Universidade Federal do Tocantins
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Ana Luiza Alves Veloso

Estudo de Logaritmos com ênfase à metodologia de resolução de problemas

Orientador:
Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

Palmas - TO
2014

Ana Luiza Alves Veloso

Estudo de Logaritmos com ênfase à metodologia de resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática e ofertado pela Universidade Federal do Tocantins, sob a orientação do Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Palmas - TO
2014

Dados Intercionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca da Universidade Federal do Tocantins
Campus Universitário de Palmas

V443e Veloso, Ana Luiza Alves

Estudo de Logaritmos com ênfase à metodologia de resolução de problemas/ Ana Luiza Alves Veloso. – Palmas, 2014.

74 f.

Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Tocantins, Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2014.

Linha de pesquisa: Matemática.

Orientador: Prof. Msc. Gilmar Pires Novaes

1. Logaritmo. 2. Aplicação. 3. Resolução de Problemas. I. Novaes, Gilmar Pires. II. Universidade Federal do Tocantins. III. Título.

CDU 512.922

Bibliotecária: Emanuele Santos
CRB-2/1309

ANA LUIZA ALVES VELOSO

ESTUDO DE LOGARITMOS COM ÊNFASE À METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Msc. Gilmar Pires Novaes.

Aprovada em 19 / 09 / 2014

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (UFT)

Hellena Apolinário

Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Reginaldo Naves dos Reis (IFTO)

A Pedro e Flávio por tolerarem minhas horas de estudos, abrirem mão de momentos em família para me apoiar na concretização de mais um sonho.

Agradecimentos

A DEUS, por tornar possível a realização de meus objetivos e me guiar nos momentos de dificuldades.

Ao meu amado esposo, Pedro da Silva Oliveira Filho, pela força e apoio incondicional.

Aos meus pais, Rômulo Soares Veloso e Zenilde Alves Veloso, que sempre incentivaram e valorizaram a busca pelo conhecimento.

Aos meus irmãos, Clarismunde Alves Veloso (*in memorian*), Débora Alves Veloso e Ronice Alves Veloso por serem fonte de inspiração...

Ao Professor Msc. Gilmar Pires Novaes pela paciência e orientação na realização deste trabalho, pela generosidade e respeito ao responder às minhas perguntas e esclarecer as minhas dúvidas.

Aos meus colegas que estiveram presentes nos momentos de estudos, especialmente Delfim Dias Bonfim, Igo Andrade e Pedro Cortes Filho, sem os quais algumas dificuldades teriam sido verdadeiros obstáculos para a concretização deste sonho.

À minha sogra, Maria da Conceição Sampaio Oliveira; ao meu cunhado, João Batista Mariano de Brito, e a toda a sua família, que, a cada fim de semana, me receberam em Palmas, tantas vezes se deslocando e alterando a rotina de sua casa para me oferecerem as melhores instalações e me deixar à vontade.

À minha prima, Ana Paula Oliveira Brito, que, sensivelmente, acolheu o meu filho Flávio, e tornou minha ausência mais branda.

Aos meus amigos, familiares e colegas de trabalho que torceram por mim e foram compreensivos nos momentos em que priorizei os estudos, e não pude atender aos seus chamados, convites e expectativas.

À Universidade Federal do Tocantins pelo engrandecimento intelectual e profissional.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

À Sociedade Brasileira de Matemática que viabilizou a implementação do PROFMAT.

"Há um sentimento inescapável ... de que essas fórmulas matemáticas têm existência autônoma e uma inteligência própria ... de que o que tiramos delas é mais do que aquilo que de início nelas foi posto."

(Heinrich Hertz)

Resumo

Envoltos em uma atmosfera que sugere e oferece os mais diversos atrativos tecnológicos, é notável e compreensível que os estudantes de hoje esperem que, na Educação Básica, a Escola proponha conteúdos que sejam significativos ao seu cotidiano. Partindo do pressuposto de que o ensino de Matemática com foco em formalizações e manipulações descontextualizadas é o caminho que leva à desmotivação e desinteresse, procuraremos, ao longo deste trabalho, apresentar um estudo sobre Logaritmo, centrado em suas aplicações, na resolução de problemas contextualizados e na elaboração e construção de conceitos, orientadas pelo professor, mas desenvolvidas ativamente pelo estudante. Com o objetivo de auxiliar o professor de Matemática a aguçar o senso crítico, tanto na elaboração de seu plano de aula quanto na escolha adequada do material didático a ser utilizado, apresentaremos ainda uma análise crítica sobre a forma como é tratado o tema logaritmo em alguns livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio.

Palavras-chaves: Logaritmo. Aplicação. Resolução de Problemas.

Abstract

Around an atmosphere that suggests and offers the most diverse technological attractions, it's noticed and understandable that today's students expect, in Basic Education, the school proposes content that are meaningful for their daily lives. Based on the assumption that mathematics teaching with focus on formalization and decontextualized manipulation is the way that leads to demotivation and disinterest, we are going to try, throughout this work, to present a study about logarithm, focused on its application, contextualized problems' resolution and in the development and construction of concepts, guided by the teacher, but developed actively by the student. Aiming to help the mathematics teacher to sharpen the critical thinking, as in development his lesson plan as in the suitable choice of teaching materials to be used, we are going to present still a critical analyses about the way the logarithm theme is treated in some teaching books of Mathematics for High School.

Key-words: Logarithm. Application. Problems' resolution.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O conhecimento matemático, desenvolvido e registrado ao longo da História, é uma das mais significativas conquistas do ser humano. É considerado um campo do conhecimento muito importante, que se mantém vivo e crescente, devido a suas utilidades e às contribuições oriundas, especialmente, dos centros acadêmicos e de pesquisa, contribuindo para o avanço de outras ciências e das tecnologias.

A Matemática tem como principal fator impulsionador a necessidade permanente de adaptação e aplicação às diversas atividades humanas, desde as mais simples até os maiores desafios postos pelas ciências em grandes descobertas. Porém, por imaturidade e por já ter nascido desfrutando das maravilhas da tecnologia, o estudante do Ensino Médio tende a não se surpreender com as facilidades que a sociedade moderna lhe dispõe e não se pergunta como e por quem este mundo tecnológico foi construído.

Essa falta de curiosidade caracteriza a desmotivação do estudante (fator que configura um dos maiores desafios do professor) dentro das salas de aula. Basta que não se sinta integrado ao processo de ensino-aprendizagem, para "bombardear" o professor com questionamentos como: "Por que eu tenho que estudar esse conteúdo?", "Que isso vai acrescentar em minha vida?", dentre outros, bastante desconfortáveis para aquele que conduz uma aula.

Dentre os conteúdos de Matemática que fazem parte do currículo escolar brasileiro para o Ensino Médio e que estão no centro dessa discussão de "por que" e "para que", destaca-se o estudo de Logaritmo.

Pensar e discorrer, hoje, o estudo de Logaritmo com o mesmo intuito com que foi desenvolvido há quatro séculos, não faz mesmo sentido algum. Afinal, se ele foi desenvolvido para facilitar tortuosos cálculos de multiplicação e divisão, atualmente contamos com calculadoras e computadores que fazem isso com muita precisão. A sua propriedade característica de modelar um grande número de fenômenos e situações naturais, em que há uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à sua quantidade existente no instante dado, é o que se deve destacar.

Em nosso trabalho, organizado em cinco capítulos, orientamos o estudo de Logaritmo com base nessa propriedade característica e nas diversas aplicações práticas a que se presta. Com a preocupação de integrar o estudante ao processo de ensino-aprendizagem, apresentamos a Metodologia de Resolução de Problemas, a qual lhe possibilita mobilizar conhecimentos e desenvolver capacidade para gerenciar as informações disponíveis.

No Capítulo 2, discorremos sobre o surgimento dos Logaritmos em um breve histórico, destacando os principais matemáticos que contribuíram para a construção e desenvolvimento desse conhecimento.

No Capítulo 3, abordamos os aspectos teóricos de Logaritmo. Inicialmente, apresentamos uma revisão sobre as propriedades de Potenciação e de Radiciação, para, em seguida, apresentar definições e propriedades de Logaritmos.

No Capítulo 4, nos dedicamos a escrever sobre as aplicações de Logaritmos. Pretendemos, com essa parte do trabalho, contribuir com a prática do professor do Ensino Médio na busca de tornar significativo o estudo desse conteúdo.

No Capítulo 5, abordamos o ensino de Matemática e os Logaritmos na Educação Básica, dando ênfase à Metodologia de Resolução de Problemas como estratégia para tornar o aluno um agente ativo na construção de seu próprio conhecimento. Ao fim desse capítulo, propomos uma lista de problemas, com o objetivo de levar o professor de Matemática à reflexão do que é essencial no conhecimento sobre Logaritmo.

No Capítulo 6, com base no livro *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio* (LIMA *et al.*, 2001), estabelecemos alguns critérios para analisar livros didáticos com o objetivo de saber como o tema Logaritmo é neles abordado. Da leitura dessa obra, surgiu-nos a curiosidade de saber o que mudou desde então, de modo que sentimos a necessidade de comparar os apontamentos e sugestões feitos pelos críticos às adequações em resposta dada pelos autores dos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Para isso, selecionamos as edições mais recentes de algumas entre as coleções que fizeram parte dessa análise, e também outras coleções que surgiram depois, mas que tiveram oportunidade de refletir sobre essas críticas antes de se lançar ao mercado.

Diante do exposto, esperamos, pois, que esse trabalho configure uma ferramenta para que os professores de Matemática do Ensino Médio tornem a aula sobre o tema Logaritmo um ambiente de aprendizagem significativo e prazeroso; que ele marque o início de um estudo que pode ser aprofundado por outros docentes em outros temas da Matemática, no intuito de oferecer um ensino de qualidade, onde todos os envolvidos, alunos, professores e sociedade (ou pais), estejam devidamente integrados.

2 Um breve histórico sobre Logaritmos

Em meados do século XVII, com intensa atividade marítima e estudos astronômicos, estudiosos e cientistas que, em suas pesquisas necessitavam de longos e laboriosos cálculos aritméticos, se viam diante de uma difícil missão de efetuar, com precisão, multiplicações de dois ou mais números de 8 ou mais casas decimais cada, bem como extrair raízes quadradas ou cúbicas desses números. Naquela época, não dispunham dos dispositivos de calcular de que dispomos hoje, de modo que tais cálculos lhes custavam horas de trabalho e muita atenção, pois um pequeno descuido com os dígitos poderia comprometer resultados importantes.

Assim Michael Stifel (1486-1567), ministro luterano alemão, ex-monge agostiniano, publicou, em 1544, a sua obra *Arithmetica integra*, o mais importante tratado de Álgebra da Alemanha do século XVI . Nele, Stifel além de apresentar um amplo estudo sobre coeficientes binomiais, também organizara uma tábua das mais simples raízes e potências inteiras de 2, de $2^{\frac{1}{4}}$ a 2^{64}, mostrando a correspondência entre as multiplicações dessas potências e adição dos índices ou expoentes. Porém suas aplicações eram bastante restritas; ademais, faltava-lhe o apetrechamento das frações decimais, necessário à aplicação prática do método. Acredita-se que ele não tivesse, naquele momento, ideia das grandes possibilidades de economizar esforços que tinha ao alcance das mãos.

O procedimento de Stifel baseava-se no uso de uma tabela na qual figuram em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade, potências de um certo número) com os de uma progressão aritmética. A tabela seguinte representa um exemplo simples de uma tábua de logaritmos.

Tabela 1 – Tábua de Logaritmos de Stifel

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Observe que essa “tábua de logaritmos” tem a seguinte estrutura:

Tabela 2 – Tábua de Logaritmos de Stifel 2

a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Para multiplicar, por exemplo, 32 por 128, procuram-se na tabela os números correspondentes na segunda linha, que são 5 e 7. Somando-se 5 a 7 obtemos 12. Localizando

12 na segunda linha, vemos que seu correspondente na primeira linha é 4096. Conclui-se, então, que $32 \cdot 128 = 4096$. Para dividir, por exemplo, 2048 por 64, consideram-se os números correspondentes, 11 e 6, e calcula-se $11 - 6 = 5$. O número da primeira linha correspondente a 5 é 32. Portanto, $2048 : 64 = 32$.

Esse procedimento é justificado pelas leis de potenciação:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \text{ e } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Assim,

$$32 \cdot 128 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4096 \text{ e } 2048 : 64 = 2^{11} : 2^6 = 2^{11-6} = 2^5 = 32.$$

Essa tábua revelava bem como funcionava o método, mas, particularmente, não atendia às necessidades das Navegações e Astronomia, pois as potências de 2 crescem muito rapidamente, deixando uma grande lacuna de valores numéricos. Para que essa ideia podesse ser utilizada na prática, seria necessário construir uma progressão geométrica com termos muito próximos entre si, com eventuais interpolações.

As relações entre progressões aritméticas e geométricas já eram objeto de estudo de vários matemáticos, desde o século XVI, principalmente na busca de facilitar o árduo trabalho com os cálculos das tabelas trigonométricas. Jost Bürgi (1552-1632), matemático suíço, inventor e fabricante de instrumentos astronômicos, foi o primeiro a trabalhar nesse sentido.

Inspirando-se nas ideais de Stifel, Bürgi considerou a progressão geométrica com primeiro termo 10^8 (para evitar números decimais) e razão $q = 1{,}001$ (desse modo, as potências de q estariam mais próximas entre si), e a progressão aritmética com primeiro termo igual a 0, razão 10 e último termo igual a 32000. Então, o logaritmo, segundo Bürgi, de 10^8 é 0, e o logaritmo do segundo termo, $10^8 \cdot 1{,}001 = 10001000$, é 10.

Devido aos conflitos que a Europa sofria na época, como a Guerra dos Trinta Anos, Bürgi perdeu o foco do seu trabalho sobre logaritmos e tardou em aproximadamente uma década a sua publicação, batizada com o título de *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* (Tabela de Progressão Aritmética e Geométrica). Com isso, perdeu a prioridade da criação dos logaritmos para John Napier (1550-1617), proprietário de terras escocês, que, em 1614, seis anos antes de Bürgi, publicou, em Edimburgo, um trabalho com o mesmo assunto, porém com abordagem geométrica, intitulado *Merifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Uma Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos). Segundo (LIMA, 2010), "A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi muito maior que a de Bürgi, devido a suas publicações e seu relacionamento com professores universitários".

A Napier deve-se o termo *logaritmo*, de *logos* e *arithmos*, que significam, respectivamente, "razão" e "número". Os seus estudos ampliaram a ideia de Stifel para uma tábua que atendesse mais valores relevantes e de uso dos astrônomos, que, naquela época, manipulavam principalmente valores de senos e cossenos. Então, Napier pensou em considerar um número bem próximo de 1, cujas potências crescessem lentamente, proporcionando um grande número de produtos e quocientes "instantâneos".

A sua ideia é relativamente simples: representam-se os números positivos como potência de um mesmo número. (PAIVA, 2013) apresenta um exemplo que ilustra muito bem o procedimento de Napier, por meio da tabela seguinte. Cada coluna da tabela apresenta um número e a respectiva representação aproximada como potência de base 10. Assim, na primeira coluna temos $1,78090 \cong 10^{0,25064}$.

Tabela 3 – Representação da Tábua de Logaritmos de Napier

Número	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10	$10^{0,25064}$	$10^{0,26217}$	$10^{0,51281}$	$10^{0,76345}$

Com essa tabela, podemos calcular:

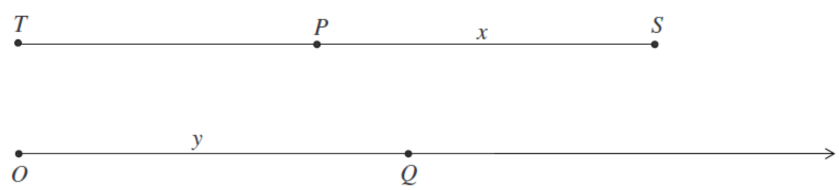
$$3,25694 \cdot 1,78090 \cong 10^{0,51281} \cdot 10^{0,25064} = 10^{0,51281+0,25064} = 10^{0,76345} \cong 5,80029;$$

$$3,25694 : 1,78090 \cong 10^{0,51281} : 10^{0,25064} = 10^{0,51281-0,25064} = 10^{0,26217} \cong 1,82881.$$

Observamos que o produto foi calculado pela soma dos expoentes das potências de dez e, o quociente, pela diferença.

Embora não tivesse consciência do conceito de base de um sistema de logaritmos, a abordagem geométrica de Napier leva a um sistema de base $\frac{1}{e}$. Em uma linguagem moderna, o seu pensamento para a criação dos logaritmos pode ser explicado da seguinte maneira: imagine o ponto P percorrendo o segmento de reta TS, a partir de T, cuja medida é dada por 10^7, e o ponto Q percorrendo uma semirreta com origem O, paralela a esse segmento, partindo ao mesmo tempo e com a mesma velocidade. Napier definiu y como logaritmo de x, se a velocidade de Q se mantém constante e a de P passa a ser igual à medida de $\overline{PS}$.

Figura 1 – Logaritmo: Abordagem Geométrica de Napier.



O fato de não envolver potências e expoentes torna essa definição um tanto estranha, mas se relaciona com a definição moderna. Realmente, considerando-se o número

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2,7182818284...,$$

pode-se demonstrar que

$$y = 10^7 \cdot \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7},$$

o que pode ser verificado pelo leitor em (PRECIOSO; PEDROSO, 2001).

Henry Briggs (1561-1631), professor de Geometria em Oxford, tinha grande admiração pelos trabalhos de Napier e escreveu a seu respeito: "... espero vê-lo este verão, se Deus quiser, porque nunca encontrei um livro que mais me agradasse ou me despertasse maior admiração". A esperada visita ocorreu em 1615, na Escócia. Nos encontros que se sucederam, discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos e inclusive concordaram em fazer o logaritmo de 1 igual a zero e o logaritmo de 10 igual a 1, abandonando a restrição dos logaritmos às quantidades inteiras e, assim, fazendo com que a parte decimal de todos os logaritmos dependesse unicamente das sequência dos logaritmos que formam cada número. Isso significa que se um número positivo N é escrito como $N = 10^L$, então L é o logaritmo "comum" de N, escrito como $\log_{10} N$, ou simplesmente, $\log N$. Assim, nasceu o conceito de base. Infelizmente, Napier não viveu o bastante para completar esse trabalho, falecendo em 1917, de modo coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais.

Em conexão com essa base decimal, Briggs desenvolveu interessantes métodos de interpolação, bem como métodos para verificar a exatidão dos logaritmos. Iniciando com o $\log 10 = 1$, calculou outros logaritmos considerando raízes quadradas sucessivas (aproximadas). Seu método se explica da seguinte maneira: sabendo-se que $\sqrt{10} \cong 3,1622$, tem-se $\log 3,1622 \cong \frac{1}{2}$; como $\sqrt[4]{10} \cong 1,7783$, tem-se $\log 1,7783 \cong \frac{1}{4}$. Continuando o processo, Briggs calculou os logaritmos de 1 a 20000 e de 90000 a 100000, com 14 decimais, organizando também tábuas trigonométricas com 10 decimais e um intervalo angular de 10 segundos.

É importante observar que a revolução causada pelo aparecimento dos logaritmos deve-se ao fato de que suas propriedades $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ e $\log_a b^c = c \log_a b$ transformam, com auxílio das tabelas, produto em soma, quociente em diferença e potência em produto, respectivamente. Por esse motivo, o método logaritmo teve grande reconhecimento por parte de astrônomos, como Kepler [1]. Hoje essas tábuas estão disponíveis em espaços culturais, em museus em absoluto desuso, mas é inegável a presença da função logarítmica e de sua inversa, a função exponencial, na representação

[1] Johannes Kepler (1571–1630), astrônomo, matemático e astrólogo alemão, foi um grande admirador e incentivador da emergente arte de calcular por meio de logaritmos. Em 1619 ocorreu-lhe a oportunidade de ter a obra de Napier em suas próprias mãos e ficou bastante impressionado.

de diversos fenômenos físicos, biológicos, químicos e econômicos, de modo que jamais perderão sua importância.

3 Logaritmo: Aspectos Teóricos

A tabela 1 sugerida no capítulo anterior para ilustrar de forma simples a ideia de Stifel na elaboração de sua tábua de logaritmos mostra a aplicação das propriedades $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ e $a^m : a^n = a^{m-n}$, embora a redução da multiplicação à adição tenha sido constatada muito antes da notação de expoente para indicar as potências de um número. A realidade é que os logaritmos surgiram antes da notação exponencial a^n (n natural), que, uma vez difundida, se estendeu às noções de potências com expoentes negativos e fracionários, e a constatação de que, se a é um número positivo diferente de 1, então todo número real positivo pode ser arbitrariamente aproximado por potências de a com expoentes racionais.

Com base nessas considerações, revisaremos aqui os conceitos de potenciação e radiciação, além de suas propriedades.

3.1 Potenciação e suas propriedades

Definição 3.1.1. Seja a um número real positivo. Para todo inteiro $n > 0$, *a potência* a^n, de base a e expoente n, é definida como o produto de n fatores iguais a a. Ou seja,

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad (n \text{ fatores}).$$

Da definição acima decorre a *propriedade fundamental*:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad (m,\ n \text{ inteiros positivos}),$$

o que se deve ao fato de que em ambos os membros da igualdade temos o produto de $n+m$ fatores iguais a a.

O produto $a^0 \cdot a^n = a^n$ nos conduz à seguinte igualdade: $a^0 = 1$. Esse é o único resultado possível que mantém válida a propriedade fundamental acima, segundo a qual $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$.

A extensão da noção de potência a expoentes negativos, de modo a manter válida a propriedade fundamental, nos conduz à

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1.$$

Consequentemente,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Observe que $a \cdot a^{-1} = a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{a} = 1$, ou seja, $a \cdot a^{-1} = 1$, com $a \neq 0$. Assim, $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$ é chamado inverso de a.

A relação fundamental se verifica também para o produto de várias potências. Desse modo, por exemplo,

$$a^m \cdot a^n \cdot a^p \cdot a^q = a^{m+n+p+q}.$$

No caso de todos esses expoentes serem iguais $(m_1 = m_2 = ... = m_p = m)$, temos

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} \cdot a^{m_3} \cdot ... \cdot a^{m_p} = a^{m_1+m_2+...+m_p} = a^{\overbrace{m+m+...+m}^{p \text{ parcelas}}} = a^{mp}.$$

Ou seja,

$$(a^m)^p = a^{mp}.$$

Para $a \neq 0$, é possível também estabelecer o quociente entre potências de mesma base a. Observe que

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n},\ m,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para $a \neq 0$,

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Estendendo a noção de potência de um número real positivo a expoentes fracionários, temos a seguinte definição:

Definição 3.1.2. Dado um número real $a > 0$, chama-se *potência de expoente racional*, da forma $r = \dfrac{p}{q}$, onde p, q são inteiros e $q > 0$, de base a, a potência denotada por $a^{\frac{p}{q}}$, que satisfaz:

$$(a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{p}{q}} \cdot ... \cdot a^{\frac{p}{q}} \ (q \text{ fatores}) \Rightarrow (a^{\frac{p}{q}})^q = a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+...+\frac{p}{q}} \Rightarrow (a^{\frac{p}{q}})^q = a^{(\frac{p}{q})\cdot q} = a^p.$$

Proposição 3.1.1. *Dado um número real $a > 0$, e r e s números racionais, mantém-se válida a propriedade fundamental $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.*

Demonstração. Sejam os números racionais $r = \dfrac{p}{q}$ e $s = \dfrac{u}{v}$, onde $p, q, u, v \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ e $v > 0$. Sabemos que $(a^r)^q = a^p$ e $(a^s)^v = a^u$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
(a^r \cdot a^s)^{q\cdot v} &= \underbrace{(a^r a^s)\cdot(a^r a^s)\cdot \ldots \cdot (a^r a^s)}_{qv \text{ fatores}} \\
&= \underbrace{(a^r \cdot a^r \cdot \ldots \cdot a^r)}_{qv \text{ fatores}}\underbrace{(a^s \cdot a^s \cdot \ldots \cdot a^s)}_{qv \text{ fatores}} \\
&= (a^r)^{qv}\cdot (a^s)^{qv} \\
&= a^{rqv}\cdot a^{sqv} \\
&= a^{\frac{pqv}{q}}\cdot a^{\frac{uqv}{v}} \\
&= a^{pv}\cdot a^{uq} \\
&= a^{pv+uq}.
\end{aligned}
$$

Segue que

$$a^r \cdot a^s = a^{\frac{pv+uq}{qv}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{u}{v}} = a^{r+s},$$

como queríamos demonstrar. □

Proposição 3.1.2. *Dados os números reais* $a,b > 0$ *e* n *natural, vale a igualdade* $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$.

Demonstração. Pela definição de potência, podemos escrever

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ fatores}} = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot \ldots \cdot (a\cdot b)}_{n \text{ fatores}} = (a\cdot b)^n.$$

□

Proposição 3.1.3. *Dados os números reais* $a,b > 0$ *e* r *um número racional, da forma* $r = \dfrac{p}{q}$, $p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, *vale a igualdade* $a^r \cdot b^r = (a\cdot b)^r$.

Demonstração. Demonstramos, na proposição acima, essa propriedade para expoente natural. Vamos demonstrá-la para expoente inteiro e estendê-la a expoente racional, como segue.

Considerando n natural, temos

$$a^{-n}\cdot b^{-n} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{1}{b^n} = \frac{1}{(a\cdot b)^n} = (a\cdot b)^{-n}.$$

Assim, a propriedade vale para expoente inteiro.

Agora, para r racional, temos

$$(a^r \cdot b^r)^q = (a^r)^q \cdot (b^r)^q = a^{rq}\cdot b^{rq} = (ab)^{rq} = [(a\cdot b)^r]^q,$$

de modo que $(a^r \cdot b^r) = (a\cdot b)^r$. □

3.2 Radiciação e suas propriedades

Definição 3.2.1. Dados um número real a não negativo e um número natural n, $n > 1$, chama-se *raiz n-ésima* (aritmética) de a o número real e não negativo b tal que $b^n = a$. Em símbolos, temos

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a.$$

No radical $\sqrt[n]{a}$ o número n é chamado de *índice do radical* e o número a é chamado de *radicando*.

Em particular, se $a < 0$, e n é par, então $\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$.

Observação: $a^{\frac{p}{q}}$ deve ser o número real positivo cuja q-ésima potência é igual a a^p. Por definição de raiz, isso significa afirmar que $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Em particular, $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}$.

Considerando a e b reais não negativos, m inteiro, n e p naturais não nulos, temos as seguintes propriedades:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Em outras palavras: a raiz de um produto é igual ao produto dos fatores.

Demonstração. $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. □

Essa propriedade pode ser generalizada para uma quantidade finita arbitrária (≥ 2) de fatores que constituem o radicando.

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$. Em outras palavras: a raiz de um quociente $\dfrac{a}{b}$, com $a \geq 0$ e $b > 0$, é igual ao quociente das raízes de a e b.

Demonstração. Para $a \geq 0$ e $b > 0$, temos $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. □

3)$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$. Em outras palavras: a potência de uma raiz é obtida elevando-se o radicando ao referido expoente.

Demonstração. $(\sqrt[n]{a})^m = (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a^m})$. □

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$ e $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$. Em outras palavras: podemos alterar o índice de uma raiz, sem alterar o seu valor numérico, multiplicando ou dividindo o expoente e o índice pelo mesmo número inteiro e positivo (no caso da divisão, exige-se que p seja um divisor de n para assegurar que o índice seja um número natural > 1).

Demonstração. Considerando o número natural positivo p, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot p}} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} \quad \text{e} \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m:p}{n:p}} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}.$$

□

5) $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p\cdot n]{a^m}$. Em outras palavras: podemos calcular a raiz de um radical duplo multiplicando os índices das raízes e mantendo o radicando.

Demonstração. Considerando o número natural positivo p, podemos afirmar que:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{p}} = a^{\frac{m}{n\cdot p}} = \sqrt[p\cdot n]{a^m}.$$

□

Essa propriedade pode ser generalizada para uma quantidade finita arbitrária (≥ 2) de radicais.

3.3 Logaritmos e Funções logarítmicas

Com base nas definições e propriedades de raízes e das potências de expoente racional de um número real positivo, podemos definir logaritmo da seguinte maneira:

Definição 3.3.1. Dado um número real positivo a, $a \neq 1$, o *logaritmo* de um número $x > 0$ na base a é o expoente y a que se deve elevar a de tal modo que $a^y = x$. Escreve-se $y = \log_a x$ e lê-se: y é o logaritmo de x na base a.

Como consequência desta definição, temos a *propriedade fundamental dos logaritmos*, descrita na proposição abaixo.

Proposição 3.3.1. *Dados a,b e c números reais positivos, $a \neq 1$, temos* $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$.

Demonstração. Considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos, segundo a definição de logaritmo dada acima, que $a^x = b$ e $a^y = c$. Segue, então, que $a^x \cdot a^y = b \cdot c$, ou seja, $a^{x+y} = b \cdot c$. Essa igualdade significa que $x + y = \log_a bc$, isto é, que $\log_a bc = x + y = \log_a b + \log_a c$. □

Em (LIMA, 2010), o autor define função logarítmica como segue.

Definição 3.3.2. Uma função real $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto $\mathbb{R}_+^*$ dos números reais positivos, chama-se *função logarítmica* ou um *sistema de logaritmos* se possui as seguintes propriedades:

A) L é uma função crescente, isto é, $x < y \Rightarrow L(x) < L(y)$;

B) $L(xy) = L(x) + L(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, o número $L(x)$ chama-se o *logaritmo* de x.

Como consequência das propriedades A) e B) acima, temos as propriedades das funções logarítmicas descritas nas proposições seguintes.

Proposição 3.3.2. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes possuem logaritmos diferentes.*

Demonstração. Consideremos $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, tais que $x \neq y$. Então ou $x < y$ ou $y < x$. Para $x < y$, temos que $L(x) < L(y)$, de acordo com a propriedade A) que garante L uma função crescente. De modo análogo, para $y < x$, temos $L(y) < L(x)$. De qualquer maneira, se $x \neq y$, concluímos que $L(x) \neq L(y)$. $\square$

Proposição 3.3.3. $L(1) = 0$.

Demonstração. Por B), temos

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1).$$

Logo,

$$L(1) = 0.$$

$\square$

Proposição 3.3.4. *Dado $x \in \mathbb{R}_+^*$, se $x > 1$, então $L(x) > 0$; se $0 < x < 1$, então $L(x) < 0$.*

Demonstração. Como, por A), L é crescente, de $0 < x < 1 < y$ resulta $L(x) < L(1) < L(y)$, isto é, $L(x) < 0 < L(y)$. $\square$

Proposição 3.3.5. *Para todo $x > 0$, temos $L\left(\dfrac{1}{x}\right) = -L(x)$.*

Demonstração. De $x \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$ resulta que $L(x) + L\left(\dfrac{1}{x}\right) = L(1) = 0$, donde $L\left(\dfrac{1}{x}\right) = -L(x)$. $\square$

Proposição 3.3.6. *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, vale*

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

Demonstração. $L\left(\dfrac{x}{y}\right) = L\left[x \cdot \left(\dfrac{1}{y}\right)\right] = L(x) + L\left(\dfrac{1}{y}\right) = L(x) - L(y).$ $\square$

Proposição 3.3.7. *Para todo* $x \in \mathbb{R}_+^*$ *e todo número racional* r*, temos* $L(x^r) = r \cdot L(x)$*.*

Demonstração. Demonstaremos essa propriedade por etapas, ampliando do conjunto dos números naturais até aos números racionais.

Inicialmente, observamos que a propriedade $L(xy) = L(x) + L(y)$ se estende para o produto de um número qualquer de fatores. Assim,

$$L(x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3) + ... + L(x_n).$$

Em particular, se $n \in \mathbb{N}$, então

$$L(x^n) = L(\underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ fatores}}) = L(x) + L(x) + L(x) + ... + L(x) = n \cdot L(x).$$

Portanto, a propriedade vale quando $r = n$ é um número natural.

Para o caso em que $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, isto é, r é um inteiro negativo, temos

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(x^n \cdot x^{-n}) = L(x^0) = L(1) = 0,$$

ou seja,

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -nL(x).$$

Demonstraremos, finalmente, o caso geral, em que $r = \dfrac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, temos

$$(x^r)^q = (x^{\frac{p}{q}})^q = x^p.$$

Devido ao que já demonstramos, temos que $q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x)$. Da igualdade $q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x)$ resulta que $L(x^r) = \dfrac{p}{q} \cdot L(x)$, ou seja, $L(x^r) = r \cdot L(x)$. $\square$

Proposição 3.3.8. *Uma função logarítmica* $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *é ilimitada, superior e inferiormente.*

Demonstração. A propriedade acima diz que, dados arbitrariamente números reais α e β, é sempre possível determinar números reais positivos x e y tais que $L(x) < \alpha$ e $L(y) > \beta$.

Para demonstrar que a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente, suponhamos que seja dado um número real β e que devamos determinar um número $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$.

O procedimento é o seguinte: consideramos um número natural n tão grande que $n > \dfrac{\beta}{L(2)}$. Como $L(2) > 0$ (Proposição 3.3.4), temos que $n \cdot L(2) > \beta$. Pela Proposição

3.3.7, concluímos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$. Portanto, $L(2^n) > \beta$. Considerando $x = 2^n$, resulta que $L(x) > \beta$. Portanto, L é ilimitada superiormente.

Para demonstrar que L também é ilimitada inferiormente, consideraremos $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$. Dado qualquer número real α, podemos obter, como vimos acima, $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $L(x) > -\alpha$. Então, para $y = \frac{1}{x}$ resulta que $L(y) = L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x) < \alpha$. □

Observação: Não faz sentido uma função logarítmica L definida para $x = 0$. De fato, assim definida a função, teríamos

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0),$$

o que resultaria em $L(x) = 0$. Assim, L seria identicamente nula, contrariando a propriedade A).

Proposição 3.3.9. *Dados os números reais positivos N, a e b, $a \neq 1$ e $b \neq 1$, para escrever o $\log_b N$ usando logaritmos na base a, realizamos a mudança de base:*

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Demonstração. Consideremos os números reais p, q e r, tais que $\log_b N = p$, $\log_a N = q$ e $\log_a b = r$. Da definição de logaritmos, temos que $b^p = N$, $a^q = N$ e $a^r = b$.

Assim, realizando substituições, resulta

$$N = a^q = b^p = (a^r)^p = a^{rp}.$$

Da igualdade $a^q = a^{rp}$, temos que $q = rp$ e, daí, $p = \frac{q}{r}$, o que equivale a

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

□

De acordo com o teorema a seguir, dada a função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, todas as demais funções logarítmicas resultam de L pela multiplicação por uma constante conveniente. Com esse resultado, fica evidente a sua caracterização, que consiste em uma função crescente $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Teorema 3.3.1. *Dadas as funções logarítmicas $M, L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, existe uma constante $c > 0$ tal que $M(x) = c \cdot L(x)$, para todo $x > 0$.*

Demonstração. Suponhamos que exista um número real $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Demonstraremos, neste caso, que $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$.

Da igualdade $L(a) = M(a)$, concluímos, para r racional, que $r \cdot [L(a)] = r \cdot [M(a)]$. Daí, $L(a^r) = M(a^r)$.

Suponhamos, por absurdo, que exista algum $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$, por exemplo, $L(b) < M(b)$. Assim, podemos considerar um número natural n tão grande que

$$n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a) \Rightarrow M(b) - L(b) > \frac{1}{n} \cdot L(a) = L(a^{\frac{1}{n}}).$$

Escrevamos $c = L(a^{\frac{1}{n}})$. Os números c, $2c$, $3c$, ... dividem $\mathbb{R}_+^*$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um desses números, digamos $q \cdot c$, pertence ao intervalo $(L(b), M(b))$, isto é, $L(b) < q \cdot c < M(b)$.

Ora, $q \cdot c = q \cdot L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{q}{n}}) = M(a^{\frac{q}{n}})$. Então

$$L(b) < L(a^{\frac{q}{n}}) = M(a^{\frac{q}{n}}) < M(b).$$

Como L é crescente, temos, de acordo com a primeira desigualdade, que $b < a^{\frac{q}{n}}$. Já a segunda desigualdade nos mostra que $a^{\frac{q}{n}} < b$. Uma contradição!

Com isso, não existe b tal que $L(b) \neq M(b)$. Portanto, $L(x) = M(x)$, para todo $x > 0$. □

Lema 3.3.1. *Seja $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais $p < q$, existe $x > 0$ tal que $p < L(x) < q$.*

Demonstração. De acordo com esse lema, todo intervalo aberto $I = (p, q)$ contém ao menos um valor $L(x)$ da função L.

Para demostrá-lo, suponhamos um número natural $n > \dfrac{L(k)}{(q-p)}$, $k > 1$. Logo, $\dfrac{L(k)}{n} < q - p$.

Escrevamos $c = \dfrac{L(k)}{n}$. Os múltiplos inteiros $m \cdot c = \dfrac{m}{n} \cdot L(k) = L(k^{\frac{m}{n}})$, $m \in \mathbb{Z}$, decompõem a reta real em intervalos justapostos, cujo comprimento comum c é menor que o comprimento $q - p$ do intervalo $I = (p, q)$.

Portanto, pelo menos um desses múltiplos $m \cdot c = L(k^{\frac{m}{n}})$ pertence ao intervalo $I = (p, q)$. Escrevendo, $x = k^{\frac{m}{n}}$, temos que $p < L(x) < q$. □

Teorema 3.3.2. *Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é sobrejetiva.*

Em outras palavras: dado um número real b qualquer, existe sempre um (único) número real positivo x tal que $L(x) = b$.

Demonstração. Nesta demonstração usaremos um processo de resolução numérica de equações, chamado pelos chineses antigos de "método do elemento celestial", que consiste em determinar, um a um, os inteiros

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, ...$$

que compõem a representação decimal do número real

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2...\alpha_n...$$

Em seguida, mostraremos que temos de fato $L(a) = b$.

Para determinar a parte inteira α_0, lembramos que L é uma função crescente ilimitada. Assim, devem existir inteiros k tais que $L(k) > b$. Seja $a_0 + 1$ o menor inteiro tal que $L(a_0 + 1) > b$. Então temos $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$.

Em seguida, consideremos os números

$$a_0, a_0 + \frac{1}{10}, a_0 + \frac{2}{10}, ..., a_0 + \frac{9}{10}, a_0 + 1.$$

Como $L(a_0) \leq b < L(a_0 + 1)$, podemos considerar dois elementos consecutivos a_1 e $a_1 + \frac{1}{10}$ nessa sequência, tais que $L(a_1) \leq b < L(a_1 + \frac{1}{10})$, isto é, podemos considerar a_1 inteiro, $0 \leq a_1 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_1 = a_0, \quad a_1 = a_0 + \frac{a_1}{10},$$

temos

$$L(\alpha_1) \leq b < L(\alpha_1 + \frac{1}{10}).$$

Analogamente, considerando dos números

$$\alpha_1, \alpha_1 + \frac{1}{10^2}, \alpha_1 + \frac{2}{10^2}, ..., \alpha_1 + \frac{9}{10^2}, \alpha_1 + \frac{1}{10},$$

vemos que existe a_2, $0 \leq a_2 \leq 9$, tal que, pondo

$$\alpha_2 = a_0, a_1, \quad a_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2},$$

temos

$$L(\alpha_2) \leq b < L(\alpha_2 + \frac{1}{10^2}).$$

Prosseguindo analogamente, obtemos a representação decimal de um número real

$$\alpha_n = a_0, a_1a_2...a_n.... = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_1}{10^2} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...,$$

tal que $\alpha_n = a_0a_1a_2...a_n$. Temos

$$L(\alpha_n) \leq b < L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}),$$

para todo $n \geq 0$.

Afirmamos que $L(a) = b$. De fato, se $L(a) < b$, podemos usar o Lema 2.3.1 para obter $x > 0$ tal que $L(a) < L(x) < b$. Como L é crescente, decorre da primeira dessas desigualdades que $a < x$. Então considerando n tão grande que $x - a > \frac{1}{10^n}$, temos $a + \frac{1}{10^n} < x$. Logo $\alpha_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x$. Como L é crescente, de $x > \alpha_n + \frac{1}{10^n}$ resulta

$$L(x) > L(\alpha_n + \frac{1}{10^n}) > b,$$

um absurdo, pois obtivemos o número x de modo que $L(x) < b$.

Analogamente, não podemos ter $L(a) > b$. Com efeito, usando novamente o Lema 2.3.1, obtemos $x > 0$ tal que $b < L(x) < L(\alpha)$. Como L é crescente, de $L(x) < L(\alpha)$ concluímos que $x < \alpha$, o que implica, entretanto, que $x < \alpha_n$, para algum n. Então $L(x) < L(\alpha_n) \leq b$, contrariando o fato de que obtivemos x de modo que $b < L(x)$. □

3.4 Logaritmo Natural

A concepção geométrica de uma função logarítmica é bastante antiga, com primeiros vestígios em estudos de Gregory Saint Vincent[1], publicados em 1647, e depois Isaac Newton[2], em 1660, que já reconheciam uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos, ainda sem definir essa área como logaritmo natural e sem reconhecer o número e.

Para estabelecer essa relação, é preciso antes apresentar a definição de área de uma faixa de hipérbole. Para isso, suponha fixado no plano um sistema de eixos cartesianos, com cada ponto do plano representado por um par ordenado (x, y).

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, isto é, H corresponde ao conjunto do plano constituído pelos pontos da forma $\left(x, \frac{1}{x}\right)$, onde $x > 0$. Assim,

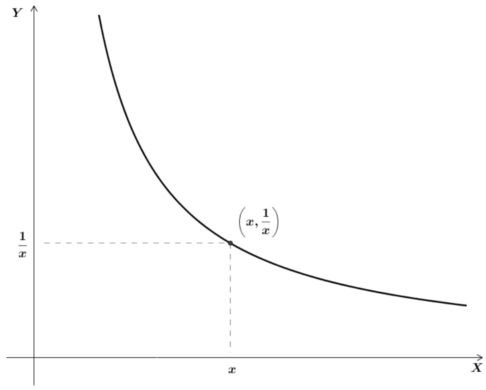
$$H = \left\{(x, y); x > 0, y = \frac{1}{x}\right\}.$$

Geometricamente, H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está contido no primeiro quadrante, de modo que um ponto (x, y) do plano pertence ao conjunto H se e somente se $x > 0$ e $xy = 1$.

[1] Gregory Saint Vincent (1584-1667), matemático e padre jesuíta belga.

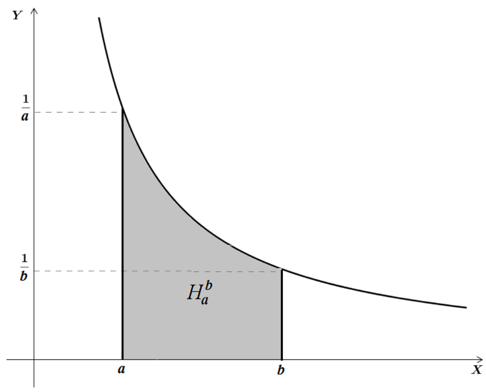
[2] Isaac Newton (1642-1727) foi um cientista inglês, reconhecido, principalmente, pelas suas contribuições à Física e Matemática, embora tenha sido também astrônomo, alquimista, filósofo natural e teólogo.

Figura 2 – Ramo da hipérbole $xy = 1$ no primeiro quadrante.



Para obter uma faixa de hipérbole, fixamos dois números reais positivos diferentes a e b, por exemplo, $a < b$, e consideramos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H. Representaremos essa região por H_a^b.

Figura 3 – Região H_a^b.



Portanto, a faixa H_a^b compreende os pares ordenados (x,y) que satisfazem simultaneamente as condições $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$, ou seja,

$$H_a^b = \left\{(x,y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}.$$

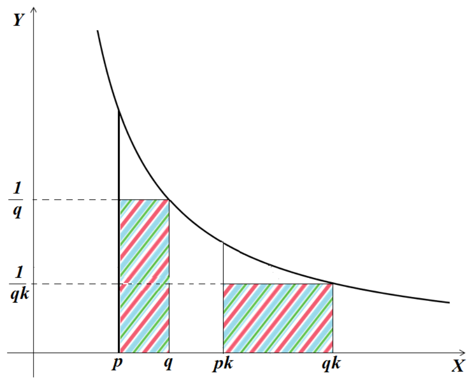
O teorema que segue expressa uma característica da faixa de hipérbole H essencial para a definição de logaritmos. Tal característica consiste em sua propriedade fundamental.

Teorema 3.4.1. *Dado $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} têm medidas de áreas iguais.*

Demonstração. Consideremos dois retângulos inscritos em H, com bases correspondentes aos segmentos $[p,q]$ e $[pk,qk]$. Verifiquemos que a medida de suas áreas coincidem, pois a área do primeiro retângulo é igual a

$$(q-p)\cdot\frac{1}{q}=1-\frac{p}{q},$$

Figura 4 – Retângulos inscritos em H.

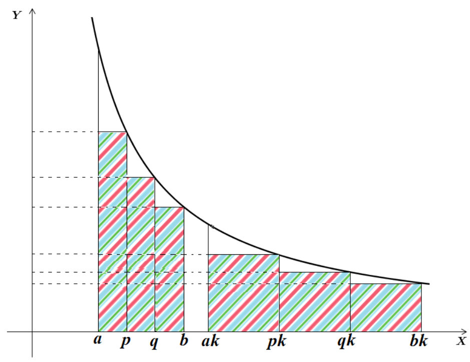


enquanto que a área do segundo é

$$(qk-pk)\cdot\frac{1}{qk}=1-\frac{p}{q}.$$

Podemos subdividir o intervalo $[a,b]$, obtendo vários retângulos inscritos na faixa H_a^b, que, juntos, formam um polígono retangular P. Se multiplicarmos por k cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a,b]$, obteremos uma subdivisão do intervalo $[ak,bk]$, cujos retângulos inscritos correspondem a um polígono retangular P'.

Figura 5 – Retângulos inscritos nos intervalos $[a,b]$ e $[ak,bk]$ em H.



Como cada retângulo de P tem um correspondente em P' com mesma área, concluímos que os polígonos P e P' têm mesma área. E, assim, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b, existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área.

De modo análogo, dividindo as abscissas por k, verificamos que, para cada polígono retangular Q' inscrito em H_{ak}^{bk}, existe outro polígono retangular Q inscrito em H_a^b

com a mesma área. Portanto, as áreas dessas duas faixas são números com as mesmas aproximações inferiores, ou seja, iguais. □

Como consequência desse teorema, podemos restringir nossa consideração às áreas das faixas da forma H_1^c, pois Área $(H_a^b) =$ Área $(H_1^{\frac{b}{a}}) =$ Área (H_1^c), $c = \dfrac{b}{a}$.

Quando $a < b < c$, temos que, Área $(H_a^b)+$ Área $(H_b^c) =$ Área (H_a^c).

Com o objetivo de manter válida a igualdade acima para quaisquer a, b, c reais, consideremos as convenções:

$$\begin{aligned} \text{Área}(H_a^a) &= 0 \\ \text{Área}(H_a^b) &= -\text{Área}(H_b^a) \end{aligned}$$

Assim, se $c < a < b$, temos, Área $(H_c^b) =$ Área $(H_c^a)+$ Área (H_a^b).

Daí segue: $(H_a^b)-$ Área $(H_c^b) = -$ Área (H_c^a), ou seja,

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c).$$

Com base na propriedade fundamental, descrita no Teorema 2.4.1., apresentaremos a definição de logaritmo natural, a qual, de acordo com (LIMA, 2010), é dada como segue.

Definição 3.4.1. Seja x um número real positivo. O *logaritmo natural* [3] de x corresponde à área da faixa H_1^x. Escrevemos $\ln x =$ Área(H_1^x).

Obsevação: Por convenção, Área$(H_1^x) < 0$ quando $0 < x < 1$.

Como $(H_1^1) < 0$ reduz-se a um segmento de reta, tem área igual a zero. Desse modo, podemos escrever:

$\ln 1 = 0$, $\ln x > 0$ se $x > 0$ e $\ln x < 0$ se $0 < x < 1$.

Teorema 3.4.2. $\ln : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função logarítmica.*

Demonstração. Devemos verificar que ln possui as propriedades A) e B) especificadas na Definição 2.3.2.

Verifiquemos, inicialmente, a propriedade B): $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

Para isso, recordemos que Área $(H_1^{xy}) =$ Área $(H_1^x)+$ Área (H_x^{xy}), seja qual for a posição relativa dos pontos de abcissas 1, x, xy. Além disso, $(H_x^{xy}) =$ Área (H_1^y).

Segue que $(H_1^{xy}) =$ Área $(H_1^x)+$ Área (H_1^y), isto é,

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

[3] Também recebe o nome de Logaritmo Neperiano, embora o logaritmo definido por Napier possui valor diferente deste.

Agora, verificaremos a propriedade A): ln é uma função crescente.

Consideremos $x, y \in \mathbb{R}^+$, tais que $y > x$. Então existe um número real $a > 1$ tal que $y = ax$. Segue que $\ln y = \ln a + \ln x$.

Como $a > 1$, temos $\ln a > 0$. Portanto, $\ln y > \ln x$. Verificadas as propriedades A) e B), temos que ln é uma função logarítmica. □

Consequentemente, as propriedades definidas para função logarítmica se aplicam ao logaritmo natural. Assim, para x, y números reais positivos e $m \in \mathbb{N}$, resultam, do teorema anterior:

$$\begin{aligned}
\ln xy &= \ln x + \ln y \\
\ln \frac{1}{y} &= -\ln y \\
\ln \frac{x}{y} &= \ln x - \ln y \\
\ln(x^m) &= m \cdot \ln x \\
\ln \sqrt[m]{x} &= \frac{\ln x}{m}.
\end{aligned}$$

Segundo (LIMA, 2010), são essas fórmulas as responsáveis pelo interesse computacional dos logaritmos, pois elas permitem reduzir cada operação aritmética a uma operação mais simples.

4 Aplicações de Logaritmos

A discussão de qualquer tema em sala de aula deve apresentar relevância para todos os envolvidos, alunos e professores. Se as aplicações não estiverem claras e precisas, os primeiros sobressaltos da desmotivação despontam em questionamentos como "para que serve isso?", "Em que esse conteúdo vai acrescentar em minha vida?", entre outras que podem ser bem desconfortáveis para quem conduz a discussão. Por isso, ao planejar a introdução de um conteúdo em sala de aula, o professor deve ter essa preocupação e, priorizar, em seu planejamento, estudo e pesquisa que lhe permitam conhecer além do que vai ensinar, mas principalmente se resguardar com argumentos suficientes para responder prontamente tais questionamentos.

Este trabalho tem esta proposta: servir como material de apoio ao professor que pretende ensinar Logaritmos, lhe fornecendo informações que ultrapassam o que deve ser discutido em uma turma de Ensino Médio, mas que é essencial para sua maturidade sobre o tema. Assim, além de toda a bagagem teórica acerca de Logaritmos e Funções Logarítmicas, apresentamos aqui algumas aplicações.

4.1 Aplicação de Logaritmos às Ciências Financeiras

Quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20% ao ano?

Para se ter uma ideia da importância das relações financeiras desde sempre, esse problema está cravado em placa de argila da Mesopotâmia, datado de 1700 a.C., agora como parte do acervo do Museu do Louvre, em Paris.
A resposta dada na base 60 é $3;47,13,20 = 3+\dfrac{47}{60}+\dfrac{13}{60^2}+\dfrac{20}{60^3} \cong 3,7870$, uma boa aproximação do valor correto que corresponde a 3,8018, equivalente a cerca de 3 anos, 9 meses e 18 dias. (PRECIOSO; PEDROSO, 2001)

A análise da placa em que está cravado o problema acima faz crer que o escriba usou interpolação linear entre os valores $(1,2)^3$ e $(1,2)^4$, aplicando a fórmula para juros compostos $C = C_0(1+r)^t$ (em que $C =$ capital acumulado, $C_0 =$ capital investido, $r =$ taxa de juros aplicada e $t =$ período de investimento), onde $r = 20\%$ ou $\dfrac{12}{60}$ e tirando valores de uma tabela exponencial com potências de 1,2.

Assim, para $C = 2C_0$, tem-se

$$C = 2C_0 = C_0(1+r)^t \Longrightarrow 2C_0 = C_0(1,2)^t \Longrightarrow 2 = (1,2)^t.$$

Observação: Segundo (PRECIOSO; PEDROSO, 2001), na Mesopotâmia já se fazia uso, para resolver problemas específicos, de tabelas de potências sucessivas de um dado número, semelhantes às atuais tabelas de logaritmos.

Ainda sobre a fórmula de capitalização $C = C_0(1+r)^t$, consideremos um investimento de C_0 = R\$ 1.000, 00 aplicado a juros compostos anuais de 10%. Em um ano, o saldo dessa aplicação será de R\$ 1.100,00 $(1000 \cdot 1,1)$. Ao final do segundo ano, o saldo será de R\$ 1.210,00 $(1000 \cdot (1,1)^2)$, e, ao final do terceiro ano, será de R\$ 1.331,00 $(1000 \cdot (1,1)^3)$. Nota-se que esse processo de capitalização equivale a uma progressão geométrica de razão 1,1.

As instituições financeiras oferecem vários tipos de composição de juros, que podem ser anuais, semestrais, trimestrais, mensais, semanais e até diárias. Suponha que uma composição seja feita n vezes ao ano. Isso significa que, para cada período de conversão, a instituição usa a taxa de juros anuais r dividida por n, ou seja, $\frac{r}{n}$. Como em t anos existem nt períodos de conversão, o principal C_0 renderá

$$C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Retomando o exemplo acima, em que C_0 = R\$ 1.000 e $r = 10\%$, a tabela abaixo informa os resultados de composição em diversos períodos:

Tabela 4 – Demonstrativo de Composição Monetária.

Período de Conversão	n	$\frac{r}{n}$	C
Anual	1	0,1	1100
Semestral	2	0,05	1102,50
Trimestral	4	0,025	1103,81
Mensal	12	0,008333	1104,70
Semanal	52	0,001923	1105,06
Diário	365	0,000274	1105,16

Explorando ainda mais essa questão, consideremos o caso em que $r = 1$, $C_0 = 1$ real e $t = 1$ ano, isto é, $C = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Nesse caso, o que ocorre para valores crescentes de n? A resposta é fornecida pela tabela seguinte.

Tabela 5 – Comportamento de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ com o crescimento de n.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2, 25
3	2, 37037
4	2, 44141
5	2, 48832
10	2, 59374
50	2, 69159
100	2, 70481
1000	2, 71692
10000	2, 71815
100000	2, 71827
1000000	2, 71828
10000000	2, 71828

Como é possível verificar na tabela, a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge muito lentamente, e, para $n \geq 100000$, fornece consideráveis aproximações do número e. O questionamente que se coloca é: a convergência para o número e de fato se confirma? A resposta é sim. A convergência ocorre naturalmente.

Considere a equação $C = C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$. A juros anuais, um capital C_0 renderá, após um ano, $C_0(1+r)$. Porém, se dividirmos o ano em n partes e fizermos a composição de juros para esses n períodos, quando chegar ao fim do ano, obteremos um capital maior, no valor de $C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$. Se pensarmos num valor de n extremamente grande, ou seja, que os juros sejam capitalizados a cada instante, ao fim de um ano o capital investido será de

$$\lim_{n\to\infty} c\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = c\cdot e^r.$$

Esse tipo de transação, em que os juros são capitalizados instantaneamente, é o que chamamos de *juros contínuos*.

4.2 Aplicação de Logaritmos ao estudo de terremotos

Em 1935, o físico e sismólogo norte-americano Charles Francis Richter (1900-1985), junto com o sismólogo alemão Beno Gutenberg (1889-1960), em seus estudos sobre sismos no sul da Califórnia (Estados Unidos), formulou uma escala de magnitude para comparar informações e efeitos provocados por terremotos. Expressa em função logarítmica, a escala

Richter (também conhecida como escala de magnitude local (M_L)) não mede os efeitos dos terremotos, mas indica sua força em termos de energia liberada, baseada nos registros das estações sismográficas.

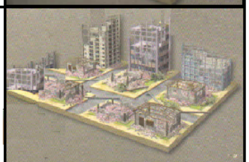
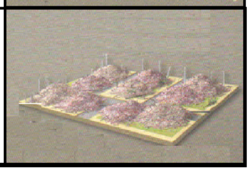
Como tem base logarítmica decimal, cada aumento da magnitude em um número inteiro representa um aumento de 10 vezes na amplitude do terremoto. A escala Richter corresponde ao logaritmo da medida da amplitude das ondas sísmicas a 100 km do epicentro. A intensidade I de um terremoto é um número que varia de $I = 0$ até $I = 9,5$, para o maior já registrado, ocorrido no Chile, em 1960. Essa intensidade I é dada pela fórmula:

$$I = \frac{2}{3} \log_{10} (\frac{E}{E_0}),$$

onde E é a energia liberada em quilowatt-hora (kWh) e $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}\ kWh$.

A tabela abaixo, adaptada de (DANTE, 2013), ilustra os efeitos prováveis de terremotos de acordo com sua magnitude na escala Richter.

Figura 6 – Efeitos causados por terremotos.

Magnitude	Efeitos provocados	Representação ilustrativa
Inferior a 3,5	Nenhun efeito. São apenas registrados pelos sismógrafos.	
3,5 a 5,4	Já é percebido, mas produz poucos danos.	
5,5 a 6	Provoca danos menores em edifícios bem construídos.	
6,1 a 6,9	Muito perigoso para áreas populosas. Pode ser devastador numa zona de 100 Km.	
7 a 7,9	Pode causar grande destruição, sérios danos numa grande superfície.	
A partir de 8	Suficiente para dizimar cidades inteiras e causar danos em regiões localizadas a várias centenas de quilômetros.	

4.3 Aplicação de Logaritmos à Química

Pela sua propriedade característica de modelar um grande número de fenômenos e situações naturais, em que se tem uma grandeza cuja taxa de variação é proporcional à sua quantidade existente no instante dado, as funções logarítimicas se aplicam largamente à Química (MONK *et al.*, 2012). Dentre tantas, citaremos algumas que podem ser adaptadas e até discutidas ao nível de alunos do Ensino Médio. São elas:

1) Obtenção do pH **de solução aquosa**.

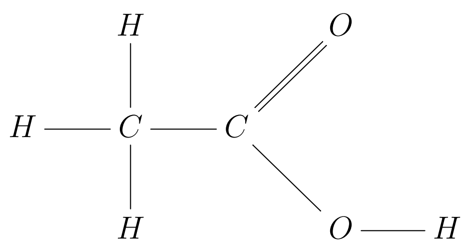
O pH é a abreviatura de *potencial de hidrogênio*, que indica a acidez, neutralidade ou a basicidade de uma substância, de acordo com os níveis de concentração[1] de íons de H^+. Em 1909, com base em diversos estudos realizados em físico-química, o bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868-1939) estabeleceu uma maneira para expressar o pH de uma substância utilizando o logaritmo negativo de sua concentração de íons hidrogênio ($[H^+]$).

Sua representação matemática é dada pela relação

$$pH = -\log[H^+],$$

em que $[H^+]$ é a concentração molar de íons de hidrogênio. Assim, conhecendo o pH de uma substância, podemos determinar a concentração de íons H^+ e vice-versa, como nos exemplos que seguem:

Exemplo 4.3.1. Uma solução de ácido etanóico tem concentração de 10^{-4} mol/dm^3. Qual é o pH do ácido?



Resolução: Para obter o pH inserimos o valor correspondente a $[H^+] = 10^{-4}$ mol/dm^3 na função logarítmica $pH = -\log[H^+]$. Assim, $pH = -\log[10^{-4}]$, o que resulta $pH = -1 \cdot (-4) = +4$.

Exemplo 4.3.2. Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo, que, quando representado por um valor entre 6 e 7, tende a ser mais fértil.

[1] $pH < 7$ caracteriza substância ácida; $pH = 7$ caracteriza substância neutra; e $pH > 7$ caracteriza substância básica.

Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com pH 6,4 do solo. Obtenha a concentração de íons de hidrogênio apresentada nesse solo.

Resolução: Para obter $[H^+]$ da definição de pH, primeiramente multiplicamos ambos os membros da igualdade por (-1).

$$-pH = \log[H^+]$$

Como 10^x e $\log x$ são funções inversas uma da outra, para remover o logaritmo, basta realizar a operação inversa de $\log x$, que é 10^x. Assim,

$$10^{-pH} = 10^{\log[H^+]}.$$

Como $a^{\log_a b} = b$, temos, com $a = 10$ e $b = [H^+]$, que $[H^+] = 10^{-pH}$.

Assim, para $pH = 6,4$,temos $[H^+] = 10^{-6,4}\ mol/dm^3$.

Exemplo 4.3.3. Considerando $[H^+][OH^-] = 1 \cdot 10^{-14}$ e utilizando as fórmulas $pH = -\log[H^+]$ e $pOH = -\log[OH^-]$, obtenha a relação $pH + pOH = 14$.

Resolução: Das definições de pH e pOH, temos que

$$\begin{aligned} pH + pOH &= -\log[H^+] + (-\log[OH^-]) \\ &= -(\log[H^+] + \log[OH^-]) \\ &= -(\log[H^+] \cdot [OH^-]) \\ &= -(\log 1 \cdot 10^{-14}) \\ &= -(-14) \cdot \log 10 \\ &= -(-14) \\ &= 14. \end{aligned}$$

2) A concentração de reagente em uma reação química diminui com o tempo, de acordo com a chamada **equação de velocidade**:

$$[R]_t = [R]_0 \cdot e^{-kt},$$

em que $[R]_0$ é a concentração do reagente no início de uma reação, $[R]_t$ é a concentração de reagente R no tempo t após o início da reação e k é a constante de velocidade de primeira ordem.

3) A **equação de Tafel**[2] relaciona a densidade de corrente I que flui quando um eletrodo é imerso em uma solução de analito e a voltagem é deslocada por uma quantidade

[2] Julius Tafel (1862-1918) foi um químico e metalurgista suíço que se destacou no campo da Eletroquímica.

η do seu potencial de equilíbrio:

$$\ln I = a + b\eta,$$

em que a e b são constantes.

4) A **equação de Arrhenius**[3] relaciona as constantes de velocidade de reações químicas k_1 e k_2 e as temperaturas T_1 e T_2:

$$\ln\left(\frac{k_2}{k_1}\right) = -\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right),$$

em que R é a constante de gás e E_a é a energia de ativação.

5) A **lei limitante de Debye**[4]**- Hückel**[5] relaciona o coeficiente de atividade γ e uma forma de concentração conhecida como força iônica I:

$$\log\gamma = -Az^+z^-\sqrt{I},$$

em que A, z^+ e z^- são constantes.

6) A **equação de Eyring**[6] é uma forma superior da equação de Arrhenius e relaciona as constantes de velocidade de reações químicas k e a temperatura T:

$$\ln\left(\frac{k}{T}\right) = -\frac{\Delta H^{\#}}{RT} + \frac{\Delta S^{\#}}{R} + \ln\left(\frac{k_B}{h}\right),$$

em que R é a constante de gás, $\Delta H^{\#}$ é a entalpia, $\Delta S^{\#}$ é a entropia de ativação, h é a constante de Planck e k_B é a constante de Boltzmann.

7) A **equação de Clausius**[7]**- Clapeyron**[8] diz respeito aos gases e líquidos no equilíbrio e relaciona a pressão p com a temperatura T:

$$\ln p_2 - \ln p_1 = -\frac{\Delta H^{\varnothing}_{(vaporização)}}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right).$$

No exemplo que segue aplicaremos a relação de inversão entre exponenciais e logaritmos e algumas de suas propriedades a fim de reforçar e permitir adaptações para uma discussão em nível de alunos de Ensino Médio.

8) Uma das formas da **isoterma de van't Hoff**[9] é

$$K = \exp\left(-\frac{\Delta G^{\varnothing}}{RT}\right),$$

[3] Svante August Arrhenius (1859-1927), químico sueco, reconhecido com o Nobel de Química em 1903, pela contribuição ao avanço da Química por meio de sua teoria eletrolítica da dissociação.

[4] Peter Joseph William Debye (1884-1966), físico e físico-químico, nascido nos Estados Unidos, porém de origem holandesa.

[5] Erich Armand Arthur Joseph Hückel (1896-1980), físico e físico-químico alemão.

[6] Henry Eyring (1901-1981), químico mexicano, naturalizado estadunidense.

[7] Rudolf Clausius (1822-1888), físico e matemático de origem alemã, reconhecido pelas suas contribuições às ciências da Termodinâmica.

[8] Benoît Paul Émile Clapeyron (1799-1864), físico-químico e engenheiro civil, nascido na França.

[9] Jacobus Henricus van't Hoff (1852-1911), químico neerlandês, primeiro vencedor do Prêmio Nobel de Química, em 1901, com o conceito de Pressão Osmótica.

em que k é uma constante de equilíbrio, $\Delta G^{\varnothing}$ é o valor correspondente da variação padrão na função de Gibbs, R é a constante de gás e T é a temperatura absoluta.

Observe que o foco da análise de um experimento pode determinar como objeto qualquer uma das grandezas acima. Por exemplo, podemos considerar uma situação em que o objeto seja $\Delta G^{\varnothing}$, a variação de energia de Gibbs.

Por se tratar de uma função exponencial, a sua inversão leva a uma função logarítmica. Daí, o rearranjo da isoterma de van't Hoff acima para isolar $\Delta G^{\varnothing}$ exigirá o conhecimento adequado das propriedades operatórias de logaritmos. Assim, esse rearranjo se dará pelas etapas seguintes:

i) Como a inversa da exponencial é o logaritmo natural "ln", devemos primeiramente, aplicar o logaritmo natural a ambos os membros da igualdade acima:

$$\ln K = \ln\left[\exp\left(-\frac{\Delta G^{\varnothing}}{RT}\right)\right].$$

ii) Simplificamos o lado direito:

$$\ln K = -\frac{\Delta G^{\varnothing}}{RT}.$$

iii) Finalmente, uma vez que o termo $\Delta G^{\varnothing}$ no lado direito foi dividido por "$-RT$", multiplicamos ambos os membros da igualdade por esse fator e obtemos como resultado:

$$\Delta G^{\varnothing} = -RT\ln k.$$

4.4 Aplicação de logaritmos aos sentidos humanos

Em seus estudos sobre a resposta dos seres humanos a estímulos físicos, Weber[10] e Fechner[11] formularam a *lei psicofísica de Weber-Fechner*. Seu princípio é relacionar a intensidade física de uma excitação e a intensidade subjetiva da sensação de uma pessoa, podendo ser qualquer percepção sensorial, seja auditiva, visual, térmica, tatil, gustativa ou olfativa.

De acordo com o enunciado dessa lei, o aumento do estímulo, necessário para produzir o mínimo de sensação, é proporcional ao estímulo preexistente. Matematicamente, é dada pela função logarítmica

$$n = A\log s + B,$$

em que n é o nível de sensação para o estímulo s e A e B são constantes arbitrárias.

A seguir, descreveremos como Weber e Fechner obtiveram essa lei.

---

[10] Ernest Heinrich Weber (1795-1878), anatomista e fisiologista alemão.
[11] Gustav Theodor Fechner (1801-1887), físico e filósofo alemão.

Inicialmente, Weber concluiu que diferenças marcantes ocorrem quando o aumento de estímulo é proporcional ao próprio estímulo. Essa proporção pode ser expressa por $r = \dfrac{\Delta s}{s}$, em que s é a magnitude de um estímulo mensurável e Δs é o aumento requerido para que haja percepção.

Para ilustar melhor as conclusões a que Weber e Fechner chegaram, consideremos a seguinte situação: Uma pessoa desafiada a distinguir, com as mãos, entre um peso de 20 g e outro de 20,5g, não será capaz de fazê-lo. Porém, entre 20g e 21g, a distinção poderá ser feita sem dificuldades. Já para o peso inicial de 40g, a diferença de 1g é irrelevante e pode não ser percebida. Para tanto, o ideal será a comparação entre 40g e 42g. Do mesmo modo, a experiência aponta que 63g pode ser distinguido de 60g, 84g de 80g, 105g de 100g, e, assim, conclui-se que a distinção é possível se a sua magnitude é acrescida de pelo menos 5% do valor original.

A tabela seguinte apresenta uma lista de proporções aproximadas $\dfrac{\Delta s}{s}$ para a sensibilidade dos sentidos humanos.

Tabela 6 – Proporções aproximadas $\dfrac{\Delta s}{s}$ para a sensibilidade dos sentidos humanos.

Percepção	$s =$ magnitude do estímulo	$r = \frac{\Delta s}{s}$
Claridade visual	Intensidade da luz	$\frac{1}{50}$
Tons musicais	Intensidade de som	$\frac{1}{10}$
Olfato para borracha	Número de moléculas	$\frac{1}{8}$
Gosto por solução salina	Concentração da solução	$\frac{1}{4}$

De acordo com (BATSCHELET, 1978), o problema de escalas para discriminar estímulos é que as sensações não são mensuráveis. Com base nos trabalhos de Weber, Fechner propôs, em 1960, um método de conversão em escala que consistia em considerar a constante de proporção $r = \dfrac{\Delta s_0}{s_0}$ e s_0 um valor fixo de s para determinar o estímulo observável imediatamente superior:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0 + r s_0 = s_0(1+r).$$

Considerando $1 + r = q$, resulta

$$s_1 = s_0 q.$$

Para o exemplo sobre levantamento de peso, dados $s_0 = 40g$ e $r = \dfrac{1}{20}$, resulta $q = 1 + \dfrac{1}{20} = 1,05$ e $s_1 = 40g \cdot 1,05 = 42g$.

O próximo estímulo observável imediatamente superior s_2 é dado por $s_2 = s_1 q = (s_0 \cdot q) \cdot q = s_0 q^2$, e assim segue de tal modo a determinar uma sequência geométrica ou exponencial

$$s_0, s_1 = s_0q, s_2 = s_0q^2, s_3 = s_0q^3, ..., s_n = s_0q^n,$$

em que $i = 0, 1, 2, 3, ..., n$ correspondem aos níveis de sensação para os estímulos s_0, s_1, s_2, $s_3, \ldots$, s_n, respectivamente.

Para obter n como função de s_n, aplicamos log a ambos os membros da igualdade $s_n = s_0q^n$ e usamos suas propriedades operatórias:

$$\begin{aligned}
\log s_n &= \log s_0 q^n \\
\log s_n &= \log s_0 + \log q^n \\
\log s_n &= \log s_0 + n \log q \\
n \log q &= \log s_n - \log s_0 \\
n &= \frac{\log s_n - \log s_0}{\log q}.
\end{aligned}$$

Considerando $\dfrac{1}{\log q} = A$, $-\dfrac{\log s_0}{\log q} = B$, $s_n = s$, podemos escrever

$$n = A \log s + B.$$

Com a relação obtida acima podemos julgar o nível da sensação em escala ordinal e também em escala graduada. Para converter as sensações em escalas podemos escolher qualquer múltiplo de n e adicionar-lhe uma constante arbitrária, obtendo, ainda, uma função linear de $\log s$. Portanto, em geral, se M representa uma quantidade apropriada para a conversão das percepções em escala, então

$$M = a \log s + b,$$

com as constantes a e b reais, $a \neq 0$.

No campo da Biociências, uma aplicação fundamental da lei de Weber-Fechner é a relação dose-resposta em ensaios biológicos. Quando uma medicação é administrada a um animal, a resposta ou reação não pode ser relacionada linearmente à dose. Por exemplo, para uma dose de 10 mg aumentada de 5 mg e uma outra de 100 mg, também aumentada de 5 mg, os níveis de reação podem ser intensos para o primeiro caso e imperceptíveis para o segundo, embora o acréscimo seja o mesmo (5 mg). No entanto, o aumento percentual é de 50% e 5%, respectivamente, o que vai realmente determinar os níveis de reação e permitir o seu delineamento pela lei de Weber-Fechner. “Como consequência, quando animais são testados para suas respostas a doses de diferentes níveis, as doses devem formar uma sequência geométrica ou exponencial.” (BATSCHELET, 1978)

Uma outra escala de Fechner também muito importante e conhecida é a que mede ruídos, definida por $R = 12 + \log_{10} I$, em que R é a medida do ruído em Bel[12] e I é a intensidade sonora, medida em watts por metro quadrado.

No Brasil, a unidade de intensidade sonora comumente usada é um submúltiplo da unidade Bel, o decibel (1B = 10dB).

Uma aplicação da função logarítmica acima é calcular a "poluição sonora". Numa frequência de 1000 Hz (Hz = Hertz = ciclos por segundo), o limiar de audição, ou a menor intensidade que pode ser ouvida, é próximo a $I_0 = 10^{-12}\ watt/m^2$. Para $I = I_0$, R, é zero decibel.

Segundo (BATSCHELET, 1978), para um tom de qualquer frequência diferente de 1000 Hz, a função acima e a unidade dB não podem ser utilizadas para o ouvido humano, já que o ouvido não é igualmente sensível a tons de diferentes frequências. Para qualquer tom que se desvie de 1000 Hz, para uma mistura de tons, sejam eles harmoniosos ou não, é requerida uma maneira subjetiva para a conversão em escala.

4.5 Aplicação de Logaritmos à Teoria da Informação

Em 1948, Shannon[13], publicou parte de seus trabalhos a respeito da *Teoria da Informação.* Essa teoria consiste em suas descobertas a respeito da velocidade máxima C_{max} (em bits por segundo) com que sinais de potência S watts podem passar por um canal de comunicação, que permite a passagem sem distorção, dos sinais de frequência até B hertz, produzindo um ruído de potência máxima N watts. Matematicamente, C_{max} é dada por

$$C_{max} = B \cdot \log_2 \left(\frac{S}{N} \right).$$

Motivado pelo problema da capacidade de comunicação de um canal transmissor, Shannon inseriu a grandeza informação entre os elementos básicos do trabalho científico, massa e energia, e, aplicando a *Teoria das Probabilidades*, mostrou como medi-la. Sua unidade de medida é o bit, que evidencia, como em vários outros trabalhos, a preferência de Shannon ao sistema de numeração binário.

Quando um evento tem a probabilidade p de ocorrer, sua ocorrência fornece uma quantidade de informações I dada por uma expressão que envolve logaritmos, ou seja, o bit corresponde a conhecer, dentre dois eventos equiprováveis, o que efetivamente ocorre e é expresso por

$$I = \log_2 \frac{1}{p}.$$

[12] Essa designação é uma homemagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), físico escocês, responsável pela invenção do telefone.

[13] Claude Elwood Shannon (1916-2001), matemático, criptógrafo e engenheiro elétrico norte-americano.

Com a possibilidade de medir, além da massa e energia, também a informação, o poder de investigação dos cientistas avançou consideravelmente, em especial no desenvolvimento de novas tecnologias de comunicações.

5 A Matemática e os logaritmos na Educação Básica

5.1 Por que estudar Matemática?

Certa vez, o matemático americano James R. Newman (1907–1966) escreveu: “A coisa mais dolorosa sobre a Matemática é quão longe você está de ser capaz de usá-la logo depois de aprendê-la”. Em outras palavras, se buscarmos aplicabilidade imediata e individualizada para toda a matemática que estudamos, o nosso estudo não ultrapassará as operações de adição e subtração de números inteiros.

Quem é o professor de Matemática que ainda não se deparou com perguntas do tipo: “Por que estou estudando isso?” “Em que vou usar isso? Para que serve?” Perguntas clássicas, mas ainda embaraçosas, pois nem todos os conteúdos matemáticos, contidos nas propostas curriculares destinadas à Educação Básica no Brasil, têm uma aplicabilidade imediata e contextualizada para o cotidiano de cada um dos estudantes espalhados pelo país. Embaraçosa também, pois revela, de certa maneira, dessabor à proposta apresentada.

Essa inquietação não é, de modo algum, recente. Conta-se que Euclides, cerca de 300 a.C., enfrentou a célebre questão quando um aluno lhe perguntou: “Afinal, o que é que se ganha ao aprender Geometria?” Em resposta, Euclides teria pedido ao seu discípulo que desse ao estudante uma moeda de ouro, “porque ele precisa ganhar com aquilo que aprende”.

> Muitos professores de Matemática sentem-se desconfortáveis ao tentar responder a essa questão e, ao permitir que os alunos o percebam, acabam reforçando nos jovens a ideia de que aquilo não deve mesmo servir para muita coisa útil. É uma pena porque, em realidade, o difícil hoje é encontrar áreas de atividade humana onde a Matemática ou, pelo menos, seu raciocínio lógico-dedutivo não tenha, em maior ou menor grau, alguma participação efetiva. (GARBI, 2007)

A Matemática, desenvolvida e registrada ao longo da História, é uma das mais significativas conquistas do conhecimento humano. Deve-se ressaltar que ela faz parte do cotidiano das pessoas e contribui para o avanço das outras ciências e das tecnologias. É, por esse motivo, considerada um campo do conhecimento muito importante, que se mantém viva e crescente, devido a suas utilidades e às contribuições vindas, especialmente, dos centros acadêmicos e de pesquisa, nos quais se verifica uma permanente produção de conhecimento matemático.

Os motivos de se estudar Matemática podem não estar claros por razões como o fato de que esses jovens e até muitos de seus professores já nasceram desfrutando das maravilhas da tecnologia e desconhecem como era viver em tempos anteriores, de modo que tendem a não se surpreender com as facilidades à disposição da sociedade moderna e não se perguntam como e por quem este mundo tecnológico foi construído.

Dar uma explicação, de maneira tão genérica, aos estudantes, não é uma tarefa nada fácil pois, em geral, eles ainda não têm maturidade suficiente para compreendê-la. Porém alguns exemplos práticos podem ajudá-los.

Na dinâmica dos avanços tecnológicos, as pessoas são constantemente expostas a informações que, para serem entendidas e consideradas de modo crítico, exigem a leitura e interpretação de gráficos e tabelas e demandam o conhecimento de noções básicas de Estatística e de Probabilidade. A capacidade de resolver problemas, de enfrentar situações complexas e modelá-las adequadamente, de expor e compreender ideias, é cada vez mais requisitada.

Lê-se, em (BRASIL, 2001), que "[...] a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e autonomia [...]".

Mas, diante do mencionado acima, um aspecto também para infelicidade e desconforto dos educadores, é que a indagação dos alunos a respeito dos motivos de se estudar esse ou aquele conteúdo revela uma “manifestação contrária”: revela que a didática adotada não está sendo compreensível tampouco prazerosa. O ser humano comum não costuma questionar por que fazer atividades que lhe dão prazer.

Dessa maneira, um ensino de Matemática adequado não pode negligenciar tais aspectos. Ver a aprendizagem em Matemática ocorrer de forma efetiva entre os alunos é um desafio diário para os educadores, que, nesse anseio, buscam levar para suas salas de aula metodologias que prendam a atenção, que levem a compreensão de conceitos matemáticos e os tornem significativos.

Em resposta a esses anseios, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como uma ótima ferramenta que pode ser usada a fim de tornar a Matemática mais atrativa para o aluno. Como se verifica em (BRASIL, 2001), "[...] a resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance [...]".

5.2 O Estudo de Logaritmos no Ensino Médio

No currículo escolar brasileiro, o estudo de logaritmos está entre os temas abordados na 1ª série do Ensino Médio. Destaca-se em relevância, pelo fato de modelar muitos fenômenos naturais, fornecer muitas aplicações à Matemática Financeira, descrever crescimentos populacionais, desintegrações radioativas, etc.

Entretanto, ocorre que muitos estudantes concluem o Ensino Médio sem perceber tal relevância, manipulando logaritmos de forma mecanizada, sem habilidades de modelar fenômenos a partir de funções logarítmicas e exponenciais e acreditando tudo isso ser uma grande perda de tempo, já que calculadoras e computadores podem fazer todos os cálculos que julgam necessários.

Alguns questionamentos permeiam as rodas de conversa entre os professores de Matemática do Ensino Médio, quando o assunto é o ensino de logaritmos. Entre os questionamentos presentes nessas discussões, alguns justificam e mobilizam a elaboração deste trabalho. Entre eles:

i) A forma como o conteúdo de logaritmos é ensinado aos alunos não tem muito sentido e lhes parece mais uma tortura por parte de seus professores.

ii) Por que razões se dá o estudo de logaritmos no Ensino Médio?

iii) Que metodologias podem ser aplicadas ao seu ensino?

Tais questões se traduzem em perguntas, pelos alunos, como:

“Não existe um jeito mais simples de fazer isso não, professor?”

“Por que estamos estudando isso?”

“Como vou usar logaritmos em minha vida?”

Frente a essas perguntas, o professor quase sempre tem dificuldades em respondê-las. Diante disso, nota-se a necessidade de uma mudança no que se refere ao ensino de logaritmos, não podendo mais se restringir aos livros didáticos e às técnicas de memorização.

É com essa perspectiva que apresentamos a Resolução de Problemas como uma alternativa para o ensino desse conteúdo. Com ela buscamos tornar evidentes algumas de suas aplicações e, de certa maneira, satisfazer inquietações dos tipos “como?” e “para quê?”, além de substituir exercícios meramente manipulativos por questões de aplicações práticas.

É importante ressaltar que os professores devem possuir uma formação profunda da Matemática, não apenas a capacidade de demonstrar teoremas ou lidar com a linguagem matemática de forma mecânica. Necessita-se muito mais que isso. Necessita-se conseguir relacionar os mais variados campos do conhecimento, refletindo sobre os fundamentos da Matemática, percebendo seu dinamismo, seus diferentes sistemas de registro e entendendo que seu conhecimento propõe problemas numa proporção bem superior às das suas soluções.

5.3 Resolução de Problemas como estratégia de ensino de Matemática

De acordo com Terence Tao, "A Matemática é o estudo de entidades abstratas, que podem ter caráter numérico, lógico ou geométrico, e obedecem a um conjunto de axiomas cuidadosamente escolhido." (TAO, 2013)

A abstração da Matemática é, sem dúvida, um dos aspectos responsáveis pelo temor a essa disciplina por parte dos alunos. Como é dito em (BRASIL, 2001), dentre as finalidades do ensino de Matemática, visando à construção da cidadania, "identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas."

Segundo as Orientações Curriculares, por exemplo, espera-se que os alunos, ao final da Educação Básica,

> [...] saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006)

A metodologia de resolução de problemas aqui apresentada é um suporte de superação a professores e estudantes, dispostos a aventurar na busca de seu conhecimento. Nas orientações educacionais para o ensino de Matemática, a resolução de problemas tem conquistado um papel de destaque, devido aos inúmeros benefícios que ela pode oferecer ao processo de ensino e aprendizagem dessa disciplina, independentemente do nível de ensino.

Nos PCN+, essa metodologia é assim apresentada:

> [...] A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. (BRASIL, 2009)

Para (DANTE, 1989), problema é qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-la. Ampliando essa definição do autor, podemos acrescentar que para resolver um problema matemático, o aluno deve estar motivado a fazê-lo.

Segundo (POLYA, 1995),

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como, digamos, o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. (...) Ao tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (p. 3)

Para Dante, **exercício** e **problema** não se apresentam tão entrelaçados como define Polya. Em sua obra "Didática da Resolução de Problemas de Matemática", Dante evidencia a diferença entre esses dois termos. De acordo com ele, Exercício serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo, do qual o aluno extrai os dados necessários para praticar uma ou mais habilidades algorítmicas. Já Problema ou problema-processo, ele define como a descrição de uma situação na qual se procura algo desconhecido e não se tem previamente algoritmo algum que garanta sua resolução. A resolução de um problema-processo exige certa dose de iniciativa, e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (2001), verificamos a metodologia da resolução de problemas como uma proposta que pode ser resumida nos seguintes princípios:

> i) a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
> ii) o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
> iii) aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
> iv) um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
> v) a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas. (BRASIL, 2001)

Os primeiros trabalhos de pesquisa sobre Resolução de Problemas tiveram início sob a influência de George Polya (1888-1983), da Universidade de Stanford-EUA, que discutiam sobre heurísticas, com o objetivo de auxiliar os professores no entendimento e uso adequado da metodologia de resolução de problemas. No livro "How to Solve It" (traduzido por "A Arte de Resolver Problemas"), 1995, com 1ª ed. em 1945, Polya apresenta um método de trabalho desenvolvido em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema, lendo-o e interpretando-o; 2º) elaborar um plano; 3º) executar o plano; 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução obtida no problema original. Polya desenvolve um processo heurístico ao longo da resolução de problemas. Obter solução de um problema não é o único objetivo que ele propõe. O aluno deveria, ao longo do processo de resolução do problema, descobrir, por si mesmo, com ajuda do professor, o significado dos conceitos matemáticos envolvidos. Para Polya, era fundamental "**ensinar o aluno a pensar**".

Sob a ótica de Dante, a heurística da resolução de problemas de Polya se estabelece da seguinte maneira:

1ª ETAPA: Compreender o problema.

O primeiro passo é entender o problema: temos que perceber claramente o que é necessário.

Quais são as incógnitas?

Quais são os dados?

O que o problema está pedindo?

2ª ETAPA: Estabelecer um plano de ação.

O segundo passo é encontrarmos um plano de ação para resolver o problema fazendo uma conexão entre os dados e as incógnitas.

É possível fazer uma figura? montar uma equação?

É possível fazer uma representação geométrica?

3ª ETAPA: Executar o plano.

Nesta etapa chega o momento de pôr em prática a elaboração do plano de ação.

4ª ETAPA: Revisar a solução.

Examine a solução obtida. É possível verificar o resultado, observar se a resposta satisfaz às condições cedidas pelo problema.

Quando se propõe aplicar a resolução de problemas como metodologia de aprendizagem no ensino de Matemática, é indispensável que a seleção de problemas não passe por aqueles rotineiros e algorítmicos, em que o aluno se desdobre em "encher" fórmulas com todos os dados numéricos presentes na situação descrita, ou, pior ainda, seu esforço se resuma a questionamentos lamentáveis, como por exemplo, "a conta é de mais ou de menos?”

O professor deve conduzir esse processo, buscando propor situações que permitam originar uma variedade de procedimentos na sala de aula, socializando-os, comparando-os; deve ser dada ênfase ao processo de resolução e não simplesmente à obtenção de respostas corretas. É necessário que o professor promova situações que possibilitem aos alunos vivenciarem experiências nas quais estejam presentes, dando a eles a oportunidade de resolverem problemas em contexto prático. Além disso, não é a exposição dos conteúdos que deve levar às situações-problema, mas sim o contrário.

É evidente que nenhum caminho pode ser considerado único e melhor para se conduzir o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer e se apoderar de diversas possibilidades de trabalho é fundamental para que o professor estabeleça sua prática. A Resolução de Problemas é uma, dentre essas possibilidades, que permite ao professor proporcionar ao aluno uma aprendizagem centrada em si mesmo, com a qual ele possa construir e desenvolver seu próprio conhecimento.

5.4 Alguns problemas

Nesta seção apresentamos alguns problemas teóricos que podem orientar o trabalho do professor em seu planejamento de aulas sobre o tema Logaritmo. Não nos preocupamos em apresentar exercícios meramente manipulativos, em que as propriedades e os métodos de resolução de equações exponenciais e logarítmicas são aplicados sem uma reflexão. Tampouco, nos preocupamos em apresentar problemas de aplicação, que trazem a função explícita. Isso não significa que condenamos o seu uso. Pelo contrário, em quantidade devidamente planejada, sem se tornar o foco principal do estudo de Logaritmo, tais exercícios ajudam os alunos a manipular adequadamente as propriedades operatórias e, assim, dispensam mais tempo para pensar em aplicações práticas e interessantes. Além disso, esse tipo de exercício é mais facilmente encontrado em livros didáticos, apostilas e sites que tratam do assunto.

Problema 1. A definição de *logaritmo* é a seguinte: Dados a e b números reais, $a > 0$ e $0 < b \neq 1$, o logaritmo de a na base b ($\log_b a$) é o único expoente x ao qual devemos elevar b para obter a, ou seja,

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$$

Justifique as restrições impostas a a e b na definição de logaritmo acima.

Resolução:

As restrições correspondem à impossibilidade de qualquer dos casos a seguir:

i)	ii)	iii)
$\log_1 a, \quad a < 0$	$\log_0 a, \quad a < 0$	$\log_b a, \quad b < 0,\ a < 0$
$\log_1 a, \quad a = 0$	$\log_0 a, \quad a = 0$	$\log_b a, \quad b < 0,\ a = 0$
$\log_1 a, \quad a > 0$	$\log_0 a, \quad a > 0$	$\log_b a, \quad b < 0,\ a > 0$

i) $\log_0 a = x \Longleftrightarrow 0^x = a$.

A única possibilidade de essa equação possuir solução é o caso em que $a = 0$, para o qual devemos ter $x > 0$. Como $0^x = 0$, para todo $x > 0$, temos que a unicidade de x na definição de logaritmo não é satisfeita.

ii) $\log_1 a = x \Longleftrightarrow 1^x = a$.

A única possibilidade de essa equação possuir solução é o caso em que $a = 1$. Como $1^x = 1$, para todo x, temos que a unicidade de x na definição de logaritmo não é satisfeita.

iii) $\log_b a = x,\ b < 0 \Longleftrightarrow 1^x = a$.

Para o caso em que $a = 0$, temos $\log_b 0 = x \Longleftrightarrow b^x = 0$. A única possibilidade de essa equação possuir solução é o caso em que $b = 0$, porém, por hipótese, $b < 0$.

Para o caso em que $a < 0$, temos que essa equação possui solução se a é uma potência de b, ou seja, $a = b^y$, para algum $y \in \mathbb{R}$, pois,

$$b^x = a \Longleftrightarrow b^x = b^y \Longleftrightarrow x = y,$$

o que mostra que o logaritmo, nesse caso, só existe para valores específicos de a e b, que satisfazem a relação $a = b^y$.

Por exemplo,

$$\log_{(-2)}(-16) \text{ não tem solução,}$$

$$\log_{(-2)}(-8) = 3.$$

De modo análogo, podemos proceder para o caso em que $a > 0$.

Por exemplo,

$$\log_{(-2)} 16 = 4,$$

$$\log_{(-2)} 8 \text{ não tem solução.}$$

Devido ao grande número de exceções, não faz sentido definir logaritmo para esses casos.

Problema 2. Anterior ao advento dos logaritmos, como recurso de cálculo do produto, utilizava-se um processo baseado conhecida fórmula de Trigonometria:

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y).$$

Dados dois números X e Y para multiplicar, mudando seus sinais e a posição das vírgulas, podemos supor que X e Y estejam compreendidos entre 0 e 1. Por meio de uma tábua de funções trigonométricas, obtemos números x, y tais que $\cos x = X$ e $\cos y = Y$. Calculamos a soma $x+y$ e a diferença $x-y$. Novamente a tábua nos fornece $\cos(x+y)$e $\cos(x-y)$. O produto $X \cdot Y$ procurado será simplesmente a metade da soma $\cos(x+y)+\cos(x-y)$. Utilizando esse método, calcule os produtos abaixo:

a) $0,834 \cdot 0,587$.

b) $(0,85771)^2$.

c) $0,873 \cdot 0,802$.

Problema 3. Outro substituto rudimentar dos logaritmos, no cálculo de produtos, é a tabela para os valores da função $y = \left(\frac{x}{2}\right)^2$. Trata-se de uma tabela que fornece, à direita de cada número, o quadrado da sua metade. Por meio dela, podemos reduzir o produto de dois números quaisquer a somas e diferenças utilizando a fórmula:

$$x \cdot y = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Assim, para calcular o produto xy, efetuamos a soma $x+y$ e a diferença $x-y$. Olhando a tabela, obtemos $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ e $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Subtraindo esses resultados, obtemos o produto procurado.

Resolver os itens a), b) e c) do exercício anterior, utilizando o método acima.

Propor que os alunos resolvam essas questões, em duplas, e, em seguida, reflitam e debatam sobre os seguintes questionamentos:

I. Qual é o mais simples dos métodos propostos acima?

II. Por que esse método (mais simples) não substitui os logaritmos?

Problema 4. Em que base o logaritmo de 8 é igual a 4?

Resolução:

1ª Etapa: Compreender o problema.

Em símbolos matemáticos, o problema pode ser representado pela equação logarítmica $\log_x 8 = 4$, em que x é um número real positivo diferente de 1.

2ª Etapa: Estabelecer um plano de ação.

Resolver a equação logarítmica acima, aplicando adequadamente as propriedades operatórias de logaritmo.

3ª Etapa: Executar o plano.

Resolver a equação logarítmica $\log_x 8 = 4$.

4ª Etapa: Revisar a solução.

Observar, passo a passo, a aplicação adequada das propriedades de logaritmo. Além disso, é possível fazer a verificação, substituindo, na equação exponencial $x^4 = 8$, o valor de x obtido.

A solução desse problema consiste em resolver a equação logarítmica $\log_x 8 = 4$.

Desse modo,

$$\log_x 8 = 4 \Rightarrow x^4 = 8 \Rightarrow \log x^4 = \log 8 \Rightarrow 4 \cdot \log x = \log 8 \Rightarrow \log x = \frac{\log 8}{4} \Rightarrow$$

$$\log x \cong 0,22578 \Rightarrow x \cong 10^{0,22578} \Rightarrow x \cong 1,68182.$$

Portanto, o logaritmo de 8 é igual a 4 na base, aproximadamente, 1,68182.

Problema 5. O controle de uma doença é feito com aplicações regulares de uma substância, de modo que os níveis dessa substância não atinjam valores inferiores a 30% no organismo do paciente. Caso isso ocorra, o paciente sofre de reações diversas. Sabendo que, após 8 horas da aplicação da substância, o organismo absorve metade da quantidade aplicada, em quanto tempo ela deve ser administrada novamente sem que o paciente sofra com essas reações?

Resolução:

1ª Etapa: Compreender o problema.

Uma substância é aplicada a um paciente em quantidade Q_0, cujo nível no organismo deve ser sempre superior a $0,3Q_0$. Para $t = 8$, temos $Q(8) = (0,5) \cdot Q_0$. Devemos calcular o valor de t que satisfaça a desigualdade $Q(t) \geq 0,3Q_0$.

2ª Etapa: Estabelecer um plano de ação.

Identificar a função que modela a situação descrita no problema. (Verificar que se trata de uma função exponencial, a saber, $Q(t) = Q_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{8}}$).

3ª Etapa: Executar o plano.

Resolver a inequação exponencial $Q_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{8}} \geq 0,3Q_0$.

4ª Etapa: Revisar a solução.

Observar, passo a passo, a aplicação adequada das propriedades de logaritmo. Além disso, é possível fazer a verificação, substituindo, na função, o valor de t obtido.

A função que modela o problema acima é $Q(t) = Q_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{8}}$, em que Q_0 é a quantidade inicial da substância aplicada no paciente e Q é a quantidade de substância restante no seu organismo, decorrido o tempo t, já que, após 8 horas da aplicação, ocorre absorção da metade da substância. Assim, para que seu nível não seja inferior a 30%, consideramos $Q \geq 0,3Q_0$, que equivale à seguinte inequação exponencial de bases distintas:

$$Q_0 \cdot (0,5)^{\frac{t}{8}} \geq 0,3Q_0,$$

ou seja, $(0,5)^{\frac{t}{8}} \geq 0,3$. Aplicando log a ambos os membros dessa inequação, temos $\log(0,5)^{\frac{t}{8}} \geq \log(0,3) \Rightarrow \frac{t}{8} \cdot \log(0,5) \geq \log(0,3) \Rightarrow \frac{t}{8} \leq \frac{\log(0,3)}{\log(0,5)} \Rightarrow t \leq 8 \cdot \frac{\log(0,3)}{\log(0,5)} \Rightarrow$ $t \leq 13,9$ (aprox.)

Portanto, a aplicação deve ser repetida em um intervalo máximo aproximado de 13,9 horas, ou seja, aproximadamente 13 horas e 54 minutos.

Problema 6. Se uma população dobra em 9 horas, em quanto tempo ela triplica?

Resolução:

1ª Etapa: Compreender o problema.

Dada uma população P_0, decorrido o tempo $t = 9$ horas, temos $2P_0$. O problema pede o valor de t para que a população seja $3P_0$.

2ª Etapa: Estabelecer um plano de ação.

Identificar a função que modela a situação descrita no problema. (Verificar que se trata de uma função exponencial, a saber, $P(t) = P_0 \cdot (2)^{\frac{t}{9}}$).

3ª Etapa: Executar o plano.

Resolver a equação.

4ª Etapa: Revisar a solução.

Observar, passo a passo, a aplicação adequada das propriedades de logaritmo. Além disso, é possível fazer a verificação, substituindo, na função, o valor de t obtido.

A função que modela o problema acima é $P(t) = P_0 \cdot (2)^{\frac{t}{9}}$, em que P_0 é a população inicial e P é a população após o tempo t de observação. Assim, para que a população triplique, consideramos $P = 3P_0$, que equivale à seguinte equação exponencial de bases distintas:

$$3P_0 = P_0 \cdot (2)^{\frac{t}{9}},$$

ou seja, $3 = (2)^{\frac{t}{9}}$. Aplicando log a ambos os membros dessa equação, temos

$$\log 3 = \log(2)^{\frac{t}{9}} \Rightarrow \log 3 = \frac{t}{9} \cdot \log 2 \Rightarrow t = 9 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow t \cong 14,26.$$

Portanto, essa população triplica em aproximadamente 14,26 horas, ou seja, 14 horas e 15 minutos.

O problema a seguir trata de uma possível relação entre Geometria e Logaritmos.

Problema 7. Mostre que o triângulo de lados a, b, e c, tais que $a > b$ e $a > c$, é retângulo se e somente se $\log(a+b)+\log(a-b) = 2\log c$.

Resolução: De acordo com o Teorema de Pitágoras, juntamente com o seu recíproco, sabemos que um triângulo, como o descrito no enunciado, é retângulo se e somente se

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

ou seja,

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a+b)\cdot(a-b) = c^2.$$

Agora, aplicando log a ambos os membros da última igualdade acima, obtemos

$$\log(a+b)+\log(a-b) = 2\log c,$$

que é o resultado desejado.

O problema a seguir trata de uma possível relação entre Média Geométrica, Média Aritmética e Logaritmos.

Problema 8. Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ do tipo exponencial, $f(x) = a^x$, demonstre que a sua inversa transforma a média geométrica das imagens de p e q $(p, q \in \mathbb{R}_+^*)$ por f na média aritmética de p e q.

Resolução: Sabemos que a função inversa de f é dada por $g(x) = \log_a x$. Assim, devemos demonstrar que $g\left[\sqrt{f(p)f(q)}\right] = \dfrac{p+q}{2}$.

Como $f(p) = a^p$ e $f(q) = a^q$, temos que

$$\begin{aligned}
g\left[\sqrt{f(p)f(q)}\right] &= g(\sqrt{a^p\cdot a^q}) \\
&= \log_a(\sqrt{a^p\cdot a^q}) \\
&= \log_a(a^p\cdot a^q)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log_a(a^p\cdot a^q) \\
&= \frac{1}{2}(\log_a a^p + \log_a a^q) \\
&= \frac{1}{2}(p+q).
\end{aligned}$$

Problema 9. Quantos algarismos tem o número 20^{500}?

Resolução:

Observemos, inicialmente, que a quantidade de algarismos de 10^x, $x \in \mathbb{R}$, é a parte inteira de x, mais 1. Assim, podemos resolver esse problema reescrevendo o número 20^{500} como uma potência de base 10, como segue.

$$10^x = 20^{500} = (2 \cdot 10)^{500} = 2^{500} \cdot 10^{500} \Rightarrow 10^{x-500} = 2^{500}.$$

Agora, aplicando log a ambos os membros da última igualdade acima, obtemos

$$\log 10^{x-500} = \log 2^{500} \Rightarrow x - 500 = 500 \cdot \log 2 \Rightarrow x = 500 \cdot (1 + \log 2) \Rightarrow$$

$$x \cong 500 \cdot 1,30103 \Rightarrow x \cong 650,51.$$

Portanto, o número 20^{500} pode ser escrito na base 10 como, aproximadamente, $10^{650,51}$, o que nos permite concluir, usando a observação inicial acima, que ele possui 651 algarismos.

Problema 10. Dado que n é um número natural com 28 algarismos e $\sqrt[23]{n}$ é também um número natural, obtenha $\sqrt[23]{n}$.

Resolução:

Consideremos $\sqrt[23]{n} = p$, $p \in \mathbb{N}$. Assim, $n = p^{23}$. Como n possui 28 algarismos, temos que $10^{27} \leq n < 10^{28}$, ou seja, $10^{27} \leq p^{23} < 10^{28}$. Aplicando log a essas desigualdades, temos

$$\log 10^{27} \leq \log p^{23} < \log 10^{28}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 27 \leq 23 \log p < 28 \\
&\Rightarrow \frac{27}{23} \leq \log p < \frac{28}{23} \\
&\Rightarrow 10^{\frac{27}{23}} \leq p < 10^{\frac{28}{23}} \\
&\Rightarrow 14,925 \leq p < 16,496. \text{ (valores aproximados)}
\end{aligned}$$

Com p $(= \sqrt[23]{n})$ deve ser natural, concluímos que $p = 15$ ou $p = 16$. Portanto, $\sqrt[23]{n}$ é igual a 15 ou 16.

Problema 11. Uma fábrica de pneus, fundada em outubro de 2002, fabricou 5000 unidades no primeiro ano de produção e, com o sucesso das vendas, estabeleceu meta de aumentar a sua produção à uma taxa de 15% ao ano. Nessas condições,

a) em que ano a produção atinguiu o quádruplo da de 2002?

b) qual deve ser a produção estimada para o ano de 2015?

c) Escreva uma lei matemática que possa ser utilizada para determinar o número n de anos necessários para que essa produção atinja um valor P ($P > 5000$).

Resolução:

1ª Etapa: Compreender o problema.

Uma maneira simples de resolver esse problema é escrever a lei de formação para a função que relacione a quantidade de pneus produzida pela fábrica com o número de anos que se passaram desde o início da produção.

Pelo enunciado, as duas grandezas se relacionam por meio da taxa de 15% ao ano. Isso significa que, a cada ano, a produção aumenta um valor equivalente a 15% da produção no ano anterior. Esse comportamento pode ser acompanhado na tabela a seguir.

Tabela 7 – Comportamento da produção de pneus.

Ano	Produção (unidades)
2002	5000
2003	$5000+5000\cdot 0,15 = 5000\cdot(1+0,15) = 5000\cdot(1,15)$
2004	$5000\cdot(1,15)+5000\cdot(1,15)\cdot 0,15 = 5000\cdot(1,15)\cdot(1+0,15) = 5000\cdot(1,15)^2$
2005	$5000\cdot(1,15)^2+5000\cdot(1,15)^2\cdot 0,15 = 5000\cdot(1,15)^3$
$\vdots$	$\vdots$
$(2002+n)$	$5000\cdot(1,15)^n$

2ª Etapa: Estabelecer um plano de ação.

Analisando os dados da tabela, podemos escrever uma lei que relacione a produção (P) com os anos (n) decorridos desde o início da produção em 2002. Assim, temos: $P(n) = 5000\cdot(1,15)^n$.

a) Para que a producão quadruplique, consideramos $P(n) = 4\cdot 5000$.

b) Para obter a produção em 2015, basta considerarmos $n = 2015-2002 = 13$.

c) Após definir a função $P(n)$, obter a sua inversa.

3ª Etapa: Executar o plano.

a) Resolver a equação $P(n) = 5000\cdot(1,15)^n$ substituindo $P(n) = 4\cdot 5000$.

b) Resolver a equação $P(n) = 5000\cdot(1,15)^n$ substituindo $n = 13$.

c) Obter a função inversa de $P(n) = 5000\cdot(1,15)^n$.

4ª Etapa: Revisar a solução.

Observar, passo a passo, a aplicação adequada das propriedades de logaritmo. Além disso, é possível fazer a verificação, substituindo, na função, os valores de n e P obtidos.

a) $P(n) = 5000 \cdot (1,15)^n \Rightarrow 4 \cdot 5000 = 5000 \cdot (1,15)^n \Rightarrow 4 = (1,15)^n \Rightarrow \log 4 = \log(1,15)^n \Rightarrow n = \dfrac{\log 4}{\log(1,15)} \Rightarrow n \cong 9,9189.$

Portanto, são necessários aproximadamente 10 anos para que a produção quadruplique, o que ocorrerá em 2012.

b) $P(n) = 5000 \cdot (1,15)^{13} \Rightarrow P(13) \cong 30763,93.$

Portanto, em 2015, a produção será estimada em aproximadamente 30764 pneus.

c) $P = 5000 \cdot (1,15)^n \Rightarrow \log P = \log 5000 \cdot (1,15)^n \Rightarrow \log P = \log 5000 + \log(1,15)^n \Rightarrow n \cdot \log(1,15) = \log P - \log 5000 \Rightarrow n = \dfrac{\log P - \log 5000}{\log(1,15)} \Rightarrow n = \dfrac{\log\left(\dfrac{P}{5000}\right)}{\log(1,15)} \Rightarrow n = \log_{(1,15)}\left(\dfrac{P}{5000}\right).$

6 Análise do tema Logaritmos nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio

No livro *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*, organizado por Lima *et al* (2001), é feita a análise de doze coleções de livros didáticos do Ensino Médio que, na época, eram adotadas como material didático utilizado em sala de aula, como fonte de pesquisa e elaboração do trabalho pela maioria dos professores atuantes nesse nível de ensino.

> O livro didático é o instrumento essencial utilizado pelo professor para realizar o seu trabalho. Dele são tiradas as listas de exercícios, é nele que estão as definições, os exemplos, as observações, as demonstrações e a linguagem a ser usada na comunicação com a classe. Muitas vezes (quase sempre), o livro didático é onde o professor aprende aquilo que vai transmitir a seus alunos, pois, em geral não estudou na faculdade (se é que frequentou alguma) um número considerável de assuntos que fazem parte do currículo escolar. (LIMA *et al.*, 2001)

A análise das doze coleções levou em conta três componentes básicos para o ensino de Matemática em nível Médio. Foram eles:

Conceituação: Compreende a formalização de definições, o enunciado de proposições, o estabelecimento de conexões entre os diversos conceitos, além de interpretação e reformulação sob diferentes aspectos;

Manipulação: De caráter essencialmente (mas não exclusivamente) algébrico, é fundamental para o ensino e aprendizagem da Matemática. A capacidade de manipular equações, fórmulas, operações e construções geométricas, o desenvolvimento de atitudes mentais automáticas e reflexos condicionados são posturas que permitem ao usuário da Matemática concentrar a sua atenção em pontos realmente cruciais;

Aplicação: Consiste na utilização de noções e teorias da Matemática em situações diversas, que podem ser triviais do dia a dia ou outras mais elaboradas e provenientes de outras áreas, científicas ou tecnológicas. É, sem dúvida, a motivação principal para o ensino de Matemática ser tão difundido e tão necessário.

Também se destacaram a preocupação com as qualidades didáticas, adequação do livro à realidade atual e ao papel educativo da avaliação.

Da leitura dessa obra, surgiu-nos a curiosidade de saber o que mudou desde então no tratamento do tema Logaritmos, de modo que sentimos a necessidade de comparar os apontamentos e sugestões feitos pelos críticos às adequações em resposta dada pelos autores.

Por se tratar de comparação, os critérios utilizados por nós se baseiam nas análises feitas nas obras, as quais foram:

i) Se, ao trabalhar logaritmos, os autores partem ou não de problemas;

ii) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo com os alunos;

iii) Se a formalização dos conceitos relacionados a logaritmos é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema ou depois do problema resolvido;

iv) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o trabalho do professor em sala de aula;

v) Se o livro estabelece relação entre funções exponenciais e logarítmicas;

vi) Se há menção (com que ênfase, em caso afirmativo) às tábuas de logaritmos;

vii) Se existem (com que frequência) exemplos e problemas de aplicação de funções logarítmicas;

viii) Se a conceituação de função logarítmica considera a apresentação de suas propriedades características.

Nesses quase quinze anos, desde que o livro *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio* foi publicado, algumas coleções dentre as analisadas perderam mercado, outras buscaram se adequar e se mantiveram e outras surgiram. Dentre as que se mantiveram, analisaremos, em nosso trabalho, as edições mais recentes de Gelson Iezzi – *Matemática: Ciência e Aplicações* (IEZZI *et al.*, 2013); Luiz Roberto Dante – *Matemática: Contexto e Aplicações* (DANTE, 2013); e Manoel Rodrigues Paiva – *Coleção Matemática* (PAIVA, 2013). Como exemplos de trabalhos que surgiram recentemente, analisaremos as obras de Jackson Ribeiro – *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia* (RIBEIRO, 2010); Joamir Roberto de Souza – *Novo Olhar Matemática* (SOUZA, 2013); Kátia Stocco Smole e Maria Ignez Diniz – *Matemática: Ensino Médio* (DINIZ; SMOLE, 2013); e Miguel Jorge, Ralph Costa Teixeira, Thales do Couto Filho, Felipe Ferreira da Silva - *Matemática para o ensino médio* (JORGE *et al.*, 2009). As páginas citadas nas seções seguintes referem-se à obra em análise.

6.1 Gelson Iezzi et al – Matemática: Ciência e aplicações

A situação-problema utilizada pelos autores para introduzir o tema é bastante interessante e diferente do que vemos habitualmente. Trata da desvalorização de um caminhão com o decorrer dos anos de uso. Apresentam a solução que recai em uma equação exponencial de bases diferentes, o que motiva os logaritmos como ferramenta para resolvê-la, como é sugerido no livro *Exame de Textos* (LIMA *et al.*, 2001). Também têm a preocupação de situar o leitor no contexto histórico do surgimento dos logaritmos, o que fazem de modo breve, porém muito claro, na seção *Um pouco de História* (p. 164).

Ao apresentarem a definição, consequências e propriedades operatórias de logaritmos, além de demonstrá-las adequadamente, os autores usam exemplos numéricos para que o leitor possa verificar, em casos particulars, a validade da propriedade. Os anos de prática e contato direto com alunos do Ensino Médio nos permitem afirmar o quanto a escolha adequada dos exemplos numéricos favorece seu entendimento.

O Exercício Resolvido 7 (p. 168) não faz sentido, pois $\log 2$, assim como $\log 3$, são valores conhecidos (bem determinados), não podendo, dessa forma, ser denotados por a e b (idem, Exercício 17 (p. 169) e Exercício 32 (p. 172)).

Para atender o quesito contextualização, a obra contém seções de aplicações que tratam do uso de logaritmos no cálculo de pH e obtenção dos níveis de acidez de soluções aquosas, no estudo de abalos sísmicos, medida de amplitude e energia liberada por terremotos. Porém, na vasta lista de exercícios proposta pelos autores, a quantidade de problemas de aplicação é reduzida e a função é apresentada explicitamente.

Os autores usam corretamente a expressão "aproximação", mas incorretamente o símbolo de igualdade para representá-la (em todo o capítulo). No 2º parágrafo (p. 183), o *"É importante ..."*, contradiz a própria postura adotada pelos autores durante todo o capítulo.

A referência bibliográfica (p. 170) está imcompleta (e incorreta), pois não atende às normas da ABNT. O correto seria: SALVADOR, E., USBERCO, J. *Conecte Química*, vol. 2. São Paulo: Editora Saraiva, 2012.

O "Outro exemplo" na seção *Mudança de base*, que descreve uma situação de utilização de uma calculardora científica para a obtenção do valor de um logaritmo cuja base não seja decimal, é bastante interessante. A situação-problema que os autores utilizam como motivação na introdução à Função logarítmica (p. 173) é adequada, sendo um diferencial. São os únicos autores que fazem isso.

Para nossa surpresa, os conceitos de sobrejetividade, injetividade, bijetividade, função inversa e composição de função são apresentados somente após o estudo de todas as funções destinadas à primeira série do Ensino Médio (Afim, Quadrática, Modular, Exponencial e Logarítmica). Esse deve ser o motivo pelo qual os autores não tratam das relações de invertibilidade entre as funções logarítmicas e exponenciais e as relacionam somente pela propriedade de simetria de seus gráficos em um mesmo sistema de coordenadas em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Se tivessem definido função inversa anteriormente, poderiam apresentar a propriedade de simetria como uma de suas consequências.

Os autores perdem a oportunidade de aproveitar o fato descrito no 3º parágrafo da seção *Função exponencial e função logarítmica*, segundo o qual estabelece a relação de um para ordenado (a,b) da função $f(x)=2^x$ e o seu corresponde par ordenado (b,a) para a função $\log_2 b = a$. Esse fato, juntamente com o seu recíproco, significa que a função exponencial e a função logarítmica são inversas uma da outra.

Os exercícios 38 e 39 (p. 179), 43 (p. 180) e 59 (p. 185) são bastante interessantes. Em contrapartida, o único desafio (p. 187) não requer o tema estudado para a sua resolução, e o modelo fornecido no Exercício 42 (p. 180) não faz sentido: O que justificaria uma empresa iniciar, em sua fundação, com 425 funcionários e levar 14 anos para alcançar um total de 500, incorporando 25 funcionários até o 2º ano, mais 25 até o 6º ano e, finalmente, mais 25 funcionários até o 14º ano?

As afirmações descritas na seção *Inequações redutíveis a uma desigualdade entre logaritmos na mesma base* (p. 186) não são justificadas pelos autores. A propósito, os autores não tratam das desigualdades entre logaritmos de bases diferentes.

6.2 Luiz Roberto Dante – Matemática: Contexto e Aplicações

Em um único capítulo são tratados Logaritmo e Função Logarítmica. Já na introdução, com o objetivo de chamar a atenção ao tema, o autor recorre a uma situação-problema bastante interessante sobre o crescimento demográfico na América Latina, problema esse que recai em uma equação exponencial de bases diferentes e aí é notável porque a coleção superou as críticas sofridas e se mantém no mercado em edições atualizadas a cada triênio, quando acata as sugestões do professor Elon no livro *Exame de texto*, de apresentar logaritmo como meio "de transformar uma equação exponencial numa igualdade entre potências de mesma base". A definição de logaritmo e a formalização de suas propriedades são apresentadas a partir de exemplos numéricos, seguidas de uma breve demonstração perfeitamente compreensível a alunos do Ensino Médio.

Na segunda observação após a definição de logaritmo, o autor informa que "Aos logatimos na base 10 damos o nome de logaritmos decimais ou de Briggs", mas não informa ao leitor o porquê de Briggs, nem quem foi ele.

Apesar da quantidade excessiva de exercícios meramente manipulativos, as seções *Cálculo de logaritmos* e *Aplicação dos logaritmos na resolução de equações exponenciais e de problemas* são destinadas a apresentar inúmeras aplicações em diversos campos de atuação, como a Química (definição de pH e níveis de acidez e basicidade de substâncias) e a Física (ação de terremotos e decaimento radiotivo) e as ciências financeiras (comportamento de investimentos de capital), além de incentivar e orientar o uso de calculadoras. Embora sejam poucos, os problemas apresentados nessas seções são interessantes e justificam o estudo e uso dos logaritmos sem apresentá-los de forma explícita em seus enunciados.

Ao definir função logarítmica, o autor valoriza tanto sua propriedade característica, quanto as relações de inversão com a função exponencial, estudada no capítulo anterior. Na apresentação e análise dos gráficos, novamente é possível perceber que o autor acata as sugestões dadas pelo prof. Elon, ao tratar com clareza da injetividade e sobrejetividade da função logarítmica. Porém, sobre a sexta conclusão (p. 189), o autor nada informa sobre o caso $0 < a < 1$.

Após tratar a propriedade de proporção entre funções logarítmicas e a sua caracterização, o problema resolvido como exemplo e os exercícios que seguem não foram selecionados adequadamente a atender esses tópicos. Aí poderiam ser considerados exemplos de situações que fossem modeladas ou resolvidas por função logarítmica, mas que, necessariamente, não estivesse explícita nos enunciados, como o problema que segue: *A água de um reservatório evapora-se à taxa de 10% ao mês. Em quanto tempo ela se reduzirá a um terço do que era no início?*

Na seção *Caracterização* (p. 191), o autor não informou ao leitor as referências bibliográficas consultadas. Essa atitude impossibilita uma pesquisa para verificação e aprofundamento sobre o tema e, além disso, torna o seu trabalho incoerente, já que ele informa referências bibliográficas em outras seções como, por exemplo, ao final da seção *Leituras* (p. 199).

A proposta de contextualização é concluída a contento com a seleção de questões de Vestibulares e Enem, além dos textos sobre terremotos e a presença de logaritmo na Lei de Weber, nas escalas de Fechner, na era da informática, os quais são bons exemplos, que se aplicam ao cotidiano e podem ser bastante motivadores, contribuindo com a prática do professor em sala de aula. Contudo, a título de esclarecimento, o autor poderia ter informado ao leitor, mediante a questão do Enem (p. 197) que trata da MMS, que (atualmente) essa escala é mais usada que a de Richter, para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade, mas que o princípio básico de sua construção é o mesmo: logaritmos.

6.3 Manoel Paiva – Matemática Paiva

Pensando em uma leitura, pelo aluno do Ensino Médio, independente de orientações de um professor de Matemática, o infográfico que inicia o capítulo sobre Função Logarítmica, com o título “Dinheiro não é tudo”, não permite associação ao tema e não se ocupa de justificar o seu estudo. Vagamente, a distribuição dos países, relacionando PIB *per capita* e Expectativa de vida, lembra um gráfico de função logarítmica, que não fará sentido se considerarmos um leitor ainda no início de seus estudos sobre o tema.

O autor apresenta uma breve reflexão sobre o contexto do surgimento do logaritmo, a propósito, muito bem descrita. Já a sua definição e algumas de suas propriedades são apresentadas sem o qualificar como poderosa ferramenta na resolução de situações-problema que recaiam em equações exponenciais de bases diferentes. Quando assim o procede, até já fez uso dessa sua propriedade em exercícios propostos anteriormente.

Na p. 232, o autor usa uma estratégia bastante interessante e esclarecedora ao comparar a energia liberada por um cubo maciço de granito com 2 km de aresta abandonado de uma altura de 280 km, com a energia liberada pelo terremoto que ocorreu em São Francisco, Califórnia, em 1906. Porém, segundo a mesma fórmula apresentada pelo autor, que relaciona a intensidade I de um terremoto na Escala Richter e a energia liberada pelo terremoto, $I = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, a energia liberada pela queda de um cubo com essas propriedades seria equivalente a de um terremoto de intensidade de $I = 10,23$ na Escala Richter, o que não corresponde com a intensidade do terremoto ocorrido em São Francisco (sua intensidade foi de aproximadamente 8,0). O mesmo equívoco ocorre em afirmar que o terremoto que arrasou Lisboa em 1755 liberou energia equivalente a 350 trilhões de KWh. Segundo a mesma fórmula, essa quantidade de energia pode ser liberada na ocorrência de um terremoto de intensidade $I = 11,13$, no entanto, o terremoto em Lisboa teve intensidade $I \cong 8,8$.

A seção Função logarítmica é aberta sabiamente com referências a sua propriedade fundamental de relacionar grandezas que crescem ou decrescem por meio do produto por taxas constantes, o que poderia ser feito com enfoque ainda maior para, assim, permitir ao aluno identificar situações-problema que podem ser modeladas segundo esse tipo de função. Na sequência, p. 240, as propriedades da função logarítmica são apresentadas sem demonstração.

Após apresentar a função logarítmica, o autor verifica se tratar essa de uma correspondência biunívoca entre os conjuntos $\mathbb{R}_+^*$ e $\mathbb{R}$, daí admitir inversa, que corresponde à função exponencial. O que nos chama atenção nesse ponto é que, embora correspondência biunívoca seja condição necessária e suficiente para que uma função seja invertível, não é previamente definida, tampouco os capítulos que tratam de conjuntos e noção de função mencionam injetividade, sobrejetividade e bijetividade.

Entre o final da p. 243 e início da p. 244, o autor poderia ter escrito: O caso em que as bases são diferentes reduz-se a este, por meio da aplicação da propriedade P8 (mudança de base), apresentada na p. 235. Um exemplo desse caso é o Exercício Resolvido R.15, na próxima página.

Como foi dito, a parte introdutória do tema é carente em situações-problema e contextualização. Porém, no decorrer do capítulo, esse aspecto é satisfatoriamente superado com a apresentação de exemplos de aplicações em vários campos, como modelar a função que determina os níveis de energia liberada por um terremoto (Escala Richter), modelar função que determina acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução (pH), juros em aplicações financeiras, crescimento populacional, decaimento radiativo, depreciação de um bem, determina a medida do nível sonoro em função da potência de som, dentre outras.

Em atividades propostas pelo autor, é possível perceber a sua preocupação em promover postura colaborativa entre os alunos. Já o uso de calculadoras não é reforçado em momento algum.

6.4 Jackson Ribeiro – Matemática: ciência, linguagem e tecnologia

A situação-problema que inicia o capítulo do livro sobre função logarítmica trata da aplicação de um capital, a uma dada taxa de juro, e questiona o tempo necessário para que renda um montante estabelecido. Como se prevê, o desenvolvimento da questão leva a uma equação exponencial de bases diferentes, daí a necessidade de aplicar logaritmos à sua resolução. O contexto histórico do surgimento e desenvolvimento dos logaritmos é tratado de modo breve e sutilmente, com a apresentação de uma tábua de logaritmos de Henry Briggs, mas sem trazê-la para o centro da discussão, postura duramente criticada em (LIMA *et al.*, 2001).

Nota-se a excessiva preocupação do autor com a formalização na definição de logaritmo e na apresentação de suas propriedades operatórias, quando, após defini-las e demonstrá-las, ele considera exemplos numéricos que não permitem, ao aluno, verificar as propriedades, mas apenas aplicá-las. Essa é uma conduta que deve ser evitada ao pensar um livro didático para o Ensino Médio. Se é possível escrever adequadamente, de modo que o aluno possa ler e entender com o mínimo de interferêcia do professor, não há de se considerar qualquer outra hipótese. Sem infrigir o rigor da escrita matemática, o autor deve considerar a capacidade de entendimento do seu leitor e se esforçar ao máximo possível "para que seu texto fale por si só". Por exemplo, a propriedade de logaritmo de um produto poderia ser apresentada inicialmente por um exemplo como o que segue:

$$\log_3(27\cdot 81) = \log_3(3^3\cdot 3^4) = \log_3 3^{3+4} = 3+4 = 7,$$

$$\log_3 27 + \log_3 81 = \log_3 3^3 + \log_3 3^4 = 3+4 = 7,$$

o que nos permite concluir que

$$\log_3(27\cdot 81) = \log_3 27 + \log_3 81.$$

Ao contrário do que ocorre com os matemáticos, alunos comuns confiam mais em casos particulares numéricos do que em demonstrações algébricas.

A função logarítmica é apresentada de forma contextualizada, com a Escala Richter como exemplo de aplicação. Em sua definição, o autor destaca o importante fato de ela ser a inversa da função exponencial, mas não trata da sua propriedade característica, o que traz como consequência uma lista enorme de problemas de aplicações de diversos e variados contextos (Escala musical temperada e a razão de frequência entre notas musicais, Expectativa de vida, Comportamento de pacientes à dose de medicação, Crescimento de população de bactérias, Aquecimento global, Investimentos bancários, Magnitude de estrelas, Lei seca e tempo de absorção do álcool pelo organismo, dentre outros), mas em que apenas dois deles a função que modela o fenômeno não está explicitamente apresentada no enunciado.

6.5 Joamir Roberto de Souza – Novo Olhar Matemática

O autor inicia a discussão sobre logaritmos com um problema sobre o crescimento de uma cultura de bactérias, modelado por uma equação exponencial de bases diferentes, informando ao estudante a necessidade do estudo de logaritmos para sua resolução. Além de buscar a contextualização, ele recorre também a um breve histórico sobre o surgimento do Logaritmo para motivar o aluno.

Um aspecto que poderia ser melhorado é a escolha dos exemplos numéricos na apresentação das propriedades operatórias. Aí, fica a sugestão apresentada anteriormente, na seção que discute a obra de Jackson Ribeiro. O incentivo e orientações ao uso da calculadora estão evidentes.

A preocupação do autor em dar sentido prático ao estudo de Logaritmo torna seu trabalho diferente, comparado aos seus congêneres. As seções com o título de *Contexto* (em especial, p. 179) trazem exemplos novos e outros ainda pouco explorados, tratados de modo claro e simples para que o aluno possa explorá-los, independente do auxílio do professor. Exemplos de aplicação como espiral logarítmica, estudo de fractais e cálculo do índice do RNB (Rendimento Nacional Bruto) não são comumente encontrados em livros didáticos do Ensino Médio.

A escolha dos problemas também revela a preocupação do autor com o contexto. É bastante variada a lista, com situações inovadoras, apresentação de temas bem atuais e boa parte deles permite ao leitor identificar e modelar a função logarítmica, que nem sempre está explícita. Uma seção dedicada à caracterização da função logarítmica poderia favorecer muito e enriquecer esse aspecto que já é marcante nessa obra.

O Exercício R10 (p. 183) e o Exercício 36 (p. 183), no que diz respeito a determinar a imagem de funções logarítmicas dadas, não fazem sentido, pois $Im(f) = \mathbb{R}$ sempre.

6.6 Kátia Cristina Stocco Smole e Maria Ignez Diniz – Matemática: Ensino Médio

A apresentação de Logaritmos é feita inicialmente, com uma abordagem histórica sobre o tema. O modo esclarecedor como essa abordagem é feita, revela a preocupação das autoras em tornar a sua obra bastante acessível ao aluno, para que ele possa, de forma independente, realizar sua leitura.

A situação-problema escolhida para motivar o estudo de logaritmos foi retirada do capítulo anterior, sobre função exponencial, e trata do crescimento de uma planta que, a partir de uma altura inicial de 1 cm, dobra sua altura a cada mês. Pergunta-se após quanto tempo a planta terá 9 cm de altura. O desenvolvimento desse problema recai em uma equação exponencial de bases diferentes, que depende do uso de logaritmos para ser resolvida.

Mais uma vez, é notável a preocupção das autoras com o leitor que inicia o seu estudo sobre logaritmo e ainda está pouco familiarizado com as notações matemáticas, quando define logaritmo de forma bastante clara, exemplificada e associada ao expoente da potência.

Quanto às propriedades operatórias, apesar de bem definidas e demonstradas, poderiam contar com exemplos numéricos que permitissem verificar tais propriedades. Já apresentamos algumas das sugestões pertinentes em análises anteriores.

Como o aluno nesse nível de ensino já conhece os conjuntos numéricos até a extensão dos números reais, as aproximações consideradas para logaritmos com valores irracionais, as quais os demais autores expressam por meio do símbolo de igualdade, são inadequadas. Na obra sob análise, as autoras usam, apropriadamente, o símbolo $\cong$, sem prejuízos à compreensão, para se referir a tais aproximações.

Ao apresentar a função logarítmica e a análise do seu gráfico, é feita uma comparação com a função exponencial. As duas funções são relacionadas como inversas uma da outra, o que está correto, mas com impropriedade, visto que funções inversas não foram definidas até então, o que ocorrerá somente no capítulo seguinte, que trata das Operações entre funções.

O incentivo e esclarecimento sobre uso de calculadoras e computadores aplicado ao ensino de Logaritmos são pontos positivos e diferenciais dessa obra, juntamente com o Dante, que sugere o uso do Geogebra. Outra possível sugestão para o professor é o Graphmatica, também gratuito. As orientações para o uso do software Winplot estão claras e acessíveis e podem acrescentar muito ao entendimento sobre o assunto, além do fator de motivação pelo uso de tecnologias.

6.7 Miguel Jorge et al – Matemática para o Ensino Médio

As motivações mencionadas na abertura do capítulo não são retomadas em parte alguma posteriormente. Assim, o estudante conclui o estudo do capítulo sem saber, por exemplo, como o formato da concha de molusco do gênero *Nautilus* pode ser aproximado por uma espiral logarítmica (p. 319). A propósito, o estudante sabe o que significa “espiral logarítmica”?

A observação na margem esquerda da p. 320 é interessante, mas, ao apresentá-la, os autores perdem a oportunidade de propor aos estudantes a sua generalização.

Tal como no Exemplo f) (p. 320), os autores também poderiam ter mostrado que $\log_1 x$ $(x > 0)$, $\log_1 x$ $(x < 0)$, $\log_b x$ $(x < 0$ e $b < 0)$, $\log_b x$ $(x > 0$ e $b < 0)$, $\log_b x$ $(x = 0$ e $b > 0)$, $\log_b x$ $(x = 0$ e $b < 0)$, $\log_b x$ $(x > 0$ e $b = 0)$, $\log_b x$ $(x < 0$ e $0 < b \neq 1)$ não existem.

É notável a preocupação do autor em relacionar as funções logarítmica e exponencial desde a introdução do tema, o que fazem de forma bastante expressiva utilizando dois eixos que representam os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+^*$, associando constantemente as propriedades de exponencial estudadas em capítulo anterior com as propriedades ora definidas de logaritmo.

Acrescentar, a essa introdução, um problema que recaísse em uma equação exponencial de bases diferentes, poderia favorecer a compreensão e motivação do aluno para o tema. Aspectos do contexto histórico do surgimento dos logaritmos não são apresentados pelos autores em momento algum, que também poderiam ser utilizados com mesmo intuito.

Sem antes formalizar do que se trata uma equação logarítmica, essa é introduzida por meio de um exercício resolvido (p. 322). Ainda sobre os exercícios resolvidos, os autores fornecem respostas aos exercícios numéricos usando “$=$” em vez de “$\cong$” (exceto o Exemplo 5, p. 329), como se esses resultados fossem exatos, o que contradiz a observação (p. 320).

Sempre que possível, os autores fazem observações históricas ou curiosidades à margem da página. Por exemplo, na página 333, os autores declaram: “A utilização do cologaritmo perdeu a importância com o desenvolvimento das calculadoras.” Por que, então, dedicar toda uma seção a esse conceito?!

A seção “Gráfico da função logarítmica” está bem redigida, com demonstração (algébrica) de que $f(x) = \log_a x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

A consequência desses fatos (em verde, p. 336), apesar de conter um erro (“se altera” em vez de “muda de sentido”), é a base para a resolução de inequações logarítmicas.

Embora encerrem a parte sobre Exponenciais com a sua propriedade característica, os problemas com proposta de contextualização no capítulo sobre Logaritmo não trazem situações em que o aluno possa identificar e modelar a função: em todas, ela é apresentada explicitamente. No entanto, alguns deles são muito interessantes, por exemplo, os problemas 4, 6 e 7 (p. 338 a 340).

7 Considerações Finais

Este trabalho foi motivado pela nossa própria ansiedade, que é também de alguns (em verdade, possivelmente, vários) colegas professores de Matemática, ao ensinar Logaritmo para os estudantes do Ensino Médio e perceber que, para estes, esse assunto era pouco relevante.

Os aspectos que mais valorizamos e que nortearam a nossa investigação foram o uso da metodologia de resolução de problemas e as aplicações de Logaritmo, com o objetivo de tornar o seu estudo mais significativo, com participação efetiva do estudante.

Além disso, na busca de levar o professor de Matemática a aguçar seu senso crítico e promover uma reflexão acerca do material didático utilizado em sala de aula, selecionamos alguns livros didáticos de Matemática e propusemos uma análise dos capítulos referentes a Logaritmo, com base no livro *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.*

Esperamos que este trabalho contribua com uma nova abordagem ao estudo de Logaritmo, permitindo aos estudantes reconhecer as motivações para o seu surgimento, mas, principalmente, as razões que fazem dele um tema tão importante e atual.

Referências

BATSCHELET, E. **Introducão a Matemática para Biocientistas**. São Paulo: Interciência, 1978.

BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. MEC, Brasília, DF, 2001.

______. Orientações curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC, Brasília, DF, 2006.

______. Orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. MEC, Brasília, DF, 2009.

DANTE, L. R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1989.

______. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

DINIZ, M. I. D.; SMOLE, K. C. S. **Matemática: Ensino Médio**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

GARBI, G. Para que serve isso? **(Revista do Professor de Matemática)**, SBM, Rio de Janeiro, n. 63, p. 01, 2007.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: Ciência e Aplicações**. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

JORGE, M. *et al.* **Matemática para o Ensino Médio**. São Paulo: Editora do Brasil, 2009.

LIMA, E. L. **Logaritmos**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, E. L. *et al.* **Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MONK, P. M. S. *et al.* **Matemática para Química: uma caixa de ferramentas de cálculo dos químicos**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

PAIVA, M. **Matemática**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

POLYA, G. **A arte de resolver problema**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Segunda reimpressão. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRECIOSO, J. C.; PEDROSO, H. A. **História do número e: gênese e aplicações**. Uberlândia, MG: Revista Eletrônica matemática e Estatística em foco, 2001. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/matematicaeestatisticaemfoco/article/view/13913/12528>. Acesso em: 03 fev. 2014.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia. vol. 1**. São Paulo: Scipione, 2010.

SOUZA, J. R. **Matemática: novo olhar. vol 1**. São Paulo: FTD, 2013.

TAO, T. **Como resolver problemas Matemáticos - Uma perspectiva pessoal**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.