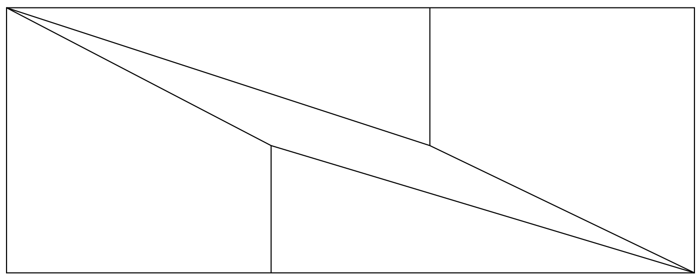


A explicação para esse pequeno absurdo é uma ilusão. Os pontos A, B, C e D da diagonal do retângulo não estão alinhados, formando então, um pequeno quadrilátero com uma área extra de uma unidade.

O que acabamos de ver é um exemplo de sofismo, um argumento que parece ser concebido através de lógica, mas que induz a um erro. Uma prova como essa pode parecer ainda mais convincente conforme maior for o índice do número de Fibonacci que usarmos. Vamos usar um número de Fibonacci par geral para demonstrar o quanto essa prova pode passar desapercebida. Seja um quadrado de lado u_{2n} dividido conforme a figura abaixo:



Remontaremos as partes anteriores para formar o novo retângulo, atentando para o quadrilátero central que mencionanos antes. Iremos obter sua dimensão por soma de áreas.



Podemos ver que o retângulo tem dimensões u_{2n-1} e u_{2n+1} (tenhamos em mente que estamos tratando de números de Fibonacci). Sua área, logicamente, é igual a $u_{2n-1} \times u_{2n+1}$. Sabemos por (1.12), na seção 1.7 que pode podemos denotar essa área também por $u_{2n}^2 + 1$.

Vamos agora compor as partes que vieram do quadrado, dois trapézios com bases paralelas e altura iguais a u_{2n-1}, u_{2n-2} e u_{2n-1}; e dois triângulos retângulos com catetos iguais a u_{2n-2} e u_{2n}. Somando as áreas então temos

$$\begin{aligned} & 2 \times \frac{u_{2n} \times u_{2n-2}}{2} + 2 \times \frac{(u_{2n-1} + u_{2n-2})u_{2n-1}}{2} \\ & = u_{2n} \times u_{2n-2} + u_{2n}u_{2n-1} \\ & = u_{2n}(u_{2n-2} + u_{2n-1}) = u_{2n}^2, \end{aligned}$$

provando então que não importa o tamanho a diferença entre as áreas será sempre igual a uma unidade. Porém, conforme aumentamos as dimensões, mas parecido com uma linha ao olho humano esse quadrilátero será.

Conclusão

Nem todos os problemas conectados com os números de Fibonacci podem ser resolvidos tão facilmente quanto os mencionados nesse texto. Vamos citar aqui alguns que ou não podem ser resolvidos ou sua resolução envolvem métodos muito mais sotisficados dos que os empregados nessa investigação.

1. Seja u_n divisível por um certo primo p, enquanto nenhum dos números de Fibonacci menores do que u_n também o sejam. Nesse caso, chamaremos p de um "divisor próprio"de u_n. Por exemplo, 11 é um divisor próprio de u_{10}, 17 é um divisor próprio de u_9 e assim por diante. Qualquer número de Fibonacci com excessão de u_1, u_2, u_6 e u_{12} possui pelo menos um divisor próprio.

2. Uma questão relacionada à essa é: para qual sufixo n, um número de Fibonacci terá como divisor próprio o número p?

Sabemos pela seção 4.13 que $n \leq p^2$. É possível também provar que $n \leq p + 1$. Além disso, é possível estabelecer que se p é da forma $5t \pm 1$ então u_{p-1} é divisível por p, e se p é da forma $5t \pm 2$, então u_{p+1} é divisível por p. Entretanto, não temos uma fórmula que indique o sufixo do termo com o divisor próprio p.

3. Nós provamos em 4.9 que todos os números de Fibonacci com sufixos compostos, exceto por u_4, são também números compostos. A recíproca, porém, não é verdadeira. Como exemplo temos $u_{19} = 4181 = 37 \times 113$. A pergunta que fica é: são os números primos de Fibonacci finitos ou infinitos? Existe o maior número de Fibonacci primo possível? Até o momento essa questão está ainda longe de ser resolvida.

4. Como última curiosidade, podemos relacionar dois grandes temas de matemática recreativa. Vimos no capítulo 3 que podemos representar números irracionais como uma fração contínua. Existem algumas maneiras de representar o número π através de frações contínuas e há mais de uma maneira em que podemos utilizar números de Fibonacci associados à expansão. É um tema também muito interessante de estudar com alunos de Ensino Médio, pois o π desperta tanto ou mais fascínio quanto a sequência de Fibonacci.

REFERÊNCIAS

BRESSLER, Jennifer. **The ubiquity of phi in human culture and the natural world**. Jan. 2020. Master's thesis – John Caroll University, University Heights, OH. Available at `https://collected.jcu.edu/mastersessays/132/`.

CARL B. BOYER UTA C. MERZBACH, Isaac Asimov. **A history of mathematics**. 2nd. [S.l.]: Wiley, 1991. ISBN 9780471543978,0471543977.

DIDOMENICO, Angelo S. From Fibonacci Numbers to Geometric Sequences and the Binet Formula by Way of the Golden Ratio! **The Mathematics Teacher**, National Council of Teachers of Mathematics, v. 90, n. 5, p. 386–389, 1997. ISSN 00255769. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/27970188. Acesso em: 22 mar. 2024.

DUNHAM, William. **Journey through Genius: The Great Theorems of Mathematics**. [S.l.: s.n.], 1991. ISBN 9780140147391,9780471500308,014014739X,0471500305.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2016. (Coleção PROFMAT; 08). ISBN 9788583371052.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática**. 1. ed. [S.l.]: OBMEP, 2009.

LIMA, Elon Lages. **A Matemática do Ensino Médio**. 7. ed. [S.l.]: SBM, 2016. v. 2.

MORGADO, Augusto César. **Matemática Discreta**. 2. ed. [S.l.]: SBM, 2015.

OLDS, C. D. **Continued Fractions**. 1. ed. [S.l.]: Random House, 1963.

SOMINSKII, I. S. **The Method of Mathematical Induction (Popular Lectures in Mathematics)**. [S.l.]: Pergamon Press, 1961. (Popular Lectures in Mathematics).

VOROB'EV, Nikolai Nikolaevich. **Fibonacci Numbers**. Única. [S.l.]: Dover Publications, 2011. único.

WILLIAM P. BERLINGHOFF, Fernando Q. Gouvea. **Math Through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others, Expanded Edition**. 2. ed. [S.l.: s.n.], 2003. (Mathematical Association of America Textbooks). ISBN 0883857367,9780883857366.