Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

# RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Leonardo Moura de Amorim

Orientadora
Bárbara Costa da Silva

Recife-PE
Maio de 2014

Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

# RELAÇÕES DE RECORRÊNCIA

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Leonardo Moura de Amorim

Recife-PE
Maio de 2014

Banca examinadora:

---

Bárbara Costa da Silva (Orientadora)

---

Maria Eulalia de Moraes Melo

---

Rodrigo José Gondim Neves

---

Airton Temistocles Gonçalves de Castro

Dedico a Deus , meus pais,
esposa e filhos e a todos os
professores do Profmat.

" *Viver é como andar de bicicleta: é preciso estar em constante movimento para manter o equilíbrio.*"

Albert Einstein

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me dado a capacidade, a saúde e a força necessária para que eu pudesse concluir com êxito essa etapa da minha vida. Por ter me protegido nas estradas durante esses dois anos de viagem à Recife.

Ao meu pai Pedro Amorim e, principalmente, a minha mãe Maria das Graças (in memoriam) por ter investido em meus estudos.

À minha esposa, amiga e companheira, Márcia Aquino, e aos meus filhos, Felipe Matheus e Fernanda Maria, que dividiram comigo todas as dificuldades e foram a fonte de energia responsável pela superação de todos os obstáculos encontrados nesse percurso. Sem a ajuda e compreensão dessa minha turma a realização desse sonho seria bastante difícil.

Aos meus irmãos Luís Augusto e Lusiane.

À minha sogra, Antônia Saturnina, que tanto cuida de mim.

Ao meu colega de curso e companheiro de viagem nesses dois anos, Carlos Wilson.

À minha orientadora Profª. Drª. Bárbara Costa da Silva pela sua orientação, credibilidade e confiança em mim depositada.

Aos professores do PROFMAT pelo precioso apoio durante todo o curso.

Aos meus colegas do IFPE - Campus Pesqueira, Prof. Ms. Olavo Otávio Nunes e Prof. Dr. Helber Elias Paz de Souza, pelas valiosas sugestões.

Ao professor Gerson Vera Cruz de Souza Junior.

À CAPES, por ter financiado o curso.

Por fim,a todos aqueles que acreditaram, torceram e colaboraram de alguma maneira para a conclusão deste curso.

# Resumo

A finalidade do presente trabalho é versar sobre Recorrências, com ênfase, principalmente, nas recorrências de 1ª e 2ª ordens, pois é frequente, em especial no Ensino Médio, nos depararmos com problemas matemáticos que envolvem sequências cujos elementos são definidos de forma recursiva, ou seja, os seus elementos são determinados a partir do momento em que se conhece(m) o(s) seu(s) antecessor(es). Através da recursão é possível resolver uma grande variedade de problemas interessantes e que seriam quase insolúveis sem o conhecimento devido de como trabalhar com essas recorrências. São problemas que envolvem, entre outros, assuntos como contagem, Matemática Financeira, probabilidade etc e que são relativamente comuns em exames vestibulares e em Olimpíadas de Matemática.


**Palavras chave**: Recorrências, Ensino Médio, Problemas Matemáticos, Sequências.

# Abstract

The purpose of this present paper is to discuss about recurrences, with focus, mainly in the recurrences of first and second orders, because they're quite frequent, especially in high school, to face some Math problems that involve sequences whose elements are defined recursively, in other words, its elements are determined from the moment in which they know their predecessors. Via recursion it's possible to solve a great variety of interesting problems and that would be almost hard salving without the knowledge of how to work with these recurrences, these are problems that involve, among others, subjects like count, Financial Mathematics, probability etc and which are relatively common in entrance examinations and in the Olympics of math.


**Key words**: Recurrences, High School, Math Problems, Sequences

# Lista de ilustrações

# Sumário

# Introdução

Muitas sequências são definidas recursivamente através de uma equação envolvendo uma certa quantidade de termos $x_n$ da sequência, chamada equação de recorrência. Perceba que essa equação possibilita a determinação de qualquer termo da sequência utilizando-se o raciocínio recursivo, ou seja, um termo qualquer $x_n$ da sequência é determinado a partir do conhecimento prévio de outro(s) termo(s).

No Ensino Médio, as Progressões Aritmética e Geométrica são exemplos do emprego do raciocínio recursivo, pois é possível determinar um termo qualquer $x_n$ dessas sequências, a partir do segundo, conhecendo-se previamente o seu antecessor $x_{n-1}$. Recorrências desse tipo são chamadas de recorrências lineares de primeira ordem.

Uma sequência que também aparece com frequência em problemas a nível de Ensino Médio é a sequência de Fibonacci em que cada termo $F_n$ da sequência é determinado conhecendo-se previamente os seus dois antecessores imediatos, $F_{n-1}$ e $F_{n-2}$. Recorrências desse tipo são chamadas de recorrências lineares de segunda ordem.

Não existe um padrão de análise para determinar o termo geral das sequências definidas por equações de recorrência não lineares. Nesse caso, o que tentamos fazer é obter sequências clássicas como PA's, PG's, equações de recorrência lineares etc, através de manipulações da equação de recorrência não linear.

Vale salientar que o presente trabalho tem como público alvo professores de Matemática do Ensino Médio e alunos, também do Ensino Médio, que se preparam para ITA, IME e Olimpíadas e portanto, os conteúdos aqui desenvolvidos são abordados de uma forma acessível e adequada ao nível do leitor. São mostradas várias aplicações interessantes abordando alguns conteúdos do Ensino Médio, entre eles, análise combinatória e probabilidade.

No capítulo 1, é dado um conceito geral de recorrência. São abordadas mais profundamente as recorrências lineares de primeira e segunda ordem com coeficientes constantes, cujas aplicações são bem relevantes em problemas matemáticos acessíveis aos estudantes do Ensino Médio e, de uma forma mais breve, as recorrências não lineares.

No capítulo 2, são trabalhadas algumas aplicações das recorrências lineares de primeira e segunda ordem, em problemas clássicos envolvendo a Torre de Hanói, Sequência de Fibonacci, combinatória, probabilidade , divisão do plano por retas, provas indutivas etc.

No capítulo 3, são apresentadas as soluções das questões propostas em exercícios, e que serviram de complemento ao final do texto dos capítulos 1 e 2.

# 1 Recorrência

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ o conjunto dos números naturais. Uma função $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se sequência (de números reais) e de modo geral indicaremos, uma sequência por seus valores

$$f = (f(0), f(1), f(2), ..., f(n), ...).$$

Quando a relação entre os termos de uma sequência é dada por uma equação de recorrência, expressão matemática que relaciona um termo da sequência em função do(s) anterior(es), a sequência é dita recorrente. Por exemplo, podemos definir uma sequência $(x_n)$ de acordo com a relação de recorrência $x_n = x_{n-1} + (x_{n-2})^2$, $n \geqslant 3$, com $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. Perceba que a sequência é definida recursivamente, por uma regra que permite calcular os seus termos em função dos dois antecessores imediatos. Vejamos outros exemplos:

**Exemplo 1**: A sequência $(x_n)$ dos números naturais pares 2, 4, 6,... pode ser definida recursivamente por $x_n = x_{n-1} + 2$ $(n < 1)$, com $x_1 = 2$.

**Exemplo 2**: As progressões aritméticas $(x_n)$ de razão $r$ e primeiro termo $a$ podem ser definidas por $x_{n+1} = x_n + r$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$.

**Exemplo 3**: As progressões geométricas $(x_n)$ de razão $q$ e primeiro termo $a$ podem ser definidas por $x_{n+1} = x_n \cdot q$ $(n \geqslant 1)$, com $x_1 = a$.

**Exemplo 4**: A sequência $(F_n)$, dita de Fibonacci, cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5, 8,... e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geqslant 0)$, com $F_0 = F_1 = 1$.

Uma recorrência, por si só, não define uma sequência. Para que a mesma fique determinada é preciso conhecer uma quantidade inicial k de termos. Por exemplo, a recorrência do exemplo 4, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , não é satisfeita apenas pela Sequência de Fibonacci, mas por qualquer sequência cujos termos, a partir do terceiro, são obtidos através da soma dos dois antecessores imediatos. Perceba que neste caso k é igual 2.

As equações de recorrência podem ser classificadas, quanto a sua:

**(I) Ordem** : A ordem de uma equação recorrente é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos que pertencem a equação de recorrência. A equação de recorrência $x_n = \dfrac{x_{n-3}}{x_{n-4}}$ com $n \geqslant 5$, é de 4ª ordem, visto que a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos é igual a 4.

**(II) Solução** : Uma equação de recorrência de ordem $k$ é dita homogênea quando a $k$-upla (0,0,0, ..., 0) é solução da equação. Caso a recorrência não admita a solução

nula,ela é dita não homogênea.
**(III) Linearidade**: Uma sequência $(x_n)$ possui uma equação de recorrência linear de ordem $k$ se está escrita na forma

$$f_k(n)x_{n+k} + f_{k-1}(n)x_{n+k-1} + ... + f_1(n)x_{n+1} + f_0(n)x_n = h(n)$$

com $f_i(n)$, $0 \leqslant i \leqslant k$ e $h(n)$ funções de $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_k \neq 0$ e $f_0 \neq 0$.
Observe que se $h(n) = 0$ a recorrência linear é homogênea e, caso contrário, a recorrência é não homogênea.

## 1.1 Sequências Recorrentes Lineares de Primeira Ordem

Uma recorrência de primeira ordem expressa $x_{n+1}$ em função de $x_n$. Ela é dita linear se (e somente se) essa função for da forma $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$, $g(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Exemplo 1**: As recorrências $x_{n+1} = 3x_n - n^4$ e $x_{n+1} = nx_n$ são lineares e a recorrência $x_{n+1} = x_n^3$ não é linear.

As duas últimas, por não possuírem termo independente de $x_n$, são chamadas homogêneas.

A resolução de uma recorrência linear homogênea de primeira ordem é bastante simples, conforme mostram os exemplos a seguir.

**Exemplo 2**: Resolva $x_{n+1} = nx_n, x_1 = 1$.
**Solução**: Temos

$$\begin{gathered} x_2 = 1x_1 \\ x_3 = 2x_2 \\ x_4 = 3x_3 \\ x_5 = 4x_4 \\ ............ \\ x_n = (n-1)x_{n-1} \end{gathered}$$

Daí, multiplicando, obtemos $x_n = (n-1)!x_1$. Como $x_1 = 1$, segue-se que $x_n = (n-1)!$.

**Exemplo 3**: Resolva $x_{n+1} = 2x_n$.

**Solução**: Temos

$$x_2 = 2x_1$$
$$x_3 = 2x_2$$
$$x_4 = 2x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 2x_{n-1}$$

Multiplicando, obtemos $x_n = 2^{n-1}x_1$.

Observe que o valor de $x_1$ não foi determinado previamente. Logo, a recorrência tem uma infinidade de soluções, $x_n = K \cdot 2^{n-1}$, onde K é uma constante arbitrária.

As recorrências lineares não-homogêneas de primeira ordem que mais facilmente se resolvem são as da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$. De fato, temos

$$x_2 = x_1 + f(1)$$
$$x_3 = x_2 + f(2)$$
$$x_4 = x_3 + f(3)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + f(n-1)$$

Somando, obtemos $x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$.

**Exemplo 4**: Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n$, $x_1 = 1$.
**Solução**: Tem-se

$$x_2 = x_1 + 2$$
$$x_3 = x_2 + 2^2$$
$$x_4 = x_3 + 2^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$$

que somando, resulta

$$x_n = x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1})$$
$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1}$$
$$x_n = 1\frac{2^n - 1}{2 - 1}$$
$$x_n = 2^n - 1.$$

**Exemplo 5**: Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

**Solução**: Tem-se

$$x_2 = x_1 + 1$$
$$x_3 = x_2 + 2$$
$$x_4 = x_3 + 3$$
$$..................$$
$$x_n = x_{n-1} + (n-1)$$

que somando, resulta

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$$
$$x_n = 1 + 2 + 3 + ... + (n-1)$$
$$x_n = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

Podemos transformar qualquer recorrência linear não-homogênea de primeira ordem em uma da forma $x_{n+1} = x_n + f(n)$.

**Teorema 1.1.1** *Se $a_n$ é uma solução não nula de $z_{n+1} = g(n) \cdot z_n$, $g(n) \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ então a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ em $y_{n+1} = y_n + h(n)\,[g(n) \cdot a_n]^{-1}$.*

**Prova 1.1.1** *A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma*
*$x_{n+1} = g(n) \cdot x_n + h(n)$ em $a_{n+1} y_{n+1} = g(n) \cdot a_n y_n + h(n)$.*
*Mas $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$ pois $a_n$ é solução de $z_{n+1} = g(n) \cdot z_n$. Daí, a equação se transforma em $g(n) \cdot a_n y_{n+1} = g(n) \cdot a_n y_n + h(n)$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n) \cdot a_n]^{-1}$, que é a solução geral de uma equação de recorrência de primeira ordem.*

**Exemplo 6**: Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$.

**Solução**: Uma possível solução não nula de $z_{n+1} = 2z_n$ é $z_n = 2^{n-1}$, pelo exposto no exemplo 3. Fazendo a substituição $x_n = 2^{n-1} y_n$, obtemos $2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$. Segue-se daí que

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$
$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$
$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$
$$..................$$
$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$

Somando, tem-se

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + ... + 2^{-(n-1)}$$

$$y_n = y_1 + 2^{-1}\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1}$$

$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1.$$

Como $x_n = 2^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = 3 - 2^{1-n}$. Logo, $x_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$.

**Exemplo 7**: Resolva $x_{n+1} = 3x_n + 3^n, x_1 = 2$.

**Solução**: Uma possível solução não nula de $z_{n+1} = 3z_n$ é $z_n = 3^{n-1}$. Fazendo a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$, obtém-se $3^n y_{n+1} = 3^n y_n + 3^n$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + 1$. Segue daí que $y_n$ é uma progressão aritmética de razão 1. Portanto, $y_n = y_1 + (n-1)1$. Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$. Logo, $x_n = (n+1)3^{n-1}$.

### 1.1.1 Sequências Recorrentes Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Apesar de sabermos como determinar o termo geral da recorrência $x_{n+1} = g(n)x_n + h(n)$, $g(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ iremos estudar, particularmente, um caso mais simples, que ocorre quando $g$ e $h$ são constantes, ou seja, quando a recorrência é da forma $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Se $a = 1$ e $b \neq 0$ a sequência é uma progressão aritmética de razão $b$, com termo geral dado por $x_n = x_1 + (n-1) \cdot b$, $n \geqslant 1$.

Se $a = 1$ e $b = 0$ a sequência é constante, com termo geral $x_n = x_1$ $n \geqslant 1$.

Se $a \neq 1$ e $b = 0$ a sequência é uma progressão geométrica de razão $a$, com termo geral dado por $x_n = x_1 \cdot a^{n-1}$, $n \geqslant 1$.

Se $a \neq 1$ e $b \neq 0$ pode-se encontrar uma sequência $(y_n)$, relacionada com $x_n$ na forma $x_n = y_n + k$ $(k \in \mathbb{R})$, de modo que a equação de recorrência de $(y_n)$ seja $y_{n+1} = a \cdot y_n$. Observe: se $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$ e $x_n = y_n + k$ então $y_{n+1} + k = a(y_n + k) + b$. Para que se tenha $y_{n+1} = a \cdot y_n$ basta tomar $k(a-1) + b = 0$, ou seja impor que $k = \dfrac{b}{1-a}$. Daí, tem-se que o termo geral de $(y_n)$ é $y_n = y_1 \cdot a^{n-1}$. Segue-se que $x_n - k = (x_1 - k) \cdot a^{n-1}$. Logo, $x_n - \dfrac{b}{1-a} = (x_1 - \dfrac{b}{1-a}) \cdot a^{n-1}$. Daí, $x_n = (x_1 - \dfrac{b}{1-a}) \cdot a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}$.

**Exemplo 8**: Resolva $x_n = 2 \cdot x_{n-1} + 1, x_1 = 2$.

**Solução**: Seja $x_n = y_n + k(k \in \mathbb{R})$. Substituindo, tem-se:

$$y_n + k = 2 \cdot (y_{n-1} + k) + 1$$
$$y_n + k = 2 \cdot y_{n-1} + 2 \cdot k + 1$$

$$y_n = 2 \cdot y_{n-1} + k + 1.$$

Fazendo $k+1=0$ tem-se $k=-1$. Segue daí que $y_n = 2 \cdot y_{n-1}$, que caracteriza uma P.G. de razão 2. Logo,

$$\begin{aligned} y_n &= 2^{n-1} \cdot y_1 \\ x_n - k &= 2^{n-1} \cdot (x_1 - k) \\ x_n + 1 &= 2^{n-1} \cdot (2+1) \\ x_n &= 3 \cdot 2^{n-1} - 1, n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Diante do que foi exposto, pode-se concluir que o termo geral de uma sequência que possui uma equação de recorrência na forma $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$ é dado por $x_n = \alpha \cdot a^{n-1} + \beta$, onde $\alpha$ e $\beta$ são constantes reais. Assim, basta saber o valor de dois termos da sequência e substituir estes valores na expressão do termo geral, dando origem a um sistema de duas equações em $\alpha$ e $\beta$. Segue daí que:

**Teorema 1.1.2** *O termo geral de uma sequência que possui uma equação de recorrência na forma $x_{n+1} = a \cdot x_n + b, a \neq 1$ e $b \neq 0$ é dado por $x_n = \alpha \cdot a^{n-1} + \beta$, $\alpha$ e $\beta$ constantes.*

**Prova 1.1.2** *Inicialmente, perceba que $x_n = \alpha \cdot a^{n-1} + \beta \Rightarrow \beta = \dfrac{b}{1-a}$ e, que a equação dada pode ser escrita na forma $x_{n+1} - a \cdot x_n - b = 0$.*
*Seja $y_n$ uma solução qualquer de $x_{n+1} - a \cdot x_n - b = 0$. Queremos mostrar que $y_n = \alpha \cdot a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}$, para algum $\alpha$ real. A constante $\alpha$ pode ser determinada através da equação $\alpha + \dfrac{b}{1-a} = y_1$. Daí, tem-se $\alpha = y_1 - \dfrac{b}{1-a}$.*

*Para provar o teorema, afirmamos que $y_n = \alpha \cdot a^{n-1} + \dfrac{b}{1-a}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Considere, $z_n = y_n - \alpha \cdot a^{n-1} - \dfrac{b}{1-a}$. Mostraremos que $z_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Temos*

$$\begin{aligned} z_{n+1} - a \cdot z_n - b &= y_{n+1} - \alpha \cdot a^n - \frac{b}{1-a} - a(y_n - \alpha \cdot a^{n-1} - \frac{b}{1-a}) - b \\ z_{n+1} - a \cdot z_n - b &= (y_{n+1} - a \cdot y_n - b) + (-\alpha \cdot a^n + \alpha \cdot a^n) - (\frac{b}{1-a} - a \cdot \frac{b}{1-a}) \end{aligned}$$

*O primeiro parênteses é igual a zero porque $y_n$ é solução de $x_{n+1} - a \cdot x_n - b = 0$; o segundo parênteses também é zero e o terceiro parênteses é igual a $b$. Segue daí que $z_{n+1} - a \cdot z_n = 0$.*

*Como $\alpha + \dfrac{b}{1-a} = y_1$, temos $z_1 = 0$. Mas, se $z_{n+1} - a \cdot z_n = 0$ e $z_1 = 0$ então $z_n = 0$ para todo $n$.*

**Exemplo 9**: Determine o termo geral da sequência $x_n = 3 \cdot x_{n-1} - 2$, onde $x_1 = 3$.

**Solução**: O termo geral é da forma $x_n = \alpha \cdot 3^{n-1} + \beta$. Sabendo que $x_1 = 3$ e $x_2 = 7$, temos que $\alpha+\beta = 3$ e $3\cdot\alpha+\beta = 7$. Segue-se daí que $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Logo, $x_n = 2\cdot 3^{n-1}+1$.

**Exemplo 10 (Olimpíada da Bélgica)**: Uma sequência de números $a_k$ é definida como segue: $a_0 = 0, a_{k+1} = 3a_k + 1$, $k \geqslant 0$. Mostre que $a_{155}$ é divisível por 11.

**Solução**: Uma equação de recorrência da forma $a_{k+1} = 3a_k + 1$ com $k \geqslant 0$, possui termo geral da forma $a_k = \alpha \cdot 3^n + \beta$.
I) $a_0 = 0 \Rightarrow 0 = \alpha + \beta$;
II) $a_1 = 1 \Rightarrow 1 = 3\alpha + \beta$;
Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = \dfrac{1}{2}$ e $\beta = \dfrac{-1}{2}$. Portanto, $a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}, n \geqslant 0$.
Daí, $a_{155} = \dfrac{3^{155} - 1}{2}$. Então

$3^5 = 243 = 11 \cdot 22 + 1 = 11k + 1 \Rightarrow (3^5)^{31} = (11k + 1)^{31}$. Usando a fórmula do desenvolvimento do Binômio de Newton, conclui-se que $3^{155} = 11q + 1$ $(q \in N)$. Logo, $3^{155} - 1 = 11 \cdot q \Rightarrow 11|a_{155}$.

## 1.2 Sequências Recorrentes Lineares de Segunda Ordem

### 1.2.1 Sequências Recorrentes Lineares de Segunda Ordem Homogêneas e com Coeficientes Constantes

São definidas a partir da equação de recorrência $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$, onde $a$ e $b$ são constantes reais, com $b \neq 0$, pois caso contrário a recorrência seria de primeira ordem.

Para qualquer equação de recorrência linear de segunda ordem homogênea e de coeficientes constantes, da forma $x_{n+2} = a \cdot x_{n+1} + b \cdot x_n$, iremos associar uma equação do segundo grau $x^2 = ax + b$, chamada de equação característica. Como $b \neq 0$ tem-se que 0 não é raiz da equação característica.

Mais geralmente, numa equação de recorrência linear homogênea, de ordem $k$ e com coeficientes constantes da forma

$$x_{n+k} + q_1 x_{n+k-1} + ... + q_{k-1} x_{n+1} + q_k x_n = 0,\ q_k \neq 0$$

temos que o polinômio $x^k + q_1 x^{k-1} + ... + q_{k-1} x + q_k$ é chamado de polinômio característico da equação. À equação $x^k + q_1 x^{k-1} + ... + q_{k-1} x + q_k = 0$ é denominada equação característica.

Vejamos como determinar o termo geral de uma sequência recorrente linear de segunda ordem que esteja escrita na forma $x_{n+2} = (\alpha+\beta)x_{n+1} - \alpha\beta \cdot x_n$, com $\alpha \neq \beta$, e cujos dois valores iniciais são $x_0$ e $x_1$. Vale ressaltar que a suposição de ser $b \neq 0$ implica $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Observe, primeiramente, que:

$$x_{n+2} = (\alpha+\beta)x_{n+1} - \alpha\beta \cdot x_n \Longleftrightarrow x_{n+2} - \alpha \cdot x_{n+1} = \beta(x_{n+1} - \alpha \cdot x_n)(1)$$

Assim, se definirmos a sequência $(y_n)$ de acordo com a expressão $y_n = x_n - \alpha \cdot x_{n-1}$, tem-se, a partir da equação (1) que $y_{n+2} = \beta \cdot y_{n+1}$, que caracteriza uma progressão geométrica de razão $\beta$. Logo:

$$y_n = y_1 \cdot \beta^{n-1} \Rightarrow x_n - \alpha \cdot x_{n-1} = (x_1 - \alpha \cdot x_0)\beta^{n-1}(2)$$

De forma análoga:

$$x_{n+2} = (\alpha+\beta) \cdot x_{n+1} - \alpha\beta \cdot x_n \Rightarrow x_{n+2} - \beta \cdot x_{n+1} = \alpha(x_{n+1} - \beta \cdot x_n).$$

Definindo $z_n = x_n - \beta \cdot x_{n-1}$ tem-se

$$z_{n+2} = \alpha \cdot z_{n+1} \Rightarrow z_n = z_1 \cdot \alpha^{n-1} \Rightarrow x_n - \beta \cdot x_{n-1} = (x_1 - \beta \cdot x_0)\alpha^{n-1}(3)$$

Multiplicando a equação (2) por $\beta$ e a equação (3) por $\alpha$ obtemos:
(I) $\beta \cdot x_n - \alpha\beta \cdot x_{n-1} = (x_1 - \alpha \cdot x_n)\beta^n$
(II) $\alpha \cdot x_n - \alpha\beta \cdot x_{n-1} = (x_1 - \beta \cdot x_0)\alpha^n$
Fazendo (II) - (I)tem-se:

$$(\alpha-\beta)x_n = (x_1 - \beta \cdot x_0)\alpha^n - (x_1 - \alpha \cdot x_0)\beta^n \Rightarrow x_n = \frac{(x_1 - \beta \cdot x_0)}{\alpha - \beta}\alpha^n + \frac{(\alpha \cdot x_0 - x_1)}{\alpha - \beta}\beta^n.$$

**Exemplo 1**: Determine o termo geral da sequência definida pela equação de recorrência $x_n = 5 \cdot x_{n-1} - 6 \cdot x_{n-2}$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

**Solução**:
I) $x_n = (2+3)x_{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot x_{n-2} \Rightarrow x_n - 2 \cdot x_{n-1} = 3(x_{n-1} - 2 \cdot x_{n-2})$
Definindo $y_n = x_n - 2 \cdot x_{n-1} \Rightarrow y_n = 3 \cdot y_{n-1} \Rightarrow y_n = y_1 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$
$x_n - 2 \cdot x_{n-1} = (x_1 - 2 \cdot x_0)3^{n-1} \Rightarrow x_n - 2 \cdot x_{n-1} = -3^{n-1}$ (1)
II) $x_n = (2+3)x_{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot xn - 2 \Rightarrow x_n - 3 \cdot x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3 \cdot x_{n-2})$
Definindo $z_n = x_n - 3 \cdot x_{n-1} \Rightarrow z_n = 2 \cdot z_{n-1} \Rightarrow z_n = z_1 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow$
$x_n - 3 \cdot x_{n-1} = (x_1 - 3 \cdot x_0)2^{n-1} \Rightarrow x_n - 3 \cdot x_{n-1} = -3 \cdot 2^{n-1}$ (2)
Multiplicando a equação (1) por 3 e a equação (2) por -2 temos:
(III) $3 \cdot x_n - 6 \cdot x_{n-1} = -3^n$
(IV) $-2 \cdot x_n + 6 \cdot x_{n-1} = 3 \cdot 2^n$
Somando estas duas equações, tem-se $x_n = 3 \cdot 2^n - 3^n, n \geqslant 0$.

O teorema seguinte mostra que se as raízes da equação característica são $\alpha$ e $\beta$, $\alpha \neq \beta$, então qualquer sequência da forma $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ é solução da recorrência, quaisquer que sejam os valores das constantes $A$ e $B$. Vale destacar que, no exemplo anterior, os valores das constantes $A$ e $B$ foram determinados, porque os valores iniciais, $x_0$ e $x_1$, foram fornecidos.

**Teorema 1.2.1** *Se as raízes de $x^2+px+q=0$ são $\alpha$ e $\beta$, $\alpha \neq \beta$, então $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes $A$ e $B$.*

**Prova 1.2.1** *Substituindo $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ na recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos, $A \cdot \alpha^n(\alpha^2+p\alpha+q) + B \cdot \beta^n(\beta^2+p\beta+q) = A \cdot \alpha^n \cdot 0 + B \cdot \beta^n \cdot 0 = 0$.*

Perceba que, de acordo com o exposto, podemos criar outro modo de determinar o termo geral de uma sequência escrita na forma $x_{n+2} - (\alpha+\beta)x_{n+1} + \alpha\beta \cdot x_n = 0$, com $\alpha \neq \beta$. Observe que $\alpha$ e $\beta$ são as raízes da equação do 2º grau $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$, que é a equação característica da sequência recorrente. De acordo com a expressão do termo geral que foi obtida anteriormente podemos concluir que que $x_n$ é da forma $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, onde $A$ e $B$ são constantes. Para se determinar os valores de $A$ e $B$ basta substituir, caso seja informado, os valores de dois termos conhecidos da sequência em $x_n$.

**Exemplo 2**: Encontre o termo geral da sequência definida por $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$, $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$.

**Solução**: Primeiramente, perceba que a recorrência é equivalente a $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0$, como a expressão do termo geral é da forma $x_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, onde $\alpha$ e $\beta$ são as raízes da equação característica da recorrência, que é, $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes 2 e -1. Segue-se daí que o termo geral é da forma $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$. Como $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$ temos que $A + B = 5$ e $2A - B = 4$. Resolvendo este sistema linear obtemos $A = 3$ e $B = 2$. Assim, o termo geral da sequência é $x_n = 3 \cdot 2^n + 2 \cdot (-1)^n, n \geqslant 0$.

**Exemplo 3**: A equação $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 0$ tem $x^2 - 3x - 4 = 0$ como equação característica. As raízes da equação característica são -1 e 4. Portanto, de acordo com o teorema 1, todas as sequências da forma $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 4^n$ solucionam a recorrência.

O teorema a seguir mostra que, se $\alpha \neq \beta$, todas as soluções da recorrência têm a forma apontada no teorema 1.2.1.

**Teorema 1.2.2** *Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são $\alpha$ e $\beta$, com $\alpha \neq \beta$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, $A$ e $B$ constantes.*

**Prova 1.2.2** *Seja $y_n$ uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Determine constantes $A$ e $B$ que sejam soluções do sistema de equações*

$$\begin{cases} A \cdot \alpha + B \cdot \beta = y_1 \\ A \cdot \alpha^2 + B \cdot \beta^2 = y_2 \end{cases}$$

*isto é,*

$$A = \frac{\beta^2 y_1 - \beta y_2}{\alpha \cdot \beta(\beta - \alpha)} \text{ e } B = \frac{\alpha y_2 - \alpha^2 y_1}{\alpha \cdot \beta(\beta - \alpha)}.$$

*Isso é possível pois $\alpha \neq \beta$ e $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.*

*Afirmamos que $y_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$ para todo $n$ natural, o que provará o teorema.*

*Com efeito, seja $z_n = y_n - A \cdot \alpha^n - B \cdot \beta^n$. Mostraremos que $z_n = 0$ para todo $n$. Temos*

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - A \cdot \alpha^n(\alpha^2 + p\alpha + q) - B \cdot \beta^2(\beta^2 + p\beta + q).$

*O primeiro parênteses é igual a zero pois $y_n$ é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$; os dois últimos são iguais a zero porque $\alpha$ e $\beta$ são raízes de $x^2 + px + q = 0$. Então $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.*

*Além disso, como $A \cdot \alpha + B \cdot \beta = y_1$ e $A \cdot \alpha^2 + B \cdot \beta^2 = y_2$, temos $z_1 = z_2 = 0$.*

*Mas, se $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ e $z_1 = z_2 = 0$ então $z_n = 0$ para todo $n$.*

**Exemplo 4**: Quais as soluções da recorrência $x_{n+2} - 3x_{n+1} - 4x_n = 0$?

**Solução**: A equação característica é $x^2 - 3x - 4 = 0$, cujas raízes são -1 e 4. De acordo com os teoremas 1 e 2, as expressões da forma $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 4^n$ são soluções da recorrência, com $A$ e $B$ sendo constantes arbitrárias.

**Exemplo 5**: Determine o número de Fibonacci $F_n$. A sequência de Fibonacci é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_1 = F_2 = 1$.

**Solução**: A equação característica é $x^2 - x - 1 = 0$. As raízes da equação característica são

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \text{ Daí } F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Para determinar $A$ e $B$ basta usar $F_1 = F_2 = 1$. Obtemos o sistema

$$\begin{cases} A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ A \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + B \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo-o obtemos $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n,$$

.

Analisemos agora uma sequência recorrente da forma $x_{n+2} = (\alpha+\beta)x_{n+1} - \alpha \cdot \beta x_n$, com $\alpha = \beta$. Observe que isto equivale a afirmar que a equação característica da sequência possui raízes iguais. Se $\alpha = \beta$ a equação pode ser escrita assim: $x_{n+2} = 2\alpha \cdot x_{n+1} - \alpha^2 \cdot x_n$. Portanto:

$$x_{n+2} = 2\alpha \cdot x_{n+1} - \alpha^2 \cdot x_n \Rightarrow x_{n+2} - \alpha \cdot x_{n+1} = \alpha(x_{n+1} - \alpha \cdot x_n).$$

Definindo $y_n = x_n - \alpha \cdot x_{n-1}$ teremos

$$y_{n+2} = \alpha \cdot y_{n+1} \Rightarrow y_n = y_1 \cdot \alpha^{n-1} \Rightarrow x_n - \alpha \cdot x_{n-1} = (x_1 - \alpha \cdot x_0)\alpha^{n-1}.$$

Definindo outra sequência $(z_n)$ de modo que $x_n = \alpha^n \cdot z^n$ obtemos:

$$\alpha^n \cdot z_n - \alpha^n \cdot z_{n-1} = (\alpha \cdot z_1 - \alpha \cdot z_0)\alpha^{n-1} \Rightarrow z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0$$

que é característica de uma PA de razão $z_1 - z_0$. Daí,

$$z_n = z_0 + n(z_1 - z_o) \Rightarrow \frac{x_n}{\alpha^n} = x_0 + n(\frac{x_1}{\alpha} - x_0) \Rightarrow x_n = x_0 \cdot \alpha^n + n(\frac{x_1}{\alpha} - x_0)\alpha^n$$

.

**Exemplo 6**: Encontre o termo geral da sequência definida por

$$x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0, x_0 = 4, x_1 = 1.$$

**Solução**:

$x_{n+2}-10x_{n+1}+25x_n = 0 \Rightarrow x_{n+2}-5x_{n+1} = 5x_{n+1}-25x_n \Rightarrow x_{n+2}-5x_{n+1} = 5(x_{n+1}-5x_n)$.

Fazendo $y_n = x_n - 5x_{n-1}$ tem-se:

$$y_{n+2} = 5 \cdot y_{n+1} \Rightarrow y_n = y_1 \cdot 5^{n-1} \Rightarrow x_n - 5x_{n-1} = (x_1 - 5x_0) \cdot 5^{n-1}$$

. Definindo $x_n = 5^n \cdot z_n$ tem-se:

$$5^n \cdot z_n - 5^n \cdot z_{n-1} = (5 \cdot z_1 - 5 \cdot z_0) \cdot 5^{n-1} \Rightarrow z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0 \Rightarrow$$
$$z_n = z_0 + n(z_1 - z_0) \Rightarrow \frac{x_n}{5^n} = x_0 + n(\frac{x_1}{5} - x_0) \Rightarrow x_n = 4 \cdot 5^n - 19 \cdot n \cdot 5^{n-1}.$$

Pode-se também resolver de outro modo. No caso em que $\alpha = \beta$ vê-se que o termo geral é da forma $x_n = A \cdot \alpha^n + n \cdot B \cdot \alpha^n$. Os valores de $A$ e $B$ são constantes determinadas conhecendo-se dois termos quaisquer de $x_n$.

**Exemplo 7**: Determine o termo geral da sequência recorrente $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 5$.

**Solução**:A raiz dupla da equação característica, $x^2 - 4x + 4 = 0$ é $\alpha = 2$. Segue-se daí, que o termo geral é dado por $x_n = A \cdot 2^n + n \cdot B \cdot 2^{n-1}$. Sendo $x_0 = 1$ e $x_1 = 5$ tem-se que $A = 1$ e $2A + B = 5$, onde obtemos $B = 3$. Portanto, $x_n = 2^n + 3 \cdot n \cdot 2^{n-1}, n \geqslant 0$.

**Teorema 1.2.3** *Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são iguais, $\alpha = \beta = r$, então $a_n = A \cdot r^n + B \cdot n \cdot r^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+2} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes $A$ e $B$.*

**Prova 1.2.3** *Se as raízes são iguais então $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = A \cdot r^n + B \cdot n \cdot r^n = 0$, obtemos, agrupando convenientemente os termos,*
$A \cdot r^n(r^2+pr+q)+B \cdot n \cdot r^n(r^2+pr+q)+B \cdot r^n \cdot r(2r+p) = A \cdot r^n \cdot 0+B \cdot n \cdot r^n \cdot 0+B \cdot r^n \cdot r \cdot 0 = 0.$

**Teorema 1.2.4** *Se as raízes de $x^2 + px + q = 0$ são iguais, $\alpha = \beta = r$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = A \cdot r^n + B \cdot n \cdot r^n$, $A$ e $B$ constantes.*

**Prova 1.2.4** *Seja $y_n$ uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. $A$ e $B$ são as soluções do sistema de equações*

$$\begin{cases} A \cdot r + B \cdot r = y_1 \\ A \cdot r^2 + 2B \cdot r^2 = y_2 \end{cases}$$

*isto é,* $A = 2\frac{y_1}{r} - \frac{y_2}{r^2}$ *e* $B = \frac{y_2 - r \cdot y_1}{r^2}$.

*Isso é possível pois* $r \neq 0$. *Afirmamos que* $y_n = A \cdot r^n + B \cdot n \cdot r^n$ *para todo* $n$ *natural, o que provará o teorema. De fato, seja* $z_n = y_n - A \cdot r^n - B \cdot n \cdot r^n$. *Mostremos que* $z_n = 0$ *para todo* $n$. *Temos*

$z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) - A \cdot r^n(r^2 + pr + q) - B \cdot n \cdot r^n(r^2 + pr + q) -$
$-B \cdot r^n \cdot r(2r + p)$.

*O primeiro parênteses é igual a zero porque* $y_n$ *é solução de* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$*; o segundo e o terceiro parênteses são iguais a zero pois* $r$ *é raiz da equação* $x^2 + px + q = 0$*; o quarto é igual a zero porque* $2r + p = 0$ *já que, quando* $\alpha = \beta = r$, $r = -\frac{p}{2}$. *Então* $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$.

*Além disso, como* $A \cdot r + B \cdot r = y_1$ *e* $A \cdot r^2 + 2B \cdot r^2 = y_2$*, temos* $z_1 = z_2 = 0$. *Mas, se* $z_{n+2} + pz_{n+1} + qz_n = 0$ *e* $z_1 = z_2 = 0$ *então* $z_n = 0$*, para todo* $n$.

**Exemplo 8**: A recorrência $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$ tem equação característica $x^2 - 4x + 4 = 0$. As raízes são $\alpha = \beta = 2$ e a solução da recorrência é $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n$.

#### 1.2.1.1 Sequências Recorrentes Lineares de Segunda Ordem Homogêneas, com Coeficientes Constantes e Equação Característica com Raízes Complexas

Caso as raízes da equação característica sejam complexas, a solução $a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$, $A$ e $B$ constantes arbitrárias pode ser escrita de modo a evitar cálculos com complexos. Escrevendo as raízes na forma trigonométrica, teremos: $\alpha = \rho(cos\theta + isen\theta)$,
$\beta = \rho(cos\theta - isen\theta)$, $\alpha^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$, $\beta^n = \rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta))$. Daí,
$a_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n = \rho^n[(A + B)cos(n\theta) + i(A - B)sen(n\theta)]$, $A + B$ e $i(A - B)$ são novas constantes arbitrárias e a solução pode ser escrita $a_n = \rho^n[A'cos(n\theta) + B'sen(n\theta)]$.

É muito importante observar que no caso em que $\alpha = \beta$ não podem existir raízes complexas, pois as mesmas são, necessariamente, conjugadas.

**Exemplo 9**: A recorrência $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ tem equação característica $x^2 + x + 1 = 0$. As raízes da equação característica são $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ que são complexos de módulo $\rho = 1$ e cujos argumentos principais são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{-\pi}{3}$.

A solução é $x_n = \rho^n[Acos(n\theta) + Bsen(n\theta)] = Acos(\frac{n\pi}{3}) + Bsen(\frac{n\pi}{3})$.

### 1.2.2 Sequências Recorrentes Lineares de segunda Ordem Não Homogêneas e com Coeficientes Constantes

O próximo teorema é um método para resolver algumas equações não-homogêneas.

**Teorema 1.2.5** *Se* $a_n$ *é uma solução da recorrência* $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = f(n)$ *então a substituição* $x_n = a_n + y_n$ *transforma a recorrência em* $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

**Prova 1.2.5** *Substituindo* $x_n$ *por* $a_n + y_n$ *na recorrência dada, tem-se* $(a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n)$ $+ (y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n) = f(n)$. *Mas* $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = f(n)$ *pois* $a_n$ *é solução da recorrência original. Logo, a equação se transformou em* $y_{n+2} + py_{n+1} + qy_n = 0$.

Pelo teorema 1.2.5, a solução de uma recorrência não-homogênea é composta de duas parcelas: uma solução qualquer da não-homogênea e a solução da homogênea. Já sabemos determinar a solução de uma equação homogênea. A solução da equação não-homogênea, será determinada por tentativas.

**Exemplo 10**: Determine a solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$.

**Solução**: A equação característica da recorrência homogênea é $x^2 - 6x + 8 = 0$, e tem raízes $\alpha = 2$ e $\beta = 4$. Segue-se daí que a solução da homogênea, ou seja, de $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ é $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n$.
O passo seguinte é descobrir uma solução particular, $z_n$, da recorrência dada, $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, ou seja, quando substituirmos $z_n$ em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n$ devemos obter $n + 3^n$.
A grande dúvida é o tipo de função que $z_n$ deve ser. Observando a recorrência dada é intuitivo supor que $z_n$ é a soma de um polinômio do primeiro grau com uma exponencial cuja base é igual a 3, ou seja, $z_n = C \cdot n + D + E \cdot 3^n$. Substituindo $z_n$ em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$, obtemos $3C \cdot n + 3D - 4C - E \cdot 3^n = n + 3^n$. Segue-se daí que $z_n$ é solução da equação se $3C = 1$, $3D - 4C = 0$ e $-E = 1$. Logo, $C = \dfrac{1}{3}$, $D = \dfrac{4}{9}$ e $E = -1$. Portanto, $z_n = \dfrac{1}{3}n + \dfrac{4}{9} - 3^n$. A solução da recorrência é a soma de $a_n$ com $z_n$. Então, $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n + \dfrac{1}{3}n + \dfrac{4}{9} - 3^n$.

**Exemplo 11**: Determine a solução da recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

**Solução**: Conforme visto no exemplo 10 a equação característica da homogênea é $x^2 - 6x + 8 = 0$, cujas raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = 4$. A solução é $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n$.
Agora, tentemos descobrir uma solução particular $z_n$, da equação $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Observando a equação dada é intuitivo supor que $z_n$ é a soma de um polinômio constante com uma exponencial de base 2, ou seja, $z_n = C + D \cdot 2^n$. Porém, substituindo $z_n$ em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$, obtemos $3A = 1 + 2^n$, que é uma igualdade impossível. A solução da recorrência não é da forma $z_n = C + D \cdot 2^n$.
Analisando cuidadosamente o ocorrido, vê-se que a solução proposta não tinha como dar certo, pois queríamos obter uma constante C para igualar a 1 e um termo $D \cdot 2^n$ para igualar a $2^n$. Mas, $D \cdot 2^n$ é uma solução da homogênea, com $D = A$ e $B = 0$ e, portanto, substituído na equação daria zero e não uma exponencial que pudéssemos igualar a $2^n$.
Tentemos então $z_n = C + D \cdot n \cdot 2^n$. Sempre que algum bloco não atender as expectativas, faremos uma correção multiplicando o bloco por $n$. Substituindo, obtemos $3C - 4D \cdot 2^n = 1 + 2^n$. Daí, $3C = 1$ e $4B = -1$, isto é, $A = \dfrac{1}{3}$ e $B = -\dfrac{1}{4}$, temos a solução $z_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{n \cdot 2^n}{4}$. A solução da recorrência é a soma de $a_n$ com $z_n$. Logo, $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n + \dfrac{1}{3} - \dfrac{n \cdot 2^n}{4}$.

**Exemplo 12**: Determine o termo geral da sequência definida por $c_n = c_{n-1} + 6c_{n-2} + 12$, com $c_0 = 7$ e $c_1 = -10$.

**Solução**: A equação característica é $c^2 - c - 6 = 0$. As raízes da equação são $\alpha = -2$ e $\beta = 3$. Segue-se daí, que a solução da equação homogênea é $a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 3^n$.
Determinemos agora, uma solução particular, $z_n$, da equação $c_n - c_{n-1} - c_{n-2} = 12$. Observando a equação dada, é razoável supor que $z_n$ é um polinômio constante. Tentemos $z_n = D$. Substituindo em $c_n = c_{n-1} + 6 \cdot c_{n-2} + 12$, obtém-se $D = -2$. Daí, $z_n = -2$.
Como a solução da recorrência é a soma de $a_n$ com $z_n$ temos que $c_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot 3^n - 2$.
Podemos determinar os valores de $A$ e $B$, pois sabemos que $c_0 = 7$ e $c_1 = -10$. Daí, tem-se $A + B = 9$ e $-2A + 3B = -8$. Logo, $A = 7$ e $B = 2$. Portanto, $c_n = 7 \cdot (-2)^n + 2 \cdot 3^n - 2$, $n \geqslant 0$.

**Exemplo 13 (Olimpíada da Índia-96)**: Define-se uma sequência $a_n$, $n \geqslant 1$, por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} - a_n + 2$, para $n \geqslant 1$. Prove que para todo $m$, $a_m \cdot a_{m+1}$ também é um termo da sequência.

**Solução**: A equação característica é $a^2 - 2 \cdot a + 1 = 0$, cujas raízes são $\alpha = \beta = 1$.
A solução $x_n$ da homogênea é $x_n = A \cdot 1^n + B \cdot n \cdot 1^n = A + B \cdot n$.
Agora, tentaremos encontrar uma solução particular $z_n$ para a recorrência
$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$.
Observando a equação dada, é intuitivo supor que $z_n$ é um polinômio constante, ou seja, $z_n = C$. Mas, se observarmos melhor, veremos que $z_n$ é a solução da homogênea quando $A = C$ e $B = O$. Logo, se $z_n = C$ teremos $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$.

Aumentando o grau do polinômio, ou seja, tomando $z_n = C + D \cdot n$, vemos que $z_n$ também é solução da homogênea, quando $A = C$ e $B = D$.
Aumentando, novamente, o grau do polinômio teremos $z_n = C + D \cdot n + E \cdot n^2$. Substituindo, obtemos $2E = 2$, isto é $E = 1$. Daí, $z_n = n^2$ é uma solução particular da recorrência $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$.
Segue-se daí que a solução da recorrência é, somando $x_n$ com $z_n$, $a_n = A + B \cdot n + n^2$.
Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, podemos determinar os valores das constantes $A$ e $B$. Fazendo $n = 1$ e $n = 2$, obtemos $A + B = 0$ e $A + 2B = -2$, que nos dá $A = 2$ e $B = -2$. Daí, $a_n = 2 - 2 \cdot n + n^2 = (n-1)^2 + 1$, é a solução da recorrência dada.
Portanto, $a_m \cdot a_{m+1} = (m^2 + 1)(m^2 - 2 \cdot m + 2) = m^4 - 2 \cdot m^3 + 3 \cdot m^2 - 2 \cdot m + 2 = (m^2 - m + 1)^2 + 1 = a_{m^2 - m + 2}$.

De acordo com [9], de modo contrário à situação do caso homogêneo, não existem regras gerais que possam identificar soluções particulares para qualquer tipo de função $f(n)$. Este é, sem dúvida, o grande desafio das recorrências lineares de segunda ordem não homogêneas: descobrir a forma para a solução particular. Os dois casos especiais que se sabe resolver são:
(I): $f(n) = k \cdot q^n$, onde $k$ e $q$ são constantes. Tem-se então duas possibilidades. Se $q$ não for raiz da equação característica da parte homogênea associada, então a solução particular é $\alpha \cdot q^n$. O valor da constante $\alpha$ é obtido substituindo-se a solução na equação de recorrência de modo que esta esteja satisfeita para todo $n$ sob consideração. Se $q$ é uma raiz de multiplicidade $m$ da equação característica, a solução particular é $\alpha \cdot n^m \cdot q^n$, onde $\alpha$ deve ser obtido de modo idêntico ao caso anterior.
(II): $f(n) = \alpha \cdot n^k$, onde $\alpha$ e $k$ são constantes. Se 1 não é raiz da equação característica, a solução particular é o polinômio $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0$. Se 1 é uma raiz de multiplicidade $m$, a solução é o polinômio $a_k n^{m+k} + a_{k-1} n^{m+k-1} + ... + a_1 n^{m+1} + a_0 n^m$.
Substituindo-se na equação a solução, determinam-se as constantes.

É claro que, se $f(n)$ for uma soma das funções do tipo dos itens I e II, a solução particular é a soma das soluções particulares para as parcelas como mostram os exemplos anteriores.

## 1.3 Sequências Recorrentes Não-Lineares

A resolução de equações de recorrência não-lineares é mais difícil, pois não existe um padrão de resolução (como o das recorrências lineares) quando uma sequência é definida por uma recorrência não-linear. A idéia é tentar encontrar sequências conhecidas(PA's, PG's, equações de recorrência lineares, etc) através de manipulações das equações de recorrências fornecidas. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 1**: Determine em função de $n$ o termo geral da sequência definida por:

$a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \dfrac{2 \cdot a_{n+1}^2}{a_{n-2}}$.

**Solução**: Observe que $a_n = \dfrac{2 \cdot a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \iff \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$.
Agora, definiremos $z_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.
Daí, $z_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = 2z_{n-1}$ e $z_1 = \dfrac{a_1}{a_0} = 2$.
Como a sequência definida por $z_1 = 2$ e $z_n = 2z_{n-1}$ é uma PG, tem-se que o termo geral é $z_n = z_1 \cdot 2^{n-1}$. Então $z_n = 2^n$ e daí, $a_n = 2^n \cdot a_{n-1}$.

**Exemplo 2 (Olimpíada da Irlanda)**: Uma sequência de números reais $x_n$ é definida recursivamente como segue: $x_0$, $x_1$ são números reais positivos arbitrários, e $x_{n+2} = \dfrac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, ...$ Calcule $x_{1998}$.

**Solução**: Inicialmente vamos determinar os primeiros termos da sequência $x_n$:
$x_0 = x_0; x_1 = x_1; x_2 = \dfrac{1 + x_1}{x_0}; x_3 = \dfrac{1 + x_0 + x_1}{x_0 \cdot x_1}; x_4 = \dfrac{1 + x_0}{x_1}; x_5 = x_0; ...$ Observe, que a cada cinco termos da sequência os valores se repetem. Sendo o resto da divisão de 1998 por 5 igual a 3 temos que $x_{1998} = x_3 = \dfrac{1 + x_0 + x_1}{x_0 \cdot x_1}$.

**Exemplo 3 (Torneio das Cidades)**: A sequência $x_n$ está definida pelas seguintes condições: $x_1 = 19$; $x_2 = 97$; $x_{n+2} = x_n - \dfrac{1}{x_{n+1}}$. Demonstrar que existe um termo desta sequência que é igual a 0. Determinar o sub-índice deste termo.

**Solução**: Multiplicando os dois membros da equação por $x_{n+1}$, a equação fica assim: $x_{n+1} \cdot x_{n+2} = x_{n+1} \cdot x_n - 1$. Façamos $y_n = x_{n+1} \cdot x_n$. Então $y_{n+1} = y_n - 1$, e
$y_1 = x_2 \cdot x_1 = 19 \cdot 97 = 1843$.
Daí, sendo cada termo de $y_n$ igual ao anterior subtraído de 1, tem-se que:
$y_2 = y_1 - 1$; $y_3 = y_2 - 1 = y_1 - 2$; $y_4 = y_3 - 1 = y_1 - 3$; ...; $y_n = y_1 - (n - 1) \Rightarrow$
$y_n = 1843 - (n - 1)$.
Assim, $y_{1844} = 1843 - 1844 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1845} \cdot x_{1844} = 0 \Rightarrow x_{1845} = 0$.

## 1.4 Exercícios

1) Resolva as equações:
a) $x_{n+1} = (n + 1)x_n + n, x_1 = 1$.
b) $(n + 1)x_{n+1} + nx_n = 2n - 3, x_1 = 1$.
c) $x_{n+1} - nx_n = (n + 1)!, x_1 = 1$.

2) Dada a sequência: $a_1, a_2, a_3, ...$ satisfazendo para todo $n$: $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1$.

Expresse $a_n$ em termos de $a_1$, $a_2$ e $n$.

3) Uma sequência $x_n$ é dada por $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ e $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Determine o termo geral $x_n$ desta sequência.

4) (JIR McKnight-87) Determine o termo geral da sequência dada por $x_1 = 2, x_2 = 5$ e $x_k = x_{k-1} + 2x_{k-2}$, para $k > 2$.

5) (UIUC Undergrad Math Contest-97) Sejam $x_1 = x_2 = 1$ e $x_{n+1} = 1996x_n + 1997x_{n-1}$ para $n \geqslant 2$. Determine(com prova) o resto da divisão de $x_{1997}$ por 3.

6) Resolva as equações a seguir:
a) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$
b) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$
c) $x_{n+2} + x_n = 1$

7) (UIUC Undergrad Math Contest-98) Uma sequência $a_0, a_1, a_2, ...$ de números reais é definido recursivamente por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + n \cdot a_n}$ (n = 0, 1, 2, ...). Determine uma fórmula geral para $a_n$.

8) (IME-84/85) Seja a sequência $\{v_n\}$, n = 0, 1, 2, ..., definida a partir de seus dois primeiros termos $v_0$ e $v_1$ e pela fórmula geral: $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$, para $n \geqslant 2$. Define-se uma nova sequência: $\{u_n\}$, n = 0, 1, 2, ... pela fórmula: $v_n = 3^n u_n$
a) Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de $u_0$ e $u_1$
b) Calcule $u_n$ e $v_n$ em função de $n$, $v_1$ e $v_0$
c) Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando: $v_1 = 1$ e $v_0 = \dfrac{1}{3}$.

# 2 Recorrências, Indução e Combinatória

A formulação de relações de recorrência é uma ferramenta poderosa na resolução de problemas, alguns deles envolvendo combinatória, probabilidade etc. Muitas questões difíceis a uma primeira vista, são resolvidas de modo relativamente simples através desta técnica. Por exemplo, suponha que você queira determinar a quantidade de palavras com $n$ letras formadas a partir das letras A, B e C. Seja $x_n$ esta quantidade. Vamos raciocinar da seguinte maneira para formarmos todas as palavras com $n$ letras: diga que existem $x_{n-1}$ palavras com $n-1$ letras, e, à direita de cada uma destas palavras, iremos acrescentar uma das letras A, B ou C, ou seja, podemos fazer isto de três modos distintos. Daí, tem-se a seguinte relação entre $x_n$ e $x_{n-1}$: $x_n = 3 \cdot x_{n-1}$, que é uma recorrência que caracteriza uma progressão geométrica. Logo, $x_n = x_1 \cdot 3^{n-1}$. Como $x_1 = 3$ tem-se que $x_n = 3^n$.

Este é um exemplo de simples aplicação, em que conseguimos estabelecer uma relação direta de $x_n$ com $x_{n-1}$. Observe que esta estratégia é bem-sucedida quando conseguimos:
(i) obter a solução do problema genérico a partir de exemplares menores do problema (com, digamos, $n-1$ elementos);
(ii) determinar de modo trivial a solução de certos exemplares do problema (com, por exemplo, 1 elemento).

Vejamos algumas aplicações das recorrências na resolução de problemas:

**Aplicação 1 (A Torre de Hanoi)**: Neste jogo, inventado pelo matemático francês Edouard Lucas em 1883, o objetivo é passar os oito discos colocados em ordem ascendente de tamanho (de cima para baixo) no eixo à esquerda para o eixo à direita (**ver figura 1**),usando o eixo central como auxiliar, na mesma ordem, e efetuando o menor número possível de movimentos. Somente um disco pode ser mudado de eixo a cada movimento, e ele não pode ser colocado em cima de um disco menor.

Diante do exposto, calcule o número mínimo de movimentos necessários para transportar todos os discos de um eixo para o outro?

**Solução**: A estratégia consiste em resolver o problema para uma torre com $n$ discos, ou seja, descobrir o número mínimo de movimentos que são necessários para mover $n$ discos de um eixo para o outro. Observe que podemos mover os discos para outro eixo se $n = 1$ ou 2. De fato, se tivermos somente um disco no eixo à esquerda basta transferir para o eixo à direita com um único movimento. Se tivermos 2 discos, movemos o menor deles para o eixo central, o mair para o eixo à direita e, finalmente, o menor para o eixo à direita. Determinaremos o caso geral empregando o método recursivo.Seja $a_n$ o menor número de movimentos para mudar uma torre de $n$ discos do eixo à esquerda para o eixo

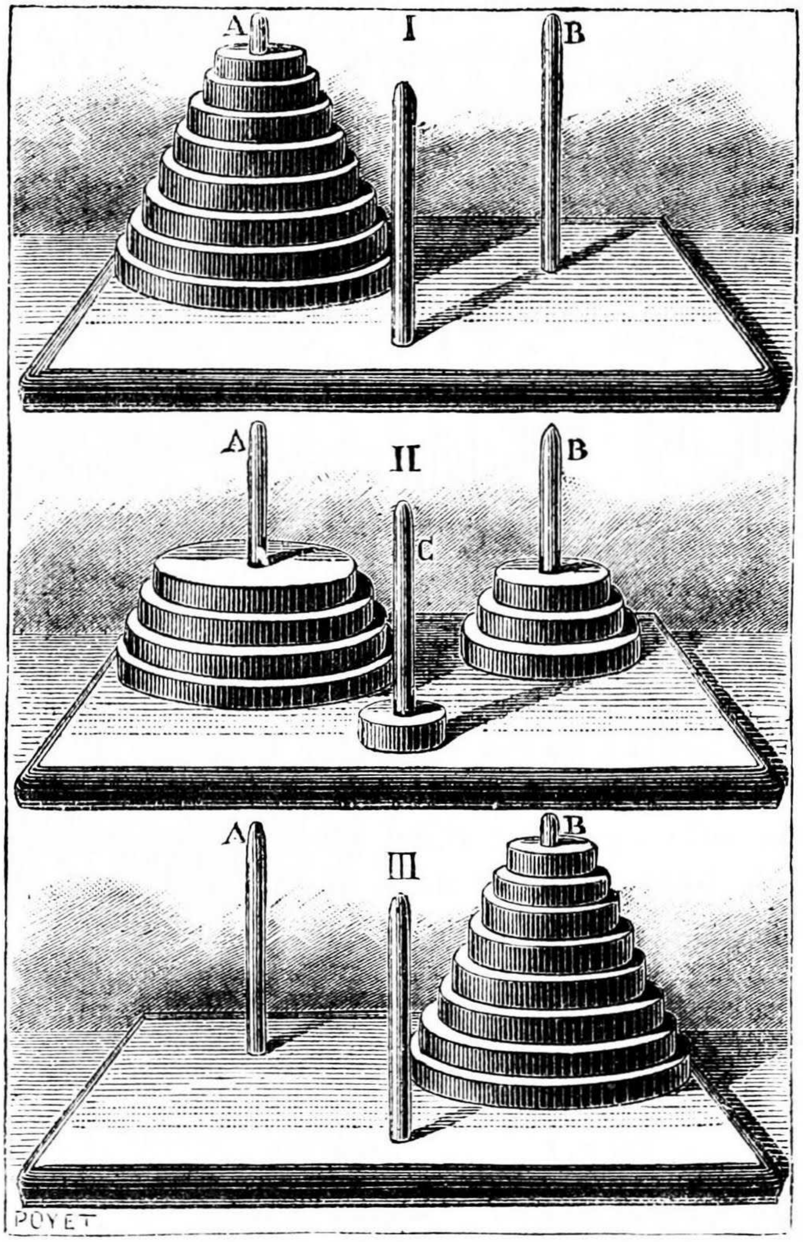


Figura 1 – Torre de Hanoi.

à direita. É possível expressar $a_n$ como uma função de $a_{n-1}$, pois se temos $n$ discos no eixo à esquerda e sabemos mover $n-1$ discos de um eixo para outro utilizando $a_{n-1}$ movimentos, então podemos mover todos os $n$ discos para o eixo esquerdo usando $2a_{n-1}+1$ movimentos. De fato, movemos todos os discos, com exceção do maior deles, para o eixo central, usando $a_{n-1}$ movimentos. Depois, colocamos o maior disco no eixo à esquerda usando 1 movimento. Imediatamente, deslocamos todos os discos para o eixo à esquerda com mais $a_{n-1}$ movimentos. Portanto, movemos todos os $n$ discos utilizando $2a_{n-1}$ movimentos. Resumindo: $a_n = 2a_{n-1}+1$, onde $a_n$ é o número de movimentos necessários para mover $n$ discos do eixo à esquerda para o eixo à direita.

Agora, vamos resolver a recorrência $a_n = 2a_{n-1} + 1$. Do exposto no capítulo anterior, sabemos que o termo geral é da forma $a_n = \alpha \cdot 2^{n-1} + \beta$, $\alpha$ e $\beta$ constantes. Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 3$ temos $\alpha + \beta = 1$ e $2 \cdot \alpha + \beta = 3$. Daí, $\alpha = 2$ e $\beta =$ -1. Logo, $a_n = 2^n - 1$. Voltando a pergunta da questão, temos, para $n = 8$, que $a_8 = 2^8 - 1 = 255$ movimentos.

**Aplicação 2 (Cálculo do Tamanho de uma População de Coelhos - Sequência de Fibonacci)**: Suponha que um casal de coelhos recém-nascidos é colocado numa ilha, e que eles não produzem descendentes até completarem dois meses de idade. Uma vez atingida esta idade, cada casal de coelhos produz exatamente um outro casal de coelhos por mês. Qual seria a população de coelhos na ilha após nove meses, supondo que nenhum dos coelhos tenha morrido e não haja migração neste período?

**Solução**: Observemos o número de casais de coelhos mês a mês:

$$\begin{aligned}
1^{o} \text{ mês } &: 1 \text{ casal;}\\
2^{o} \text{ mês } &: 1 \text{ casal;}\\
3^{o} \text{ mês } &: 2 \text{ casais;}\\
4^{o} \text{ mês } &: 3 \text{ casais;}\\
5^{o} \text{ mês } &: 5 \text{ casais;}\\
6^{o} \text{ mês } &: 8 \text{ casais;}\\
7^{o} \text{ mês } &: 13 \text{ casais;}\\
8^{o} \text{ mês } &: 21 \text{ casais;}\\
9^{o} \text{ mês } &: 44 \text{ casais;}
\end{aligned}$$

Apesar de ser cansativo o cálculo do número de casais de coelhos mês a mês, o processo nos faz observar que existe um padrão para o desenvolvimento do número de casais de coelhos. Como calcular a população no início de um mês qualquer? Como não há mortes, podemos contar com a população do mês anterior. O passo seguinte é calcular o número de nascimentos, que correspondem ao número de casais com pelo menos um mês no início do mês anterior, que é igual ao número de casais do mês imediatamente anterior a este. Denotando por $F_n$ a população no n-ésimo mês, o argumento acima produz a equação $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geqslant 3$.

A sequência $(F_n)$ da população de coelhos na ilha ao longo dos meses (supondo que não haja mortes nem migração) satisfaz a relação acima. Veja que, dados dois valores de elementos da sequência em dois meses consecutivos , é possível calcular todos os valores dos elementos posteriores da sequência. É dado do problema que a população inicial $F_1$ de coelhos consiste de um casal. Entretanto, não é possível calcular $F_2$ a partir da relação acima, pois não foi definido o termo $F_0$. Segue-se daí que $F_2$ deve ser calculada diretamente do enunciado. Então, contando o número de casais temos $F_1 = F_2 = 1$. A sequência de números formada é exatamente a **Sequência de Fibonacci**,um interessante exemplo de equação de recorrência, devido ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250).

Esta sequência adquiriu muita fama devido a suas conexões com áreas das mais variadas na cultura humana. Ela aparece em muitos problemas de Biologia, Arquitetura, Engenharia, Física, Química e muitas outras áreas da ciência e da arte. A sequência de Fibonacci é, então, definida como sendo a sequência $F_n$ que satisfaz a seguinte relação de recorrência:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ com } n \geqslant 3 \end{aligned}$$

A solução desta recorrência , conforme visto no capítulo anterior, no exemplo 5, página 10, é
$F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, com $F_n \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Aplicação 3 (Princípio da Indução)**: No início do século XX,o matemático Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu os axiomas necessários que nos permitem hoje descrever com precisão o conjunto dos números naturais. O último deles diz o seguinte: *seja A um subconjunto de* $\mathbb{N}$ *(*$A \subset \mathbb{N}$*). Se 1* $\in A$ *e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos, então* $A = \mathbb{N}$.

Tal axioma é conhecido como **axioma de indução**, base do método de demonstração por indução, que é muito útil para estabelecer provas rigorosas em Matemática, principalmente, demonstrações de identidades, desigualdades e problemas de divisibilidade. Usando indução, vamos analisar uma das propriedades da Sequência de Fibonacci.

Considere $F_n$ a sequência de Fibonacci. Mostre que

$$F_n < (\frac{7}{4})^n.$$

**Solução**: Seja $p(n) = F_n < (\frac{7}{4})^n$.
Para $n = 1$ temos que $F_1 = 1 < \frac{7}{4}$, de modo que $p(1)$ é verdadeira.

Suponha que $p(1), p(2), ..., p(n), \forall n \geqslant 2$, sejam todas verdadeiras. Mostremos que

$F_{n+1} < (\frac{7}{4})^{n+1}$. De fato,

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < (\frac{7}{4})^n + (\frac{7}{4})^{n-1}$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < \frac{7}{4} \cdot (\frac{7}{4})^{n-1} + (\frac{7}{4})^{n-1}$

$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} < (1 + \frac{7}{4})(\frac{7}{4})^{n-1}$.

Como $(1 + \frac{7}{4}) < (\frac{7}{4})^2$, segue-se que $F_{n+1} < (\frac{7}{4})^2(\frac{7}{4})^{n-1}$. Logo, $F_{n+1} < (\frac{7}{4})^{n+1}$.

**Aplicação 4**: Dada a seguinte relação de recorrência

$$a_0 = 8;$$
$$a_1 = 10;$$
$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \forall n \geqslant 2.$$

Mostre que $a_n = 7 + 3^n$, para todo $n \in Z^+$.

**Solução**: Seja $p(n) = a_n = 7 + 3^n$.
$P(0)$ é verdadeira, pois $P(0) = 7 + 3^0 = 7 + 1 = 8$.
Suponha que $P(n)$ é verdadeira para $n \in 0, 1, 2, ..., k$. Mostremos que $P(n)$ é verdadeira para $n = k + 1$. De fato,
$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1}$
$a_{n+1} = 4(7 + 3^n) - 3(7 + 3^{n-1})$
$a_{n+1} = 7 + 4 \cdot 3^n - 3 \cdot 3^{n-1}$
$a_{n+1} = 7 + 3^{n-1}(9)$
$a_{n+1} = 7 + 3^{n-1} \cdot 3^2$
$a_{n+1} = 7 + 3^{n+1}$

**Aplicação 5 (Divisão do Plano por Retas - ITA-71)**: Qual o maior número de partes que um plano pode ser dividido por $n$ linhas retas?
a) $n^2$
b) $n(n + 1)$
c) $\frac{n(n + 1)}{2}$
d) $\frac{n^2 + n + 2}{2}$

**Solução**: A situação pedida ocorre, claramente, quando todas as retas são concorrentes duas a duas e os pontos de concorrência são todos distintos, conforme a ilustração da **Figura 2**.
Vamos supor que já temos traçadas, atendendo às condições estabelecidas anteriormente, $n - 1$ retas no plano, dividindo este em $a_{n-1}$ partes. Agora, traçamos uma reta, $s$ digamos, que intersecta todas as outras já traçadas em $n - 1$ pontos distintos, ficando então dividida em $n$ intervalos por esses $n - 1$ pontos. Cada um desses $n$ intervalos em que $s$ fica dividida corresponde a exatamente uma região que ela atravessa (dentre as $a_{n-1}$ que já existiam); ao fazê-lo, $s$ extingue a região original, dividindo-a em duas novas regiões.

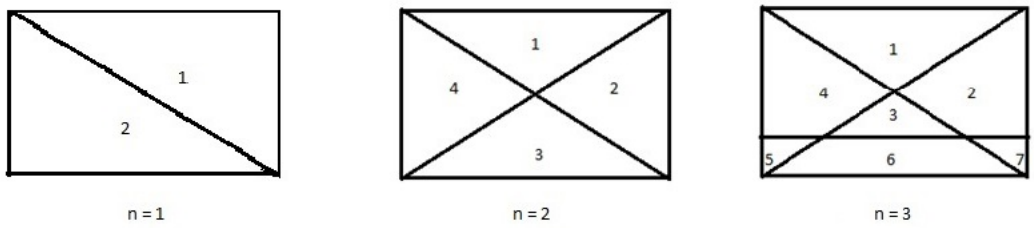


Figura 2 – Número máximo de partes que um plano pode ser dividido por $n$ retas.

Portanto, $s$ extingue $n$ regiões e gera $2n$ regiões, ou seja, $a_n = a_{n-1} - n + 2n$. Daí, podemos afirmar que $a_n = a_{n-1} + n$, com $a_1 = 2$. Então

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + 2 \\
a_3 &= a_2 + 3 \\
a_4 &= a_3 + 4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= a_{n-1} + n
\end{aligned}
$$

Somando estas equações obtemos:
$a_n = a_1 + (2 + 3 + ... + n) = 2 + \dfrac{(2+n)(n-1)}{2} = 2 + \dfrac{n^2+n-2}{2} \Rightarrow a_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$.

**Aplicação 6**: Determine o número de permutações de $n$ elementos distintos.

**Solução**: Para formar todas as permutações com $n$ elementos distintos, basta escrever todas as permutações com $n-1$ elementos distintos e no início de cada uma delas acrescentar um elemento, o que pode ser feito de $n$ modos. Representemos por $a_n$ o total de permutações com $n$ elementos distintos e por $a_{n-1}$ o total de permutações com $n-1$

elementos distintos. Segue-se daí que $a_n = n \cdot a_{n-1}$. Daí,

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 \\ a_3 &= 3a_2 \\ a_4 &= 4a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= na_{n-1} \end{aligned}$$

Simplificando, obtemos: $a_n = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot n$, o que nos dá $a_n = n!$.

**Aplicação 7 (Permutações Caóticas)**: Permutação caótica ou desarranjo é uma permutação no qual nenhum elemento de um determinado conjunto ocupa a sua posição inicial. O nosso objetivo agora é contar o número de permutações simples dos números positivos de 1 a $n$, tais que nenhum número ocupa sua posição "natural", ou seja, o número i não ocupa a i-ésima posição, para i = 1, ..., n.

**Solução**: Seja $x_n$ o total de permutações caóticas de $n$ elementos. É imediato concluir que isto é impossível para $n = 1$ (ou seja, $x_1 = 0$) e que $x_2 = 1$. Para $n = 3$, são possíveis duas permutações caóticas: 231 e 312. Já para $n = 4$, temos nove possibilidades: 2341, 3421, 4321, 3412, 3142, 4312, 2413, 4123 e 2143.
Para resolução do caso geral, vamos separar os casos possíveis de acordo com o elemento na n-ésima posição. Para contar o número de elementos de um conjunto, vamos particioná-lo de modo que a cardinalidade de cada subconjunto da partição seja fácil de calcular (em termos de exemplares do problema com menos elementos), e a cardinalidade do conjunto será simplesmente a soma das cardinalidades dos subconjuntos da partição.
O conjunto de todas as permutações caóticas será inicialmente particionado de acordo com o elemento na n-ésima posição. Consideremos como primeiro subconjunto aquele constituído pelas permutações que têm o 1 na n-ésima posição. Vamos considerar dois subconjuntos: o primeiro contém as permutações que têm $n$ na primeira posição e o segundo contém as permutações que têm $n$ em alguma posição que não a primeira. As permutações do primeiro subconjunto têm o $a_1 = n$, $a_n = 1$, e $2, 3, ..., n-1$ ocupando as posições 2, 3, ..., n - 1, mas nenhum deles ocupando sua posição inicial. Por definição, este subconjunto contém $x_{n-2}$ permutações caóticas. As permutações do segundo subconjunto têm $a_n = 1$ e 2, 3, ..., $n$ ocupando as posições 1, 2, ..., $n-1$, sendo que os números 2, 3, ..., $n-1$ não ocupam sua posição natural e o número $n$ não ocupa a primeira posição. Perceba que nestas condições, cada um dos números tem uma posição que não é permitida ocupar. A primeira posição está fazendo o papel da n-ésima posição, visto que o número $n$ não pode ocupá-la, e, portanto, este conjunto deve conter $x_{n-1}$ permutações.
De forma análoga à anterior, vamos considerar agora, o subconjunto constituído pelas per-

mutações que têm o 2 na n-ésima posição e, particionaremos de acordo com o elemento que ocupa a segunda posição. Novamente consideraremos dois subconjuntos, um que contém as permutações que têm $n$ na segunda posição e que contém $x_{n-2}$ permutações, e outro que contém as permutações que têm $n$ em alguma posição que não a segunda e que contém $x_{n-1}$ permutações. O mesmo raciocínio vale para o 3, 4, ..., n - 1.
Somando as cardinalidades de todos os subconjuntos e lembrando os casos especiais anteriormente mencionados, temos a relação de recorrência:

$$\begin{gathered} x_1 = 0; \\ x_2 = 1; \\ x_n = (n-1)(x_{n-2} + x_{n-1}), \text{ para } n \geqslant 3. \end{gathered}$$

Reescrevendo a recorrência obtida acima, temos
$x_n - n \cdot x_{n-1} = (-1)(x_{n-1} - (n-1) \cdot x_{n-2})$.
Defina $z_n = x_n - n \cdot x_{n-1}$. Daí, a equação pode ser reescrita assim: $z_n = (-1) \cdot z_{n-1}$, que define uma progressão geométrica oscilante e segundo termo igual a 1. Logo, $z_n = (-1)^n$.
Temos agora, uma outra relação de recorrência para a sequência $(x_n)$:

$$\begin{gathered} x_1 = 0; \\ x_n = n \cdot x_{n-1} + (-1)^n, \text{ para } n \geqslant 2. \end{gathered}$$

Para resolver esta recorrência, vamos usar o teorema 1.1.1, ou seja, fazer a substituição $x_n = a_n y_n$ onde $a_n$ é uma solução particular da homogênea $z_n = n \cdot z_{n-1}$. Conforme visto na aplicação 6 , $a_n = n!$. Segue daí que $x_n = n! y_n$.
Substituindo $x_n = n! y_n$ na recorrência, obtemos $n! y_n = n \cdot (n-1)! y_{n-1} + (-1)^n$, ou seja, $y_n = y_{n-1} + \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Daí, temos

$$\begin{gathered} y_2 = y_1 + \frac{1}{2!} \\ y_3 = y_2 - \frac{1}{3!} \\ y_4 = y_3 + \frac{1}{4!} \\ y_5 = y_4 - \frac{1}{5!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = y_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!} \end{gathered}$$

Somando, obtemos

$$y_n = y_1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{(-1)}{n!}$$

$$y_n = y_1 + 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)}{n!}$$
$$y_n = y_1 + \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)}{n!}$$

Sabe-se que $x_n = n!y_n$ e $x_1 = 1!y_1$. Daí, $y_n = \frac{x_n}{n!}$ e $y_1 = \frac{x_1}{1!} = 0$. Então

$$\frac{x_n}{n!} = 0 + \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)}{n!}$$
$$x_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)}{n!}\right)$$

**Aplicação 8**: Quantos subconjuntos há de um conjunto com $n$ elementos?

**Solução**: Seja $a_n$ o número de subconjuntos de um conjunto A com n elementos. Seja x um destes n elementos do conjunto A. Podemos formar todos os $a_n$ subconjuntos do seguinte modo:
(i) os subconjuntos que não contém x: $a_{n-1}$ no total;
(ii) os subconjuntos que contém x: perceba que é só acrescentar o elemento x em cada subconjunto do conjunto A - $\{x\}$, que tem n - 1 elementos, ou seja, também existem $a_{n-1}$ no total.
Segue-se daí que $a_n = a_{n-1} + a_{n-1} = 2 \cdot x_{n-1}$, que caracteriza uma progressão geométrica.
Logo, $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$.
Como $a_1 = 2$ (subconjuntos unitário e vazio), então $a_n = 2^n$.

**Aplicação 9**: Quantas são as sequências de 10 termos, pertencentes a $\{0, 1, 2\}$, que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0?

**Solução**: Chamando de $a_n$ o número de sequências com n termos e que não possuem dois termos consecutivos iguais a 0 temos:
(i) o número de sequências de n termos que começam por 1 e não tem dois zeros consecutivos. Mas, de acordo com o enunciado, isto é igual $a_{n-1}$, pois se o primeiro termo é 1, para formar a sequência é só determinar os n - 1 termos seguintes.
(ii) o número de sequências de começam por 2 e não possuem dois zeros consecutivos, que de acorco com o exposto acima, é igual a $a_{n-1}$.
(iii) o número de sequências de n termos que começam por 0 e não possuem dois zeros consecutivos. Como o primeiro é zero, temos dois modos de escolher o segundo termo (1 ou 2) e, escolhido o segundo termo, temos $a_{n-2}$ modos de escolher os demais termos. Daí, temos $2x_n$ sequências iniciadas por 0.
Então, $x_n = 2x_{n-1} + 2x_{n-2}$. Percebe-se facilmente que $x_1 = 3$ e que $x_2 = 8$.
Daí obtemos: $x_3 = 2x_1 + 2x_2 = 22$, $x_4 = 60$, ..., $x_{10} = 24960$.

**Aplicação 10 (EPCAr - 2005)**: Gastei tudo que tinha em 6 lojas. Em cada uma delas gastei 1 real a mais do que a metade do que tinha ao entrar nela. Com base nisso, pode-se afirmar que:
a) inicialmente tinha 120 reais.
b) ao entrar na 3ª loja tinha 16 reais.
c) gastei 8 reais na 4ª loja.
d) sobraram 4 reais ao sair da 4ª loja.

**Solução**: Seja $a_n$ a quantidade de dinheiro ao entrar na loja n (ou sair da loja n - 1). De acordo com o enunciado:
$a_n = a_{n-1} - \left(\dfrac{a_{n-1}}{2} + 1\right)$
$a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} - 1$
$a_n + 2 = \dfrac{1}{2}(a_{n-1} + 2).$
Defina $y_n = a_n + 2$. Daí temos $y_n = \dfrac{1}{2}y_{n-1}$, que caracteriza uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$ e termo geral $y_n = y_1(\dfrac{1}{2})^{n-1}$.
Então,$a_n + 2 = (a_1 + 2)(\dfrac{1}{2})^{n-1}$
Sendo $a_7 = 0$ temos que $a_1 = 126$ e, portanto, $a_n = 128 \cdot (\dfrac{1}{2})^{n-1} - 2 = 2^{8-n} - 2$, $n \geqslant 1$.
Verificando cada uma das alternativas:
a) De acordo com o exposto acima, $a_1 = 126$. Portanto, a afirmação é FALSA.
b) $a_3 = 2^5 - 2 = 30$. Portanto, a afirmação é FALSA.
c) $a_4 = 2^4 - 2 = 14$ e $a_5 = 2^3 - 2 = 6$. Logo, gastou 8 reais na loja 4. Portanto, a afirmação é VERDADEIRA.
d) FALSA, pois $a_5 = 6$.

**Aplicação 11**: Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a n-ésima partida?

**Solução**: Para Sheila ganhar a n-ésima partida, só há duas possibilidades: Ou ela ganha a (n - 1)-ésima partida, com probabilidade $p_{n-1}$, e ganha a seguinte com probabilidade condicional 0,6 ou perde a (n - 1)-ésima, com probabilidade $1 - p_{n-1}$, e ganha a seguinte com probabilidade condicional 0,4. Logo, a probabilidade $p_n$ de vitória na n-ésima partida é dada por $p_n = 0,6p_{n-1} + 0,4(1 - p_{n-1})$, ou seja, $p_n = 0,2p_{n-1} + 0,4$.
Como a recorrência é de 1ª ordem, a solução é da forma $p_n = \alpha \cdot 0,2^{n-1} + \beta$, com $p_1 = 0,4$ e $p_2 = 0,48$. Substituindo, temos $\alpha + \beta = 0,4$ e $0,2 \cdot \alpha + \beta = 0,48$.

Resolvendo o sistema formado pelas duas equações tem-se $\alpha = -0,1$ e $\beta = 0,5$. Segue-se daí que $p_n = -0,1 \cdot 0,2^{n-1} + 0,5$.

## 2.1 Exercícios

1) A torcida do Náutico tem hoje $x_0$ membros. A taxa anual de natalidade é i, a de mortalidade é j e, além disso, todo ano um número fixo de R torcedores desiste de vez. Se i > j, determine o número fixo de torcedores daqui a $t$ anos. A torcida está condenada a extinção?

2) Mostre as seguintes propriedades a respeito da sequência de Fibonacci $F_n$:
a)$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$;
b)$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_2 n$;
c)$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$;
d)$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.

3) Monte uma relação de recorrência e resolva-a para $C_n$, o número máximo de regiões em que o plano é dividido por $n$ círculos que se interceptam dois a dois, tais que a interseção de três ou mais é vazio.

4) Em quantas regiões o plano é dividido por $n$ retas que se cruzam num mesmo ponto?

5) Monte e resolva uma relação de recorrência para $a_n$, o número máximo de regiões em que uma esfera é dividida por $n$ planos que se interceptam no centro da esfera? (Use o resultado do exercício anterior)

6) Monte e resolva uma relação de recorrência para $e_n$, o número máximo de regiões em que o espaço (tridimensional) pode ser dividido por $n$ planos. Suponha que não exista nenhum grupo de três planos com uma reta em comum.

7) (Itália-96) Dado o alfabeto com três letras a, b, c, encontre o número de palavras com $n$ letras contendo um número par de a's.

8) (Noruega-96) Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos?

# 3 Soluções dos exercícios

## 3.1 Exercícios 1.4

**1.a)** Primeiramente vamos determinar a solução da equação homogênea $z_{n+1} = (n+1)z_n$.

$$\begin{aligned} z_2 &= 2z_1 \\ z_3 &= 3z_2 \\ z_4 &= 4z_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= nz_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando, obtemos $z_n = n!$. Substituindo $x_n$ por $n! \cdot y_n$ temos
$(n+1)!y_{n+1} = (n+1) \cdot n!y_n + n$ e, portanto, $y_{n+1} = y_n + \dfrac{n}{(n+1)!}$. Segue-se daí que:

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{1}{2!} \\ y_3 &= y_2 + \frac{2}{3!} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_{n-1} + \frac{n-1}{n!} \end{aligned}$$

Somando tudo, resulta $y_n = y_1 + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + ... + \dfrac{n-1}{n!}$.
Observe que $\dfrac{n-1}{n!} = \dfrac{1}{(n-1)!} - \dfrac{1}{n!}$.

Daí, $y_n = y_1 + (\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}) + (\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) + ... + (\frac{1}{(n-2)!} - \frac{1}{(n-1)!}) + (\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}) = y_1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{n!}$.

Como $x_n = n!y_n$ temos que $y_n = \dfrac{x_n}{n!}$. Então, $y_1 = 1$ e, portanto
$x_n = 2n! - 1$.

**1.b)** Inicialmente vamos encontrar a solução da equação homogênea
$(n+1)z_{n+1} = -nz_n$.

$$\begin{aligned} 2z_2 &= -1z_1 = -1 \\ 3z_3 &= -2z_2 \\ 4z_4 &= -3z_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ zx_n &= -(n-1)z_{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando-se, obtemos $z_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.
Agora, vamos substituir, na equação dada, $x_n$ por $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n} y_n$.

Tem-se então que $(n+1) \cdot \dfrac{(-1)^n}{n+1} y_{n+1} = -n \cdot \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} y_n + 2n - 3$ e, daí,

$y_{n+1} = y_n + \dfrac{2n-3}{(-1)^n} = y_n + (-1)^n(2n-3)$.Logo:

$$
\begin{gathered}
y_2 = y_1 + 1 \\
y_3 = y_2 + 1 \\
y_4 = y_3 + (-3) \\
Y_5 = y_4 + 5 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n = y_{n-1} + (-1)^n(2(n-1)-3),
\end{gathered}
$$

que somado resulta $y_n = y_1 + 1 + 1 + (-3) + 5 + \ldots + (-1)^{n-1}(2(n-1)-3)$
$y_n = 1 + 1 + 1 + (-3) + 5 + \ldots + (-1)^{n-1}(2(n-1)-3)$.
Analisemos agora dois casos:
(i) n é ímpar;
$y_n = 2 + (1-3) + (5-7) + \ldots + (-1)^{n-1}(2(n-1)-3)$
$y_n = 2 + (-2) \cdot \dfrac{n-3}{2} + 2n - 5$

$y_n = 2 - n + 3 + 2n - 5$

$y_n = n$,
e $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot n = 1$.

(ii) n é par;

$y_n = 2 + (1-3) + (5-7) + \ldots + ((-1)^{n-2}(2(n-2)-3) + (-1)^{n-1}(2(n-1)-3))$
$y_n = 2 + (-2) \cdot \dfrac{n-2}{2}$

$y_n = 2 - n + 2 = 4 - n$

e $x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot (4-n) = 1 - \dfrac{4}{n}$.

Observe que as duas expressões podem ser escritas de uma única maneira:

$x_n = 1 - \dfrac{2 + (-1)^n \cdot 2}{n}$.

**1.c)** Resolvendo a equação homogênea $z_{n+1} = nz_n$ temos:

$$\begin{aligned}
z_2 &= 1z_1\\
z_3 &= 2z_2\\
z_4 &= 3z_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z_n &= (n-1)z_{n-1}
\end{aligned}$$

Multiplicando, obtemos $z_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) = (n-1)!$.
Agora, substituindo $x_n$ por $(n-1)!y_n$ temos:
$n!y_{n+1} = n!y_n + (n+1)!$, ou seja, $y_{n+1} = y_n + (n+1)$. Daí, tem-se:

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 + 2\\
y_3 &= y_2 + 3\\
y_4 &= y_3 + 4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n &= y_{n-1} + n.
\end{aligned}$$

Somando, obtemos $y_n = y_1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$.
Como $x_n = (n-1)!y_n$ e $x_1 = 1$ temos que $y_n = \dfrac{x_n}{(n-1)!}$ e $y_1 = 1$.
Segue-se daí que $\dfrac{x_n}{(n-1)!} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$x_n = (n-1)!\dfrac{(1+n)\cdot n}{2}$.

$x_n = \dfrac{(n+1)!}{2}$.

**2)** A equação dada é equivalente a $a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} + 1$, com $n \geqslant 2$. Definindo a sequência $(z_n)$ tal que $z_n = a_{n+1} - a_n$, temos que $z_{n+1} = z_n + 1$, que caracteriza uma progressão aritmética de razão 1. Daí, $z_n = z_m + (n-m)$, com $n > m$. Logo,$a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1 + n - 1$.Tem-se então que:

$$\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= a_2 - a_1\\
a_3 - a_2 &= a_2 - a_1 + 1\\
a_4 - a_3 &= a_2 - a_1 + 2\\
a_5 - a_4 &= a_2 - a_1 + 3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n - a_{n-1} &= a_2 - a_1 + (n-2)
\end{aligned}$$

Somando, obtemos $a_n - a_1 = (n-1)\cdot a_2 - (n-1)\cdot a_1 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.
Segue-se daí que $a_n = (n-1)\cdot a_2 - (n-2)\cdot a_1 + \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$.

**3)** A equação dada tem equação característica $x^2 - 7x + 12 = 0$ cujas raízes são $\alpha = 3$ e $\beta = 4$. Portanto, a solução é da forma $x_n = A \cdot 3^n + B \cdot 4^n$.
Como $x_0 = 2$ e $x_1 = 7$ temos, substituindo no termo geral, que A + B = 2 e 3A + 4B = 7. Resolvendo este sistema linear encontramos A = B = 1. Segue-se daí que $x_n = 3^n + 4^n$.

**4)** A equação característica da recorrência é $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são $\alpha = 2$ e $\beta = -1$. Logo o termo geral é da forma $x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 2^n$.
Como $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$ temos, substituindo em $(x_n)$, que $-A + 2B = 2$ e $A + 4B = 5$. Resolvendo o sistema linear formado por estas duas equações encontramos $A = \frac{1}{3}$ e $B = \frac{7}{6}$.
Segue-se daí que

$$x_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{7}{6} \cdot 2^n$$

$$x_n = \frac{1}{3} \cdot (-1)^n + \frac{7}{3} \cdot 2^{n-1}$$

$$x_n = \frac{1}{3} \cdot [(-1)^n + 7 \cdot 2^{n-1}]$$

**5)** A equação característica da recorrência é $x^2 - 1996x - 1997 = 0$, cujas raízes são $\alpha = -1$ e $\beta = 1997$. Daí, o termo geral é da forma $x_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 1997^n$.
Sabendo que $x_1 = x_2 = 1$ temos que $-A + 1997B = 1$ e $A + 3988009B = 1$.
Resolvendo o sistema linear formado por estas duas equações encontramos $A = -\frac{998}{999}$ e

$B = \frac{1}{1995003}$. Segue-se daí que o termo geral é $x_n = -\frac{998}{999} \cdot (-1)^n + \frac{1}{999} \cdot 1997^{n-1}$.
Do exposto acima tem-se que:

$$x_{1997} = \frac{998 + 1997^{1996}}{999}$$

$$x_{1997} = \frac{(1997^{1996} - 1) + 999}{999}$$

$$x_n = \frac{(1997 + 1)(1997^{1995} - 1997^{1994} + 1997^{1993} + ... + 1997 - 1) + 999}{999}$$

$$x_n = 2 \cdot (1997^{1995} - 1997^{1994} + 1997^{1993} - ... + 1997 - 1) + 1.$$

Para calcular o resto da divisão de $x_{1997}$ por 3 vamos usar congruência.
Sabe-se que $1997 \equiv -1 \pmod 3$ e $2 \equiv -1$ mod 3. Então, tem-se:
$x_n \equiv (-1) \cdot (-1 - 1 - 1 - ... - 1 - 1) + 1 \pmod 3$
$x_n \equiv 1997 \pmod 3$
$x_n \equiv -1 \equiv 2 \pmod 3$
Logo, o resto da divisão de $x_{1997}$ por 3 é 2.

**6.a)** A recorrência dada tem equação característica $x^2 - 5x + 6 = 0$ cujas raízes são

$\alpha = 2$ e $\beta = 3$. Logo, a soluçao da homogênea é $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.
Agora vamos tentar encontrar uma solução particular, $z_n$, da recorrência $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$.
Observando a equação proposta, vamos tentar $z_n = Cn + D$.
Substituindo em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n$, encontramos $2Cn - 3C + 2D = n$.
Daí, tem-se $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{3}{4}$ e $z_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}$.

A solução geral da não homogênea é a soma de $a_n$ com $z_n$.
Portanto, $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}$.

**6.b)** A equação característica é $x^2 - 5x + 6 = 0$. Do exposto anteriormente temos que a solução da homogênea é $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$.
Observando a equação proposta, vamos testar $z_n = Cn \cdot 2^n$. Substituindo em $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2^n$ encontramos $-2C \cdot 2^n = 2^n$. Daí, $C = -\frac{1}{2}$ e a solução particular é $z_n = -2^{n-1} \cdot n$.
Portanto, a solução geral da não homogênea é $x_n = a_n + z_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n - 2^{n-1} \cdot n$.

**6.c)** A equação característica correspondente é $x^2 + 1 = 0$ cujas raízes complexas são $\alpha = -i$ e $\beta = i$. Então, a solução da homogênea é $a_n = A \cdot cos(\frac{n\pi}{2}) + B \cdot sen(\frac{n\pi}{2})$.

Agora, vamos procurar a solução particular $z_n$ da não homogênea $x_{n+2} + x_n = 1$. Observando a equação dada é intuitivo supor que $z_n = C$, ou seja $z_n$ é um polinômio constante.
Substituindo, encontramos $2C = 1$. Daí, $C = \frac{1}{2}$ e, portanto, $z_n = \frac{1}{2}$.
Segue-se daí que a solução geral da não homogênea é $x_n = A \cdot cos(\frac{n\pi}{2}) + B \cdot sen(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{2}$.

**7)** Perceba que a recorrência não linear $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ é equivalente a $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n$.
Definindo $b_n = \frac{1}{a_n}$ temos:
$b_{n+1} = b_n + n$, que é uma recorrência linear de 1ª ordem. Daí, tem-se:

$$
\begin{gathered}
b_1 = b_0 \\
b_2 = b_1 + 1 \\
b_3 = b_2 + 2 \\
\dots\dots\dots\dots \\
b_n = b_{n-1} + (n-1)
\end{gathered}
$$

Somando, obtemos $b_n = b_0 + \frac{(n-1) \cdot n}{2}$.
Como $b_n = \frac{1}{a_n}$ temos que $b_0 = \frac{1}{a_0} = 1$, e, portanto,
$\frac{1}{a_n} = 1 + \frac{n^2 - n}{2}$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

**8.a)** Considere a recorrência $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$ cuja equação característica é $v^2 - 6v + 9 = 0$ e as raízes são $\alpha = \beta = 3$. Daí, $v_n = A \cdot 3^n + Bn \cdot 3^n$, $v_0 = A$ e $v_1 = 3(A + B)$.
Então $v_n = 3^n u_n \Rightarrow u_n = \dfrac{v_n}{3^n} \Rightarrow u_n = A + Bn$ e, portanto, $u_0 = A = v_0$ e $u_1 = A + B = \dfrac{v_1}{3}$.
Agora, calculemos $u_n - u_{n-1}$.
$u_n - u_{n-1} = A + Bn - [A + B(n - 1)]$
$u_n - u_{n-1} = A + Bn - A - Bn + B$
$u_n - u_{n-1} = B = u_1 - u_0$

**8.b)** (i) Sabe-se que $v_n = A \cdot 3^n + Bn \cdot 3^n$. Daí, tem-se que $v_0 = A$ e $v_1 = 3A + 3B$. Resolvendo este sistema linear encontramos $A = v_0$ e $B = \dfrac{v_1}{3} - v_0$. Logo,
$v_n = 3^n[v_0 + (\dfrac{v_1}{3} - v_0) \cdot n]$.
(ii) Sabe-se que $u_n = A + Bn$. Então, $u_n = v_0 + (\dfrac{v_1}{3} - v_0) \cdot n$.

**8.c)** Sendo $v_1 = 1$ e $v_0 = \dfrac{1}{3}$ temos:
(i) $v_n = 3^n[\dfrac{1}{3} - (\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}) \cdot n]$ $v_n = 3^n \cdot \dfrac{1}{3}$
$v_n = 3^{n-1}$
Logo, $\{v_n\}$ é uma progressão geométrica de razão 3.
(ii) $u_n = \dfrac{1}{3} + (\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}) \cdot n$
$u_n = \dfrac{1}{3}$.
Logo, $\{u_n\}$ é uma sequência constante.

## 3.2 Exercícios 2.1

**1)** O número de torcedores $x_n$ do Náutico no ano n é dado por $x_n = (1 + i - j)x_{n-1} - R$, onde $n \geqslant 1$ e $x_0$ é o número de torcedores atual do Náutico.
Uma solução não nula da recorrência homogênea $z_n = (1 + i - j)z_{n-1}$ é $a_n = (1 + i - j)^n$.
Substituindo $x_n$ por $a_n y_n$ tem-se:
$(1 + i - j)^n y_n = (1 + i - j)(1 + i - j)^{n-1} y_{n-1} - R$
$y_n = y_{n-1} - \dfrac{R}{(1 + i - j)^n}$.
Fazendo $z = 1 + i - j$ temos $y_n = y_{n-1} - \dfrac{R}{z^n}$ e $y_0 = \dfrac{x_0}{a_0} = x_0$. Daí

$$y_1 = y_0 - \frac{R}{z}$$

$$y_2 = y_1 - \frac{R}{z^2}$$

$$y_3 = y_2 - \frac{R}{z^3}$$

$$y_4 = y_3 - \frac{R}{z^4}$$

............................

$$y_n = y_{n-1} - \frac{R}{z_n}$$

Somando, obtemos $y_n = y_0 - R \cdot (\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + ... + \frac{1}{z^n}) = x_0 - R \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)z^n}$.
Portanto:
$y_n = \frac{x_n}{z_n} = x_0 - R \cdot \frac{1-z^n}{(1-z)z^n}$

$x_n = x_0 z^n - R \cdot \frac{1-z^n}{1-z}$

$x_n = (x_0 + \frac{R}{1-z})z^n - \frac{R}{1-z}$

$x_n = (x_0 + \frac{R}{j-i})(1+i-j)^n + \frac{R}{i-j}$.

A extinção da torcida se dá quando $(x_0 + \frac{R}{j-i}) \leqslant 0$, ou seja, quando $R \geqslant x_0(i-j)$.

**2.a)** Consideremos a proposição $P(n) : \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.
$P(1)$ é verdadeira, pois $\sum_{i=1}^{1} F_i = F_1 = 1 = F_3 - 1$. Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k$ natural tal que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Mostremos que $P(k)$ é verdadeira para $k = n$. De fato,
$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} + F_n$.
Mas, pela hipótese de indução, $F_1 + F_2 + F_3 + ... + F_{n-1} = F_{n+1} - 1$. Segue-se daí que
$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+1} - 1 + F_n = F_{n+2} - 1$.
Logo, de acordo com o Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira.

**2.b)** Definamos a proposição $P(n) : \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$.
$P(1)$ é verdadeira, pois $P(1) = \sum_{i=1}^{1} F_{2i-1} = F_1 = 1 = F_2$. Suponhamos que $P(k)$ verdadeira para todo $k$ natural tal que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Provemos que $P(k)$ verdadeira para $k = n$. Com efeito,
$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i-1} + F_{2n-1}$.
De acordo com a hipótese de indução, $\sum_{i=1}^{n-1} F_{2i-1} = F_{2n-2}$.Segue-se daí que
$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n-2} + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira.

**2.c)** Consideremos a proposição $P(n) : \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$.
$P(1)$ é verdadeira, pois $P(1) = \sum_{i=1}^{1} F_{2i} = F_2 = 1 = F_3 - 1$.
Suponhamos que $P(k)$ verdadeira para todo $k$ natural tal que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Mostremos que $P(k)$ é verdadeira para $k = n$. Com efeito,
$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{n-1} F_{2i} + F_{2n}$.
De acordo com a hipótese de indução, $\sum_{i=1}^{n-1} F_{2i} = F_{2n-1} - 1$. Segue-se daí que
$\sum_{i=1}^{n} = F_{2n-1} - 1 + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.
Portanto, de acordo com o Princípio da Indução Finita $P(n)$ é verdadeira.

**2.d)**Consideremos a proposição $P(n) : F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$, com $n \geqslant 2$.
$P(2)$ é verdadeira, pois $P(2) = F_1 \cdot F_3 - F_2^2 = 1 \cdot 3 - 1 = 1 = (-1)^2$.
Suponhamos que $P(k)$ é verdadeira para todo $k$ natural tal que $2 \leqslant k \leqslant n-1$. Vamos mostrar que $P(k)$ é verdadeira para $k = n$.
Pela hipótese de indução, temos que $F_{k-2} \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$. Mas, $F_{k-2} + F_{k-1} = F_k$ e, portanto, $F_{k-2} = F_k - F_{k-1}$. Segue-se daí que:
$F_{k-2} \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$
$(F_k - F_{k-1}) \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$
$F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$.
Agora, sabendo que $F_{k-1} + F_k = F_{k+1}$ e, portanto, $F_k = F_{k+1} - F_{k-1}$, temos:
$F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_k - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$
$F_k^2 - F_{k-1}(F_{k+1} - F_{k-1}) - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$
$F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_{k+1} + F_{k-1}^2 - F_{k-1}^2 = (-1)^{k-1}$
$F_k^2 - F_{k-1} \cdot F_{k+1} = (-1)^{k-1}$
$F_{k-1} \cdot F_{k+1} - F_k^2 = (-1)^k$

**3)** Analisando a situação proposta temos: $C_0 = 1$; $C_1 = 2$; $C_2 = 4$; $C_3 = 8$; $C_4 = 14$; ...;
$C_n = C_{n-1} + 2(n-1)$, para $n \geqslant 2$, ilustrado na **Figura 3**.
Daí, temos:

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 + 2 \\ C_3 &= C_2 + 4 \\ C_4 &= C_3 + 6 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= C_{n-1} + 2(n-1) \end{aligned}$$

Somando, obtemos $C_n = C_1 + 2(1 + 2 + 3 + ... + (n-1))$.
Daí,
$C_n = 2 + 2 \cdot \dfrac{n(n-1)}{2}$

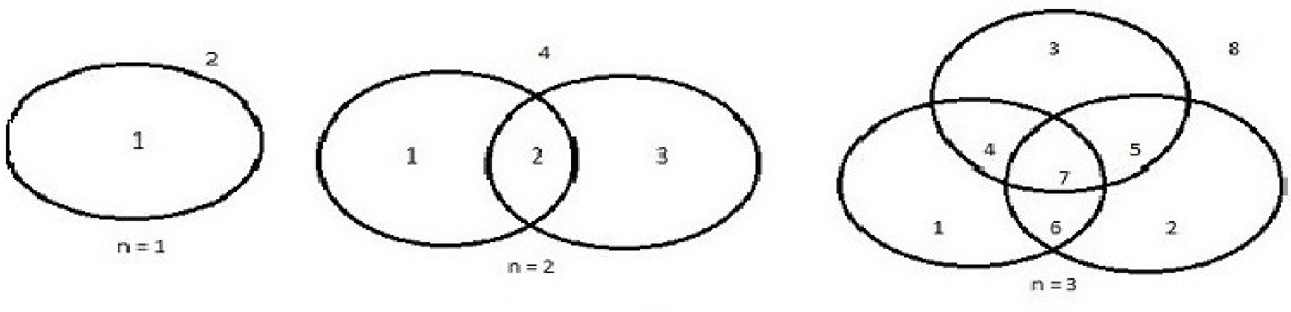


Figura 3 – Quantidade máxima de regiões em cada etapa.

$C_n = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2.$

Portanto:
$C_0 = 1$ e
$C_n = n^2 - n + 2$, $n \geqslant 2$.

**4)** Como cada reta intercepta todas as outras em um único ponto, temos que o número de regiões $x_n$ determinado por estas $n$ linhas satisfaz a relação
$x_0 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + 2$, para $n \geqslant 2$, conforme ilustrado na **Figura 4**.

Daí, temos:

$$x_2 = x_1 + 2$$
$$x_3 = x_2 + 2$$
$$x_4 = x_3 + 2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = x_{n-1} + 2$$

Somando, obtemos $x_n = x_1 + 2(n-1) = 2 + 2n - 2$ e, portanto, $x_n = 2n$.
Logo,

$$x_0 = 1 \text{ e}$$
$$x_n = 2n,\ n \geqslant 1.$$

**5)** A quantidade de regiões criada pelo acréscimo de um plano depende do número de planos já existentes que o novo intercepta. Esta quantidade é precisamente igual ao número de regiões no novo plano determinado pelas retas que que constituem as interseções dos

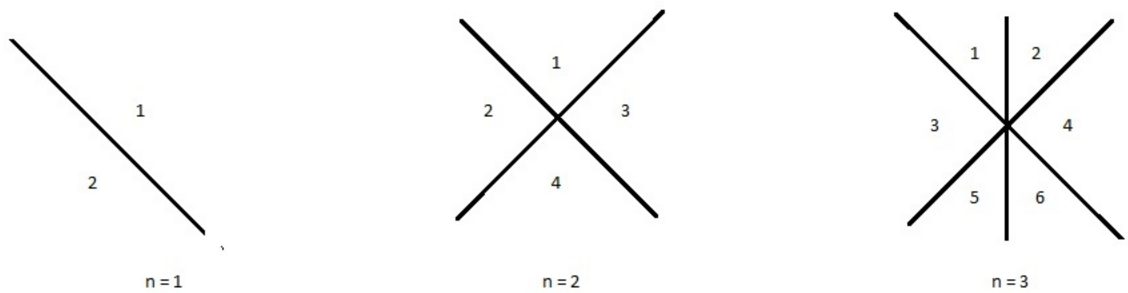


Figura 4 – Quantidade de regiões.

planos já existentes com este novo plano. Como todos eles se encontram na origem, temos que $a_n = a_{n-1} + x_{n-1} = a_{n-1} + 2(n-1)$, para $n \geqslant 2$, ($x_n$ foi calculada na questão anterior) e $a_1 = 2$.
A solução já está determinada na questão 3 e é dada por:

$$a_0 = 1 \text{ e}$$
$$a_n = 2 + n(n-1) = n^2 - n + 2,\ n \geqslant 1.$$

**6)** De modo semelhante à questão anterior, temos que $e_n = e_{n-1}$ + número máximo de regiões em que o plano é dividido por $n-1$ retas.
Para atingir o máximo da segunda parcela é necessário que as retas não sejam paralelas e que cada subconjunto de três retas tenham interseção vazia.
Tal valor foi calculado na aplicação 5 do capítulo 2. Substituindo, encontramos $e_n = e_{n-1} + \dfrac{n^2 - n + 2}{2}$, para $n \geqslant 2$, $e_1 = 2$. Resolvendo, obtemos $e_n = \dfrac{n^3 + 5n + 6}{6}$, para $n \geqslant 0$.

**7)** O total de palavras, $a_n$, com $n$ letras a, b ou c e com um número par de a's podem ser de dois tipos: as que começam com a letra b ou c, seguidas por uma sequência de $n-1$ letras com um número par de a's e as que começam com a, seguida por uma sequência de $n-1$ letras com um número ímpar de a's. Segue-se daí que a respectiva recorrência é $a_n = 2a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1})$. Logo, $a_n = a_{n-1} + 3^n$, com $a_1 = 2$. Resolvendo, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + 3 \\ a_3 &= a_2 + 9 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= a_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando tudo, obtemos $a_n = a_1 + \dfrac{3^n - 3}{2} = \dfrac{3^n + 1}{2}$.

**8)** Analisemos, primeiramente, o caso geral. Seja $x_n$ o total de contas de banco com $n$ dígitos e que não possuem dois 1's consecutivos, usando apenas os dígitos 1 e 2.
Temos então $x_{n-1}$ contas que começam com o dígito 2 e não possuem dois 1's consecutivos e, $x_{n-2}$ contas que começam com o dígito 1 e não possuem dois 1's consecutivos. Daí, tem-se que $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $n \geqslant 3$. Vê-se claramente que $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.
Como cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois imediatamente anteriores, temos que $x_{11} = 233$.

# Considerações Finais

O tema Recorrência não é abordado nos livros didáticos de Matemática destinados para o Ensino Médio. Apesar disso, é razoavelmente comum o aparecimento de questões explorando o conhecimento do tema em provas de vestibulares como ITA e IME, por exemplo, e em Olimpíadas de Matemática nacionais e internacionais, cuja participação dos estudantes teve um enorme crescimento em todo o mundo e em particular no Brasil.

O que se pretendeu nesse trabalho foi oferecer um material que servisse de apoio para professores e estudantes do Ensino Médio, do segmento IME, ITA e Olimpíadas, que se interessam em aprender ou aprofundar os seus conhecimentos a respeito das equações de recorrência, com ênfase nas recorrências de primeira e segunda ordem com coeficientes constantes, apresentando os seus conceitos básicos e uma grande quantidade de aplicações em problemas de Matemática Elementar de alto nível.

Vale salientar que toda a teoria apresentada é conhecida e consta nas fontes citadas na bibliografia.

Espero que a redação final do trabalho consiga auxiliar os professores e também os estudantes nas suas preparações para as competições acima citadas, proporcionando-lhes assim um grande salto de conhecimento na Matemática Elementar.

# Referências

[1] ANTON, Howard. *Cálculo um novo horizonte: Volume 1.* 6ª ed. Editora Bookman, 2000.

[2] CALLIOLI, Carlos A, et al. *Álgebra linear e aplicações.* 6ª ed. São Paulo: Editora Atual, 1990.

[3] LIMA, Elon Lages, et al. *A Matemática do Ensino Médio: Volume 2.* 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[4] LIMA, Elon Lages, et al. *A Matemática do Ensino Médio: Volume 4, Enunciados e Soluções dos Exercícios.* 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[5] LUIS, Rafael Domingos Garanito. *Equações de diferenças e aplicações.* Departamento de Matemática e Engenharias. Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Matemática (Área de Especialização de Matemática para o Ensino). Universidade da Madeira. Funchal, Agosto de 2006.

[6] NETO, Antonio Caminha Muniz. *Tópicos de Matemática Elementar: Volume 4, Combinatória.* 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[7] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins, FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[8] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de, CARNEIRO, Manoel Leite. *Coleção Elementos da Matemática 3: Sequências, Análise Combinatória, Matriz.* 2ª ed. Belém: GTM, 2009.

[9] SANTOS, José Plínio O., et al. *Introdução à Análise Combinatória.* 4ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.