UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CAMPUS DE VITÓRIA DA CONQUISTA

JOGOS DE ESTRATÉGIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE MATRIZES E PROBABILIDADE

LUCAS FERREIRA BORGES

VITÓRIA DA CONQUISTA - BA

SETEMBRO DE 2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

CAMPUS DE VITÓRIA DA CONQUISTA

JOGOS DE ESTRATÉGIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE MATRIZES E PROBABILIDADE

LUCAS FERREIRA BORGES

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

VITÓRIA DA CONQUISTA - BA

SETEMBRO DE 2014.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT CAMPUS DE VITÓRIA DA CONQUISTA

JOGOS DE ESTRATÉGIA: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE MATRIZES E PROBABILIDADE

Lucas Ferreira Borges

Orientador: Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, como requisito necessário para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

____

Prof. Dr. Roque Mendes Prado Trindade (Orientador)
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Profª Drª Maria Deusa Ferreira da Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

____

Prof. Dr. Paulo Espinheira Menezes De Melo
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia da Bahia – IFBA

Vitória da Conquista, 28 de setembro de 2014.

Dedico esta dissertação a minha família pela confiança demonstrada, aos meus amigos pelo apoio irrestrito, aos professores e orientadores pelo pela motivação e dedicação. Afinal, a todos que de alguma maneira tornaram este objetivo mais simples de ser alcançado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder esta oportunidade de modificar o meio que vivo efetuando grande diferença; aos meus familiares, por nunca ter desistido de lutar por mim, apesar das dificuldades; aos meus amigos, que sempre se esforçaram em me ajudar e aos meus professores, que dedicaram suas vidas transmissão do conhecimento.

Enfim, agradecer a todos que colaboraram de alguma forma para alcançar mais essa vitória em minha vida.

“A percepção do desconhecido é a mais fascinante das experiências. O homem que não tem os olhos abertos para o misterioso passará pela vida sem ver nada.”

Albert Einstein

RESUMO

Esta dissertação apresenta o resultado de uma proposta que objetivou sistematicamente fundamentar-se na ludicidade, com a criação e exploração de um jogo que chamaremos de *Roletrix*. Este jogo foi uma elaboração criativa do autor, para ser usado como instrumento motivacional no ensino de conceitos matemáticos, como: Teorias das Matrizes e Probabilidade.

Por meio da utilização desta abordagem lúdica, oferecemos recursos didáticos para que o educador torne mais dinâmico e motivador suas aulas de matemática. Diversas ferramentas podem ser utilizadas para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, entretanto, ao longo desta dissertação os ideais estão voltados para a relação entre teoria e prática, que em particular, o jogo *Roletrix*, possibilitará uma ampla diversidade de análises dentro da sala de aula.

Sendo por meio dessa proposta, o educador poderá perceber o potencial das técnicas utilizadas no desenvolvimento de habilidades que envolvem a temática da Teoria das Matrizes e Probabilidade.

Palavras-chave: Teoria das Matrizes e Probabilidade. Ferramenta lúdica. Ensino e aprendizagem. *Roletrix*.

ABSTRACT

This thesis presents the results of a systematically proposal that was aimed based on the playfulness, with the creation and operation of a game we'll call *Roletrix*. This game was a creative elaboration of the author, to be used as a motivational tool in teaching mathematical concepts, such as: Theories of Probability and Matrices.
By using this playful approach, we provide educational resources for the educator becomes more dynamic and motivating their math classes. Several tools can be used to assist the process of teaching and learning, however, throughout this dissertation, the ideals are focused on the relationship between theory and practice, in particular, the *Roletrix* game will enable a wide range of analyzes within the classroom.
Through this proposal, the educator may realize the potential of the techniques used in the development of skills involving the theme of the Theory of Probability and Matrices.

Keywords: Theory of Probability and Matrices. Fun tool. Teaching and learning. *Roletrix*.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

De certa maneira, a matemática é vista pelos alunos como uma ciência fria e abstrata, que associa sua prática pedagógica a uma construção de um saber mecanizado e desvinculado com a realidade. Entretanto, para estabelecer uma visão menos teórica do ensino e a aprendizagem dos processos educacionais matemáticos, percebe-se uma evolução significativa em relação à sua compreensão, pois varias ferramentas estão sendo criado com este objetivo.

A partir da prática educacional do autor percebe-se que a atividade docente deve ser guiada pela reflexão e pela crítica, para que em determinados contextos sociais sua ação pedagógica evolua positivamente. Sendo que tais atitudes reestruturam seu cenário educacional possibilitando inovações metodológicas que auxiliarão suas atividades.

Para o desenvolvimento da prática docente, torna-se necessário, então, a elaboração de atividades que estimulem o discente a obtenção de um aprendizado expressivo e estimulante. É fundamental que o aluno compreenda os conceitos de determinada temática e que os manipule com consistência.

De acordo com Grando (2000) a aplicação de atividades lúdicas no âmbito escolar favorece prazerosamente a relação de ensino e aprendizagem, possibilitando um desenvolvimento motivacional de todas as partes envolvidas no processo. A manipulação de tais atividades promove a construção do conhecimento e não apenas a reprodução dos mesmos, sendo que os professores necessitam conhecer muito seus alunos, para os orientarem de maneira significativa.

Com a prática docente do autor, pode-se verificar intuitivamente certa dificuldade na aplicabilidade em relação ao conteúdo de Teoria das Matrizes, averiguando que seu significado se perde com o tempo e que tal conhecimento torna-se mais mecanizado, do que prático.

A grande motivação deste trabalho consiste em propor uma metodologia para a prática docente, possivelmente auxiliando nas etapas de aprendizagem do aluno, pois, a partir de uma reflexão docente percebeu-se uma lacuna em na aplicabilidade destas teorias. Esta metodologia estará baseada em conceitos da Teoria das Matrizes e Probabilidade que são desenvolvidas no Ensino Médio e que serão trabalhados com a assistência do jogo *Roletrix*.

Sendo relevante também salientar que a temática é de suma importância para o desenvolvimento metodológico do docente, relacionando teoria a prática. Com o objetivo de motivar seu aluno o educador busca relacionar a teoria e a prática para que reduza a evasão escolar. A alta incidência de evasão escolar é movida por inúmeros fatores, um destes consiste na falta de motivação, sendo que o alunado não consegue relacionar o conteúdo em sala com sua vida cotidiana. Com mesma visão Silva (2011):

> [...] são várias e as mais diversas as causas da evasão escolar ou infrequência do aluno. No entanto, levando-se em consideração os fatores determinantes da ocorrência do fenômeno, pode-se classificá-las, agrupando-as, da seguinte maneira: *Escola*: não atrativa, autoritária, professores despreparados, insuficiente, ausência de motivação etc; *Aluno*: desinteressado, indisciplinado, com problema de saúde, gravidez, etc; Pais/responsáveis: não cumprimento do pátrio poder, desinteresse em relação ao destino dos filhos etc; *Social*: trabalho com incompatibilidade de horário para os estudos, agressão entre os alunos, violência em relação a gangues etc. (SILVA apud FERREIRA, 2011, p. 02):

O objetivo desta dissertação é elaborar atividades que possibilitem o professor e a escola dinamizarem sua prática pedagógica de maneira lúdica, para reduzir a evasão escola e motivar seus alunos, sem perder a ponte que relaciona o conhecimento matemático estudado concomitantemente com a construção de uma ferramenta lúdica denominada *Roletrix* (Jogo Criado pelo autor que tem principais fundamentos a Teoria das Matrizes e Probabilidade). Por outro lado, o desenvolvimento da consciência em torno da manipulação da atividade lúdica dentro da sala de aula, fundamentando que toda atividade conduzida com significado será também uma das propostas idealizadas.

Teremos como objetivos especifico, destacar o interesse da comunidade científica em relação à importância dos jogos para o ensino e aprendizagem da matemática, definir alguns conceitos prévios de Teoria das Matrizes e Probabilidades a fim de estabelecer uma discussão teórica, analisar metodologicamente o jogo de matrizes de duas pessoas com soma zero, na perspectiva do jogo *Roletrix* e por fim, apresentar propostas metodológicas que estruturarão a relação entre teoria e prática, desenvolvendo algumas sequências didáticas de ensino.

A pesquisa bibliográfica de acordo com Medeiros (2004) é uma etapa essencial neste trabalho científico e que fundamentará os capítulos subsequentes. Estruturando sistematicamente o embasamento teórico, o levantamento de dados, a seleção e organização de tais dados. Um fator preponderante neste trabalho fundamenta-se que em seu desenvolvimento a busca de informações sobre o tema estudado, sendo um ponto chave para possibilitar a aprendizagem do educando, visto que, orientador exerce um papel fundamental na fase de pesquisa bibliográfica para futuramente discutir ideias desenvolvidas pelos autores.

De modo geral, este trabalho fundamentará sua estrutura em etapas que sustentará toda ideologia a ser proposta; a elaborar de um plano de trabalho, a identificar de autores afins a temática, a compilar o material pré-selecionado, a analisar e interpretar tais materiais e por fim a redação final são passos que permitirá o melhor desempenho deste trabalho cientifico.

Conclusivamente, a organização estrutural foi fundamentada de maneira argumentativa em seis capítulos, para que todas as conjecturas sejam construtivamente plausíveis, de maneira que o leitor compreenda gradativamente a ideologia proposta, sendo assim dispostas:

No primeiro capítulo, apresentaremos uma introdução acerca do trabalho realizado, descrevendo o que queremos e como o faremos.

No segundo capítulo, destacaremos o interesse da comunidade científica em relação à importância dos jogos em relação à matemática e como os jogos de estratégia facilitam substancialmente o processo de ensino e aprendizagem.

No terceiro capítulo, definiremos alguns conceitos prévios de Teoria das Matrizes e Probabilidades a fim de estabelecer uma discussão teórica sobre temática dos pré-requisitos que envolverão o jogo de estratégia *Roletrix*, que será sugerido no quarto capítulo. Relacionando-os com suas respectivas finalidades, de maneira que o leitor obtenha informações necessárias acerca de sua manipulação.

No quarto capítulo, buscaremos analisar metodologicamente o jogo de matrizes de duas pessoas com soma zero, na perspectiva do jogo *Roletrix*. Com conclusão desta análise, teremos como produto final a criação de uma ferramenta aplicada ao jogo ROLETRIX que facilitará a prática educacional do estudo da Teoria das Matrizes e Probabilidade.

No quinto capítulo, apresentaremos propostas metodológicas que estruturarão a relação entre teoria e prática, desenvolvendo algumas sequências didáticas de ensino.

No sexto capítulo, faremos considerações finais com o propósito de formalizar um conhecimento apoiado em argumentações já pré-dispostas.

2. O JOGO NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, abordaremos o interesse da sociedade cientifica em torno de atividades lúdicas, particularmente os jogos, focado no ensino e na aprendizagem de matemática. Acreditando que o conhecimento humano desenvolve-se com o passar do tempo, é indispensável também construirmos um contexto histórico para embasar futuras afirmativas.

2.1 OS JOGOS AO LONGO DA HISTÓRIA

O conceito de jogo existe na humanidade há muito tempo, etimologicamente, a palavra jogo vem do latim: *lócus, locare*, que significa; brinquedo, divertimento, passatempo, sendo que ao passar dos anos os jogos começaram adquirir outras características. De acordo com o dicionário da língua portuguesa Michaelis (1998):

> **Jogo**, SM. 1 Brincadeira, divertimento, folguedo. 2 Passatempo, em que de ordinário se arrisca dinheiro, ou outra coisa. 3 Divertimento ou exercício de crianças, em que elas fazem prova da sua habilidade, destreza ou astúcia. 4Maneira de jogar. 5 Conjunto de regras a observar, quando se joga [...].(MICHAELIS, 1998, p.356):

Com esta perspectiva, o jogo é visto como uma atividade que instrui o indivíduo fisicamente e mentalmente. Ao idealizar que o jogo serve tanto para divertir quanto para exercitar, a sociedade estabelece novas práticas e possibilidades para uma atividade que existe na humanidade desde os seus primórdios.

De acordo com Machado (2009), a arqueologia descreve a presença dos jogos na humanidade desde 2600 A.C., na pré-história os jogos estavam presentes como forma de atividade cotidiana e até mesmo como herança cultural. Seja como, brinquedo, divertimento ou passatempo o jogo já estava presente na humanidade como uma prática rotineira.

Seguindo o linear da história, a Idade Média[1], foi marcada pela proibição dos jogos pela Igreja, por serem considerados contraventores da ordem. O progresso cultural era controlado diretamente pelas escolas episcopais, que instruíam os métodos e práticas educacionais que consideravam significantes para a época. Desta forma, Araújo (2011) revela que, "A partir do Cristianismo, a imposição de dogmas prescritos pelas escolas episcopais e a

[1] Período da história da Europa entre os séculos V e XV. Inicia-se com a Queda do Império Romano do Ocidente e termina durante a transição para a Idade Moderna.

educação disciplinadora não abrem espaços à expansão dos jogos, considerados transgressores da ordem e da disciplina".

Com a visão de Araújo (2011), a produção de conhecimento estava restrita ao poder eclesiástico, o qual possuía a força de estabelecer "*o que*" deveria ser manipulado como instrumento educacional, para que a ordem e a disciplina imposta pelo cristianismo não sofresse algum abalo dogmático.

Por sua vez, no Renascimento[2] o jogo baseava-se na participação lúdica mostrando-se importante no processo de ensino e aprendizagem. Nesta época novas concepções foram estabelecidas como objetivo promover um processo educacional mais dinâmico. Nesta perspectiva as manipulações de jogos com caráter educativo foram de grande importância para a motivação de novos saberes. Sendo nesta perspectiva Araújo (2011) descreve que:

> No renascimento, reaparecem novas concepções sobre a Educação. Nessas concepções pedagógicas, os jogos são reconsiderados a participarem da formação educacional. [...] Assim, por intermédio de exercícios lúdicos, o ensino escolástico, para as crianças, foi substituído pelo emprego das tábuas murais. (ARAÚJO 2011, p.4)

Nesta perspectiva, os jogos utilizados para fins educacionais podem transmitir de maneira sistemática a mensagem educacional. Esta inserção de uma metodologia lúdica no processo de ensino e aprendizagem possibilitou um avanço cultural da sociedade e se constitui como função motivadora da mesma.

Seguindo até os dias atuais, o jogo apresenta múltiplas facetas: instrumento educativo, instrumento recreativo, instrumento de reabilitação, dentre outros possibilidades. O objetivo deste capítulo é destacar os jogos como instrumento educacional, estabelecendo-o como uma prática pedagógica coerente para a relação de ensino e aprendizagem da matemática. Sendo que:

> A busca por um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo para o aluno, que lhe proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim, à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender, não pelo utilitarismo, mas pela investigação, ação e participação coletiva de um "todo" que constitui uma sociedade crítica e atuante, leva-nos a propor a inserção do jogo no ambiente educacional, de forma a conferir a esse ensino espaços lúdicos de aprendizagem. (GRANDO 2000, p.15).

[2] Termo usado para identificar o período da História da Europa aproximadamente entre fins do século XIV e meados do século XVI.

Neste contexto, o ponto de vista de Grando (2000) é de fundamental importância que o aluno deve ser considerado sujeito no processo de ensino e aprendizagem, este sujeito deve ser inteiramente ativo de maneira que seu conhecimento em relação à matemática tenha equilíbrio, isto é, que o aluno seja capaz de tomar decisões e tenha atitudes coerentes em relação a situações problemas encontradas no seu meio de vivência.

Destaca-se também, que este conhecimento deve ser significativo[3], ou seja, com a prática do jogo o aluno seja capaz de fazer assimilação do conhecimento e que esta nova informação interaja com outra existente na estrutura do saber. Toda esta inteiração transcorre com a intervenção indireta do professor, nesse sentido, suas ações possuem uma característica interacionista, sendo um coadjuvante neste processo.

Entende-se que o papel do educador é, precisamente, proporcionar um ambiente favorável à imaginação, a criação e a reflexão. Manipulando experimentos que possibilitem dar sentido à construção dos conceitos matemáticos. A partir da criação destes mecanismos que possibilitem tal construção, o educador esta permitindo a seu educando o prazer em aprender.

Com a inserção do jogo no ambiente educacional, direciona-se a proposta para uma aprendizagem participativa, em que o aluno deve ser crítico e atuante no ambiente escolar. Neste sentido, ressalta-se a importância de uma metodologia bem planejada, visando priorizar as competências e habilidades de determinados conteúdos. Este planejamento deve ser elaborado previamente de maneira que permita a valorização do saber e da desportividade[4].

Nesta perspectiva Araújo (2011) evidencia que existe uma crescente necessidade da utilização dos jogos nos dias atuais para auxiliar a educação é de suma importância para o desenvolvimento cognitivo do aluno. Percebe-se uma grande preocupação em elaborar técnicas que permitam a melhor manipulação de atividades lúdicas para aprimorar a aprendizagem. Este processo valoriza tanto a aluno quanto o educador, pois a motivação e a associação de conhecimentos são predominantes na utilização de jogos dentro de sala de aula.

> A valorização mais efetiva do jogo na educação chega ao Brasil, de forma mais evidenciada, a partir do aparecimento das brinquedotecas e suas associações durante a década de 80 do século passado. Além disso, o crescimento de congressos sobre o tema e, consequentemente, o aumento de estudos e produções científicas, tiveram um papel fundamental na divulgação da importância do lúdico. (ARAÚJO 2011, p.7)

---

[3] A aprendizagem significativa, ideia central da teoria de David Ausubel, envolve a interação de um novo conhecimento com uma estrutura de conhecimento específico, organizando-se de forma hierárquica, na qual os elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a conceitos mais gerais.

[4] A ideia de desportividade tem sentido de evitar a competitividade exacerbada.

Ao evidenciar os jogos como uma prática pedagógica, torna-se necessário que os envolvidos estabeleçam metas, com o propósito de desenvolver atividades que ao mesmo tempo estimulem a motivação e que tenham caráter educativo. Desta forma, os estudos, as produções científicas e os congressos possibilitam nos dias atuais a estruturação desta ferramenta de ensino e aprendizagem.

Assim a educação enfatizará o crescimento social e cultural do individuo, possibilitando seu desenvolvimento pessoal. Sendo função da comunidade desenvolver ao longo do tempo, técnicas e procedimentos que possibilitem o melhor crescimento de seus participantes.

2.2 O ENSINO DA MATEMÁTICA COM AUXILIO DOS JOGOS

A manipulação de jogos como estratégia para facilitar a aprendizagem como visto na seção anterior, ganha força no meio educacional ao longo dos anos. Em inúmeros momentos sociais (congressos, palestras, mesas redondas, entre outros encontros)[5] a aprendizagem de conceitos matemáticos é abordada mediante a utilização de jogos. Estes encontros almejam estabelecer contextualizações que possibilitem a motivação, interesse dos alunos no âmbito escolar.

Estas palavras chaves (motivação e interesse) serão trilhas orientadoras para que habilidades matemáticas se desenvolvam. Tais habilidades como: a aptidão de mobilizar conhecimentos quantitativos, classificação de elementos discretos ou contínuos, a orientação plana ou espacial, as operações básicas, a resolução de problemas, o raciocínio reflexivo, o raciocínio lógico dentre outras habilidades são potencializadas com a utilização de jogos didáticos. De acordo com Borin (1995):

> Como estratégia de trabalho, escolhemos os jogos em grupo pelo seu aspecto lúdico que pode motivar e despertar o interesse do aluno, tornando a aprendizagem mais atraente. A partir de erros e acertos e da necessidade da análise sobre a eficiência década estratégia, construída para alcançar a vitória no jogo, estimula-se o desenvolvimento do raciocínio reflexivo daqueles que jogam. (BORIN 1995, p.4)

O auxilio dos jogos como estratégia de temáticas matemáticas torna a aprendizagem mais interessante para o aluno, Borin (1995) demonstra que esta ferramenta motiva e desperta

---

[5] Como exemplo, temos: Congresso Internacional de Matemáticos ICM 2018 no Rio de Janeiro, Que será promovido pelo IMPA. Onde a programação do evento inclui jogos, problemas e mágicas com conteúdo matemático, dirigidos a um público de alunos e professores.

uma característica importantíssima na relação do saber e do interesse. A eficácia sugestionada indica que a prática docente se torna com o tempo mais fácil, estabelecendo a médio e em curto prazo e com resultado permanentes.

De acordo com Mulata (2007), jogo tem natureza desafiadora na mente do individuo, as múltiplas facetas encontradas em um trabalho de grupo com a utilização do jogo lúdico, disponibiliza ao jogador certos embates teóricos, que de certa forma, em uma aula tradicional demandaria muito tempo. Isto possibilita considerar que esta maneira desafiadora de ensinar matemática tenha um caráter estimulante e que desenvolve o pensamento independente. Sendo que, tal pensamento tem como produto final o aumento da criatividade, da capacidade de lidar com circunstâncias reais e da possibilidade de resolver problemáticas diferentes com estratégias semelhantes.

A referida autora também relata certas observações: para utilização do jogo em sala de aula:

> É necessário que os alunos estejam preparados para trabalhar em grupo, caso contrário, a criança naturalmente centrada em si, poderá ficar descontente se não conquistar a vitória;
> É importante fazer uso do registro das jogadas, as eficientes e as frustradas, para que sejam possíveis boas discussões sobre as estratégias utilizadas pelos alunos;
> O professor deve ter a consciência de que o jogo não deve ser obrigatório, pois tem crianças que não gostam deste tipo de atividade;
> É necessário que o professor administre o tempo de jogo para que não seja privilegiada somente esta atividade. (MULATA 2007, p.41)

Baseando nas afirmações acima, pode-se conjecturar que os jogos devem ser manuseados como uma ferramenta de ensino e aprendizagem da matemática. Sua manipulação será de grande importância para a motivação à aprendizagem do alunado e consequentemente para a motivação metodológica do professor. Neste contexto, deve-se determinar claramente, o papel do professor e o papel do aluno nesse novo conjunto educacional, tendo em vista que, a lousa, o piloto e o livro didático se tornarão apenas coadjuvantes em tal processo.

2.2.1 O PAPEL DO PROFESSOR

O papel do professor, de acordo com Parra (1996), fundamenta-se em estruturar situações que contextualizem as temáticas a serem trabalhadas, estabelecendo-o como orientador de respostas e conhecimentos para que o aluno reconheça o saber como caráter universal e impessoal.

> O professor realiza primeiro o trabalho inverso ao do cientista, uma recontextualização do saber: procura situações que de em sentido aos conhecimentos que devem ser ensinados, ou seja, modela o saber atribuindo a ele significado e o transforma em objeto de ensino. (PARRA 1996, p.26)

Com esta visão de Parra, é importante que o professor tenha consciência acerca de sua posição em sala de aula, devendo posicionar-se como instrutor e não como detentor do saber. Para o professor, existe uma grande tentação de se colocar como fonte essencial do conhecimento, considerando em certos momentos o aluno como uma tábua rasa[6], ou seja, aquele que não possui conhecimento prévio. O processo do conhecer, do saber e do agir é aprendido pela experiência vivida, por sua vez, o educador deve situar as suas ações para estruturar melhor as possibilidades de conhecimento.

Na visão de Bezerra et al (2010), a cada momento de sua prática pedagógica o professor deve refletir sobre suas ações, pois um profissional consciente de seus atos constitui em seu pensar uma autocrítica que fomentará um trabalho crescentemente construtivo. Esta visão crítica das atividades dentro e fora de sala de aula fomentará também, um desenvolvimento cognitivo mais significativo, possibilitando um avanço intelectual da sociedade.

Dito de outro modo, o docente deve adotar uma postura de conselheiro e não apenas de transmissor de conhecimentos, tendo em vista, que a aprendizagem é baseada na modificação de saberes em que educando dever tomar decisões provocadas pelo seu professor. Brousseau (2008) destaca que:

> Considerar a aprendizagem como uma modificação do conhecimento que o aluno deve produzir por si mesmo e que o professor só deve provocar [...]. O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta. (BROUSSEAU 2008, p.49)

Esta citação remete que o educador também deve deter o conhecimento dos conteúdos escolares e das peculiaridades do desenvolvimento da aprendizagem de seus alunos, para que consiga elaborar situações que despertem o interesse do aluno. Desta forma, a troca de

---

[6] ***Tabula rasa*** é uma expressão latina que significa literalmente "tábua raspada", e tem o sentido de "folha de papel em branco". Opondo-se às teorias estabelecidas por Piaget, que defini uma nova concepção o construtivista, segundo a qual o conhecimento é construído ativamente pelo sujeito é uma consequência de suas interações com o mundo.

informações no processo desenvolvido em sala torna-se mais tranquila, ou seja, ambas as partes envolvidas ganham na produção do saber.

Ainda, de acordo com a perspectiva de Brousseau (2008), existem etapas que devem guiar a prática didática com a manipulação de atividades lúdicas. Estas consistem em:

- *Primeira etapa: abordagem puramente lúdica.*
- *Segunda etapa: devolução de uma preferência.*
- *Terceira etapa: devolução de uma responsabilidade e de uma casualidade.*
- *Quarta etapa: devolução da antecipação.*
- *Quinta etapa: devolução situação adidática.*

Em síntese, a denominação *"devolução"* consiste na atividade a qual o educador busca alcançar seus objetivos. A primeira etapa, *abordagem puramente lúdica*, é norteada pela não compreensão didática do jogo e seus resultados conceituais, sendo apenas o jogo pela diversão. A segunda etapa, *devolução de uma preferência*, orienta que os alunos comecem a compreender o efeito desejado, fundamentando resultados certos ou errados e relacionando padrões. A terceira etapa, *devolução de uma responsabilidade e de uma casualidade*, vislumbra que o educando aceita sua responsabilidade no jogo, compreendendo a escolha entre diversas possibilidades, gerando deste modo, uma relação entre decisões e resultados. A quarta etapa, *devolução da antecipação*, estrutura que a relação obtida na etapa anterior, deve ser concluída previamente, sendo esta uma ação cognitiva. A quinta e ultima etapa, *devolução situação adidática*, relaciona que o educando deve intuir que as suas ações no jogo não acontecem ao acaso, é necessário que o mesmo reconheça um padrão matemático escolhido como temática do tal jogo, sendo que suas próximas atitudes tenham argumentações estritamente matemáticas.

Com isto, fica evidente que o educador deve organizar muito minuciosamente suas ações, para que alcance seus objetivos. Visando que didaticamente, o professor conduzirá as situações de aprendizagem proporcionando ao educando a possibilidade de pensar, criar e concluir.

2.2.2 O PAPEL DO ALUNO

A ideia de existir situações de ensino e aprendizagem que possibilitem o livre arbítrio[7] do aluno na relação do conhecimento deve ser construída após a aquisição de responsabilidade de ambas as partes envolvidas.

O papel do aluno na relação de aprendizagem vem alterando-se ao longo do tempo, através de diferentes abordagens, seja estas psicanalíticas, pedagógicas, entre outras. Como por exemplo, a interpretação do erro, que passa a ser visto como um fundamento importante para a relação do conhecimento. Brousseau (2008) destaca que:

> Frequentemente, os erros dos alunos são interpretados pelo professor como incapacidade para raciocinar em geral, ou ao menos, como erro de lógica: em um contrato didático amplo, o professor se carrega das representações, dos sentidos dos conhecimentos. (BROUSSEAU 2008, p.64)

Certamente, que o aluno utilizará representações e conhecimentos prévios acerca de um determinado conteúdo, intrinsecamente estes preconceitos[8] obtidos ao longo de sua vida educacional, o induzirão a erros diversos. Devendo o educando amadurecer conceitualmente o modo que manuseia estes erros, tanto na perspectiva de falta de saberes quanto na falha de fundamentos lógicos, sendo que seu papel esta estruturado em um amadurecimento crescente objetivando a obsolescência da imaturidade.

Por outro lado é de extrema importância em um trabalho que utiliza o lúdico como ferramenta possua integrantes com certa maturidade de interagir em equipe. De acordo com Hardingham (2000), todo trabalho em equipe é baseado na comunicação, na interação e na aprendizagem social. Estes três fatores são necessários para a maior clareza e compreensão de um trabalho em equipe.

> O trabalho em equipe pode levar a um aprimoramento na eficiência. Quando as pessoas planejam e implementam várias atividades juntas por meio da cooperação e comunicação constantes tornam-se capazes de identificar muitas formas de melhorar o modo pelo qual o trabalho se organiza, como tais informações, ideias e produção, que tornam-se fluentes, além das diferentes atividades que influenciam os procedimentos críticos de cada um. (HARDINGHAM 2000, p.20)

---

[7] A ideia de livre arbítrio esta intencionada que a aprendizagem decorre das virtudes do aluno e das situações proposta, com mínima intervenção do educador.

[8] O conceito de preconceito esta intencionada um juízo pré-concebido, que se manifesta por falta de conceitos formados.

Baseado na compreensão da teoria, Hardingham (2000) deixa claro que para que exista certa cumplicidade em relação ao conhecimento, de modo que esta experimentação constante desenvolva um trabalho mais produtivo e que também influencie de maneira crítica a produção das ideias, tornando as ações dos envolvidos atitudes criticas em relação as informações obtidas.

Como se pode observar, o trabalho em equipe é um fator essencial para que a atividade em certo jogo de estratégia, dessa forma, vislumbrando o sucesso da ação pedagógica, torna-se necessário que seus praticantes tenham bem definidos as metas e objetivos do jogo. Todos devem saber quais os objetivos, para que o esforço seja minimizado e que também trabalhem em comum acordo. Pois, a comunicação deve ser realizada de maneira clara e concisa, tornando a aprendizagem acessível a todos os praticantes.

> Os requisitos, benefícios e riscos especiais de equipes são acionados assim que pelo menos um objetivo comum exija a união de esforços. Isso porque o objetivo ou objetivos precisam ser igualmente compreendidos por todos os membros da equipe, e os esforços em conjunto precisam ser coordenados. (HARDINGHAM 2000, p.10)

Desta maneira, todo trabalho em equipe, deve-se ter bem definido o papel de seus integrantes, pois não saber qual a função em uma equipe ou o que deve desempenhar para o sucesso do grupo, pode erroneamente atingir resultados indesejados.

Ainda com a visão de Hardingham (2000), tem-se a perspectiva que o trabalho em equipe gera divergências de opiniões, é necessário que o aluno também tenha maturidade em lidar com conflitos pessoais. Em uma equipe, é impossível que não ocorra embates de opiniões, concepções e preceitos. É um momento desafiador para o aluno, saber lidar com as diferenças para torná-las fomentadoras de crescimento intelectual.

Visando o crescimento intelectual, Hardingham (2000), deixa claro que possivelmente o educando poderá ter o papel de avaliador e monitor de sua equipe. Com estas responsabilidades trabalho e os resultados tornam-se mais prazerosos, pois, é de fundamental importância que cada integrante tenha ciência como está o seu desempenho e também tenha maturidade em estabelecer pontos positivos e negativos de suas ações.

Conclusivamente, o papel do aluno é tão importante quanto o do professor, tornando-se um protagonista no desenvolvimento didático. Enquanto o educador possui função de estimular a exploração de determinados conteúdos específicos. Esta distinção de papeis é fundamentada por um ideal social, ambos integrantes precisam conhecer e adequar-se ao mundo que o rodeia, guiados por interesses culturais que de certa maneira peculiarizam esta nova geração.

2.3 JOGOS DE ESTRATÉGIA: SUA RELAÇÃO COM O ENSINO E APRENDIZAGEM

Os jogos de estratégia são atividades que estruturam raciocínio e a reflexão como desafiadores em determinadas situações problemas. A competição lúdica é muito rica, no sentido que potencializa discussões sobre determinada temática, favorecendo por sua vez, o trabalho cooperativo e a aprendizagem.

De acordo com Lacanalo (2011), tem-se que:

> [...] apontamos três momentos distintos, porém complementares, que existindo em situações de jogo, podem fazer com que ele se torne uma operação mental, possibilitando a apropriação de conceitos e a formação do pensamento teórico: Preparação para jogar; O ato de jogar e suas estratégias; As relações desenvolvidas ao longo do trabalho. (LACANALO 2011, p.81):

A prática de jogos de estratégia relacionada ao ensino e aprendizagem da matemática, contribui de maneira substancial o desenvolvimento de competências matemáticas, sendo que o ato de jogar e elaborar estratégias desenvolve no estudante a capacidade de maior assimilação do conhecimento proposto e constituição de um pensamento teórico mais significativo.

Existem diversos jogos de estratégia com este fim, como por exemplo, o Xadrez, o Tetris, a Batalha Naval, o Liga Pontos (Dots) e Cubo Vermelho.

Xadrez

> O xadrez é um jogo de tabuleiro de natureza recreativa e competitiva para dois jogadores, sendo também conhecido como Xadrez Ocidental ou Xadrez Internacional para distingui-lo dos seus predecessores e de outras variantes da atualidade. (Em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Xadrez>, Acessado em: 10 de fevereiro de 2014)

Figura 2.1 – Tabuleiro de Xadrez.

De acordo com Seirawan e Silman (2006) o xadrez é um instrumento perfeito para o exercício da mente sendo “uma pedra de toque do intelecto”. É um jogo estratégico onde seu participante possui diversas possibilidades de movimentos. Onde suas ações refletem diretamente na vida dos jogadores, exigindo determinação, competência e força de vontade.

De certa maneira o Xadrez é interessante por que defini qualidades inerentes ao jogo. Seirawan e Silman deixam claro que o xadrez tem efeito significativo na educação, fazendo referência a sua importância intelectual. Esta importância consiste em dizer que o xadrez não é somente jogo, mas sim uma ferramenta que abre portas e possibilita que o ser humano tenha uma visão critica do mundo que o rodeia.

Tetris

> O Tetris, o prosaico quebra-cabeça digital cujo objetivo é encaixar peças geométricas que caem do alto da tela, já vendeu mais de 60 milhões de cópias e tornou-se um dos mais populares games do mundo. Tamanho sucesso tem uma explicação científica: apesar de parecer simples, o problema contido no Tetris é um dos mais difíceis da matemática. (Em < http://super.abril.com.br/ciencia/tetris-problemao-443647.shtml>, Acessado em: 10 de fevereiro de 2014)

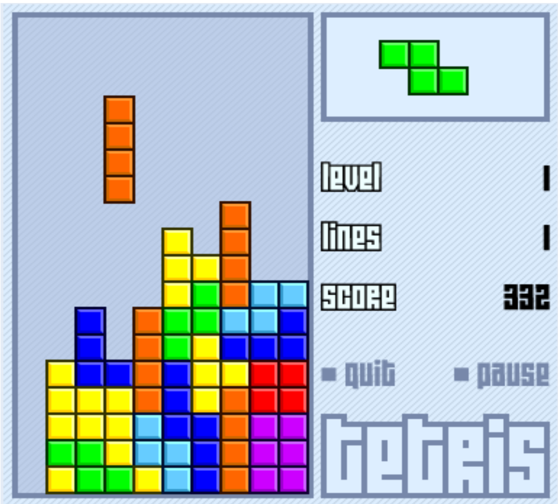


Figura 2.2 – Layout do jogo Tetris.

Na interpretação de Prado (2012) este jogo consiste em empilhar as peças de formatos distintos, como visto na Figura 2.2 encaixando em linhas horizontais, preenchendo um retângulo. A autora cita que os criadores do jogo, Alexey Pajitnov e Dmitry Pavlovsky, e pelo aluno de 16 anos, Vadim Gerasimov, acharam sua criação extremamente estimulante, acreditaram que sua descoberta mudaria estruturalmente o mercado de jogos.

A ideia surgiu quando os criadores conheceram os Pentaminós, uma formação composta de cinco quadrados congruentes conectados ortogonalmente. Estes tiveram a ideia de retirar um dos blocos e criar uma interação com os formatos possíveis e batizou o jogo como Tetris, sufixo grego para o número quatro.

Batalha Naval

> Batalha naval é um jogo de tabuleiro de dois jogadores, no qual os jogadores têm de adivinhar em que quadrados estão os navios do oponente. Embora o primeiro jogo em tabuleiro comercializado e publicado pela Milton Bradley Company em 1931, o jogo foi originalmente jogado com lápis e papel. Seu objetivo é derrubar os barcos do oponente adversário, ganha quem derrubar todos os navios adversários primeiro. (Em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Batalha_naval>, Acessado em: 10 de fevereiro de 2014)

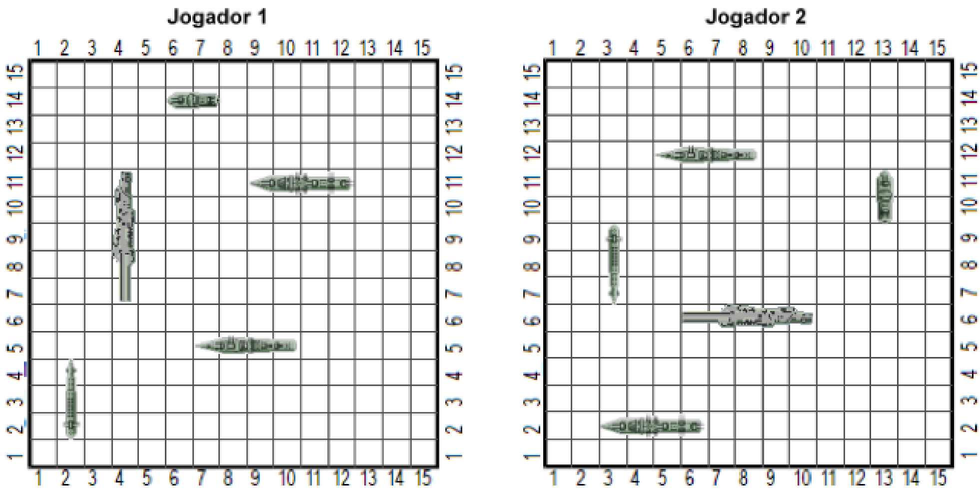


Figura 2.3 – Layout do jogo Batalha Naval.

Para Domingos (2013) aprender matemática por meio do jogo batalha naval é um caminho viável de se educar, pois conteúdos como o do Plano Cartesiano pode ser manipulado metodologicamente para ensinar de uma maneira lúdica.

Domingos deixa bem claro que é possível que os alunos aprendam brincando, sendo o jogo batalha naval um facilitador do aprendizado, possibilitando o aluno a ter uma visão sobre coordenadas e localização.

Liga Pontos (Dots and Boxes)

> O Liga Pontos tem como objetivo colecionar mais quadradinhos que o teu opositor. Vais unindo dois pontos consecutivos alternadamente com o teu opositor. Quem conseguir fechar um quadradinho fica com ele e continua a jogar.(Em <http://www.rpedu.pintoricardo.com/jogos/dots/dots.html>, Acessado em: 10 de fevereiro de 2014)

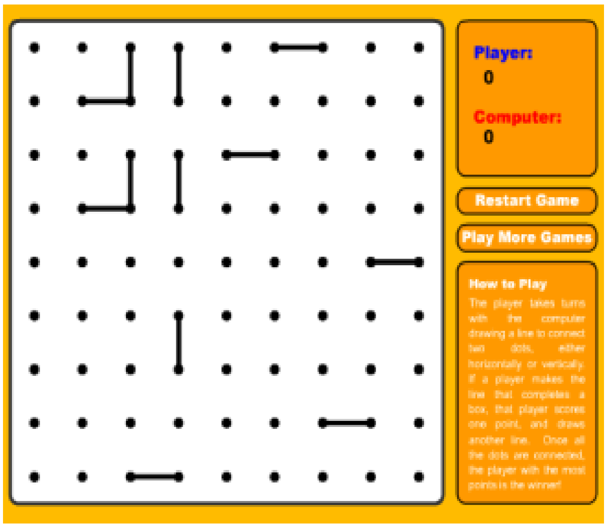


Figura 2.4 – Layout do jogo Liga Pontos.

De acordo com Braga (2014), o material para a manipulação deste jogo é muito básico, sendo um papel ponteado formando uma superfície quadrada e lápis de cores distintas, um para cada jogador como visto na Figura 2.4. Onde o objetivo consiste em cada jogador formar o maior número de quadrados possíveis no ponteado.

Braga define as regras de maneira muito simples, cada jogador une dois pontos vizinhos com um segmento horizontal ou vertical, alternadamente. Ate que uns jogadores completa um quadrado, escreve a sua inicial no interior desse quadrado e joga outra vez.

Cubo Vermelho

> Use as setas do teclado para movimentar o bloco. Fique atendo com a cor dos pisos, pois cada um tem um comportamento específico. Nos pisos brancos é possível passar apenas uma vez, enquanto que é possível passar duas vezes nos pisos pretos. Já os pisos azuis funcionam como teletransporte. (Em <http://rachacuca.com.br/jogos/cubo-vermelho>, Acessado em: 10 de fevereiro de 2014)

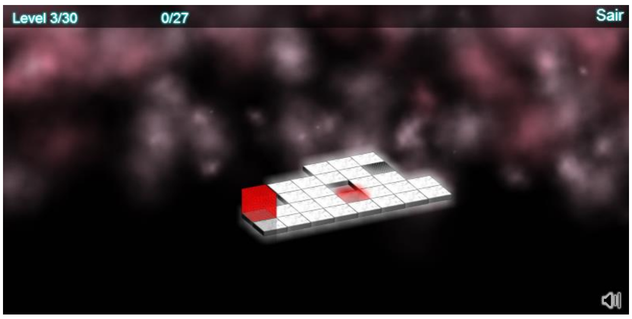


Figura 2.5 – Layout do jogo Cubo Vermelho.

Para o educador este jogo auxilia a desenvolver o raciocínio geométrico na perspectiva espacial em representações de projeções planas, pois projeta uma face do cubo em uma superfície plana.

Os jogos de estratégia como os citados acima, estimulam de maneira significativa a motivação e a intuição do aluno, exigindo vários subsídios importantes para a aprendizagem em matemática, como a atenção, a tática, a coerência, o entendimento, a perspicácia, dentre outros. Basicamente, os jogos estratégicos nunca dependerão de força física ou habilidade motora para que o praticante o exerça, entretanto, é de suma importância que tal ferramenta possua regras bem definidas para estimular o raciocínio lógico e a reflexão.

Todas as afirmativas acima declinam a uma ferramenta interessantíssima para as aulas de matemática, sendo que a utilização de jogos de estratégia como um subsídio para a aprendizagem induz que a obtenção de raciocínio abstrato se torna mais acessível com o desenvolvimento prático de tais mecanismos. De acordo com Maluta (2007):

> Os jogos de estratégia têm por principal meta desenvolver o raciocínio lógico e caracterizam-se por possuir uma estratégia vencedora a ser descoberta pelos jogadores. A sorte não interfere neste tipo de jogo. Em busca da estratégia vencedora, o aluno formula hipóteses, argumenta e testa a validade das hipóteses criadas. (MALUTA 2007, p.12 apud BORIN 1996):

Em busca da estratégia vitoriosa, o aluno irá determinar critérios lógicos matemáticos que estruturem meios vencedores em partidas subsequentes. Esta formulação de hipóteses é de extrema importância para sua educação matemática, tais inferências em um jogo estratégico possibilita o jogador, isto é, o aluno, desenvolver características intrínsecas ao conhecimento matemático.

De acordo com Maluta (2007)**,** a construção de um saber a partir de uma manipulação estratégica e lúdica possibilita a abstração do cálculo mental. Desta forma, o jogador utiliza algoritmos formulados por ele para chegar ao objetivo do jogo. Estabelecendo que a capacidade de cálculo mental seja extremamente importante para uma significação e compreensão do jogo e de suas propriedades. A obtenção desta habilidade beneficia a aprendizagem de conceitos matemáticos e o desenvolvimento do conteúdo proposto. Categoricamente a reflexão, a interpretação e a algoritmização são fatores predominantes e de grande importância na utilização de jogos de estratégia e com a acuidade do cálculo mental.

Portanto, o uso de jogos de estratégia como recurso didático é uma ferramenta interessante para ensino da Matemática, os jogos estratégicos possuem características intrínsecas como algumas vistas acima, possibilitando a construção de um saber teórico e prático. Partindo deste princípio, é fundamental que os integrantes deste processo educacional estabeleçam regras que estruturem dentro da situação do jogo atitudes de motivação e conhecimento, para que o jogo deve ter um significado para quem joga e finalidade educativa para quem aplica.

3. DISCUSSÃO TEÓRICA

Neste capítulo serão abordados os pré-requisitos mínimos para a aplicação do jogo *Roletrix*, que será sugestionado como próximo tema. A Teoria das Matrizes e a Teoria das Probabilidades serão os conteúdos estruturantes desta seção, suas definições e exemplos terão embasamentos nos livros didáticos: Introdução à Álgebra Linear - Alfredo Steinbruch e Paulo Winterle, Álgebra Elementar, Aplicações de Carlos A. Callioli, Hygino H. Domingues e Roberto C. F. Costa, Matemática de Manoel Paiva Rodrigues e Introdução à Probabilidade de Leonardo T. Rolla.

3.1 TEORIA DAS MATRIZES

Matrizes são estruturas matemáticas organizadas de maneira tabular, sendo construída fundamentalmente através de linhas e colunas preposicionadas, de maneira sua utilização nesta organização de dados facilite conceitualmente o entendimento da informação. Nos assuntos ligados ao Ensino Médio, as Matrizes são responsáveis pela solução de problemas de múltiplas variáveis aplicáveis no cotidiano, na forma de sistemas lineares.

Definição 3.1. Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números inteiros. Uma matriz A $m \times n$ real é uma dupla sequência de números reais distribuídos em m linhas e n colunas, formando uma tabela como se indica do seguinte modo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De maneira mais sintética, a matriz A pode ser expressa por (a_{ij}), para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq i \leq m$. Deve-se considerar também, que cada número que compõe uma matriz chama-se de *termo* da matriz, isto é, dada a matriz (a_{ij}) ao simbolizarmos a_{ij} representa-se sem distinção todos os termos desta matriz.

A notação nas estruturas matemáticas, principalmente na Teoria das Matrizes é uma linguagem cuja grafia e semântica utiliza das formas simbólicas para desenvolver uma lógica matemática, desta maneira, tais notações serão utilizadas para alcançar os objetivos propostos.

Notação. Indica-se por $\mathrm{M}_{\mathrm{m}\times\mathrm{n}}$ (IR) o conjunto das matrizes reais $m \times n$. Se $m = n$, ao invés de $M_{m\times n}$ (IR) usa-se a notação M_n (IR), sendo que cada matriz M_n (IR) chama-se de *matriz quadrada de ordem* n. Em contra partida, quando $m \neq n$, uma matriz $m \times n$ é denominada *matriz retangular.*

Exemplo 3.2. A matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz real 3×2, logo pode-se concluir que $A \in M_{3\times 2}(IR)$.

3.1.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Propiciar a apreensão de conceitos fundamentais da Teoria das Matrizes potencializará a organização de pensamento e utilização do mesmo de uma maneira mais sistemática, considerando que tal apreensão fundamentará de crescimento intelectual, o amadurecimento pessoal.

Tipos de Matrizes

Matrizes podem ser classificadas de maneiras diversas, dependendo da sua dimensão, de suas características dentre outros fatores. A identificação do tipo de uma matriz é usada para facilitar os cálculos.

Sendo de especial interesse que este trabalho fundamente apenas os pré-requisitos mínimos para manipulação lúdica do jogo *Roletrix*, sendo assim, apenas alguns tipos particulares de matrizes serão vistos para facilitar trabalhos futuros, estes são: Matriz linha, Matriz coluna, Matriz quadrada e Matriz diagonal.

Matriz Linha

A matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

de ordem $1 \times n$, é denominada *matriz linha.*

Matriz Coluna

A matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$$

de ordem $m \times 1$, é denominada *matriz coluna.*

Matriz Quadrada

Chama-se de *matriz quadrada*, toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, toda matriz $M_n(IR)$.

A matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

de ordem $n \times n$, é denominada *matriz quadrada.*

Matriz Diagonal.

Chama-se *matriz diagonal*, toda matriz quadrada de ordem n em que os elementos $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Sendo que os elementos da diagonal principal podem ser, ou não, iguais a zero.

A matriz,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

de ordem n, é denominada *matriz diagonal.*

3.1.2 OPERAÇÕES BÁSICAS

Para o aluno que esta desenvolvendo uma nova aprendizagem sobre os conceitos matemáticos é necessário que este estudante tenha domínio sobre suas operações básicas: adição, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes.

Adição

Definição 3.3. Sejam duas matrizes de mesma ordem $m \times n$, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, indica-se por $A + B$ e chama-se de soma de A com B a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Definida a operação de soma de matrizes como a referida acima se pode afirmar que valem as seguintes propriedades[9]:

i. Associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad \forall A, B, C \in M_{m\times n}(IR);$$

ii. Comutativa

$$A + B = B + A, \quad \forall A, B \in M_{m\times n}(IR);$$

iii. Existência do Elemento Neutro

Existe uma matriz $O \in M_{m\times n}\ (IR)$ tal que,

$$A + O = A, \quad \forall A \in M_{m\times n}(IR);$$

iv. Existência da Matriz Oposta

Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}\ (IR)$, existe uma matriz $(-\ A)$ também $m \times n$ tal que,

$$A + (-A) = O.$$

[9] Tais propriedades podem ser verificadas de maneira analítica, sendo que tal apreciação pode ser encontrada no livro Álgebra Linear e Aplicações dos autores Callioli, Domingues e Costa.

Exemplo 3.4. Dadas as matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

que pertencem ao espaço das matrizes 2×3 com entradas reais, podem conjecturar a seguinte afirmação:

- ✓ $A + B = C$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 & 0+8 & 2+3 \\ 4+(-3) & 1+6 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = C$$

Multiplicação de uma matriz por um escalar

Definição 3.5. Dada uma matriz real $A = (a_{ij})$, $m \times n$ e dado um número real k, o produto de k por A é uma matriz $m \times n$ dada por:

$$k.A = \begin{pmatrix} k.a_{11} & k.a_{12} & \dots & k.a_{1n} \\ k.a_{21} & k.a_{22} & \dots & k.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k.a_{m1} & k.a_{m2} & \dots & k.a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para esta operação de multiplicação por escalar como definida $IR \times M_{m\times n}\ (IR)$ na forma matricial $k.A \in M_{mxn}(IR)$ são convalidadas as seguintes propriedades.

Quaisquer que sejam $A, B \in M_{m\times n}\ (IR)$ e $\alpha, \beta \in IR$ dados, seguem:

i. $(\alpha\,.\,\beta)\,.\,A = \alpha\,.\,(\beta\,.\,A\,)$;

ii. $(\alpha + \beta)\,.\,A = \alpha\,.\,(\beta\,.\,A\,)$;

iii. $\alpha\,.\,(\,A + B\,) = \alpha\,.\,A + \alpha.B$;

iv. $1.A = A$.

Exemplo 3.6. Seja a matriz,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \epsilon\ M_3\ (IR),$$

com uma aritmética simples é fácil verificar que a matriz,

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \epsilon\, M_3\ (IR)$$

é uma multiplicação da uma matriz A pelo número natural 2, ou seja:

$$2.A = 2.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.2 & 2.3 & 2.3 \\ 2.2 & 2.1 & 2.4 \\ 2.0 & 2.2 & 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Produto de matrizes

Definição 3.7. Dada as matrizes $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}\ (IR)$ e $B = (b_{jk}) \in M_{n\times p}\ (IR)$, o produto $A.B$ é uma matriz de ordem $m \times p$ cujo termo geral é dado por:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + \ ... + a_{in}.b_{nk}$$

Claramente esta definição garante à existência do produto da matriz A por B se, e somente se, o número de colunas da matriz A for idêntico ao número de linhas da matriz B. Sendo que A possui ordem $m \times n$ e B ordem $n \times p$ resultando em uma nova matriz resultante de tal produto de ordem $m \times p$.

Exemplo 3.8. Sejam as matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon\, M_{2\times 3}\ (IR) \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \epsilon\, M_{3\times 2}\ (IR)$$

que satisfazem a condição necessária e suficiente determinada para realizar o produto destas matrizes. Desta forma pode-se concluir que existe uma matriz C de ordem 2×2, tal que C é definida pelo produto de A por B, ou seja:

$$C = A\,.B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2.1 + 5.1 + 1.2 & 2.3 + 5.2 + 1.0 \\ 0.1 + 1.1 + 2.2 & 0.3 + 1.2 + 2.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Certamente, o alunado sempre questiona o algoritmo da multiplicação de matrizes, afirmado que tal técnica que é definida torna-se muito complexa. Cabe assim ao educador afirmar que esta definição não é estabelecida de forma arbitrária, existindo por sua vez uma suposição lógica para tal construção, sendo que certos modelos de certos processos estatísticos matemáticos usados no estudo dos fenômenos se aproximem fielmente a esta conjectura (no próximo capítulo o uso de matrizes e a probabilidade para resolver a uma problemática aplicável).

Observe que na multiplicação de matrizes a propriedade comutativa em geral não é validada, ou seja, $A.B \neq B.A$, exceto em casos especiais. Por outro lado, coerentemente fundamenta-se na operação de multiplicação de matrizes a validação de outras propriedades.

i. Associativa

$$(A\,.B)\,.C = A\,.(B\,.C);$$

ii. Distributiva em relação à adição

$$A\,.(B + C) = A\,.B + A\,.C;$$

iii. Existência do elemento neutro

$A\,.I_n = I_n\,.A = A$, sendo I_n a matriz identidade de ordem n.

3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um *sistema de equações lineares* pode ser caracterizado por possuir um conjunto finito de *equações lineares* relacionadas em um espaço finito de variáveis.

Definição 3.9. Dados os números reais $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\ ,\ \ldots, \alpha_n,\ \beta$ para todo $n \geq 1$, à equação

$$\alpha_1.x_1 + \alpha_2.x_2 + \alpha_3.x_3 + \cdots + \alpha_n.x_n = \beta$$

onde os x_i são variáveis em IR, é denominada de *equação linear* sobre IR.

Assim sendo, uma solução para esta equação linear será descrita como uma sequência de números n reais, não necessariamente distintos, indicados por $(b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, isto é:

$$\alpha_1.b_1 + \alpha_2.b_2 + \alpha_3.b_3 + \cdots + \alpha_n.b_n = \beta$$

Exemplo 3.10. Dada a equação linear,

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3$$

pode-se afirmar que a terna $(1, 3, 2)$ é uma solução para esta equação, pois a conclusiva $2.(1) + 3.(3) - 4.(2) = 3$ é verdadeira.

Definição 3.11. Um sistema de m equações lineares com n incógnitas $(m, n \geq 1)$ é um conjunto de equações lineares, cada uma delas com n incógnitas, consideradas simultaneamente. Um sistema linear se apresenta do seguinte modo:

$$S: \begin{cases} \alpha_{11}.x_1 + \alpha_{12}.x_2 + \alpha_{13}.x_3 + \cdots + \alpha_{1n}.x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}.x_1 + \alpha_{22}.x_2 + \alpha_{23}.x_3 + \cdots + \alpha_{2n}.x_n = \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}.x_1 + \alpha_{m2}.x_2 + \alpha_{m3}.x_3 + \cdots + \alpha_{mn}.x_n = \beta_m \end{cases}$$

Sendo que a *solução* do sistema é uma *n-upla* $(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$ de números reais, de tal maneira que esta solução é verdadeira para todas as equações lineares do sistema.

Exemplo 3.12. Dado o sistema linear,

$$S_1: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad = 3 \end{cases}$$

observe que uma solução de S_1 é $(1, 1, 2)$, por sua vez esta solução não é única, pois, a terna $(1, 1, 0)$ também é solução de S_1.

Um determinado sistema linear S é dito *Sistema homogêneo* se $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$. A n-upla $(0, 0, 0, \dots, 0)$ é denominada *solução trivial* deste sistema.

Representação matricial

Considerando o sistema,

$$S: \begin{cases} \alpha_{11}.x_1 + \alpha_{12}.x_2 + \alpha_{13}.x_3 + \cdots + \alpha_{1n}.x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}.x_1 + \alpha_{22}.x_2 + \alpha_{23}.x_3 + \cdots + \alpha_{2n}.x_n = \beta_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \alpha_{m1}.x_1 + \alpha_{m2}.x_2 + \alpha_{m3}.x_3 + \cdots + \alpha_{mn}.x_n = \beta_m \end{cases}$$

é possível analisar o sistema S na forma matricial $A.X = B$, onde são dados,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

sendo A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e B é a matriz dos termos independentes.

Matriz Ampliada do Sistema Linear

Dado um sistema linear S: $A.X = B$, a sua matriz ampliada M é definida por,

$$M = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

pode-se afirmar que A é a matriz dos coeficientes e B e a matriz dos termos independentes do Sistema Linear.

Exemplo 3.13. Considere o sistema linear,

$$S_1: \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + \ \ x_2 \qquad\ \ = 3 \end{cases}$$

pode-se verificar que sua forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e que também sua matriz ampliada M é definida por:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Sistemas Lineares Equivalentes

Definição 3.14. Se um sistema linear S_1 é obtido através de um sistema linear S através de um número finito de *operações elementares*, dizemos que S_1 é equivalente a S, e denotamos $S_1 \sim S$.

As operações elementares são definidas da seguinte maneira:

i. *Permutar* duas quaisquer equações lineares de S, denotemos: $L_i \leftrightarrow L_j$;

ii. *Multiplicar* quaisquer das equações lineares de S por um número real diferente de zero k, denotemos: $k.L_i \rightarrow L_i$;

iii. *Somar* uma das equações lineares de S com outra equação linear deste sistema, denotemos: $L_i + L_j \rightarrow L_i$.

Desta forma, qualquer sistema linear equivalente, sempre possui o mesmo conjunto solução, podendo-se observar que tal relação possui as seguintes propriedades:

i. $S \sim S_1$ (Reflexiva);

ii. $S \sim S_1 \Rightarrow S_1 \sim S$ (Simétrica);

iii. $S \sim S_1$ e $S_1 \sim S_2 \Rightarrow S \sim S_2$ (Transitiva).

Este mecanismo é extremamente útil para a procura de soluções de um sistema linear tendo em vista a sua fácil manipulação e sua intencionalidade de transformar um sistema complexo em outro mais simples e com a mesma solução.

Exemplo 3.15. Considerando o sistema linear,

$$S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

a sua solução pode ser encontrada a partir de operações elementares, como indicadas a seguir:

$$S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \qquad \begin{matrix} -2.L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -5.L_1 + L_3 \rightarrow L_3 \end{matrix} \qquad S_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_2 - x_3 = -2 \\ -5x_2 - 9x_3 = -18 \end{cases}$$

$$S_1: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_2 - x_3 = -2 \\ -5x_2 - 9x_3 = -18 \end{cases} \qquad -3.L_1 + (5).L_2 \rightarrow L_3 \qquad S_2: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -3x_2 - x_3 = -2 \\ -22x_3 = -44 \end{cases}$$

Observe que $(1, 0, 2)$ é a única solução de S, pois, também é a única solução de S_2, sendo que tais sistemas lineares são equivalentes. Por sua vez, tais operações realizadas sobre o sistema linear poderiam também ser realizadas sobre a matriz ampliada.

3.3 TEORIA DE PROBABILIDADE

Como a ideia de desencadear um estudo formal sobre a teoria da probabilidade objetivou-se nesta seção desenvolver conceitualmente as relações de variáveis aleatórias e suas respectivas propriedades. Tal teoria fundamenta-se que os eventos aleatórios não possuem *regularidade determinística*[10], isto é, certas observações só podem ser realizadas através de uma regularidade estatística. Sendo com este pensamento, este modelo probabilístico buscará a representação de eventos aleatórios concretizando em um saber importante para este trabalho.

3.3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Espaço de Probabilidade

Um Espaço de Probabilidade é certamente uma idealização matemática que busca representação de determinados fenômenos. Estes fenômenos são caracterizados por três relações básicas.

i. A existência de um conjunto Ω formado por todos os resultados possíveis de determinado evento. Denominamos Ω por *espaço amostral*;

ii. Subconjuntos do espaço amostral F, formados por eventos aleatórios mensuráveis. Denominamos F por *eventos aleatórios*;

iii. Uma função P que associará a cada evento aleatório um número real, que representará o conceito de confiança da possibilidade do evento. Denominamos a função P por *probabilidade*.

Notação: Denotamos a cardinalidade de um conjunto A por #A, e se lê “cardinalidade de A” ou “número de elementos do conjunto A”.

---

[10] Modelos determinísticos são fundamentalmente científicos e resultantes de muitos anos de pesquisa.

Nesta perspectiva, pode-se afirmar que os resultados equiprováveis de um determinado evento é o espaço amostral finito e a medida de probabilidade é proporcional à quantidade de resultados que fazem parte de um dado evento, isto é,

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega}$$

Exemplo 3.16. Considere o lançamento de dois dados distintos, sendo que para vencer uma disputa rápida certo jogador deva obter exatamente 5 na soma das faces voltadas para cima .

Neste caso temos que $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(6,5),(6,6)\}$; sendo $\#\Omega = 36$, $F = \{(1,4),(2,3),(3,2),(1,4)\}$; sendo $\#F = 4$ e

$$P(F) = \frac{\#F}{\#\Omega} = \frac{4}{36} = \frac{1}{12} \cong 8{,}3\%$$

De maneira sucinta, pode-se salientar que o Espaço Amostral e os Eventos Aleatórios estão intrinsecamente ligados, podendo afirmar que qualquer subconjunto A, do espaço amostral Ω é considerado um evento aleatório deste espaço, ao qual se atribui uma probabilidade a este evento.

Espaço de Probabilidade

Seja Ω um espaço amostral e $F_i \subset \Omega$ um evento aleatório de certo experimento. Uma medida de probabilidade P é uma aplicação $P: F_i \to R$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(P_1) $0 \leq P(F_i) \leq 1$, para todo $F_i \in \Omega$;

(P_2) $P(\Omega) = 1$;

(P_3) Se $F_1, F_2, \dots \in \Omega$ e $F_i \cap F_j \neq \emptyset$, para todo $i \neq j$ então $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Como visto nas propriedades acima o estudo dos conceitos de probabilidade é intencionalmente conduzido para ampliar a capacidade do indivíduo em elaborar um pensamento critico, com esta visão apoiar tal estudo com o apoio da ludicidade possibilita uma maior compreensão de definições, propriedades e teoremas. Essencialmente a aplicação destas três propriedades em um momento lúdico permitirá maior compreensão da temática proposta. Pois de acordo com Lopes e Rezende (2010);

> Uma outra concepção de probabilidade que pode e deve ser trabalhada no Ensino Médio é a frequentista, isto é, a definição de probabilidade obtida por um processo de experimentação e simulação, não apenas para motivar os alunos, mas como desencadeador de aprendizagem (LOPES e REZENDE 2010, p.4)

Esta experimentação e simulação objetivando a aprendizagem desenvolverão no estudante a capacidade crítica em relação ao conteúdo de probabilidade, sendo que este conteúdo se torna em determinados momentos muito interpretativo.

Toda medida probabilística P satisfaz também as seguintes propriedades:

i. $P(\emptyset) = 0$;

ii. $P(\mathrm{A}^c) = 1 - P(A)$;

iii. Se $F_1, F_2 \in \Omega$ e $F_1 \subseteq F_2$ então $P(F_1) \leq P(F_2)$;

iv. Se $F_1, F_2 \in \Omega$ e $F_1 \subseteq F_2$ então $P(F_2 \setminus F_1) = P(F_2) - P(F_1)$;

v. Para todo $F_i \in \Omega$, temos $0 \leq P(F_i) \leq 1$;

vi. Se $F_1, F_2 \in \Omega$ então $P(F_2 \cup F_1) = P(F_2) + P(F_1) - P(F_2 \cap F_1)$.

Exemplo 3.17. Considere que em uma sacola contém 15 bolas numeradas de 1 a 15 e que ao se retirar uma bola ao acaso, como se pode determinar a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?

Considere o espaço amostral Ω das 15 bolas numerados de 1 a 15.

$$\Omega = \{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \dots, \mathrm{B}_{15}\} \Longrightarrow \#\Omega = 15$$

Considere o evento aleatório F_3o conjunto de todas as bolas de Ω divisíveis por 3.

$$F_3 = \{\mathrm{B}_3, \mathrm{B}_6, \mathrm{B}_9, \mathrm{B}_{12}, \mathrm{B}_{15}\} \Longrightarrow \#F_3 = 5$$

Considere o evento aleatório F_4o conjunto de todas as bolas de Ω divisíveis por 4.

$$F_4 = \{\mathrm{B}_4, \mathrm{B}_8, \mathrm{B}_{12}\} \Longrightarrow \#F_4 = 3$$

Sendo assim:

A probabilidade de sair uma bola divisível por 3 é:

$$P(F_3) = \frac{\#F_3}{\#\Omega} = \frac{5}{15}$$

A probabilidade de sair uma bola divisível por 4 é:

$$P(F_4) = \frac{\#F_4}{\#\Omega} = \frac{3}{15}$$

A probabilidade de sair uma bola divisível por 3 e por 4 é:

$$P(F_3 \cap F_4) = \frac{\#(F_3 \cap F_4)}{\#\Omega} = \frac{1}{15}$$

Desta forma, para se determinar a ocorrência da $P(F_3 \cup F_4)$, deve-se calcular a seguinte relação:

$$P(F_3 \cup F_4) = P(F_3) + P(F_4) - P(F_3 \cap F_4)$$

$$P(F_3 \cup F_4) = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} - \frac{1}{5}$$

$$P(F_3 \cup F_4) = \frac{7}{15}$$

$$P(F_3 \cup F_4) \cong 46{,}7\%.$$

Conclusivamente a probabilidade de certa bola sorteada ser divisível por 3 ou divisível por 4 é aproximadamente de 46,7%.

Neste contexto, esta situação problema deve ser vista pelo educador como uma possibilidade de desenvolver a construção do conhecimento, devendo expressar tópicos matemáticos que se deseja estimular a relação intrínseca do ensino e aprendizagem. Estes tópicos devem ser abordados de maneira sistemática, cabendo ao educador usar técnicas que determinem resultados significativos e a intervenções que induzam a construção e reconstrução dos conceitos do conteúdo proposto. Assim de acordo com David (2008):

> Assim o jogo é utilizado como um ponto de partida e um meio para se ensinar matemática, permitindo que o aluno possa compreender o conteúdo proposto de forma dinâmica, uma vez que sua interação é maior do que se tal conteúdo fosse demonstrado de maneira tradicional. (DAVID 2008, p. 7):

É importante pautar, que em uma ação pedagógica apoiada em ferramentas lúdicas, torna-se necessário um planejamento ostensivo, para que o contexto educativo tenha significado amplo, principalmente se esta dinâmica proposta evolva conceitos probabilísticos.

3.3.2 PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

A probabilidade e a estatística se relacionam no conceito de EX - Esperança Matemática, sendo que esta é uma variável aleatória fundamentada na média dos valores assumidos por esta variável e ponderada pela probabilidade que esta variável pode assumir.

Definição 3.18. Seja uma variável discreta X que pode assumir valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ define-se a esperança de X por:

$$EX = x_1P(X = x_1) + x_2P(X = x_2) + \cdots + x_nP(X = x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_jP(X = x_j)$$

Exemplo 3.19. Considere o lançamento de um dado com seis faces distintas pode-se observar a face superior e afirmar que a Esperança Matemática é dada por:

$$EX = 1P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) + 5P(X=5) + 6P(X=6)$$
$$EX = 1.\frac{1}{6} + 2.\frac{1}{6} + 3.\frac{1}{6} + 4.\frac{1}{6} + 5.\frac{1}{6} + 6.\frac{1}{6}$$
$$EX = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}$$
$$EX = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$
$$EX = \frac{7}{2}$$

Por outra perspectiva a EX é determinada pela média dos valores assumidos, isto é:

$$EX = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6}$$
$$EX = \frac{1+2+3+4+5+6}{6}$$
$$EX = \frac{21}{6}$$
$$EX = \frac{7}{2}$$

Entretanto uma das justificativas mais importantes para se determinar tal definição esta baseada na lei dos grandes números: se $x_1, x_2, \dots, x_n$ são independentes e têm a mesma distribuição de X, então a média amostral se aproxima de EX quando fazemos n grande.

4. JOGO DE MATRIZES DE DUAS PESSOAS COM SOMA ZERO

A ação de jogar é indispensável na prática educacional, sendo que através desta o estudante desenvolve um pensamento critico capaz de participar ativamente na reconstrução e construção dos saberes. Neste capítulo abordaremos a ideologia matemática da elaboração do jogo *Roletrix* e como elencaremos elementos fundamentais que relacionam o jogo com as temáticas relacionadas com o Ensino Médio. Os Autores de Uma Introdução a Teoria dos Jogos de Brígida Alexandre Sartini, Gilmar Garbugio, Humberto José Bortolossi Polyane Alves Santos e Larissa Santana Barreto e Álgebra Linear com Aplicações de Howard Anton e Chris Rorres serão peças chaves para a elaboração desta sessão.

4.1 TEORIA DOS JOGOS

Registros remotos sobre a Teoria dos Jogos definem seu início no século XVIII, sendo que seus primeiros passos ocorreram a partir de correspondências dirigida a Nicolas Bernoulli por James Waldegrave, que analisa um jogo de cartas chamado "*le Her*". No começo do século XIX, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da Teoria dos Jogos. Já 1928, o grande matemático John Von Neumann comprovou que todo jogo finito de Soma Zero com duas pessoas possui uma solução.

Definição 4.1. Define-se como soma zero como uma referência aos jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente na perda para o outro jogador, ou seja, que a soma do ganho com as perdas sejam equivalentes à zero.

Entretanto a Teoria dos Jogos ganhou força no final da Segunda Guerra Mundial, como um ramo da matemática aplicada, pretendendo modelar os fenômenos que interagiam com dois ou mais agentes atuantes, fornecendo um sistema de tomada de decisão consciente. Neste contexto, alguns cientistas e pensadores matemáticos como, John Forbes Nash Jr. (Nascido em Bluefield, 13 de junho de 1928, Nash foi um matemático norte-americano que trabalhou em grande parte de sua vida com a teoria dos jogos, geometria diferencial e EDP – Equações diferenciais parciais), John Charles Harsanyi (Nascido em Budapeste, 29 de Maio de 1920, John foi um economista húngaro de grande sucesso, sendo que em 1994 foi congratulado com um Prémio Nobel de Economia) e Reinhard Justus Reginald Selten (Nascido em 05 de outubro 1930 , em Breslau, Reinhard é um alemão de grande renome na área de economia e matemática, junto com John Forbes Nash e John Harsanyi recebeu o Prêmio Nobel de Economia de trabalho conjunto no campo da teoria dos jogos) contribuíram de maneira significativa para o desenvolvimento desta teoria.

Figura 4.1 – John Forbes Nash Jr.

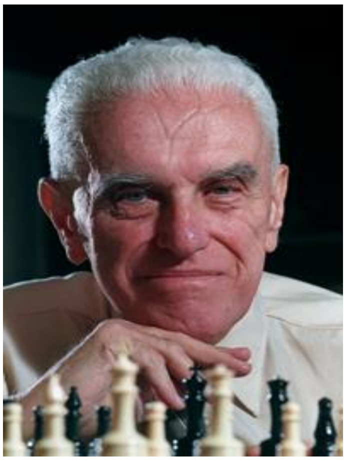


Figura 4.2 – John Charles Harsanyi.

Figura 4.3 – Reinhard Justus Reginald Selten.

Tais matemáticos estabelecem que esta teoria de modelos estude essencialmente a escolha de decisões ótimas sobre condições em que haja conflito. Devendo ser considerado os dois elementos básicos; o *conjunto de jogadores* e o *conjunto de estratégias*, sendo que estes se relacionam, gerando o perfil de todas as situações possíveis na trama do jogo. Matematicamente falando, estabeleceram a cada jogador uma função utilidade que associa um número real a cada situação do jogo.

O seu grande diferencial encontra-se em maior atratividade nas aplicações, pois o seu conceito é empregado em situações diversas como: as políticas de preço, de mercado financeiro e de expansão de mercado; as políticas de impostos e taxas; as políticas sociais e de saúde; as campanhas eleitorais e outras disputas de poder entre facções políticas; as práticas esportivas dentre outras aplicações.

Apoiado em algumas das afirmativas propostas na teoria dos jogos, o *Roletrix* estará apoiado em conflitos de interesse, é de fundamental importância citar que os fins desta manipulação lúdica envolvem diretamente o tipo de estratégias dos jogadores e a determinação da melhor estratégia a ser tomada pelos jogadores, dado o cenário que o mesmo apresenta.

4.2 TEORIA DOS JOGOS: UMA APLICAÇÃO MATRICIAL

Para relacionar os conceitos básicos da Teoria dos Jogos com os conceitos matriciais e probabilísticos, considere o jogo *Roletrix*, *que* consiste inicialmente em uma aplicação bastante parecida aos de parque de diversão, em que a uma disputa de dois jogadores com o objetivo de obter lucros, isto é, ganhar de seu adversário uma determinada quantia em dinheiro. Essencialmente, utiliza duas figuras circulares dividida em setores e numeradas, isto é, cada jogador possui uma roda estacionária que possui um ponteiro móvel fixada em seu centro, em alguns lugares este "jogo de azar"[11] é denominado de *Roleta*.

Estas *Roletas*, mesmo sendo uma infração penal[12] por se tratar de um jogo de azar, pois relacionam com apostas em dinheiro são naturalmente encontradas em parques de diversões e também em grandes festas e eventos. Por sua vez, o *Roletrix* é uma versão lúdica, modificada pelo autor.

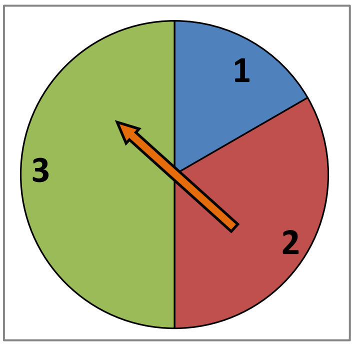


Figura 4.4 – Roleta do jogo *Roletrix*

Distinguiremos duas versões do jogo Roletrix distintas que serão explicadas a seguir.

4.2.1 JOGO *ROLETRIX*: PRIMEIRA VERSÃO, ESTRATÉGIAS FIXAS

Considere as seguintes regras para o *Roletrix,* primeira versão:

Regra 01 – O jogo terá dois participantes ativos; o J*ogador A* e o *Jogador* B e um participante inativo o *Mediador*, que é escolhido para conseguir acordar ou realizar conciliações entre participantes ativos do jogo.

---

[11] São atividades que dependem da sorte ou da infelicidade dos participantes, e seu objetivo principal é obter vantagem sobre o adversário, por sua vez, o *Roletrix* não dependerá apenas da sorte, mas como também de ótimas estratégias pré-elaboradas.

[12] Lei das Contravenções Penais - DL-003.688-1941 Art. 50 - Estabelecer ou explorar jogo de azar em lugar público ou acessível ao público, mediante o pagamento de entrada ou sem ele:
Pena - prisão simples, de 3 (três) meses a 1 (um) ano, e multa, estendendo-se os efeitos da condenação à perda dos móveis e objetos de decoração do local.

Regra 02 – Cada jogador possuirá n fichas (ou créditos) iniciais para permuta no jogo. Para melhor entendimento do leitor considere $n = 20$.

Regra 03 – Cada jogador possuirá uma roleta individual subdividida em setores fixos e numerados.

Considere a Figura 4.5 como a roleta linha do J*ogador A* e a Figura 4.6 como a roleta coluna do J*ogador B* (a roleta linha e coluna indicarão futuramente matrizes linha e coluna). A denominação roleta linha e roleta coluna indicada para o primeiro e para o segundo jogador respectivamente determinará futuramente em uma tabela compensação um vetor linha e um vetor coluna.

Observe que a roleta linha do J*ogador A* foi dividida em quarto setores, numerando-os 1, 2, 3 e 4. A roleta coluna do J*ogador B* também foi dividida em 4 setores, numerando-os 1, 2, 3 e 4. Cada setor foi dividido correspondendo a uma área fracionária do setor circular como mostram as figuras a seguir.

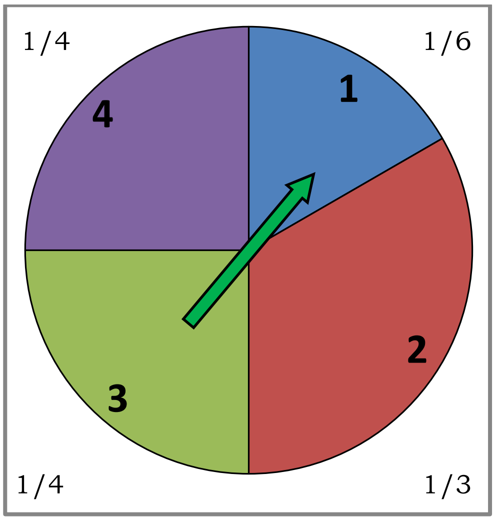


Figura 4.5 – Roleta linha do *Jogador A.*

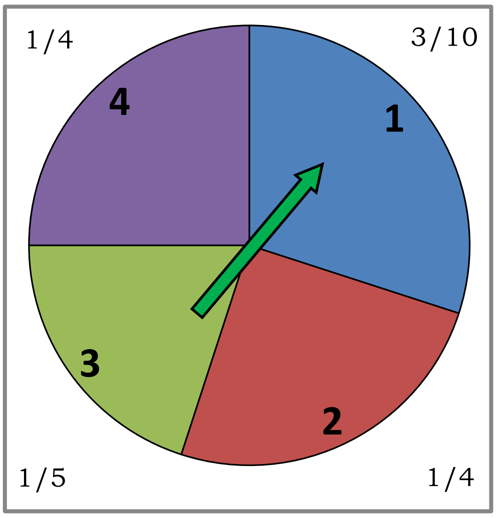


Figura 4.6 – Roleta coluna do *Jogador B.*

Regra 04 – Para dar seus lances cada um dos jogadores devem girar o ponteiro de sua roleta até que a mesma pare em um setor indicado pelas numerações, sendo que o número indicado pelo setor é denominado *movimento do jogador*.

Com esta regra, J*ogador A* possui 4 movimentos e o *Jogador B* possui 4 movimentos distintos. Observe que a quantidade de movimentos dos dois jogadores pode ser diferente, pois os movimentos estão relacionados à quantidade de setores.

Regra 05 – Um giro é realizado por cada jogador participante a cada rodada, sendo realizadas no máximo 10 rodadas por partida. Observando que a pontuação por rodada será obtida de acordo com uma tabela pré-estabelecida pelo *Mediador* como o exemplo dado na Tabela 4.1.

Regra 06 – A combinação *Linha* × *Coluna* indicará a pontuação transferida do J*ogador A* para o J*ogador B*, ou vise versa, de acordo com as seguintes condições:

Caso tal combinação dê um valor r positivo, isso indicará a transferência de r fichas (ou créditos) do J*ogador B* para o J*ogador A.*

Caso tal combinação dê um valor s negativo, isso indicará a transferência de s fichas (ou créditos) do J*ogador A* para o *Jogador B.*

Caso tal combinação dê um valor igual à zero, isso indicará que não existir a transferência de fichas (ou créditos) entre os jogadores.

Tabela 4.1 – Tabela de Compensação do jogo *Roletrix*.

		Movimento do Jogador B			
		1	**2**	**3**	**4**
Movimento do Jogador A	**1**	-6	4	3	-2
	2	6	7	5	8
	3	1	-3	-4	-5
	4	2	-8	-1	-7

Regra 07 – Vencerá a partida o jogador que possuir mais fichas (ou créditos) ao final das 10 rodadas ou aquele que obtiver em qualquer momento em sua posse $2n$ fichas (ou créditos).

Exemplo 4.2. Como o jogo é realizado por rodada, os jogadores deverão girar suas roletas simultaneamente e rodada por rodada devem somar os pontos obtidos de acordo com a Tabela 4.1, até serem passados no máximo 10 rodadas.

Assim, considerando que foram entregues 20 fichas para cada jogador e roletas distintas como as das Figuras 4.5 e 4.6. Suponha:

1° Rodada

O J*ogador A,* gira sua roleta linha e a mesma para no setor 1, isso indicará que o realizou o *movimento 1.*

O J*ogador B*, gira sua roleta coluna e a mesma para no setor 2, isso indicará que o realizou o *movimento 2.*

Gerando por sua vez uma combinação *Linha* × *Coluna* que deverá ser observada na Tabela 4.1, isto é, tal combinação L*inha 1* × *Coluna 2,* indica uma pontuação de 4 fichas (ou créditos), que pela regra 06 o *Jogador B* deverá transferi-la ao *Jogador A.*

Portanto ao final da primeira rodada tem-se a seguinte situação:

- ✓ O *Jogador A* possui 24 fichas (ou créditos).
- ✓ O *Jogador B possui* 16 fichas (ou créditos).

2° Rodada

O J*ogador A,* gira novamente sua roleta linha e a mesma para no setor 3, isso indicará que o realizou o *movimento 3.*

O J*ogador B,* gira novamente sua roleta coluna e a mesma para no setor 4, isso indicará que o realizou o *movimento 4.*

Gerando por sua vez outra combinação *Linha* × *Coluna* que deverá ser observada na Tabela 4.1, isto é, tal combinação *Linha 3* × *Coluna 4*, indica uma pontuação de -5 fichas (ou créditos), que pela regra 06 o *Jogador A* deverá transferi-la ao *Jogador B.*

Portanto ao final da segunda rodada tem-se a seguinte situação:

- ✓ O *Jogador A* possui 19 fichas (ou créditos).
- ✓ O *Jogador B possui* 21 fichas (ou créditos).

Desta forma, as entradas positivas na tabela determinarão os ganhos do *Jogador A* e as perdas do *Jogador B* e as entradas negativas na tabela determinarão os ganhos do *Jogador B* e as perdas do *Jogador A.*

Suponha que, depois de oito rodadas têm-se a seguinte situação:

Tabela 4.2 – Modelo de tabela controle do jogo *Roletrix*.

			Fichas (ou Créditos)	
			Jogador A	*Jogador B*
Inicio			20	20
1° Rodada	*Linha 1* × *Coluna 2*	4	24	16
2° Rodada	*Linha 3* × *Coluna 4*	-5	19	21
3° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 1*	6	25	15
4° Rodada	*Linha 4* × *Coluna 3*	-1	24	12
5° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 1*	6	30	10
6° Rodada	*Linha 3* × *Coluna 3*	-4	24	16
7° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 1*	6	30	10
8° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 2*	7	37	03
8° Rodada	*Linha 1* × *Coluna 2*	4	40	0

Como pela regra 07 vencerá a partida o jogador que possuir em qualquer momento a posse 40 fichas (ou créditos), tem-se que o *Jogador A* obteve na oitava rodada todas as fichas (ou créditos) se sagrando o vencedor da partida.

Observe que nesta versão, os jogadores não tem controle sobre os seus movimentos, sendo estes determinados em parte pela sorte. Contudo, se o jogador pudesse decidir sobre a variação dos setores de sua roleta, teria de certa maneira, controle sobre os *movimentos*, podendo então escolher estratégias de modo que aperfeiçoe sua chance de vencer o jogo.

4.2.1.1 JOGO DE MATRIZES DE DUAS PESSOAS COM SOMA ZERO

O jogo descrito no item anterior é um exemplo que satisfaz as condições referentes à Teoria dos jogos que se fundamenta nos Jogo de Matrizes de Duas Pessoas com Soma Zero. Tais jogos consistem em armazenar todas as possíveis sequências de lances que podem ocorrer e o pagamento ao final de cada sequência. De acordo com Rorres (2001):

> [...] O termo "soma zero" significa que a cada vez que é jogado, o ganho positivo de um jogador, é igual ao ganho negativo (perda) do outro jogador. Ou seja, a soma dos dois ganhos é zero. O termo "jogo de matriz" é utilizado para descrever um jogo de duas pessoa no qual cada jogador tem somente um número finito de movimentos, de modo que todos os possíveis resultados de cada jogada, e os correspondentes ganhos dos jogadores, podem ser arranjados em formato tabular ou matricial [...].(RORRES 2001, p.406)

Neste jogo em questão, existem m movimentos possíveis para um jogado e n movimentos possíveis para o outro jogador. Sendo que em uma rodada do jogo, cada jogador irá fazer apenas um de seus movimentos possíveis para que seja feita a compensação entre os jogadores.

Seja a_{ij} a compensação do *Jogador B* para o *jogador A*, tal que $i = 1, 2, 3, \dots, m$ e $j = 1, 2, 3, \dots, n$; tal que o *Jogador A* realiza o movimento i e o *Jogador B* realiza o movimento j. Assim, podem-se arranjar estas $m.n$ compensações em uma formato de uma matriz de ordem $m \times n$, a qual a denomina-se de *matriz compensação*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

É evidente que cada jogador realize seus *movimentos* com certos conceitos probabilísticos. Como estes se encontram baseados em um setor de uma área circular, estão associados de maneira direta a uma probabilidade correspondente. Como visto na Figura 4.5, onde *Jogador A* possui um sexto de chance de efetuar o *movimento 1*, um terço de chance de efetuar o *movimento 2*, um quarto de chance de efetuar o *movimento 3* e um quarto de chance de efetuar o *movimento 4*.

Definição 4.3. Sejam p_i e q_j as probabilidades do *Jogador A* e do *Jogador B* realizarem seus respectivos movimentos, pode-se afirmar que:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m = 1$$

e

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = 1$$

Com as probabilidades p_i e q_j são formados dois vetores:

$$p = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \cdots \quad p_m)$$

e

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Denominados de *vetor linha* p a estratégia do *Jogador A* e *vetor coluna* q a estratégia do *Jogador B*. Nesta perspectiva de acordo com as Figura 4.5 e a Figura 4.6 tem-se:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

e

$$\frac{3}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = 1$$

Com probabilidades,

$$p = (1/6 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad 1/4\,)$$

e

$$q = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Como visto acima o *vetor linha* e o *vetor coluna* são vetores constituídos das probabilidades relacionadas aos setores escolhidos de forma aleatória. Com efeito, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997b), estabelecem que a principal finalidade para o estudo de probabilidade.

> [...] é a de que o aluno compreenda que grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos. (BRASIL, 1997b, p. 56)

Nesta perspectiva, torna-se necessário que o estudante consiga interpretar e compreender o mundo que o rodeia, com uma visão probabilística de determinados eventos que possuem natureza aleatória. Desta maneira, suas estratégias de interagir com tal mundo deixariam de se manifestar intuitivamente e passaria a ser realizada pela identificação de resultados equiprováveis.

Esta manipulação lúdica fundamentada pela Teoria de Probabilidade deixa claro que p_i é a probabilidade do *Jogador A* realizar o movimento i, independentemente, q_j será a probabilidade do *Jogador B* realizar o movimento j. Sem que a relação de p_i e q_j nada mais é que a probabilidade em uma ocorrência qualquer do jogo realizada pelo movimento simultâneo dos dois jogadores, sendo que a compensação realizada entre os jogadores é estabelecida pela entrada matricial a_{ij}.

Sendo que a M*édia Ponderada*[13] das compensações, que é definida pelo somatório da multiplicação de cada possível compensação por sua respectiva probabilidade, estabelecerá o ressarcimento ao *Jogador A*:

$$\sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\substack{m\\n}} a_{ij}.p_i.q_j = a_{11}.p_1.q_1 + a_{12}.p_1.q_2 + \cdots + a_{1n}.p_1.q_n + a_{21}.p_2.q_1 + \cdots + a_{mn}.p_m.q_n$$

Na Teoria das probabilidades esta *Média Ponderada* é denominada de *Esperança Matemática* ou C*ompensação Esperada* para o *Jogador A*, ou seja, se o jogo é realizado muitas vezes, a compensação média por jogada gratificada ao *Jogador A* ao longo das rodadas é indicada por tal expressão.

Notação: Para melhor interpretação dos dados denota-se a *Esperança Matemática* pela simbologia $E(p,q)$, que se equivale a média da compensação esperada pelo *Jogador A*, a cada rodada. E que $-E(p,q)$ será a compensação esperada ao *Jogador B.*

Cabe enfatizar que a $E(p,q)$ estará em função das estratégias estabelecidas por cada jogador, ou seja, as áreas setoriais de sua roleta.

Logo, pela definição de matriz compensação A e das estratégias p e q, pode-se afirmar que a $E(p,q)$ pode ser expressa na forma matricial:

$$E(p,q) = (p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad \cdots \quad p_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = pAq = \sum_{\substack{j=1\\i=1}}^{\substack{m\\n}} a_{ij}.p_i.q_j$$

Exemplo 4.4. Considerando ainda a Figura 4.5, a Figura 4.6 e Tabela 4.1 é evidente que existirá assim uma compensação esperada ao *Jogador A*, sendo que tal compensação deve ser descrita por tais elementos:

[13] A Média aritmética ponderada leva em consideração o fato de alguns valores a ser medidos podem ter pesos diferentes, sendo que uma observação mais minuciosa pode-se verificar que $\sum p_i.q_j = 1$.

Pela Figura 4.5 tem-se:

$$p = (1/6 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad 1/4\,)$$

Pela Figura 4.6 tem-se:

$$\mathrm{q} = \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Pela Tabela 4.1 tem-se:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Desta maneira a $\mathrm{E(p,q)}$ será estimada por:

$$\mathrm{E(p,q)} = (1/6 \quad 1/3 \quad 1/4 \quad 1/4\,)\begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/4 \\ 1/5 \\ 1/4 \end{pmatrix} \cong (0{,}60417)$$

Portanto, a cada jogada o *Jogador A* tem a esperança de receber do *Jogador B* aproximadamente $0{,}60417$ fichas (ou créditos).

Na sequência veremos a segunda versão do jogo *Roletrix*, manipulando estratégias. Sendo que este se diferencia da primeira versão, pois estimula a competitividade estratégia no conceito que os jogadores podem escolher os setores (as probabilidades) para iniciar o jogo.

4.2.2 JOGO *ROLETRIX*: SEGUNDA VERSÃO, MANIPULANDO ESTRATÉGIAS

Considere as seguintes regras para o *Roletrix,* segunda versão:

Regra 01 – O jogo terá dois participantes ativos; o J*ogador A* e o *Jogador* B e um participante inativo o *Mediador*, que é escolhido para conseguir acordar ou realizar conciliações entre participantes ativos do jogo.

Regra 02 – Cada jogador possuirá n fichas (ou créditos) iniciais para permuta no jogo.

Regra 03 – Cada jogador possuirá uma roleta individual subdividida em setores móveis[14] e numerados.

Regra 04 – Cada jogador deverá escolher de "*maneira esperta*"[15] as áreas dos setores circulares de sua roleta sem que o outro jogador a veja, de acordo com sua conveniência, respeitando o mínimo de 10% e o máximo de 90% da totalidade.

Regra 05 – Para dar seus lances cada um dos jogadores devem girar o ponteiro de sua roleta até que a mesma pare em um setor indicado pelas numerações, sendo que o número indicado pelo setor é denominado *movimento do jogador.*

Regra 06 – Um giro é realizado por cada jogador participante a cada rodada, sendo realizadas no máximo 10 rodadas por partida. Observando que a pontuação por rodada será obtida de acordo com uma tabela pré-estabelecida pelo *Mediador*, como o exemplo da Tabela 4.1.

Regra 07 – A combinação *Linha* $\times$ *Coluna* indicará a pontuação transferida do J*ogador A* para o J*ogador B*, ou vise versa, de acordo com as seguintes condições:

Caso tal combinação dê um valor r positivo, isso indicará a transferência de r fichas (ou créditos) do J*ogador B* para o J*ogador A.*

Caso tal combinação dê um valor s negativo, isso indicará a transferência de s fichas (ou créditos) do J*ogador A* para o *Jogador B.*

Caso tal combinação dê um valor igual à zero, isso indicará que não existirá a transferência de fichas (ou créditos) entre os jogadores.

Regra 08 – Vencerá a partida o jogador que possuir mais fichas (ou créditos) ao final das 10 rodadas ou aquele que obtiver em qualquer momento em sua posse $2n$ fichas (ou créditos).

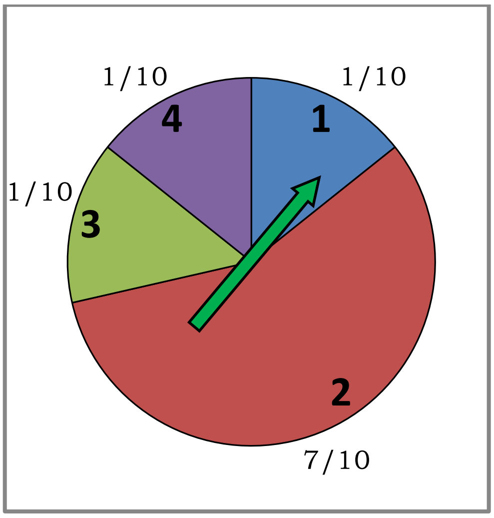
O que diferencia a segunda versão da primeira versão do jogo *Roletrix*, é basicamente a inserção de nova regra, que autoriza os jogadores escolhem a formatação de sua roleta, possibilitando assim a cada jogador elaborar um plano de ação para vencer o jogo.

Exemplo 4.5. Fundamentando no Exemplo 4.1 e no *Roletrix* segunda versão, suponha que agora cada jogador poderá alterar o setor de sua roleta sem que seu oponente a tenha conhecimento. Suponha que o *Jogador A* jogue de maneira "esperta" e que o *Jogador B* não assim o faça. Desta maneira os jogadores posicionarão sua roleta do seguinte modo:

---

[14] A ideia de setores móveis pressupõe que os jogadores poderão alterar a área de cada setor, isto é, movendo os raios da circunferência.

[15] Pressupõe uma melhor estratégia para se vencer o jogo.



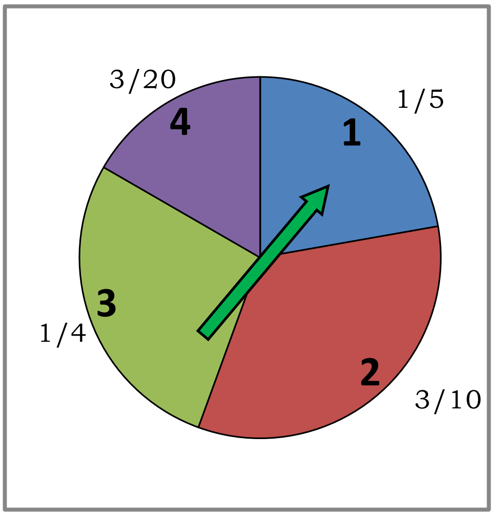


Figura 4.7 – Roleta "esperta" do *Jogador A*. Figura 4.8 – Roleta "não esperta" do *Jogador B*

Como o jogo é realizado por rodada, os jogadores deverão girar suas roletas simultaneamente e rodada por rodada devem somar os pontos obtidos de acordo com a Tabela 4.1, até serem passados no máximo 10 rodadas. Observe que é função do *Mediador* estabelecer determinadas condições para início do jogo.

Assim, como suposto, temos 20 fichas para cada jogador e roletas distintas. Segue:

1° Rodada

O *Jogador A*, gira sua roleta linha e a mesma para no setor 2, isso indicará que o realizou o *movimento 2*.

O *Jogador B*, gira sua roleta coluna e a mesma para no setor 2, isso indicará que o realizou o *movimento 2*.

Gerando por sua vez uma combinação *Linha* × *Coluna* que deverá ser observada na Tabela 4.1, isto é, tal combinação L*inha 2* × *Coluna 2*, indica uma pontuação de 7 fichas (ou créditos), que pela regra 07 o *Jogador B* deverá transferi-la ao *Jogador A*.

Portanto ao final da primeira rodada tem-se a seguinte situação:

- ✓ O *Jogador A* possui 27 fichas (ou créditos).
- ✓ O *Jogador B possui* 13 fichas (ou créditos).

2° Rodada

O *Jogador A*, gira novamente sua roleta linha e a mesma para no setor 1, isso indicará que o realizou o *movimento 1*.

O J*ogador B,* gira novamente sua roleta coluna e a mesma para no setor 3, isso indicará que o realizou o *movimento 3*.

Gerando por sua vez outra combinação *Linha* × *Coluna* que deverá ser observada na Tabela 4.1, isto é, tal combinação *Linha 1* × *Coluna 3,* indica uma pontuação de 3 fichas (ou créditos), que pela regra 07 o *Jogador B* deverá transferi-la ao *Jogador A.*

Portanto ao final da segunda rodada tem-se a seguinte situação:

- ✓ O *Jogador A* possui 30 fichas (ou créditos).
- ✓ O *Jogador B possui* 10 fichas (ou créditos).

Desta forma, suponha que, depois de cinco rodadas têm-se a seguinte situação:

Tabela 4.3 – Tabela controle do jogo *Roletrix*.

			Fichas (ou Créditos)	
			Jogador A	*Jogador B*
Inicio			20	20
1° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 2*	5	27	13
2° Rodada	*Linha 1* × *Coluna 3*	3	30	10
3° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 1*	6	36	04
4° Rodada	*Linha 4* × *Coluna 3*	-1	35	05
5° Rodada	*Linha 2* × *Coluna 3*	5	40	00

Como pela regra 08 vencerá a partida o jogador que possuir em qualquer momento a posse 40 fichas (ou créditos), tem-se que o *Jogador A* obteve na quinta rodada todas as fichas (ou créditos) se sagrando o vencedor da partida.

Pondere que nesta versão, como um dos jogadores conhecia uma estratégia inteligente, conseguiu de maneira inteligente aumentar a probabilidade de vencer a partida e vencendo mais rápido, sendo feito através da indução de certo movimento a partir das mudanças probabilísticas de cada setor de sua roleta.

4.2.2.1 TEOREMA FUNDAMENTAL DOS JOGOS COM SOMA ZERO

Nesta sessão, o conceito básico do jogo *Roletrix* irá permanecer, entretanto, a situação do jogo irá ser alterada pelo fato que os jogadores poderão escolher estratégias para vencer.

Esta estratégia estará apoiada na escolha da área de sua roleta, ou seja, cada jogador poderá redimensionar a área de sua roleta de maneira mais adequada, de tal forma que apenas o jogador tenha conhecimento de sua tática com o objetivo de controlar as probabilidades da natureza de seus *movimentos*. Esta mudança altera qualitativamente a modalidade do jogo, o inserindo fielmente na Teoria dos Jogos.

Este Teorema Fundamental[16] pode ser aplicado em jogos onde se têm um adversário, como por exemplo, Xadrez, Dama e Jogo da Velha.

Valorizando que nesta seguinte conjectura, os jogadores pretenderão buscar escolher a melhor estratégia para vencer o jogo, tem-se que o *Jogador A* pretenderá escolher uma estratégia p de tal forma que $E(p,q)$ seja a maior possível em relação à estratégia q escolhida pelo *Jogador B*, em contraposto, *Jogador B* também buscará escolher uma estratégia q de tal modo que $E(p,q)$ reduza o máximo possível em relação à estratégia p escolhida pelo *Jogador A*. Em poucas palavras busca-se:

Maximizar o ganho supondo que seu adversário buscará o minimizar.

Para estabelecer a existência de tais estratégias, iremos fundamentar as argumentações Teorema 4.6[17].

Teorema 4.6. Para quaisquer p e q estratégias, existem p' e q' tais que:

$$E(p',q) \geq E(p',q') \geq E(p,q')$$

As estratégias p' e q' do Teorema 4.6 são as melhores possíveis que o *Jogador A* e o *Jogador B* podem assumir respectivamente. Sendo que $E(p',q')$ será a compensação esperada em que ambos os jogadores escolhem, a melhor estratégia.

A desigualdade do Teorema 4.6 nos descreve que:

$$E(p',q) \geq E(p',q') \text{ para qualquer estratégia de } q$$

Em outras palavras, isso determina que o *Jogador A* poderá escolher uma estratégia p' de tal forma que independentemente da estratégia escolhida pelo *Jogador B* a sua compensação esperada nunca será menor que $E(p',q')$.

Por outro lado, não é impossível que o *Jogador A* apenas tenha uma compensação maior que $E(p',q')$. Pois, suponha por absurdo que exista uma estratégia p'' para o *Jogador A* de modo que:

$$E(p'',q) > E(p',q') \text{ para qualquer estratégia de } q$$

---

16 Também conhecido na Teoria dos Jogos como *Teorema Minimax*, o qual existirá sempre uma solução estratégica para um conflito bem estabelecido entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos.

17 A prova geral envolve ideias da Teoria da Programação Linear, que será omitida.

Em particular como esta afirmação seria válida para qualquer estratégia de q, até mesmo para a melhor estratégia q' do *Jogador B*, esta também seria verdadeira, isto é:

$$E(p'', q') > E(p', q')$$

Logo, tal afirmativa entraria em contradição com o Teorema 4.6.

Desta forma, o melhor que o *Jogador A* pode fazer é impedir que sua *compensação esperada* caísse abaixo da estimativa de $E(p', q')$, ou seja, o *Jogador A* tem a estratégia limitar sua *compensação esperada* inferiormente a equivalência de $E(p', q')$.

Analogamente, o melhor que o *Jogador B* pode fazer é garantir que sua compensação esperada tenha pelo menos um valor igual a $E(p', q')$.

Definição 4.7. Se p' e q' são estratégias tais que $E(p', q) \geq E(p', q') \geq E(p, q')$ para quaisquer estratégias p e q, então:

i. p' é chamada de *estratégia ótima do Jogador A;*

ii. q' é chamada de *estratégia ótima do Jogador B;*

iii. A compensação $E(p', q')$ é chamada de *valor do jogo.*

Um fato que deve ser ressalvado pela Definição 4.7 é que as estratégias ótimas não são necessariamente únicas, contudo para quaisquer pares de estratégias ótimas p', p'' e q', q'' dos jogadores tem-se que:

$$E(p', q') = E(p'', q'')$$

O *valor do jogo*, contudo, será a *compensação esperada* mínima para o *Jogador A*. Desta maneira, para estabelecerem-se quais são as estratégias ótimas deve-se encontrar as matrizes p' e q' que satisfaçam[18] o Teorema 4.6.

Definição 4.8. Uma entrada a_{rs} de uma matriz compensação A é chamada de *ponto de sela* se as seguintes afirmativas forem verificadas:

i. a_{rs} é a menor entrada em sua linha;

ii. a_{rs} é a maior entrada em sua coluna.

---

[18] Na maioria das vezes para encontrarmos tais matrizes que satisfaçam o Teorema 4.6 usa-se técnicas de Programação Linear, por sua vez, a discursão terá como foco um caso especial que podem ser encontrado usando técnicas mais elementares.

O jogo cuja *matriz compensação* tenha um *ponto de sela* é denominado *estritamente determinado* o qual neste presente trabalho é o caso especial a ser analisado e discutido como proposta do jogo *Roletrix* em sua segunda versão.

Exemplo 4.9. Considerando as matrizes,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 37 & 24 & 27 \\ 12 & 23 & -17 \\ 34 & -23 & 14 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pode-se verificar facilmente de acordo com a Definição 4.8 que os *pontos de sela* são:

A matriz *A* possui *ponto de sela* $a_{23} = -1$,

A matriz *B* possui *ponto de sela* $b_{12} = 24$,

A matriz C não *possui ponto* de sela.

Definição 4.10. Se uma matriz qualquer possui um *ponto de sela* a_{rs}, então se pode determinar as estratégias ótimas p' e q' para os jogadores *A* e *B*, a partir da seguinte proposição:

$$p' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \underset{\substack{\uparrow \\ r\text{-ésima entrada}}}{1} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$q' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow s\text{-ésima entrada} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Isto mostra que para o *Jogador A*, a estratégia ótima que deve ser considerada é admitir que todas as entradas sejam nulas com exceção da *r-ésima* entrada que deverá ser igual a 1. Por outro lado, para que *Jogador B* busque a estratégia ótima deve considerar todas as entradas sejam nulas com exceção da *s-ésima* entrada e deverá ser igual a 1.

No jogo *Roletrix* em sua segunda versão, esta teoria se modela de forma estrutural no que se diz respeito às estratégias ótimas. Pensando que cada jogador deverá encontrar uma estratégia ótima para estabelecer melhores ganhos no jogo, a ideia de *ponto de sela* com estratégia dará base aos jogadores em suas partidas.

Observe que este *ponto de sela* induz que as *r-ésima* e *s-ésima* entradas das estratégias ótimas devem ser iguais a 1, entretanto, no jogo *Roletrix*, em sua segunda versão, não permite que pela Regra 04 que exista entradas nulas, ou seja, cada entrada deverá ter um valor que pertence a um intervalo de 10% a 90% do círculo.

Esta regra impede que os jogadores possam executar a estratégia ótima dada pela Definição 4.8, por sua vez, cada jogador deverá buscar se aproximar o máximo da estratégia ótima com seguinte raciocínio:

- ✓ Maximizar a área referente a *r-ésima* (ou *s-ésima*) entrada.
- ✓ Minimizar as áreas não referentes a *r-ésima* (ou *s-ésima*) entradas.

Com esta ideia, o melhor que o *Jogador A* pode fazer é que sua compensação mínima aproximar-se superiormente que sua *compensação esperada* e consequentemente o melhor que o *Jogador B* pode fazer é garantir que sua *compensação esperada* tenha pelo menos um valor próximo a esta compensação mínima do *Jogador A*.

Exemplo 4.11. Considerando o Exemplo 4.4 é possível encontrar o *ponto de sela* da *matriz compensação A,* observado na Tabela 4.1, isto é:

$$a_{rs} = a_{23} = 5$$

Como foi suposto que o *Jogador A*, jogue de maneira esperta, este se baseou na melhor estratégia para aperfeiçoar seus ganhos:

- ✓ Maximizar a área referente à segunda entrada e
- ✓ Minimizar as áreas referentes à *primeira, a terceira e quarta* entradas.

Enquanto o *Jogador B* não estabeleceu estratégia para manipular suas áreas, o fazendo de maneira aleatória.

Com estas argumentações, tem-se:

Pela Figura 4.7 o respectivo *vetor linha*:

$$p = (1/10 \quad 7/10 \quad 1/10 \quad 1/10\,)$$

Pela Figura 4.8 o respectivo *vetor coluna*:

$$q = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/10 \\ 1/4 \\ 3/20 \end{pmatrix}$$

Pela Tabela 4.1 a respectiva *matriz compensação*:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

Desta maneira a $E(p, q)$ será estimada por:

$$E(p, q) = (1/10 \quad 7/10 \quad 1/10 \quad 1/10)\begin{pmatrix} -6 & 4 & 3 & -2 \\ 6 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & -3 & -4 & -5 \\ 2 & -8 & -1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/10 \\ 1/4 \\ 3/20 \end{pmatrix} \cong (3{,}495)$$

Portanto, a cada jogada o *Jogador A* tem a esperança de receber em média do *Jogador B* aproximadamente $3{,}495$ fichas (ou créditos). Aumentando significativamente seus ganhos ao comparar-se com o ganho no Exemplo 4.4 que foi de $0{,}60417$ fichas (ou créditos).

É aconselhável que o educador conduza suas atividades de forma executável, isto é, que os procedimentos que necessitam de cálculo não sejam prejudiciais ao entendimento da aplicação. Desta maneira, é de extrema importância que o professor organize atividades que explore o tema proposto de modo que ocorra um excelente aproveitamento de sua turma.

Contudo, na tentativa de estimular os estudantes a obterem uma visão crítica e um melhor aproveitamento das atividades é perspicaz que o educador aproveite todos os recursos disponíveis, como por exemplo, *software Winmat*[19] para verificar as operações com as matrizes.

[19] O Winmat é um software de domínio público, disponível no site: http://www.es.iff.edu.br/softmat/softw/winmat.html. Este aplicativo possibilita o usuário criar diversas matrizes de uma única vez nomeando-as com as letras do alfabeto, escalonar matrizes quadradas, somar, subtrair, multiplicar matrizes, calcular determinantes dentre outras possiblidades.

4.4 PRODUTO EDUCACIONAL

Como produto educacional resultante dessa dissertação foi elaborado uma ferramenta de auxilio educacional, o ROLETRIX, para ampliar as possibilidades educacionais do professor em sala de aula. Com esta ferramenta o educador pode estabelecer estratégias para que os conceitos de matriz e probabilidade sejam aplicados de maneira mais prática no cotidiano do aluno. Este jogo foi pensado com intuito de desenvolver a capacidade do entendimento das aplicações matriciais e conceitos probabilísticos que em determinados momentos ficam apenas num teor teórico.

Busca-se nesta etapa do trabalho estabelecer um instrumento motivador para o educando e o educador, competentemente fundamentado nos objetivos educacionais. Em particular na Teoria das Matrizes e Probabilidade que são desenvolvidas no Ensino Médio.

ROLETRIX

Participantes:

- 2 Jogadores;
- 1 Mediador.

Material:

- 36 Setores Circulares brancos numerados por 1;
- 36 Setores Circulares vermelhos numerados por 2;
- 36 Setores Circulares rosas numerados por 3;
- 36 Setores Circulares verdes numerados por 4;
- 36 Setores Circulares azuis e numerados por 5;
- 1 Tabela Controle;
- 2 Bases de Apoio;
- 8 Tabelas Compensações;
- Piloto e Apagador.

Objetivo

- O ROLETRIX é um jogo de estratégia, cujo objetivo do jogo é possuir no final de 10 rodadas o maior número de créditos do que seu adversário ou aquele que em qualquer momento obtiver em sua posse todos os créditos.

Regras

- Cada Jogador possuirá exatamente 20 créditos iniciais para permuta no jogo.
- Cada Jogador possuirá uma Base de Apoio;
- É função do *Mediador,* definir:
  - ✓ A escolha de Tabela Compensação;
  - ✓ Quais são os Setores Circulares que cada Jogador deverá escolher, fundamentada na Tabela Compensação;
  - ✓ Controlar os créditos detidos por cada Jogador na Tabela Controle;
- Cada Jogador deverá preencher sua Base de Apoio usando todos os tipos dos Setores Circulares escolhidos pelo Mediador;
- Para efetuar as compensações os Jogadores devem girar o ponteiro de sua roleta até que a mesmo pare em um setor indicado pelas numerações, sendo que os números indicados por tal movimento deverá ser observado pelo Mediador da partida.
- Um giro é realizado por cada jogador participante a cada rodada, sendo realizadas no máximo 10 rodadas por partida;
- A combinação *Linha* × *Coluna* indicará a pontuação transferida do *Jogador A* para o *Jogador B*, ou vise versa, de acordo com as seguintes condições:
  - ✓ Caso tal combinação dê um valor r <u>positivo</u>, isso indicará a transferência de r créditos do *Jogador B* para o *Jogador A;*
  - ✓ Caso tal combinação dê um valor s <u>negativo</u>, isso indicará a transferência de s créditos do *Jogador A* para o *Jogador B;*
  - ✓ Caso tal combinação dê um valor igual à <u>zero</u>, isso indicará que não existirá a transferência de créditos entre os jogadores.
- Vencerá a partida o jogador que possuir mais créditos ao final das 10 rodadas ou aquele que obtiver em qualquer momento em sua posse 40 créditos.

Regras Suplementares

- Em caso de equivalência de créditos ao término das 10 rodadas o Mediador realizará uma nova partida para determinar o vencedor.

O MDF[20] foi o material escolhido para efetuar a confecção deste jogo, pois apresenta uma boa resistência e uma ótima estabilidade, sendo possível obter excelentes acabamentos, destacando a possibilidade de ser pintado, cortado e lixado. O custo de fabricação do jogo *Roletrix*, como modelado abaixo é relativamente baixo, pois, quase todo o jogo foi feito manualmente. Devido a isso, temos R$ 25,00 pago pelo corte das peças indicadas com suas respectivas dimensões, R$ 18,00 gastos em tinta látex para madeira e três tubos de cores primárias e R$ 15,00 com a caixa para armazenar o jogo.

O jogo ROLETRIX tem como fundamento e caracterizado por ser estratégico, pois existem artifícios para ser aperfeiçoar os ganhos. Este é composto por:

i. 180 Setores Circulares (Figura 4.9) de cores distintas e enumerados por 1, 2, 3, 4 e 5 que deverão ser usados para preencher a Base de Apoio. Estes setores fundamentam probabilisticamente o conceito do jogo. (Dimensão: Raio 5,5 e ≈21 graus);

Figura 4.9 – Setores Circulares

ii. 1 Tabela Controle (Figura 4.10) que será utilizada pelo Mediador para efetuar a transferência dos créditos realizada pelos jogadores. (Dimensão: 14 cm por 21 cm);

Figura 4.10 – Tabela Controle

20 MDF é a sigla de Medium Density Fiberboard, que significa placa de fibra de média densidade, é um painel de fibras de madeira sendo sua composição homogênea em toda a sua superfície como em seu interior.

iii. 2 Bases de Apoio (Figura 4.11) que possuirão a função de interação a semelhança de uma roleta, isto é cada jogador terá em posse uma base de apoio para indicação do movimento probabilístico. (Dimensão: 17 cm por 23 cm);

Figura 4.11 – Base de Apoio

iv. 8 Tabelas Compensações (Figura 4.12) que estabelecerão as permutações dos créditos entre os jogadores. Estas tabelas fundamentam o conceito de Matrizes relacionado ao ponto de sela. (Dimensão: 11 cm por 15 cm);

Figura 4.12 – Tabela Compensação

iv. Piloto e Apagador (Figura 4.13) que serão utilizados para que o Mediador efetue as anotações necessárias na Tabela Controle.

Figura 4.13 – Piloto e Apagador

De acordo com Reis et al, (2012) os jogos que trabalham conceitos matemáticos podem ser construídos com materiais alternativos ou reciclados, permitindo produzir no educando a suma importância da reutilização dos materiais recicláveis, ampliando sua capacidade de criatividade e estimulando a responsabilidade socioambiental. Tais autores deixam bem claro que a atividade lúdica pode ser usada para ampliar o desenvolvimento da educação do indivíduo atuante bem como facilita nas etapas do processo escolar, tendo como ponto de vista uma construção responsável com o ambiente, tornando-os cidadãos mais participativos. Em anexo, segue uma versão para recorte do jogo *Roletrix*, para que o educador aplique em sua sala de aula.

5. PROPOSTAS METODOLÓGICAS

Uma Proposta Metodológica possibilita uma maior interação de procedimentos a serem seguidos no processo de formação e constituição de um intelecto questionador. Essas novas propostas sugestionadas a seguir criadas pelo autor buscarão relacionar os capítulos anteriores valorizando o aluno como o sujeito principal desse processo.

5.1 UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA DE ENSINO

Na perspectiva de Sepúlveda, El-Hani E Reis (2009), uma sequência didática baseada na manipulação lúdica para ensino aprendizagem deve-se apoiar nos seguintes critérios; o incremento de estratégias para reduzir a rejeição dos temas abordados, a prática de temáticas significativas e o intuito de promover a compreensão dos assuntos trabalhados de maneira aplicável.

A partir desta ideia, é correto afirmar que fundamentado em um planejamento coerente é possível almejar um crescimento intelectual de forma significativa, possibilitando assim que o aluno compreenda e aprenda as temáticas propostas.

Objetiva-se neste subcapítulo que o conjunto de atividades amplie o entendimento do conteúdo ou tema proposto, conduzindo o discente a uma reflexão mais substancial acerca do conceito trabalhado.

5.1.1 ATIVIDADE I: ESTRATÉGIAS FIXAS

Esta sequência didática baseia-se fundamentalmente no jogo ROLETRIX: primeira versão, com estratégias fixas. Para que a ação de ensino e aprendizagem obtenha sucesso, tornam-se as seguintes observações:

TEMA:

Teoria das Matrizes e Probabilidade.

OBJETIVO GERAL:

Investigar na Teoria das probabilidades a *Média Ponderada* é denominada de *Esperança Matemática* ou C*ompensação Esperada*.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Desenvolver a ideia em que a realização continua do jogo induz a uma compensação média a determinado jogador e que pode ser definida baseando-se no conceito do produto matricial.

JUSTIFICATIVA:

A aplicação do jogo ROLETRIX em sala de aula servirá como elemento de apoio e de motivação para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. O aluno é exposto a uma linguagem diferenciada onde de maneira gradual reconhecerá a importância da relação entre teoria e prática.

PÚBLICO ALVO:

Discentes do terceiro ano de Ensino Médio.

CONTEÚDO:

Probabilidade e Teoria das Matrizes.

MOTIVAÇÃO:

O uso de jogos lúdicos, em particular o jogo ROLETRIX no auxilio do ensino de Matemática é ferramenta que atrairá a atenção do aluno possibilitando uma ação educativa de maneira mais significativa.

TEMPO ESTIMADO PARA AULA:

Duas aulas de cinquenta minutos.

DESENVOLVIMENTO:

A sala deve ser subdividida em dois grupos com mesmo número de participantes, sendo que estes representarão os jogadores ativos, por outro lado, o professor terá a função do Mediador.

O professor deve entregar a cada grupo uma Base de Apoio preenchida com os Setores Circulares a sua escolha e também deverá escolhe uma Tabela Compensação para iniciar suas ações.

O educador pode iniciar com uma *abordagem puramente lúdica*, demonstrando o jogo e explicando suas regras e dicas para que o aluno tenha conhecimento para sua manipulação. Esta ação deve ter um tempo médio de 30 minutos.

De acordo com as ações dos jogadores o educador deverá intencionar uma *devolução de uma preferência*, orientando os alunos para que estes se direcionem ao seu objetivo, fundamentando resultados certos ou errados e relacionando padrões, que terá um tempo médio de 20 minutos.

Após a orientação dos alunos o educador pode buscar a *devolução de uma responsabilidade e de uma casualidade*, pois neste momento o educando já aceita sua responsabilidade no jogo, compreendendo as relações determinadas no jogo e as decisões a serem tomadas. Este momento de aceitação deverá ser obtido em média de 10 minutos.

Consequentemente, a *devolução da antecipação,* é uma ação cognitiva, onde o aluno aceita que a ação de jogar está predisposta a uma regra intencionada a uma compensação esperada. Este momento de compreensão deverá ser obtido em média de 10 minutos

Por fim, o último momento do jogo deve ser fundamentado na *devolução da situação adidática*, que relacionará o educando intuir que as suas ações no jogo não acontecem ao acaso, isto é, existe um padrão matemático como temática do tal jogo, sendo que suas próximas atitudes tenham argumentações estritamente matemáticas. Onde este padrão matemático esta envolto do produto matricial fazer referência a certa compensação média obtida pelos jogadores. Esta ação deve ter um tempo médio de 40 minutos, pois neste momento o educador deverá relacionar conceitos matemáticos a aplicação lúdica.

5.1.2 ATIVIDADE II: MANIPULANDO ESTRATÉGIAS

Esta sequência didática baseia-se fundamentalmente no jogo ROLETRIX: segunda versão, com estratégias manipuláveis. Para que a ação de ensino e aprendizagem obtenha sucesso, tornam-se as seguintes observações:

TEMA:

Teoria das Matrizes e Probabilidade.

OBJETIVO GERAL:

Estudar na Teoria das Matrizes e Probabilidade relacionada ao conceito de ponto de sela.

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Investigar uma melhor estratégia com o objetivo de aperfeiçoar os ganhos durante as rodadas.

JUSTIFICATIVA:

A aplicação do jogo ROLETRIX em sala de aula servirá como elemento de apoio e de motivação para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. O aluno é exposto a uma linguagem diferenciada onde de maneira gradua reconhecerá a importância da relação entre teoria e prática.

PÚBLICO ALVO:

Discentes do terceiro ano de Ensino do curso Médio.

CONTEÚDO:

Probabilidade e Teoria das Matrizes.

MOTIVAÇÃO:

O uso de jogos lúdicos, em particular o jogo ROLETRIX no auxilio do ensino de Matemática é ferramenta que atrairá a atenção do aluno possibilitando uma ação educativa de maneira mais significativa.

Nesta ação a busca de uma estratégia que otimize o ganho dos créditos impulsionará os jogadores elaborarem artifícios para vencer as partidas.

TEMPO ESTIMADO PARA AULA:

Duas aulas de cinquenta minutos.

DESENVOLVIMENTO:

A sala deve ser subdividida em dois grupos com mesmo número de participantes, sendo que estes representarão os jogadores ativos, por outro lado, o professor terá a função do Mediador.

O professor deve entregar a cada grupo uma Base de Apoio que futuramente será preenchida com os Setores Circulares a escolha dos Jogadores

O professor/Mediador deverá escolher uma Tabela Compensação para iniciar suas ações. Após tal escolha, indicará aos jogadores quais são os setores que poderão ser usados pelos respectivos grupos. Observando a Base de Apoio deverá ser preenchida por todos os tipos de setores indicado, a livre escolha dos participantes.

O educador pode iniciar com uma *abordagem puramente lúdica*, demonstrando o jogo e explicando suas regras e dicas para que o aluno tenha conhecimento para sua manipulação. Esta ação deve ter um tempo médio de 30 minutos.

De acordo com as ações dos jogadores o educador deverá intencionar uma *devolução de uma preferência*, *o*rientando os alunos para que estes se direcionem ao seu objetivo, fundamentando resultados certos ou errados e relacionando padrões, que terá um tempo médio de 20 minutos.

Após a orientação dos alunos o educador pode buscar a *devolução de uma responsabilidade e de uma casualidade*, pois neste momento o educando já aceita sua responsabilidade no jogo, compreendendo as relações determinadas no jogo e as decisões a serem tomadas. Este momento de aceitação deverá ser obtido em média de 10 minutos.

Por conseguinte, a *devolução da antecipação,* é uma ação onde o aluno deverá desenvolver pessoalmente, isto é, com baixíssima interferência do professor. Este momento de compreensão deverá ser obtido em média de 10 minutos

Logo, *devolução da situação adidática* é um momento importantíssimo para o aluno, onde intuirá suas ações no jogo não acontecem ao acaso, isto é, existe um padrão matemático como temática do tal jogo, sendo que suas próximas atitudes tenham argumentações estritamente matemáticas. O mesmo deverá perceber que este padrão relaciona a melhore estratégia a se tomar por um determinado *ponto de sela* observado na Tabela de Compensações. Esta ação deve ter um tempo médio de 40 minutos, pois este momento o educador deverá relacionar conceitos matemáticos a aplicação lúdica.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao passar do tempo, os educadores buscam melhorar sistematicamente o processo de ensino e aprendizagem com a perspectiva de construir possibilidades educacionais que facilitem tanto o processo de ensinar, quanto o processo de aprender. Particularmente, o ensino de matemática é desenvolvido atualmente como uma ciência muito abstrata, por sua vez muitos estudiosos da área buscam incessantemente mudar este quadro ressaltando novas aplicações de certos conceitos.

Neste sentido, esta dissertação buscou assumir um papel de interlocutora entre a teoria e a prática do ensino de Teoria das Matrizes e Probabilidade que são desenvolvidas no Ensino Médio. Construiu-se nesta busca a elaboração de atividades que possibilitarão o professor e a escola dinamizarem sua prática pedagógica com auxílio da ferramenta denominada ROLETRIX que servirá de apoio para tal interlocução.

De certa forma, este trabalho não deve ser considerado como uma pedra fundamental para o estudo da Teoria de Matrizes e Probabilidade, deve sim ser visto como um instrumento facilitador que possibilitará o processo de ensino e aprendizagem. Este instrumento conduzirá a novos desafios e possibilidades no que diz respeito à utilização da manipulação lúdica em sala de aula.

Com esta ideia, fica claro que o próximo passo a este trabalho será realizar uma análise minuciosa da aplicabilidade em sala de aula do jogo ROLETRIX, pois em sua estrutura conceitual pode-se estimular a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos. A aplicação desta proposta metodológica com o auxilio das sequências didáticas de ensino possibilitarão um comparativo para afirmar conclusivamente a eficácia de tal ferramenta.

Vislumbramos também a grande importância do ensino da matemática com auxilio dos jogos, pois, o educar em matemática com esta ideia, transforma esta ciência em algo que possivelmente seria desgastante e complexa em algo que será prazerosa e estimulante. Nesta conjuntura defendemos as argumentações fundamentando em autores renomados, que os jogos devem ser utilizados no processo educacional, propondo assim atividades que fomentem esta prática. É evidente que um dos papéis do educador está relacionado em proporcionar ou seu aluno um ambiente prazeroso, onde, por meio dos jogos, argumentamos a vasta possibilidade contida nesta ferramenta.

Certamente, não existe e não existirá uma receita pronta para relação do ensino e aprendizagem, o que buscamos continuamente é amenizar as dificuldades de modo que o caminho a ser seguido se torne cada vez mais agradável por aquele que o trilha. Sabemos que o caminho é longo e tortuoso e que desafios devem ser diariamente superados. Entretanto, a concretização destas etapas trazem resultados importantíssimos para a vida pessoal, intelectual e social de todos participantes.

Contudo, a estruturação e a construção desta nova ferramenta lúdica terá certo impacto positivo na formação de nossos alunos, possibilitando um avanço significativo no processo de conhecimento e absorção do saber.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear Com Aplicações** Editora: Bookman Companhia Editora LTDA 8° ed. Porto Alegre, 2005.

ARAÚJO, Karina de Toledo. Artigo: **Os Jogos e a Educação.** Revista Eletrônica de Educação. Ano V. N^{o}. 09, jul./dez. 2011.

BEZERRA Nilra Jane Filgueira, Et al. A Formação Continuada e a Prática Reflexiva do Professor de Matemática na Perspectiva da Teoria da Atividade. Disponível em: < http://www.nutes.ufrj.br/abrapec/viiienpec/resumos/R0964-1.pdf>. Acesso em: 16 janeiro 2014.

BORIN, Julia. **Jogos e Resolução de Problemas: Uma Estratégia para o Ensino de Matemática**. São Paulo: CAEM – IME/USP, 1995.

BRAGA, Daniel. **Pontos e Quadrados (Dots and Boxes).** Disponível em: < http://matematicaaoalcancedetodos.blogspot.com.br/2010/05/pontos-e-quadrados-dots-and-boxes.html>. Acesso em: 13 fevereiro 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997b.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Elementar e Aplicações**. Editora Atual, 6° Ed. São Paulo.

DAVID, José Carlos. **Matemática e Jogos De Bingo: Uma Aplicação Prática da Probabilidade e Teoria da Contagem**. Londrina-PR, 2008. Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_jose_carlos_david.pdf> Acesso em: 12 abril 2014.

DOMINGOS, Jailson. **Jogo "Batalha naval" ajuda alunos no aprendizado de Matemática**. Disponível em: < http://www.folhavitoria.com.br/geral/noticia/2013/05/jogo-batalha-naval-ajuda-alunos-no-aprendizado-de-matematica.html>. Acesso em: 12 fevereiro 2014.

GRANDO, Regina Célia. Tese de doutorado: **O Conhecimento Matemático e o uso de Jogos na Sala de Aula.** Universidade Estadual De Campinas. Campinas, SP: [s.n.], 2000.

HARDINGHAM, Alison. **Trabalho em equipe**. Tradução Pedro Marcelo Sá de Oliveira e Giorgio Cappelli. Editora Nobel. São Paulo, 2000.

LACANALLO, Luciana Figueiredo. Tese de Doutorado: **O jogo no ensino da matemática: contribuições para o desenvolvimento do pensamento teórico**. Educação da Universidade Estadual de Maringá. Maringá: [s.n.], 2011.

LOPES, José Marcos; REZENDE, Josiane de Carvalho. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade**. Boletim de Educação Matemática, vol. 23, núm. 36, 2010, pp. 657-682, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Brasil.

MALUTA, Thais Pariz. **O Jogo nas Aulas de Matemática: Possibilidades e Limites**. Universidade Federal de São Carlos. SP: [s.n.], 2007.

MACHADO, Cláudoa Barroso. Jogos recreativos como instrumento para aprendizagem. Universidade Candido Mendes. Rio de Janeiro 2009.

MEDEIROS, João Bosco. **Redação Científica: A prática de fichamentos, resumos, resenhas**. Editora Atlas S.A, 6° Ed. São Paulo, 2004.

MICHAELIS: **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. São Paulo: Companhia Melhoramentos. 1998

PARRA, Cecília, **Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas**. Ed. Artmed. 1996

PRADO, Danielle. **Uma grande paixão: Tetris.** Disponível em: < http://redes.moderna.com.br/2012/06/11/uma-grande-paixao-tetris/>. Acesso em: 12 fevereiro 2014.

RODRIGUES, Manoel Paiva. **Matemática**. Editora: Moderna – Didáticos. 2009.

REIS, Josiane Rodrigues; et al. **Fabricação de jogos a partir de materiais recicláveis como meio de conscientização e responsabilidade socioambiental.** Universidade Federal do Pará- UFPA. COBENGE – XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. Belém – PA. 2012.

ROLLA, Leonardo T. **Introdução à Probabilidade**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2013. Disponível para download gratuito em http://www.impa.br/~leorolla.

SARTINI, Brígida Alexandre; et ali. **Uma Introdução a Teoria dos Jogos**. II Bienal da SBM Universidade Federal da Bahia 25 a 29 de outubro de 2004. Disponível em: < http://www.uspleste.usp.br/rvicente/IntroTeoriaDosJogos.pdf>. Acesso em: 20 abril 2014.

SEIRAWAN, Yasser; SILMAN Jeremy. **Jogo Vitorioso: Estratégias**. Tradução Denise Regina Sales. Porto Alegre. Editora Artmed. 2006

SEPÚLVEDA, C.; EL-HANI, C.N.; REIS, V.P.G.S. **Análise de uma sequência didática para o ensino de evolução sob uma perspectiva sócio histórica**. In: VII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – ENPEC. Anais. Florianópolis, SC, 2009. p. 1-12. Disponível em: <http://www.fae.ufmg.br/abrapec/viempec/7enpec/pdfs/747.pdf>. Acesso em: 21 de jun. de 2014.

SILVA, Manoel Regis. **Causas e Consequências da Evasão Escolar na Escola Normal Estadual Professor Pedro Augusto De Almeida**. Curso De Especialização Em Gestão Pública Municipal. Paraíba, 2009.

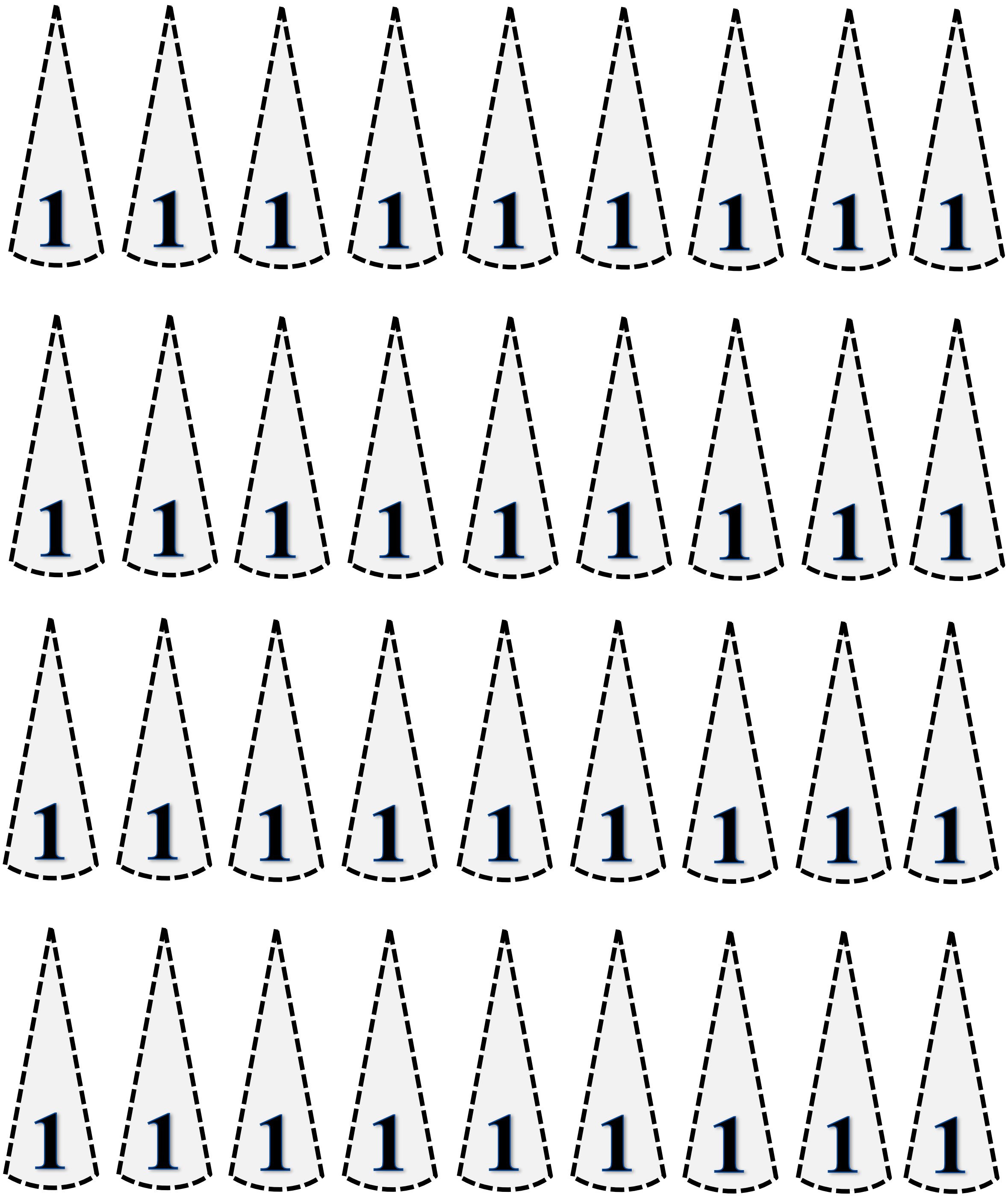
STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Introdução à Álgebra Linear**. Editora Pearson Education, 2ª Ed. 1987.

STRAPASON, Lísie Pippi Reis. Tese de Mestrado. **O uso de jogos como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática no 1º ano do Ensino Médio**. Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. Santa Maria, RS, 2011.

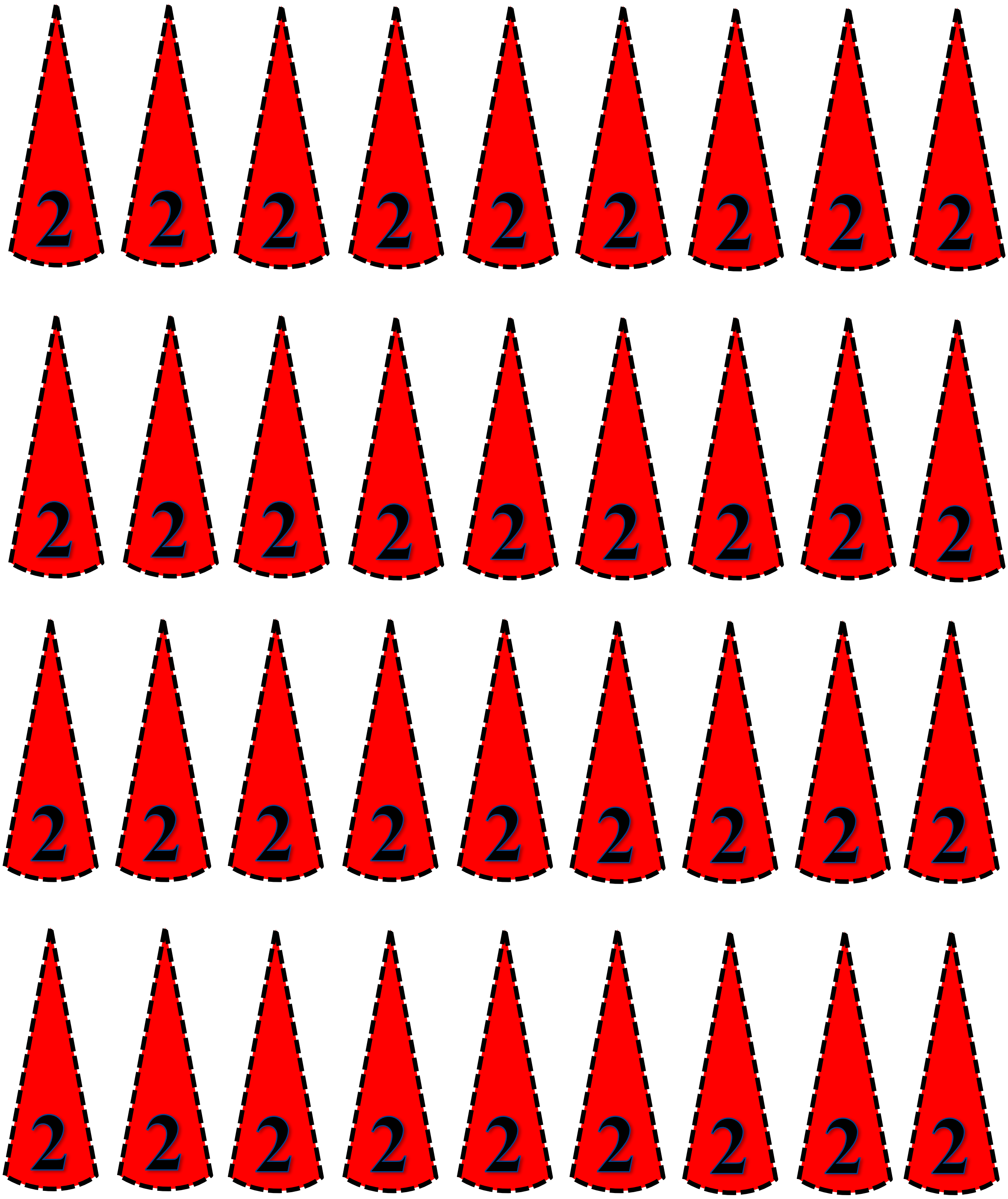
8. ANEXOS

ANEXO 01 – MODELO DO JOGO ROLETRIX

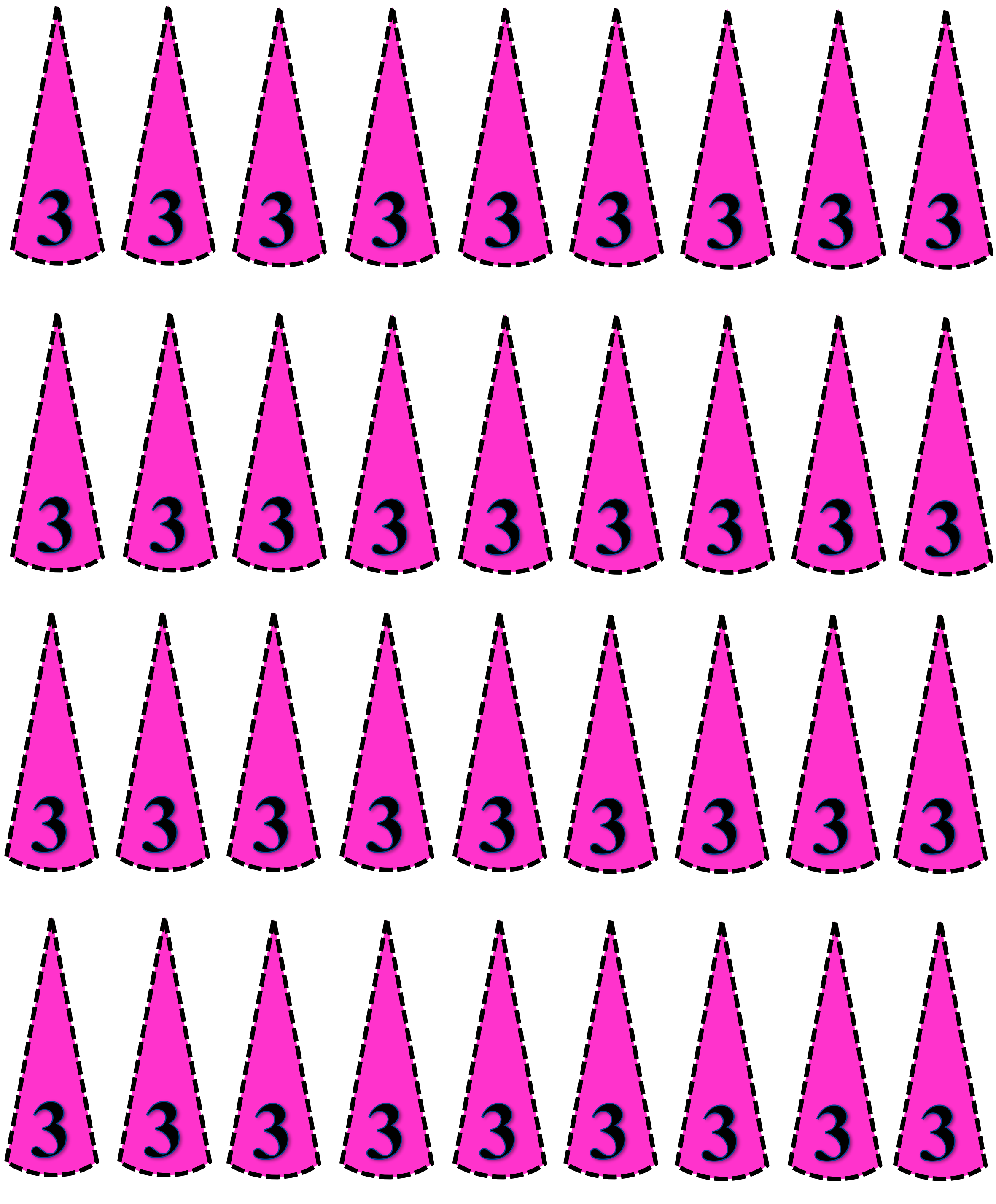
36 SETORES CIRCULARES BRANCOS NUMERADOS POR 1



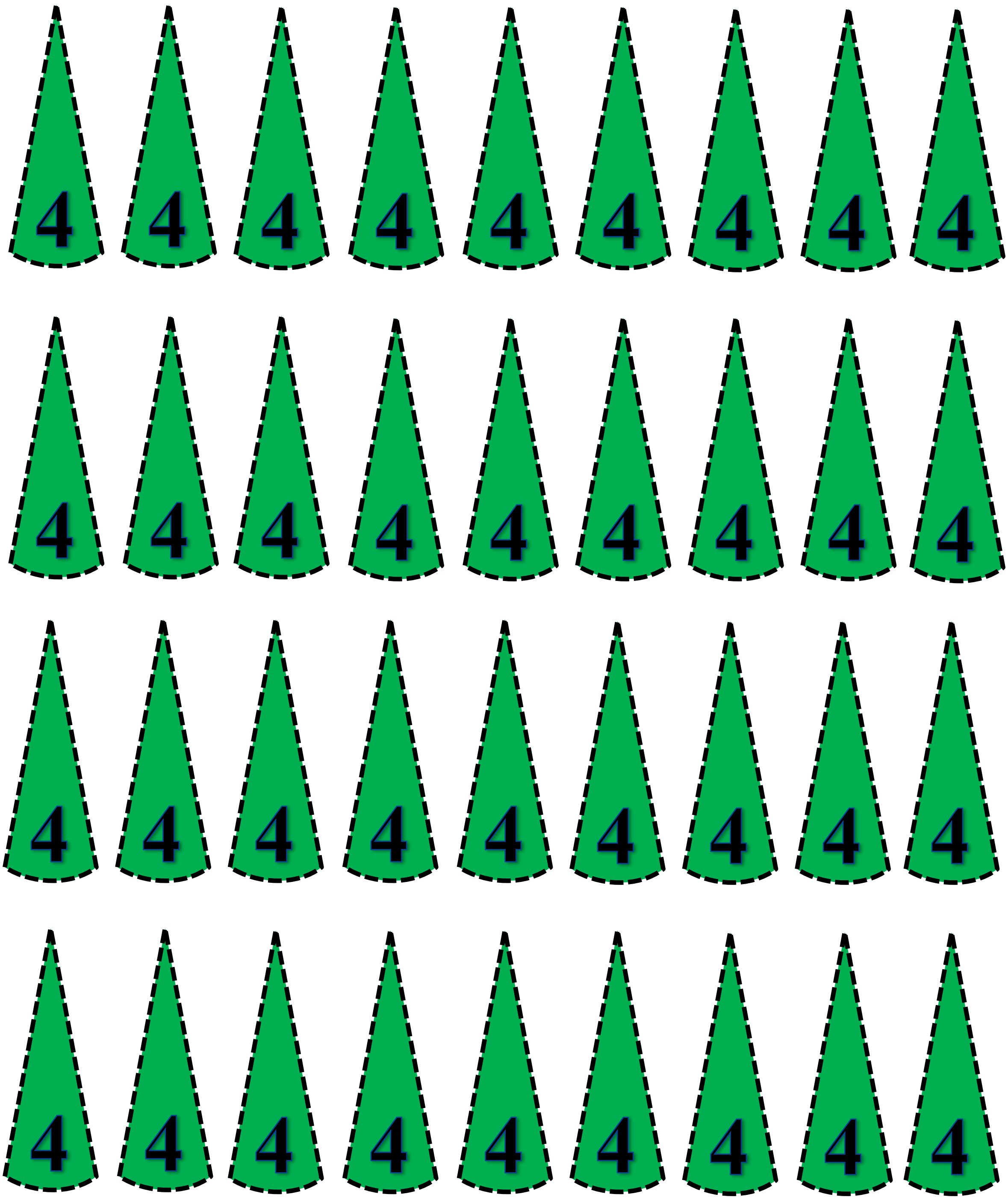
36 SETORES CIRCULARES VERMELHOS NUMERADOS POR 2



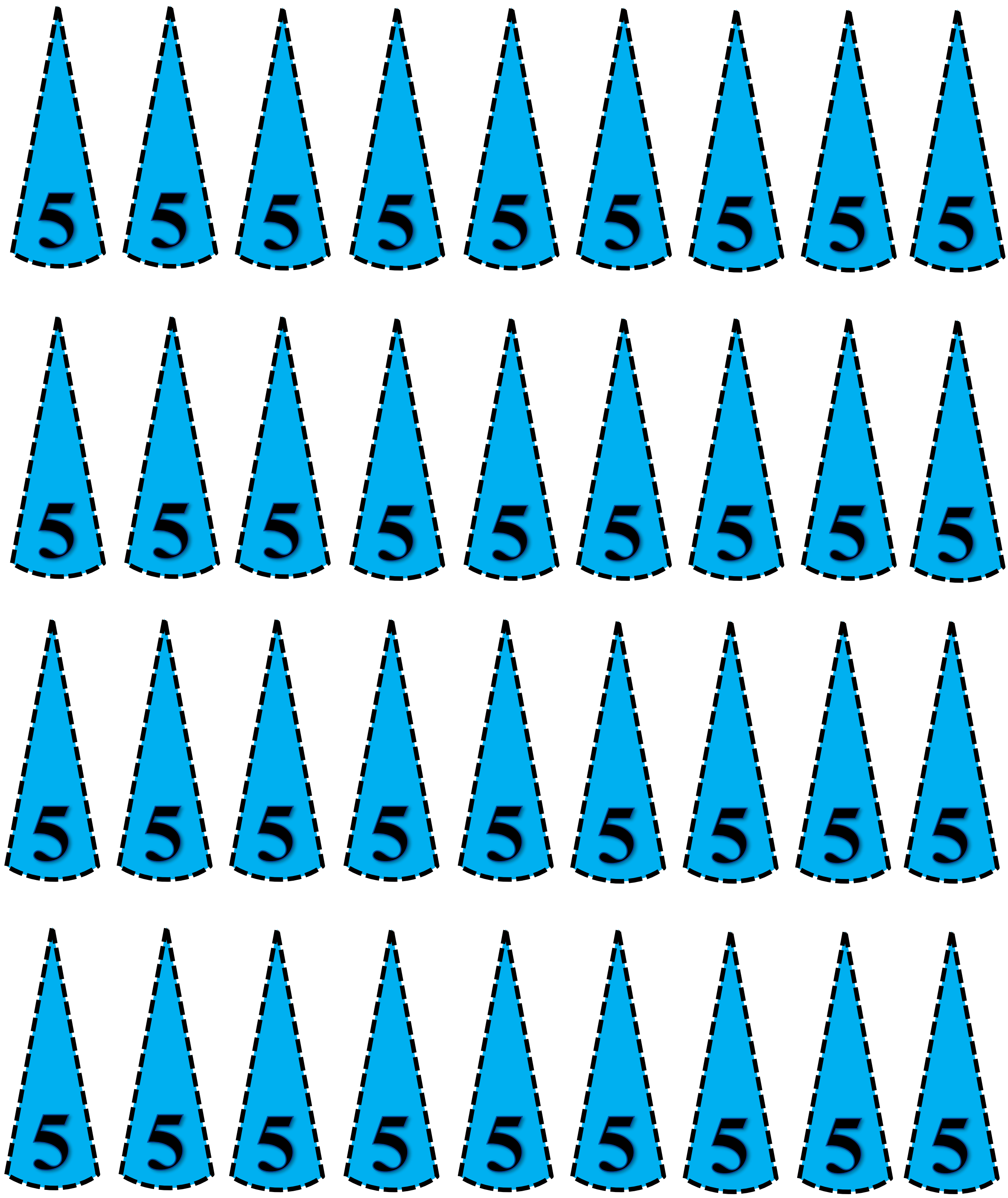
36 SETORES CIRCULARES ROSAS NUMERADOS POR 3



36 SETORES CIRCULARES VERDES NUMERADOS POR 4



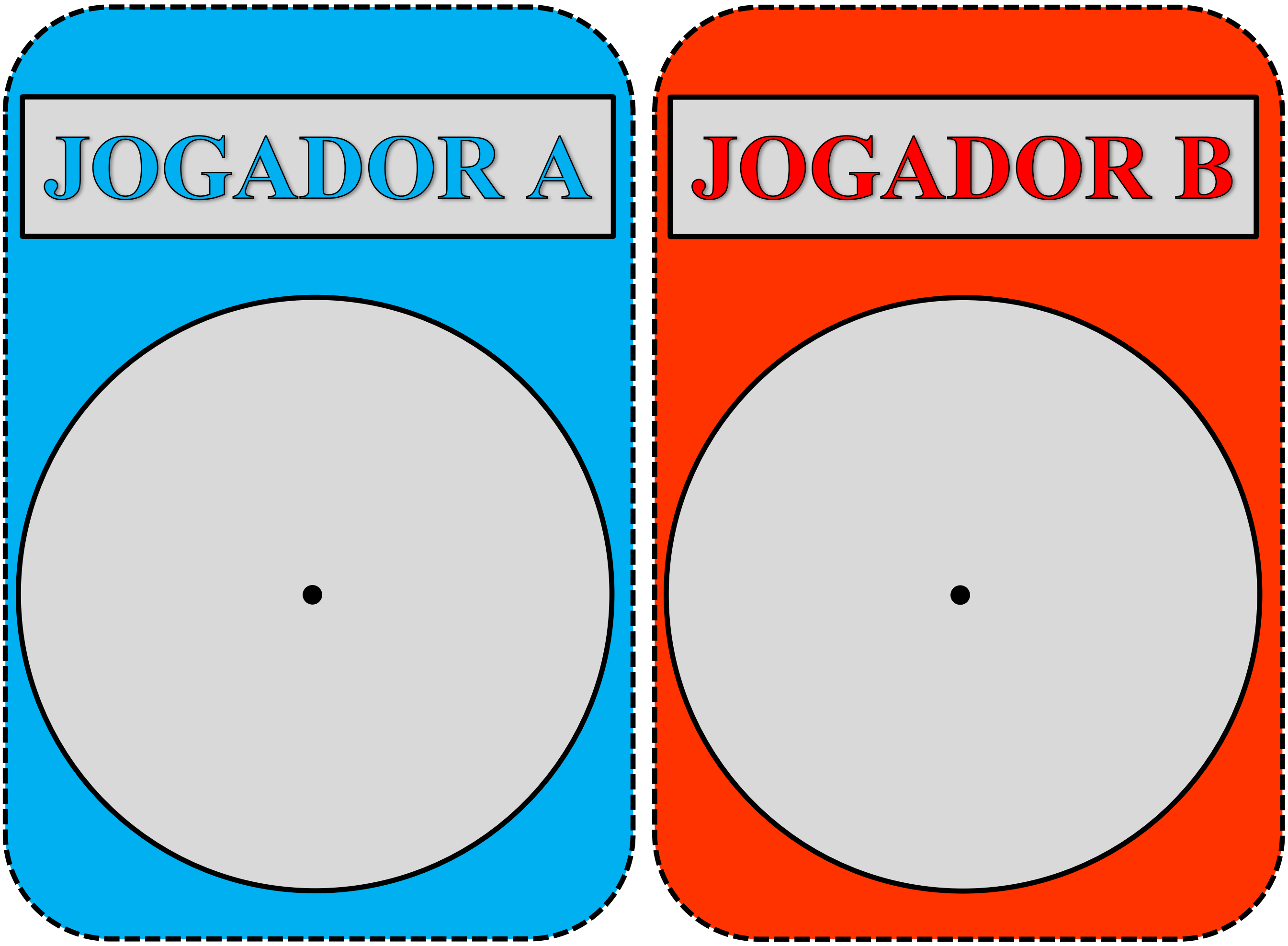
36 SETORES CIRCULARES AZUIS NUMERADOS POR 5



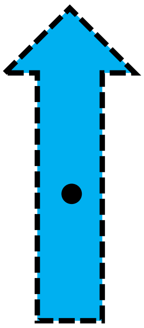
1 TABELA CONTROLE

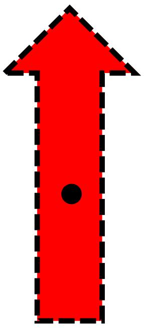
	CRÉDITOS	
	JOGADOR A	*JOGADOR B*
INICIO	**20**	**20**
1° RODADA		
2° RODADA		
3° RODADA		
4° RODADA		
5° RODADA		
6° RODADA		
7° RODADA		
8° RODADA		
9° RODADA		
10° RODADA		

2 BASES DE APOIO



Obs – Ponteiros para serem usados nas Bases de apoio.





8 TABELAS COMPENSAÇÕES

	JOGADOR B			
JOGADOR A	1	2	3	4
1	- 4	- 3	- 8	1
2	- 2	- 7	- 6	3
3	6	8	5	7
4	- 1	- 5	4	2

	JOGADOR B			
JOGADOR A	1	2	3	4
1	- 4	- 3	- 8	1
2	- 2	- 7	- 6	3
3	6	8	5	7
4	- 1	- 5	4	2

	JOGADOR B			
JOGADOR A	1	2	3	4
1	- 4	- 3	- 8	1
2	- 2	- 7	- 6	3
3	6	8	5	7
4	- 1	- 5	4	2

	JOGADOR B			
JOGADOR A	1	2	3	4
1	- 4	- 3	- 8	1
2	- 2	- 7	- 6	3
3	6	8	5	7
4	- 1	- 5	4	2

JOGADOR A \ JOGADOR B	1	2	3	4
1	- 6	- 4	- 8	5
2	2	- 3	1	-2
3	- 9	- 5	10	4
4	- 7	-11	7	3
5	8	10	9	1

JOGADOR A \ JOGADOR B	1	2	3	4
1	- 6	- 4	- 8	5
2	2	- 3	1	-2
3	- 9	- 5	10	4
4	- 7	-11	7	3
5	8	10	9	1

		JOGADOR B				
		1	2	3	4	5
JOGADOR A	1	- 6	- 4	- 8	5	- 4
	2	2	- 3	1	-2	- 3
	3	- 9	- 5	10	4	- 5
	4	8	10	9	1	10

		JOGADOR B				
		1	2	3	4	5
JOGADOR A	1	- 6	- 4	- 8	5	- 4
	2	2	- 3	1	-2	- 3
	3	- 9	- 5	10	4	- 5
	4	8	10	9	1	10