



Universidade Federal de Mato Grosso

Instituto de Ciências Exatas e da Terra

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



O Triângulo Pedal

Aline Pires Carneiro Santos

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Andre Krindges**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Março de 2014

O Triângulo Pedal

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Aline Pires Carneiro Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 17 de março de 2014.

Prof. Dr. Andre Krindges
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Andre Krindges (UFMT)

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Ceconello (UFMT)

Prof. Dr. Edgar Nascimento (IFMT)

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

P667t Pires Carneiro Santos, Aline.
O Triângulo Pedal / Aline Pires Carneiro Santos. -- 2014
66 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Andre Krindges.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Geometria Plana. 2. triângulos. 3. geogebra. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Permitida a reprodução parcial ou total, desde que citada a fonte.

Dissertação de Mestrado defendida em 17 de março de 2014 e aprovada pela
banca examinadora composta pelos Professores Doutores

Prof. Dr. Andre Krindges

Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, razão de toda a minha existência e a minha família por todo apoio, compreensão, carinho e amor.

Agradecimentos

Agradeço ao bom Deus por ter me dado forças para enfrentar as dificuldades e conduzido me até o fim sem desanimar.

Ao meu esposo Carlos, por ouvir minhas reclamações e anseios e, ter sempre palavras de sabedoria que me fizesse refletir sobre minhas práticas.

Aos meus filhos João Paulo e Marcos Paulo pela compreensão das ausências e pelo apoio e incentivo.

Ao meu irmão João Bosco, fonte de inspiração e minha mãe Alice pelo carinho, orações e apoio.

A minha cunhada Ana Letícia, que na sua presença mostrou o carinho por toda minha família

Aos meus colegas de trabalho e de turma, vocês aliviaram minhas horas difíceis com gestos de alegria, força e certeza no meu trabalho.

Aos professores e tutores pelo ensinamento e acolhimento durante esses dois longos anos.

Ao professor Dr. Andre Krindges pelo paciência, dedicação, confiança e generosidade durante todo o curso e para concretização do trabalho de conclusão.

A CAPES pelo financiamento do curso.

A SBM pela criação do PROFMAT.

Enfim, hoje realizo um sonho, fruto de muito esforço, determinação, perseverança e dedicação e nada disso eu consegui sozinha. Meu muito obrigada a todos e todas que fazem parte desta realização.

A Geometria existe, como já disse o filósofo, por toda a parte. É preciso, porém, olhos para vê-la, inteligência para compreendê-la e alma para admirá-la.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo do triângulo pedal de forma detalhada, motivadora e aprofundada. Iniciamos apresentando o triângulo pedal com definições e teoremas bem como suas demonstrações destacando as características da sua área e perímetro sempre acompanhado de construções geométricas, elaboradas com utilização do software GeoGebra, que contribui com a interpretação e faz parte das demonstrações. Realizamos um estudo da Reta de Simson e algumas aplicações. Para aplicar o estudo realizado no decorrer do trabalho, apresentamos alguns problemas resolvidos que poderão ser discutidos em sala de aula pelos alunos de ensino médio incentivando a criatividade e o raciocínio lógico.

Palavras chave: Geometria Plana; triângulos; geogebra.

Abstract

This work presents a study of the pedal triangle in detail, motivating and in-depth. We started showing the pedal triangle with definitions and theorems as well as their demonstrations highlighting the features of your area and perimeter always accompanied of geometric constructions, prepared using the GeoGebra software, which helps with the interpretation and is part of the demonstrations. We conducted a study of the Simson line and some applications. To apply the study carried out in the course of the work, we present some resolved issues which could be discussed in the classroom by high school students by encouraging creativity and logical reasoning.

Keywords: Plane Geometry; triangles; geogebra.

Sumário

Introdução	13
1 O Triângulo Pedal	16
1.1 Definição	16
1.1.1 Triângulo Medial	18
1.1.2 Triângulo Órtico	19
1.1.3 O triângulo pedal construído a partir do incentro	22
1.2 Área do triângulo pedal	23
1.3 O terceiro triângulo pedal	28
1.4 Triângulo pedal degenerado (Reta de Simson)	34
1.4.1 A Parábola	41
2 Aplicações	43
3 Generalização	53
Conclusão	64
Referências Bibliográficas	65

Lista de Figuras

1.1	Ponto interior	16
1.2	Ponto exterior	17
1.3	Quadrilátero circunscrito $AFPE$	17
1.4	Triângulo Medial	18
1.5	Triângulo Órtico	20
1.6	Triângulo Órtico e Medial	20
1.7	Triângulo Órtico e Medial: mesmo circuncentro	21
1.8	Triângulo Órtico e Medial: mesmo circuncentro	22
1.9	Triângulo pedal/incentro	22
1.10	Triângulo HIG , pertencente a λ , semelhante a DEF	24
1.11	Semelhança dos triângulos DEF e HIG	24
1.12	Triângulo isóscele de lados GC, R, R	26
1.13	Triângulo isóscele	26
1.14	Terceiro triângulo pedal	28
1.15	Quadriláteros $AFPE$ circunscrito	29
1.16	Quadriláteros $EGPI$ circunscrito	29
1.17	Quadriláteros $ILPK$ circunscrito	30
1.18	Quadriláteros $FHPG$ circunscrito	30
1.19	Terceiro triângulo pedal	31
1.20	Terceiro triângulo pedal	31
1.21	Terceiro triângulo pedal	32
1.22	Terceiro triângulo pedal	32
1.23	Terceiro triângulo pedal	33
1.24	Terceiro triângulo pedal	33
1.25	DEF Reta de Simson	34

1.26	DEF Reta de Simson	35
1.27	DEF Reta de Simson	36
1.28	DEF Reta de Simson	37
1.29	DEF Reta de Simson	37
1.30	DEF Reta de Simson	39
1.31	Reta Steiner (D'F'E')	40
1.32	Parábola	41
1.33	Parábola	42
2.1	Quadrilátero $ABCP$	43
2.2	Baricentro do Triângulo Medial	44
2.3	Ponto simétrico ao ponto pedal D	45
2.4	Ponto simétrico ao ponto pedal D	46
2.5	Menor perímetro de $\triangle DEF$ para D fixo	46
2.6	Triângulo Órtico	47
2.7	Reta Steiner	48
2.8	Reta Steiner	49
2.9	Reta Steiner	50
2.10	Triângulos Auxiliares	50
3.1	Triângulo DEF gerado pelas projeções de P em ABC	54
3.2	Triângulo GHI semelhante a DEF	55
3.3	Circunscrição de $FBDP$ e $PDCE$	56
3.4	triângulos DEF e HIG semelhantes	57
3.5	Triângulo isósceles COI	59
3.6	COI extraído da Figura 3.5	59
3.7	Reta de Simson Generalizada	61
3.8	Circunscrição de $BFPB$, $DPCE$ e $AFPE$	62

Introdução

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC ,2006) destacam a importância dos saberes inerentes a matemática para o cidadão entender e atuar no mundo, reiterando ainda que o conhecimento dessa área do saber se consolida como produto da construção humana a partir das relações que estabelece com a natureza, a sociedade e a cultura. Sendo assim, a matemática pode ser considerada uma ciência viva e as pesquisas relacionadas a esse campo do saber têm trazido importantes contribuições no avanço da ciência e da tecnologia.

Como ciência viva, a matemática implícita na Reta de Simson, foi a motivação para esse trabalho. Observamos que tal reta preserva uma propriedade para pontos sobre a circunferência circunscrita, conjecturamos o que poderia acontecer com o conjunto de pontos equidistantes do circuncentro.

Durante um ano fizemos pesquisas que respondesse tal questionamento que nos levaram a livros, revistas, artigos e páginas da internet como Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry (HONSBERGER,1995), Geometry Revisited (COXETER,1967), Geometria II (MORGADO et al.,2002), página do professor Jim Wilson da Universidade da Georgia (WILSON,), a revista Eureka (TORRES,2003) dentre muitos outros.

Diante de muitas informações e inúmeras construções geométricas em software matemáticos chegamos a resultados incríveis que se valiam de propriedades como quadriláteros inscritíveis, arco capaz semelhança de triângulos, lei dos senos e de observações, comparações seguidas sempre da expressão “ e se isso fosse ... o que acontece?” .

Dentre esse resultados destacamos a reta de Steiner, a aplicação da reta de Simson na construção da parábola e na demonstração do Teorema de Ptolomeu . E depois de percorrer todo esse caminho chegamos a conclusão que tais conjecturas são validas também para triângulos formados por projeções, não necessariamente ortogonais (triângulo pedal),

de um ponto sobre os lados de um triângulo(ou seus prolongamentos).

A estrutura pedagógica do profmat que objetiva o fortalecimento da compreensão dos conceitos básicos da matemática pelo professor visando estimular a melhoria do ensino de matemática em todos os níveis, foi essencial no decorrer da pesquisa destacando as definições e propriedades geométricas trabalhados em MA13 (Geometria) e MA36(Recursos Computacionais no Ensino de Matemática) bem como as demonstrações em MA 21 (Resolução de Problemas) e no entendimento das possíveis aplicações em sala de aula.

Aplicações que de vida a matemática e que façam com que a pesquisa e experiências seja parte integrante dos conteúdos trabalhados.

Segundo Freire, o professor deve potencializar a capacidade de resolução de problemas e criatividade do aluno.

“Quanto mais se problematizam os educandos como seres do mundo e com o mundo, mais se sentirão desafiados. Tão mais desafiados, quanto mais obrigados a responder ao desafio. Desafiados, compreendem o desafio na próxima ação de captá-lo. Mas, precisamente porque captam o desafio como um problema em suas conexões com outros, num plano de totalidade e não como algo petrificado, a compreensão resultante tende a tornar-se crescentemente crítica, por isso cada vez mais desalienada.[...] (FREIRE,2004, pag. 40)

Tendo como objeto de estudo inicial o triângulo pedal, que apresenta característica e resultados que podem ser abordados no ensino médio. Conforme as recomendações descritas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC ,2006) que diz que o uso de softwares que possibilitam o pensar, refletir e o criar soluções, escolhemos o Geogebra(<http://www.geogebra.org>), software matemático de acesso livre e fácil instalação para auxiliar na criação e interação com as Figuras.

Nesse software matemático, vamos utilizar os ambientes de geometria dinâmica que nos permite realizar alterações em elementos da construção geométrica observando o comportamento dos demais elementos, favorecendo a investigação e exploração de inúmeras conjecturas.

Como diz George Polia

“O problema pode ser modesto, mas se ele desafia a sua curiosidade e põe em jogo suas faculdades inventivas, e se você resolvê-lo por seus próprios meios, você pode experimentar a tensão e desfrutar o triunfo da descoberta. Tais experiências em uma idade suscetível pode criar um gosto para o trabalho mental e deixar a sua marca na mente e no caráter de uma vida.[...]” (POLYA,1995)

Este trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo apresentamos definição e tipos de triângulos pedais, a razão entre as áreas de um triângulo e seu pedal

(motivação da pesquisa), a semelhaça do terceiro triângulo pedal, a reta de Simson e Steiner.

No segundo capítulo exibimos algumas aplicações do que foi apresentado no capítulo 1.

E para finalizar no capítulo 3 apresentamos resultados de dois teoremas citados anteriormente, abrindo mão da ortogonalidade.

Capítulo 1

O Triângulo Pedal

Neste capítulo faremos um estudo sobre o triângulo pedal enfatizando a relação entre o triângulo original e a classificação conforme a escolha do ponto que o gera.

1.1 Definição

Os pontos pedais de um ponto P , relativamente a um triângulo ABC , são as intersecções dos lados do triângulo (ou suas extensões) com as correspondentes perpendiculares que passa por P .

Seja P um ponto qualquer no plano que contém um triângulo ABC . Considere as retas perpendiculares aos lados deste triângulo (ou ao seu prolongamento) e que passam por P . Chamamos de pontos pedais as intersecções dessas perpendiculares com os lados do triângulo (ou ao seu prolongamento). O triângulo formado pelos pontos pedais, relativos ao ponto P , é o chamado triângulo pedal.

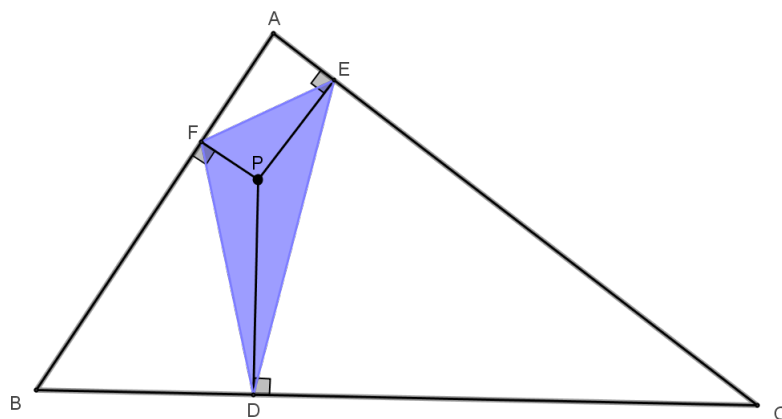


Figura 1.1: Ponto interior

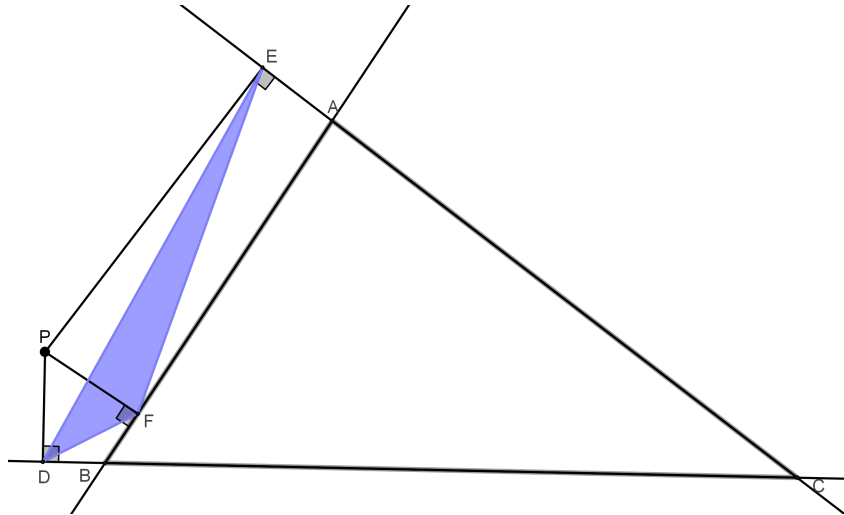


Figura 1.2: Ponto exterior

Vamos estabelecer uma relação entre os lados do triângulo pedal DEF gerado por P e os lados do triângulo ABC . Considere a circunferência λ de centro O raio R que circunscreve o triângulo ABC e sem perda de generalidade consideramos $OP < R$, como mostra a Figura 1.3.

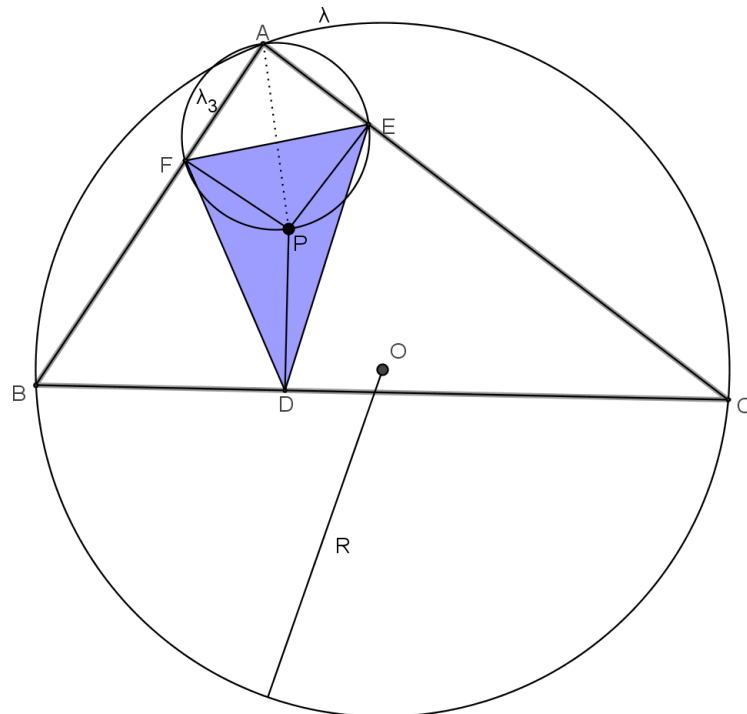


Figura 1.3: Quadrilátero circunscrito $AFPE$

Examinando a Figura 1.3, observamos que os ângulos E e F , opostos em relação

ao quadrilátero $AFPE$, são retos, portanto $AFPE$ é inscritível em λ_3 , circunferência de diâmetro AP . Aplicando a Lei dos senos para AFE e ABC , obtemos:

$$\frac{EF}{\operatorname{sen}A} = AP, \quad \frac{BC}{\operatorname{sen}A} = 2R$$

De onde

$$EF = \frac{BC \cdot AP}{2R} \quad (1.1)$$

Da mesma forma, observamos que os quadriláteros $AFPD$ e $CEPD$ são inscritíveis de diâmetro PB e PC respectivamente, então

$$DE = \frac{AB \cdot CP}{2R} \quad (1.2)$$

$$DF = \frac{AC \cdot BP}{2R} \quad (1.3)$$

1.1.1 Triângulo Medial

Definição 1.1 *O triângulo pedal construído a partir do circuncentro O (intersecção das mediatrizes) é chamado de triângulo medial.*

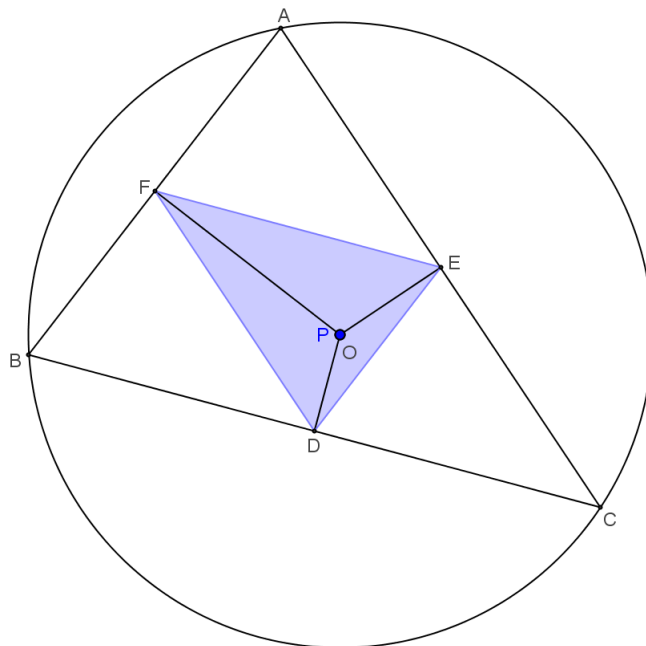


Figura 1.4: Triângulo Medial

Proposição 1.1 *O triângulo pedal relativo ao ponto construído a partir do circuncentro também dito medial, é semelhante ao triângulo que o original na razão 1 : 2.*

Demonstração: Dado o triângulo pedal DEF gerado pelo ponto P coincidente com circuncentro do triângulo ABC os pontos D, E e G são pontos médios de BC, AC e AB , pois o circuncentro é a interseção das mediatrizes do triângulo ilustrado na Figura 1.4, então:

$$\begin{aligned}\frac{AF}{AB} &= \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \\ \frac{BF}{AB} &= \frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \\ \frac{CE}{AC} &= \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

O ângulo A é comum aos triângulos ABC e AFE e os pares de lados AE e AF correspondentes a AB e AC são proporcionais na razão 1 : 2 logo $\triangle ABC$ é semelhante ao $\triangle AFE$ na razão 1 : 2, e

$$\frac{EF}{BC} = \frac{1}{2} \tag{1.4}$$

O ângulo B é comum aos triângulos ABC e BDF e os pares de lados BF e BD correspondentes a AB e BC são proporcionais na razão 1 : 2 logo $\triangle ABC$ é semelhante (LAL) ao $\triangle BDF$ na razão 1 : 2, e

$$\frac{FD}{AC} = \frac{1}{2} \tag{1.5}$$

O ângulo C é comum aos triângulos ABC e CDE e os pares de lados CE e CD correspondentes a AC e BC são proporcionais na razão 1 : 2 logo $\triangle ABC$ é semelhante (LAL) ao $\triangle CDE$ na razão 1 : 2, e

$$\frac{DE}{AB} = \frac{1}{2} \tag{1.6}$$

Por 1.4, 1.5 e 1.6 concluímos que o triângulo DEF e ABC são semelhantes (LLL) na razão 1 : 2.

1.1.2 Triângulo Órtico

Definição 1.2 *O triângulo pedal construído a partir do ortocentro (intersecção das alturas) H é chamado de triângulo órtico.*

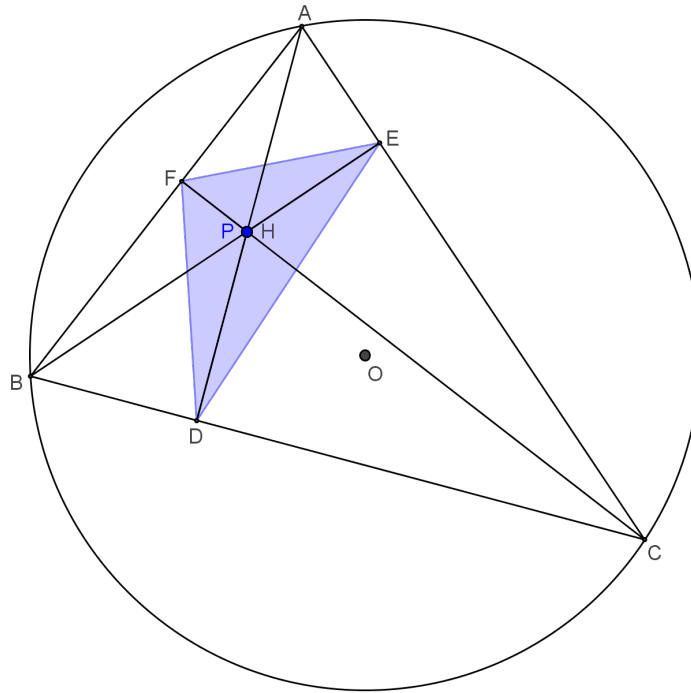


Figura 1.5: Triângulo Órtico

Proposição 1.2 *O circuncentro do triângulo Órtico coincide com o circuncentro do triângulo Medial.*

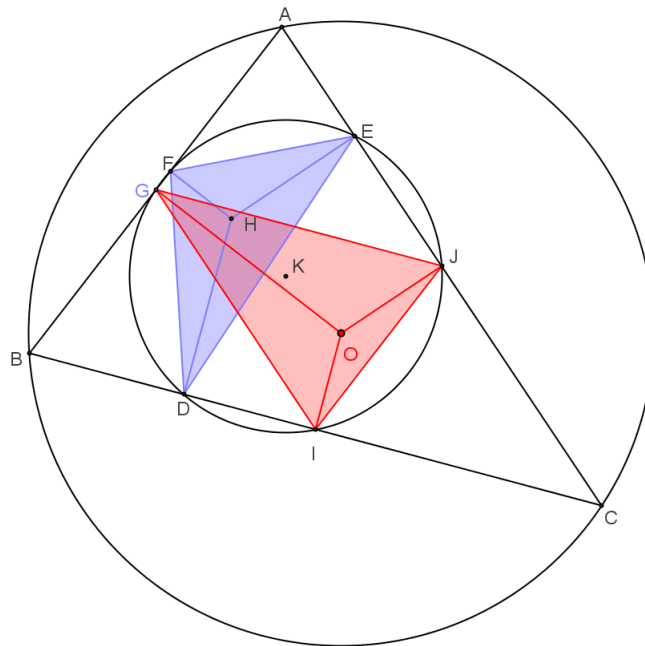


Figura 1.6: Triângulo Órtico e Medial

Demonstração: Seja DEF o triângulo órtico do triângulo ABC e GIJ o triângulo medial

do mesmo triângulo. Entende-se que o ponto D , pedal do ortocentro H relativo ao lado BC é também o pé da perpendicular de A relativo ao mesmo lado e é uma reflexão de A em relação a reta GJ , como mostra a Figura 1.7,

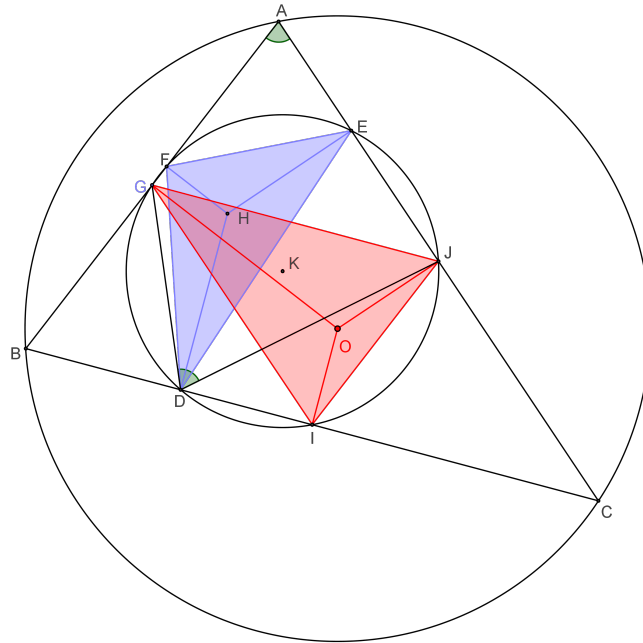


Figura 1.7: Triângulo Órtico e Medial: mesmo circuncentro

logo

$$\angle JDG = \angle GAJ \quad (1.7)$$

Por outro lado G, A, J, I define um paralelogramo, pois GI e JI são base média do triângulo ABC em relação aos lados AC e AB , logo $JI = AG$ e $GI = AJ$ então

$$\angle GAJ = \angle JIG \quad (1.8)$$

Por 1.7 e 1.8, podemos afirmar que D pertence à mesma circunferência definida pelos pontos J, I, G visto que os $\angle JIG = \angle JDG$ e estão associados à mesma corda (GJ) como mostra a Figura 1.8.

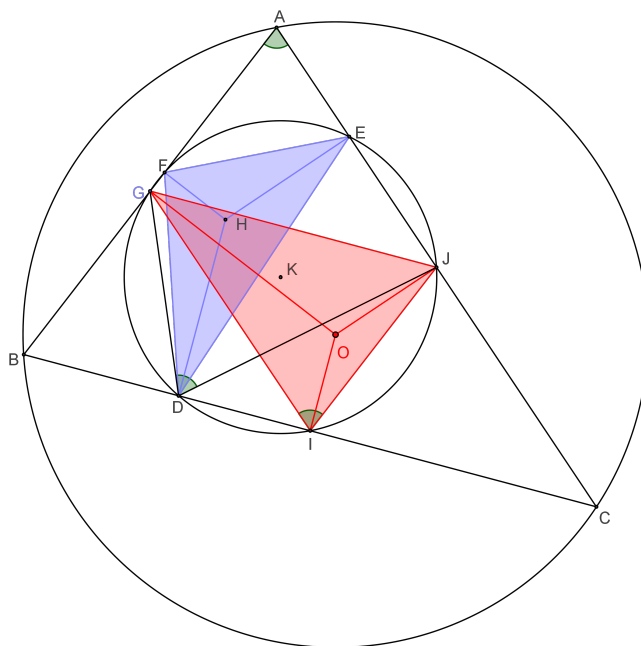


Figura 1.8: Triângulo Órtico e Medial: mesmo circuncentro

Analogamente, podemos provar que os pontos E e F também pertencem à mesma circunferência definida pelos pontos J, I, G ou seja os triângulos DEF e IJG pertencem a uma mesma circunferência, fica assim justificada a proposição.

1.1.3 O triângulo pedal construído a partir do incentro

Quando o triângulo pedal é construído a partir do incentro I (encontro das bissetrizes), esse ponto também é o circuncentro do triângulo pedal. Em outras palavras, o ponto torna-se o circuncentro do triângulo pedal, quando é o incentro do triângulo original.

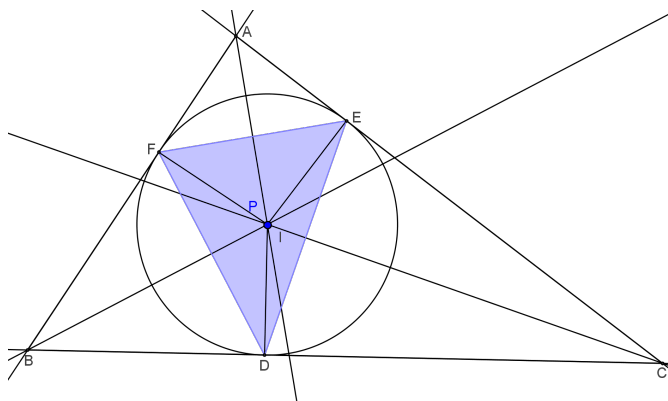


Figura 1.9: Triângulo pedal/incentro

Isso é fácil demonstrar, basta mostrar que as distância entre o incentro e os vértices do triângulo pedal é a mesma ($PD = PE = PF$). E de fato, observando a Figura 1.9 temos que os triângulos BDP e BPF são congruentes, pois possuem um lado em comum BP , dois pares ângulos com a mesma medida F e D (são retos) e B que tem como bissetriz BP , logo $PD = PF$. Analogamente os triângulos AFP e APE são congruentes, logo $PD = PF = PE$.

1.2 Área do triângulo pedal

A partir da construção no GeoGebra de um triângulo pedal DEF do triângulo ABC associado a um ponto P , verificamos que a área de DEF se matem para todo P equidistante do circuncentro de ABC .

Na busca de resultados encontramos o artigo de Ivan Borsenco (BORSENCO,2007) que enuncia e demonstra o teorema de Euler para o triângulo pedal que expressa a área do triângulo cujo vértice são projeções ortogonais de um ponto arbitrário no plano nos lados do triângulo dado. Esse teorema foi o resultado para o questionamento do trabalho.

Teorema 1.1 *Seja ABC um triângulo e $\lambda = C(O, R)$ a circunferência circunscrita. Seja P um ponto no plano do triângulo. Seja D, E e F os pontos pedais de P . Então:*

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2} \quad (1.9)$$

Demonstração: Seja G, H e I os pontos de intersecção das retas AP, BP e CP com a circunferência λ , como mostra a Figura 1.10.

Os triângulos IPG e BPC são semelhantes, pois $\angle PBC = \angle PGI$ (pertencem ao mesmo arco capaz \widehat{IC}) e $\angle PIG = \angle BCP$ (pertencem ao mesmo arco capaz \widehat{BG}) então temos:

$$\frac{GI}{BC} = \frac{IP}{CP} = \frac{GP}{BP} \quad (1.10)$$

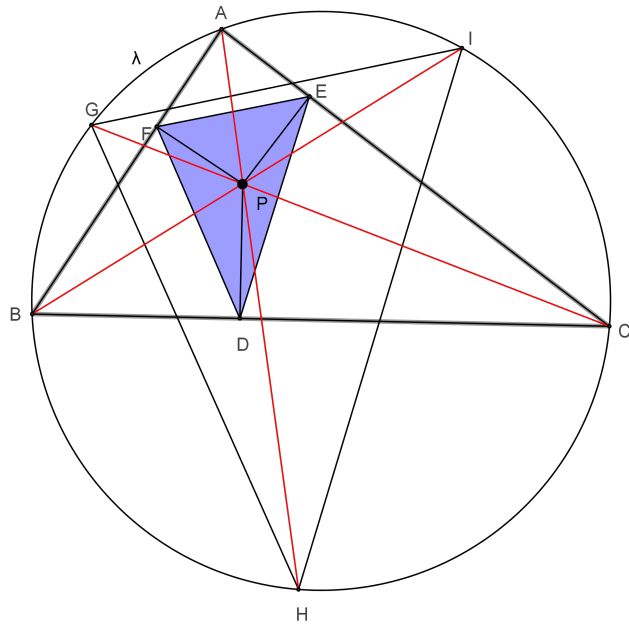


Figura 1.10: Triângulo HIG , pertencente a λ , semelhante a DEF .

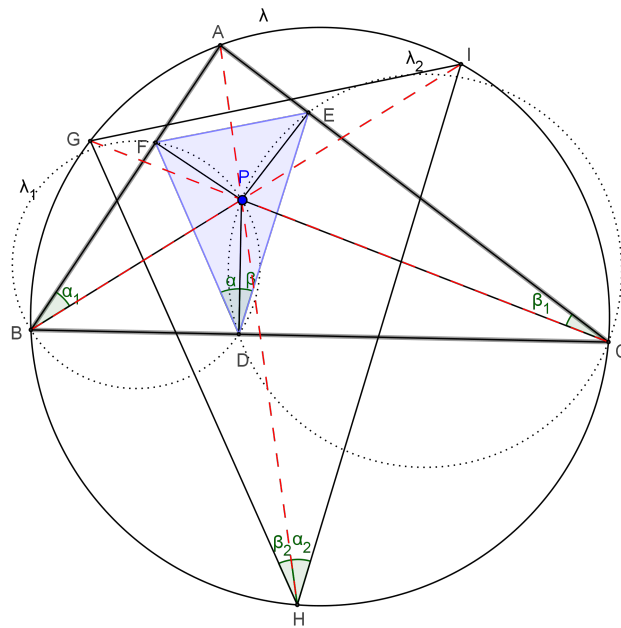


Figura 1.11: Semelhança dos triângulos DEF e HIG

Observe na Figura 1.11 que $\angle EDF = \alpha + \beta$ e $\angle IHG = \alpha_2 + \beta_2$ e usando a propriedade de arco capaz nas circunferências λ_1 e λ_2 que circunscreve os quadriláteros

$BFPD$ e $CEPD$, temos:

$$\alpha = \alpha_1 \text{ (pertencem ao arco } \widehat{FP} \text{ de } \lambda_1)$$

$$\beta = \beta_1 \text{ (pertencem ao arco } \widehat{PE} \text{ de } \lambda_2)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \text{ (pertencem ao arco } \widehat{AI} \text{ de } \lambda)$$

$$\beta_1 = \beta_2 \text{ (pertencem ao arco } \widehat{AG} \text{ de } \lambda)$$

logo:

$$\angle EDF = \angle IHG \quad (1.11)$$

Analogamente $\angle DEF = \angle HIG$ e $\angle EFD = \angle IGH$, portanto os triângulos DEF e HIG são semelhantes e a razão entre os raios R da circunferência que circunscreve HIG e R_{DEF} da circunferência que circunscreve DEF obedece a mesma razão de semelhança

$$\frac{EF}{GI} = \frac{R_{DEF}}{R} \quad (1.12)$$

Sendo a , b e c os lados de um triângulo qualquer e r o raio da circunferência circunscrita, sabemos que a

$$\text{Área}(abc) = \frac{abc}{4r} \quad (1.13)$$

Usando 1.13 temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} &= \frac{\frac{DE \cdot DF \cdot EF}{4R_{DEF}}}{\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}} \\ &= \frac{R \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{R_{DEF} \cdot AB \cdot BC \cdot AC} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Usando 1.12 em 1.14, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GI \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{EF \cdot AB \cdot BC \cdot AC} \quad (1.15)$$

e usando 1.2, 1.3 e 1.10 em 1.15, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP}{BP} \cdot \frac{AB \cdot CP}{2R} \cdot \frac{AC \cdot BP}{2R \cdot AC}$$

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP \cdot CP}{4R^2} \tag{1.16}$$

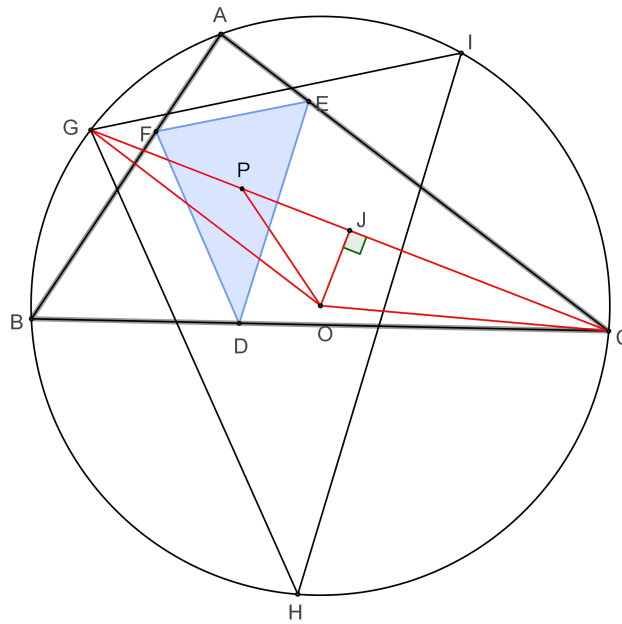


Figura 1.12: Triângulo isóscele de lados GC , R , R

O triângulo COG que se apresenta em 1.12 é isóscele, pois $OG = OC = R$. Seja J em CG tal que OJ seja altura do COG . Assim, $GJ = JC$

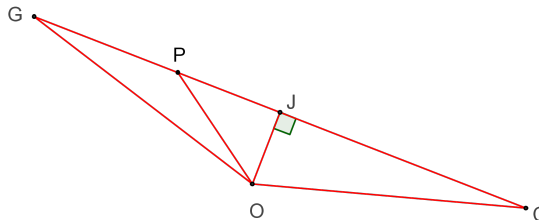


Figura 1.13: Triângulo isóscele

Na Figura 1.13 temos o triângulo GOC contido na Figura 1.12. No triângulo OCJ , temos:

$$\begin{aligned}
OC^2 &= CJ^2 + OJ^2 \\
OC^2 - CJ^2 &= OJ^2
\end{aligned} \tag{1.17}$$

No triângulo OPJ , temos:

$$\begin{aligned}
OP^2 &= OJ^2 + JP^2 \\
OP^2 - JP^2 &= OJ^2
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Igualando 1.17, 1.18 e observando que $OC = R$, temos:

$$\begin{aligned}
R^2 - CJ^2 &= OP^2 - JP^2 \\
R^2 - OP^2 &= CJ^2 - JP^2 \\
R^2 - OP^2 &= (CJ - JP)(CJ + JP)
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Na Figura 1.13, temos: $CJ - JP = GP$ e $CJ + JP = CP$, substituindo em 1.19, temos:

$$R^2 - OP^2 = GP \cdot CP \tag{1.20}$$

Substituindo 1.20 em 1.16

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2}$$

Isso foi demonstrado a partir de um ponto P tal que OP é menor que R , se tomarmos OP maior que R verificamos que $\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{OP^2 - R^2}{4R^2}$. Logo:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2}$$

Quando $P \in C(O, R)$, a área do triângulo pedal DEF é zero ,ou seja , D, E e F estão alinhados. Esta linha é denominada linha ou reta de SIMSON.

1.3 O terceiro triângulo pedal

Uma constatação interessante referida por (COXETER,1967, pag. 24), é a de que o terceiro triângulo pedal é semelhante ao triângulo que o originou. As construções seguintes contribuem para definir tal triângulo e demonstrar o teorema que segue.

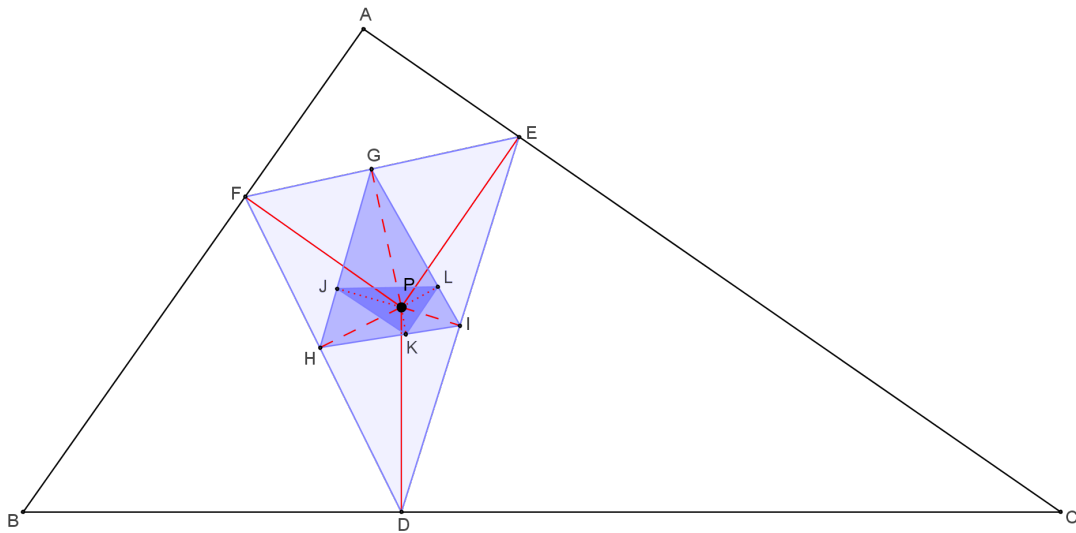


Figura 1.14: Terceiro triângulo pedal

Na Figura 1.14 o ponto interior P é usado para determinar o triângulo DEF primeiro triângulo pedal do triângulo ABC . O mesmo ponto P também é usado para determinar GHI o triângulo pedal de DEF , que é naturalmente chamado de segundo triângulo pedal do triângulo ABC , e o triângulo pedal JKL do triângulo GHI associado a P é chamado de terceiro triângulo pedal do triângulo ABC . Nesta terminologia, temos:

Teorema 1.2 *O terceiro triângulo pedal é semelhante ao triângulo original.*

Demonstração: Sabemos que o quadrilátero $AFPE$ é circunscritível, pois a soma dos ângulos opostos E e F retos é 180° , como mostra a Figura 1.15.

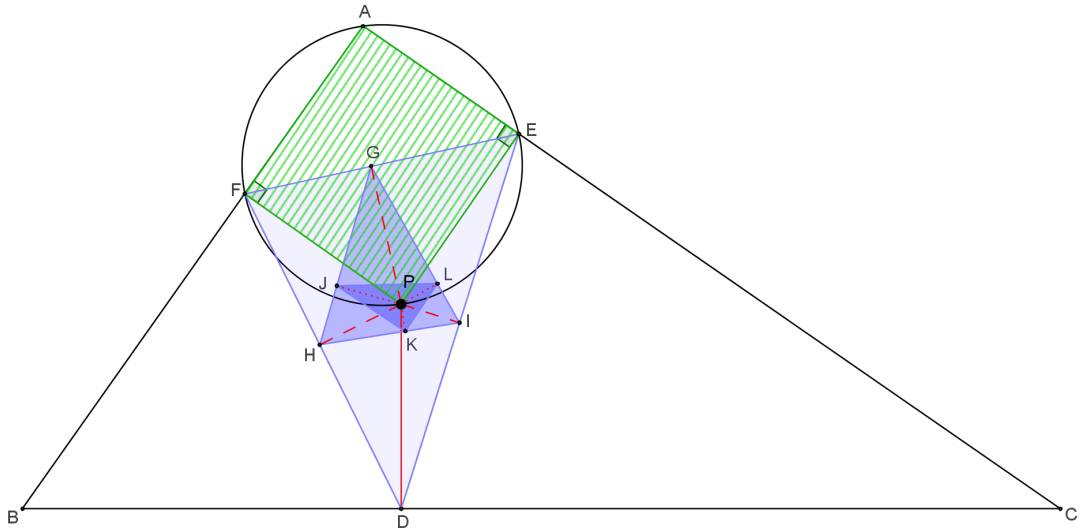


Figura 1.15: Quadriláteros $AFPE$ circunscrito

$EGPI$ é circunscritível, pois a soma dos ângulos opostos G e I retos é 180° , como mostra a Figura 1.16.

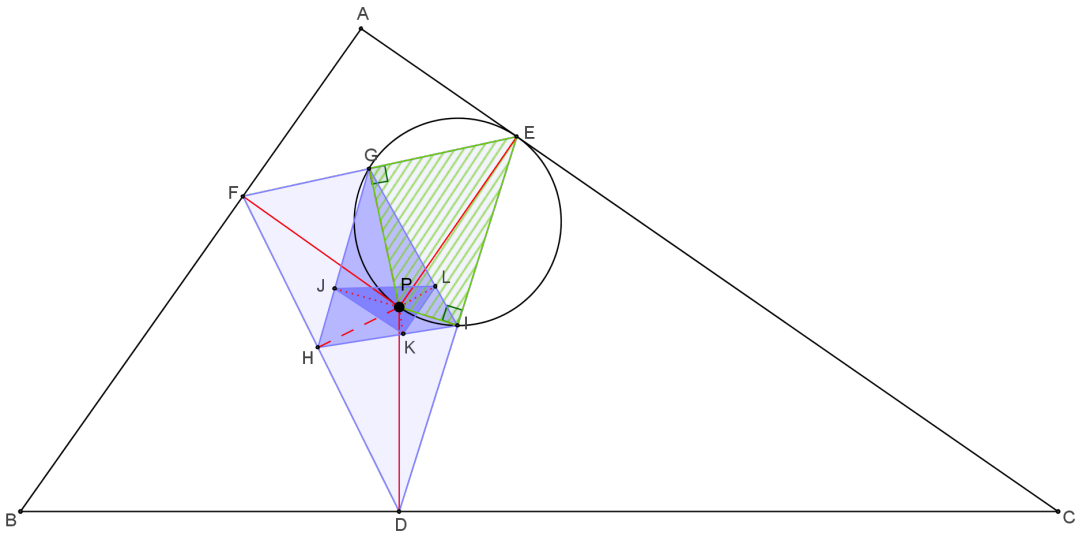


Figura 1.16: Quadriláteros $EGPI$ circunscrito

$ILPK$ é circunscritível, pois a soma dos ângulos opostos L e K retos é 180° , como mostra a Figura 1.17.

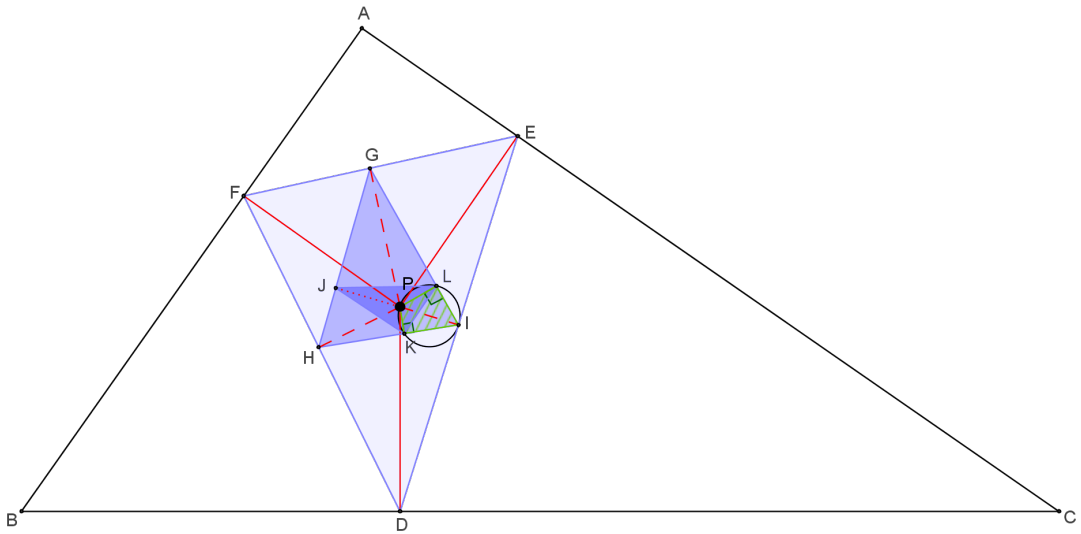


Figura 1.17: Quadriláteros $ILPK$ circunscrito

$FHPG$ é circunscritível, pois a soma dos ângulos opostos H e G retos é 180° como mostra a Figura 1.18.

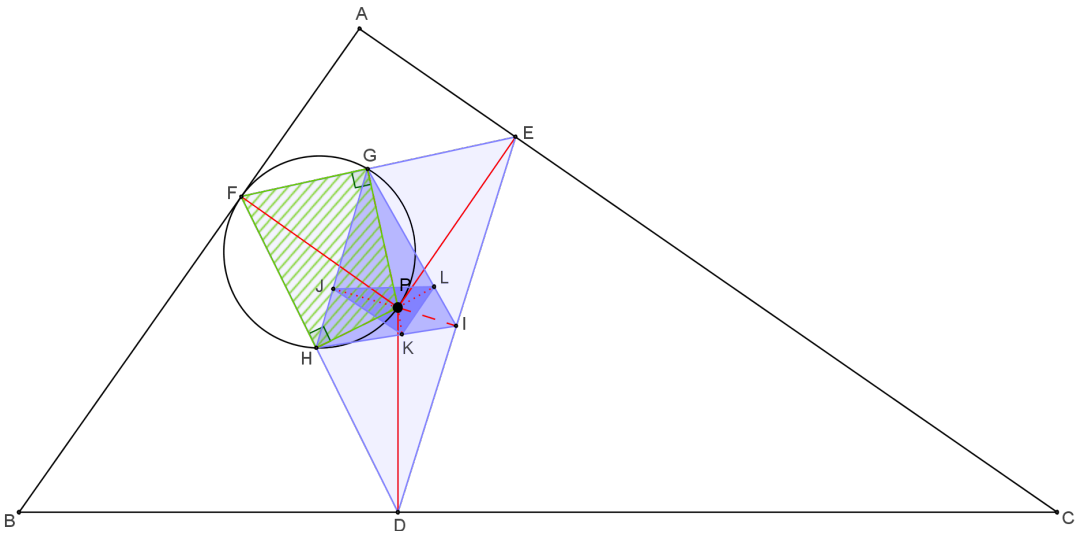


Figura 1.18: Quadriláteros $FHPG$ circunscrito

Observando a Figura 1.19 temos:

$$\alpha = \alpha_1 \tag{1.21}$$

pois pertencem ao mesmo arco capaz \widehat{FP} .

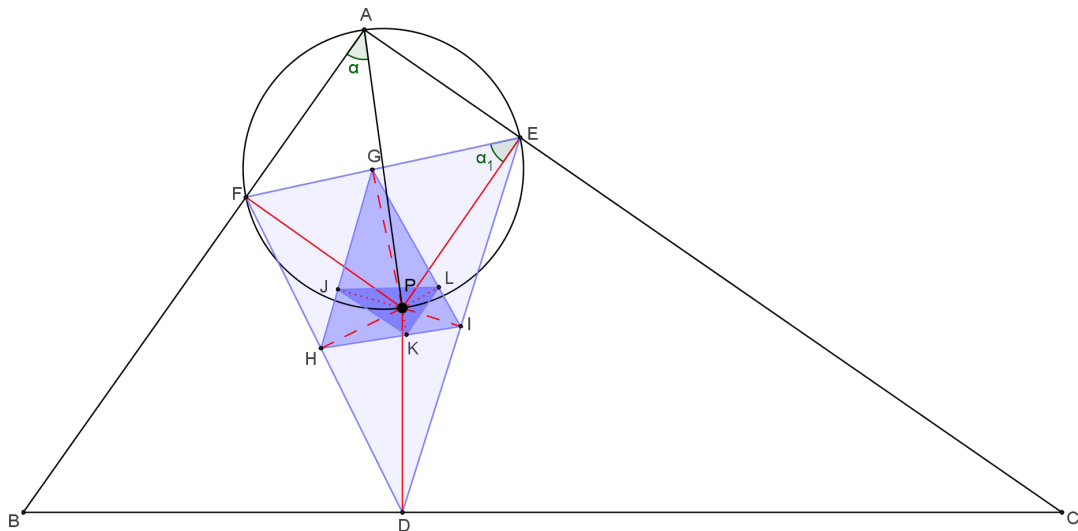


Figura 1.19: Terceiro triângulo pedal

A Figura 1.20 mostra que

$$\alpha_1 = \alpha_2 \tag{1.22}$$

pois pertencem ao mesmo arco capaz \widehat{GP} .

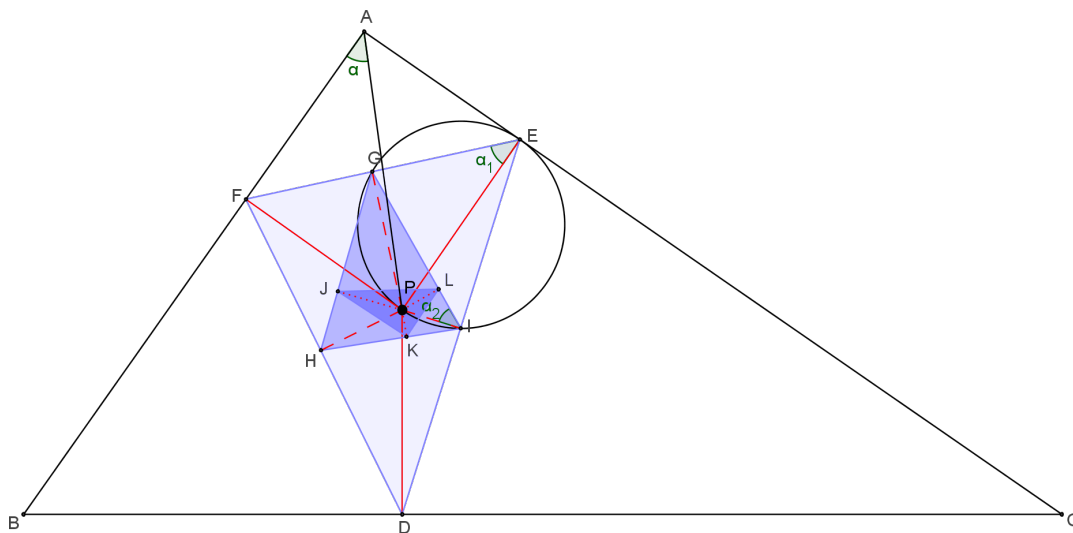


Figura 1.20: Terceiro triângulo pedal

A Figura 1.21 mostra que

$$\alpha_2 = \alpha_3 \tag{1.23}$$

pois estão no mesmo arco capaz \widehat{LP} .

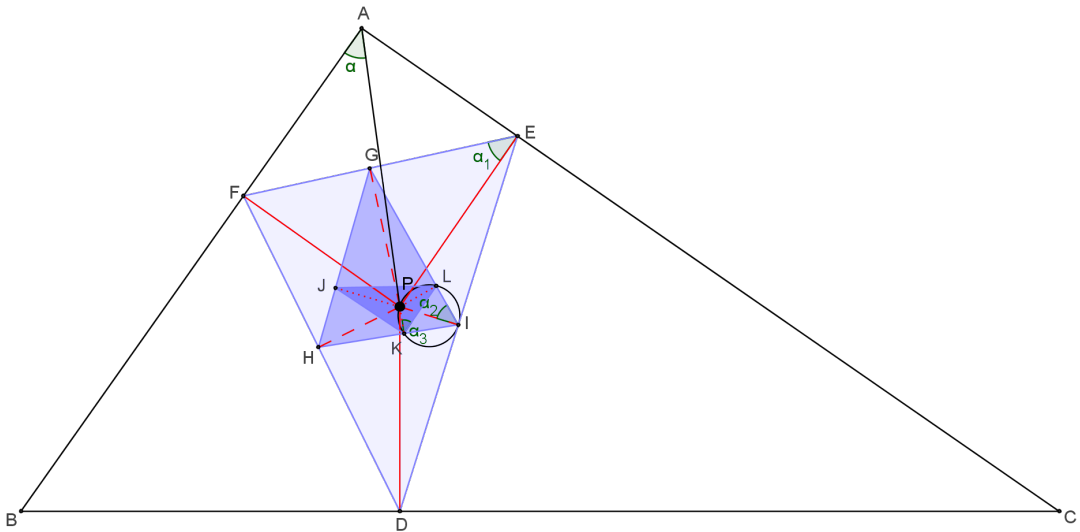


Figura 1.21: Terceiro triângulo pedal

Então , por 1.21, 1.22 e 1.23

$$\alpha = \alpha_3$$

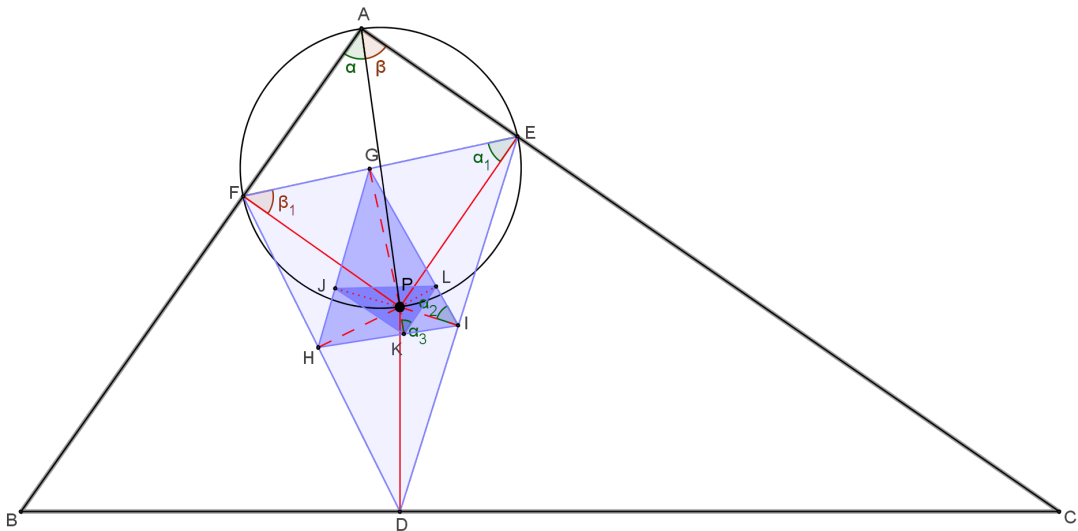


Figura 1.22: Terceiro triângulo pedal

Na Figura 1.22, observamos que

$$\beta = \beta_1 \tag{1.24}$$

pois pertencem ao mesmo arco capaz \widehat{EP} .

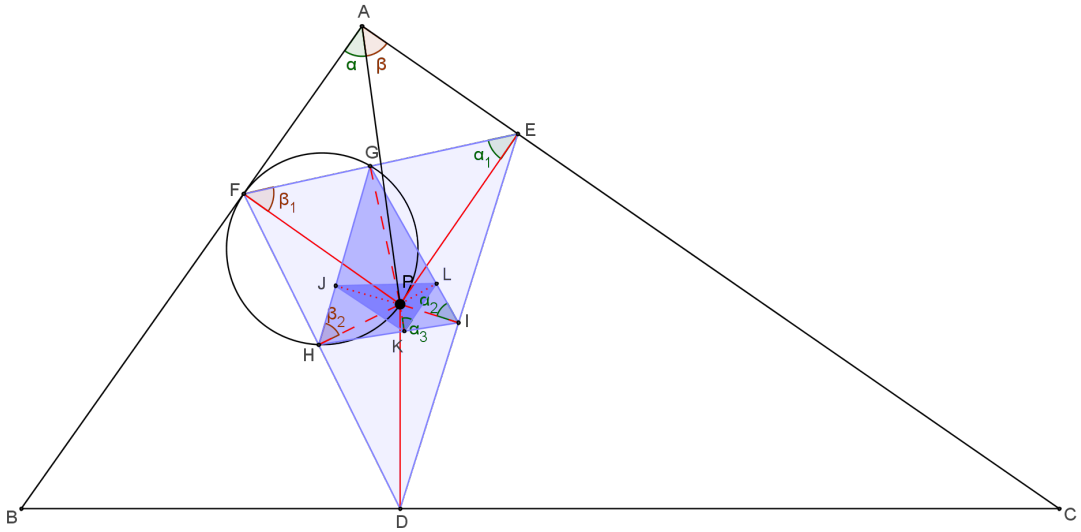


Figura 1.23: Terceiro triângulo pedal

E a Figura 1.23 mostra

$$\beta_1 = \beta_2 \tag{1.25}$$

pois pertencem o mesmo arco capaz \widehat{GP} .

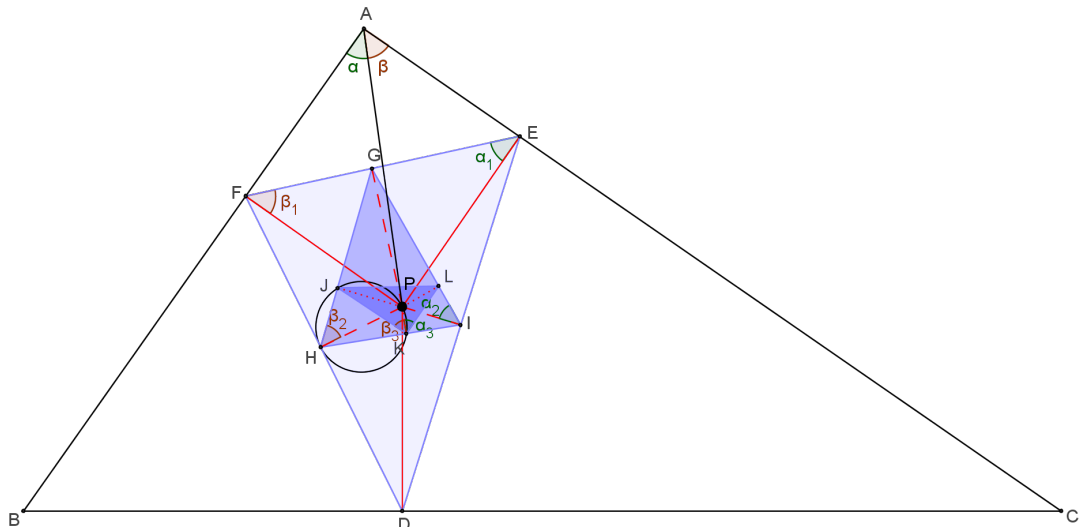


Figura 1.24: Terceiro triângulo pedal

E na Figura 1.24

$$\beta_2 = \beta_3 \tag{1.26}$$

Então, por 1.24, 1.25 e 1.26

$$\beta = \beta_3.$$

Sendo $\angle BAC = \alpha + \beta$ e $\angle JKL = \alpha_3 + \beta_3$ temos $\angle BAC = \angle JKL$, analogamente podemos mostrar que $\angle ABC = \angle JLK$ e $\angle ACB = \angle LJK$.

Assim os ângulos dos triângulos ABC e JKL são iguais, logo os triângulos são semelhantes.

Está propriedade foi generalizada por B.M. Stewart (Am. Math. Mensal, vol.47, agosto-setembro 1940, pp 462-466). Ele chegou a conclusão que o n-ésimo pedal de um polígono qualquer de n lados é semelhante à original.¹

1.4 Triângulo pedal degenerado (Reta de Simson)

A definição de triângulo pedal aparentemente faz sentido para qualquer ponto P , sem exceção. No entanto, de acordo com um teorema provado em 1797 por W. Wallace, para P sobre a circunferência circunscrita do triângulo ABC , os pés das perpendiculares são colineares e portanto não formam o triângulo pedal, mas um segmento de reta.

Este segmento formado pelos pontos pedais relativo ao ponto P é conhecido como linha ou reta de Simson de P , ou apenas reta de Simson. Está atribuição é estranha, pois em nenhum lugar das obras de Robert Simson(1687-1768) foi encontrada qualquer referência à linha de que leva seu nome.(segundo (COXETER,1967, pag41)).

Na Figura 1.25, temos o triângulo ABC inscrito e os pontos F , E e D alinhados. O teorema a seguir demonstra tal alinhamento.

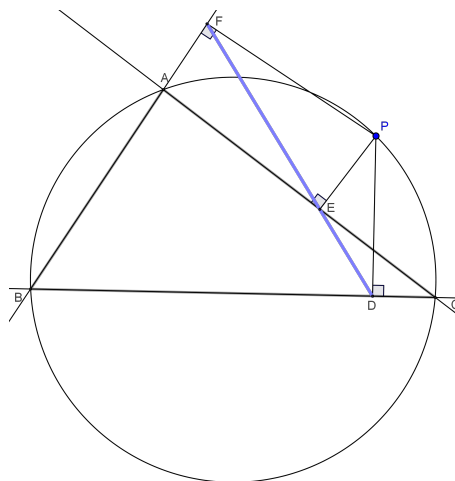


Figura 1.25: DEF Reta de Simson

¹Coxeter em Geometry Revisited, pag 25

Teorema 1.3 (William Wallace, 1797) *Os pés das perpendiculares traçadas de um ponto aos lados de um triângulo ou de seus prolongamentos são colineares se e somente se o ponto está sobre a circunferência circunscrita.*

Demonstração: Vamos mostrar que a medida de um dos ângulos do triângulo pedal é igual 180° .

Observando a Figura 1.26, temos que o quadrilátero $AEPF$ é inscritível, pois os ângulos opostos $\angle AEF$ e $\angle AFP$ são os pés das perpendiculares, portanto $\angle AEF + \angle AFP = 180^\circ$

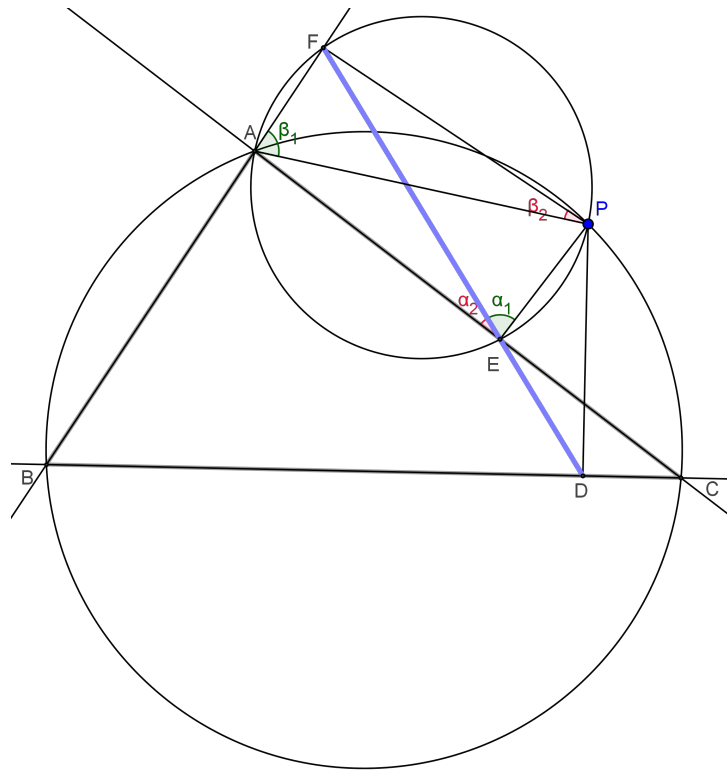


Figura 1.26: DEF Reta de Simson

Assim $\beta_1 = \alpha_1$ por pertencerem ao mesmo arco capaz \widehat{PF} e

$$\beta_2 = \alpha_2, \tag{1.27}$$

pois pertencem ao arco capaz \widehat{AF}

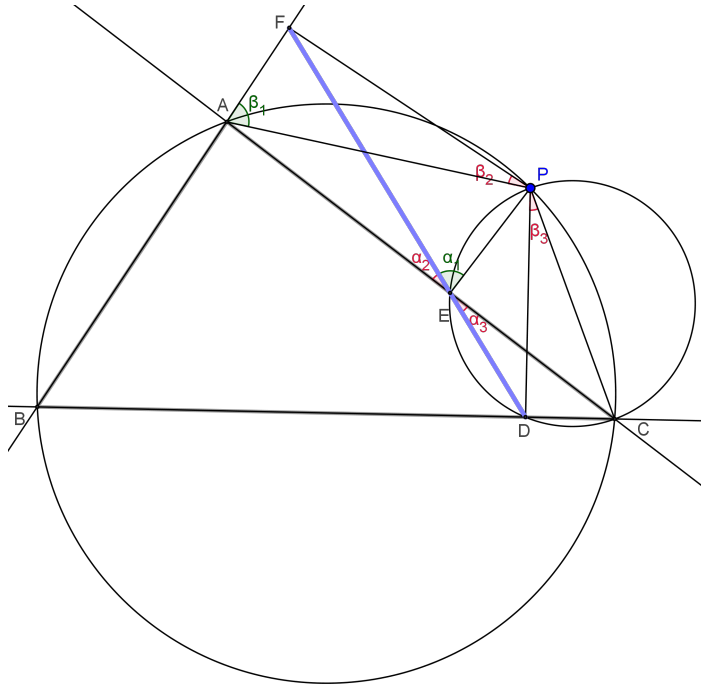


Figura 1.27: DEF Reta de Simson

Os triângulos retângulos PDC e PEC ilustrado em 1.27 tem em comum a hipotenusa PC , então PC é diâmetro da circunferência que circunscreve os triângulos PDC e PEC então o quadrilátero $PEDC$ é inscrito e α_3 e β_3 pertencem ao arco capaz \widehat{CD} assim

$$\alpha_3 = \beta_3 \tag{1.28}$$

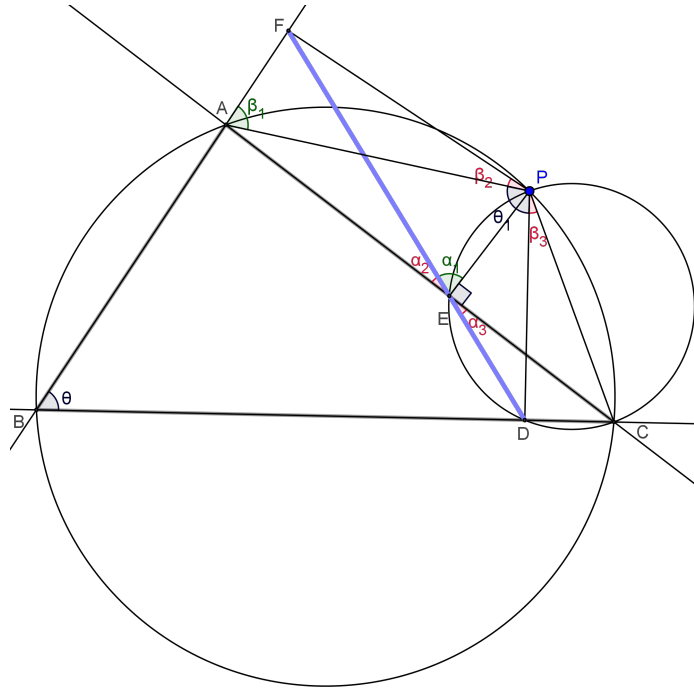


Figura 1.28: DEF Reta de Simson

Observando a Figura 1.28, temos:

$$\angle ABC + \angle APD + \angle DPC = 180^\circ, \text{ ou seja:}$$

$$\theta + \theta_1 + \beta_3 = 180^\circ \tag{1.29}$$

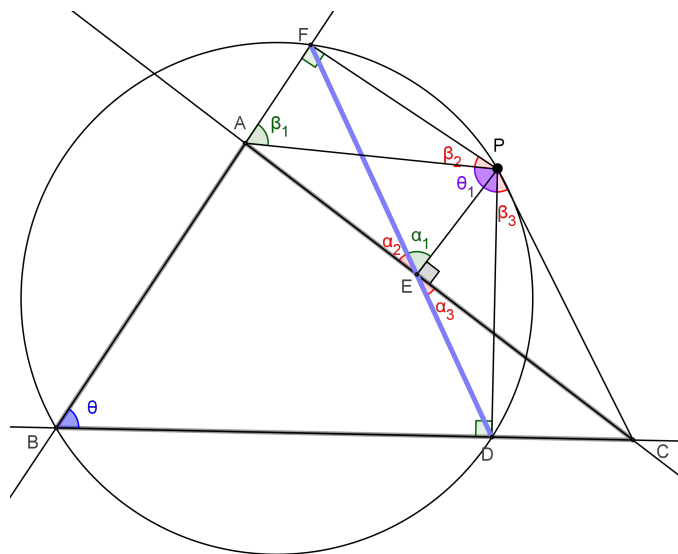


Figura 1.29: DEF Reta de Simson

Como o quadrilátero $FPDB$, ilustrado em 1.29, é inscritível, temos:

$$\theta + \theta_1 + \beta_2 = 180^\circ \quad (1.30)$$

Por (1.29) e (1.30) temos $\beta_2 = \beta_3$ e usando (1.27) e (1.28), chegamos que

$$\alpha_2 = \alpha_3 \quad (1.31)$$

Sabemos que $\angle AEC = \alpha_1 + \alpha_2 + 90 = 180^\circ$ e $\angle FED = \alpha_1 + \alpha_3 + 90$ e usando (1.31),

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 90 = 180^\circ$$

ou seja

$$\angle FED = 180^\circ$$

mostrando assim que F , E e D estão alinhados.

Para a recíproca, consideraremos que D , E e F são colineares e mostraremos que P é ponto da circunferência circunscrita do triângulo ABC . Para isso basta que o quadrilátero $PABC$ seja circunscritível, ou seja $\angle PCB = 180^\circ - \angle PAB$ ou $\angle APC = 180^\circ - \angle CBA$.

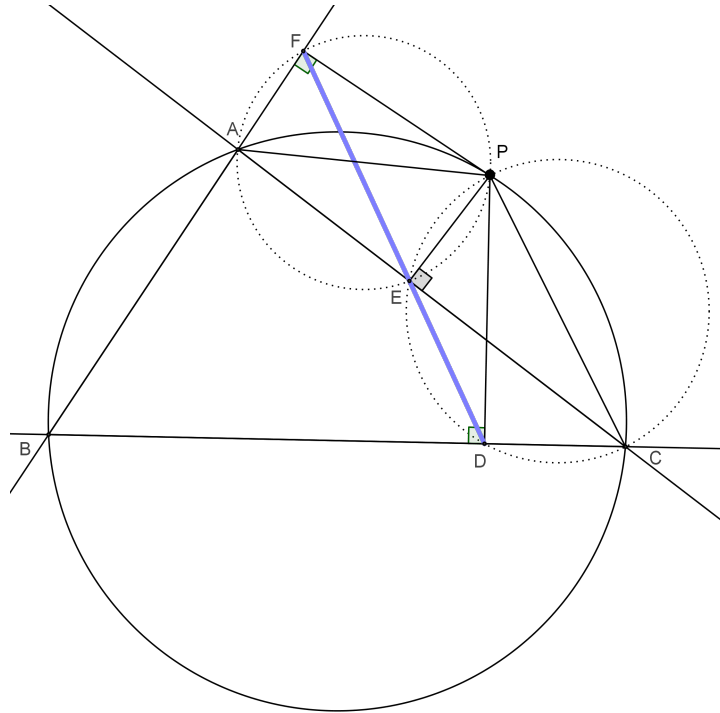


Figura 1.30: DEF Reta de Simson

A Figura 1.30, mostra que $\angle PEF$ e $\angle PED$ são suplementares, pois F , E e D estão alinhados; também $\angle PCB$ e $\angle PED$ são suplementares, pois o quadrilátero $PCDE$ é circunscritível. Logo:

$$\angle PEF = \angle PCB \quad (1.32)$$

Como $\angle PAF$ e $\angle PEF$ pertencem ao mesmo arco capaz PF , temos:

$$\angle PAF = \angle PEF \quad (1.33)$$

e substituindo (1.32) em (1.33),

$$\angle PAF = \angle PCB \quad (1.34)$$

O $\angle PAF$ é suplementar do $\angle PAB$, pois A , B e F estão alinhados

$$\angle PAF = 180^\circ - \angle PAB \quad (1.35)$$

Substituindo (1.34) em (1.35), temos que $\angle PCB = 180^\circ - \angle PAB$, ou seja o quadrilátero $PABC$ é circunscritível.

A demonstração desse teorema, nas referências consultadas, sempre é feito sem o uso da fórmula 1.9. Mas de posse dessa, a demonstração fica trivial:

$$P \in \lambda \Rightarrow OP = R \Rightarrow \frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - R^2|}{4R^2} = 0$$

Se D, E, F estão alinhados

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2} = 0 \Rightarrow |R^2 - OP^2| = 0 \Rightarrow R = OP$$

A imagem, pela homotetia de centro P e razão 2, da reta de Simson é dita Reta Steiner, como segue definição.

Definição 1.3 Para um ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo ABC , a linha que contém D', E' e F' reflexões de P em relação aos lados AB, BC e AC é chamada linha de Steiner.

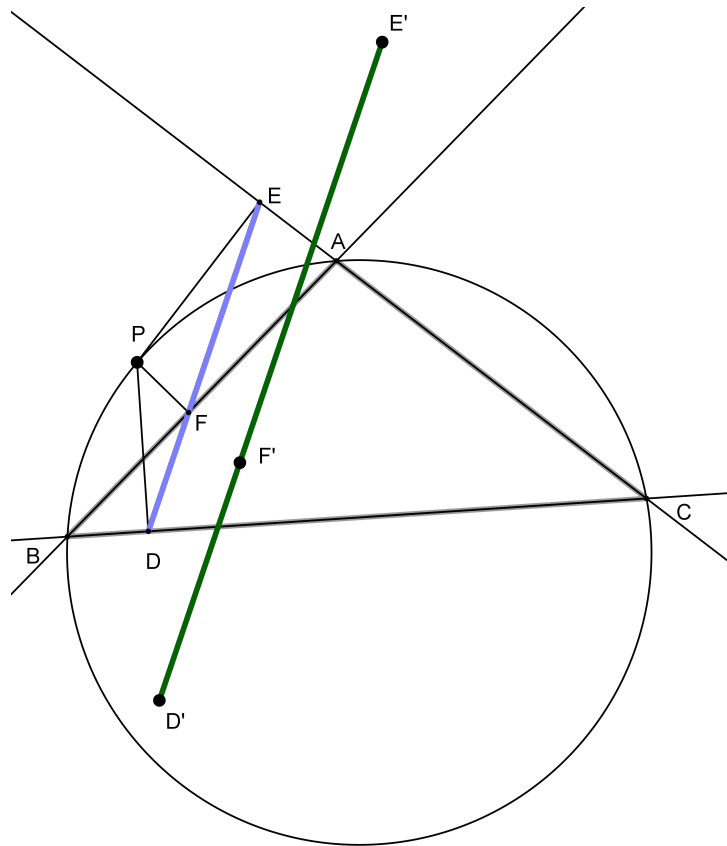


Figura 1.31: Reta Steiner ($D'F'E'$)

1.4.1 A Parábola

Conforme Sergio Alves (Sergio,2008) uma aplicação do teorema da Reta de Simson, é a construção da parábola definida como envoltória da família de suas tangentes.

Dado um $\triangle ABC$, seja D a projeção ortogonal do vértice A sobre a reta BC . Sendo P e Q as projeções ortogonais sobre as retas AB e AC , respectivamente, de um ponto M pertencente à reta BC , afirmamos que a reta PQ desenvolve uma parábola de foco D à medida que M descreve a reta BC .

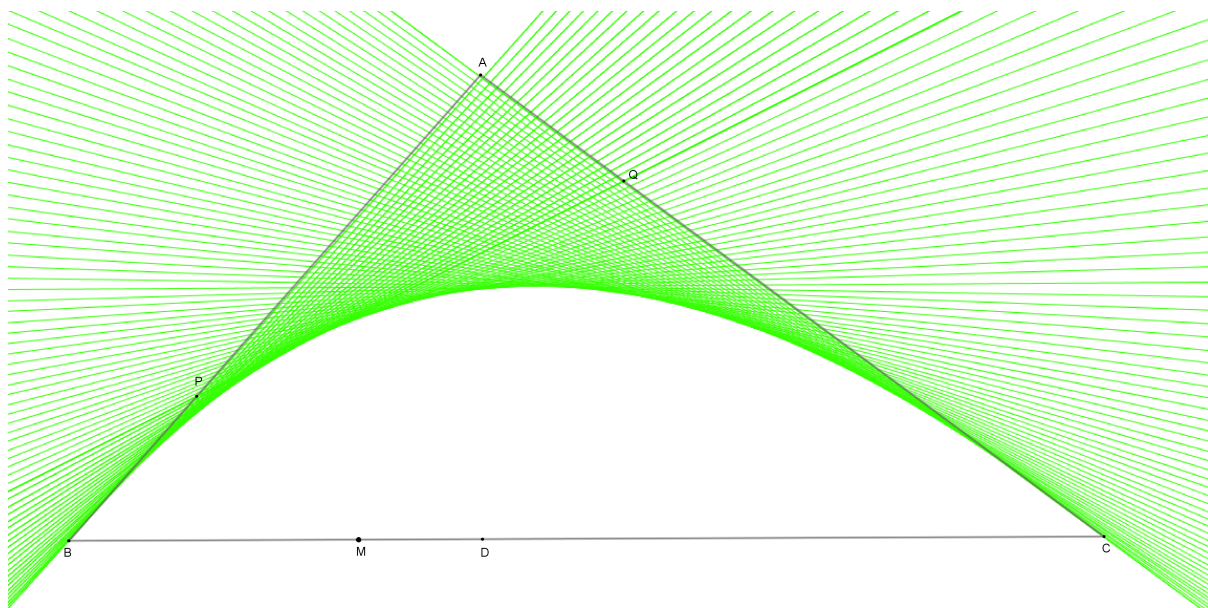


Figura 1.32: Parábola

Com efeito, a circunferência de diâmetro AM passa pelos pontos P , Q e D . Pelo teorema de Simson, as projeções ortogonais E , F e G do ponto D sobre as retas AB , AC e PQ , respectivamente, são colineares.

Assim, quando M descreve a reta BC , o ângulo reto $\angle PGD$ varia de modo que seu vértice G descreve a reta fixa EF e o lado GD passa pelo ponto fixo D . O outro lado GP desenvolve então uma parábola de foco D e cuja tangente no vértice é EF .

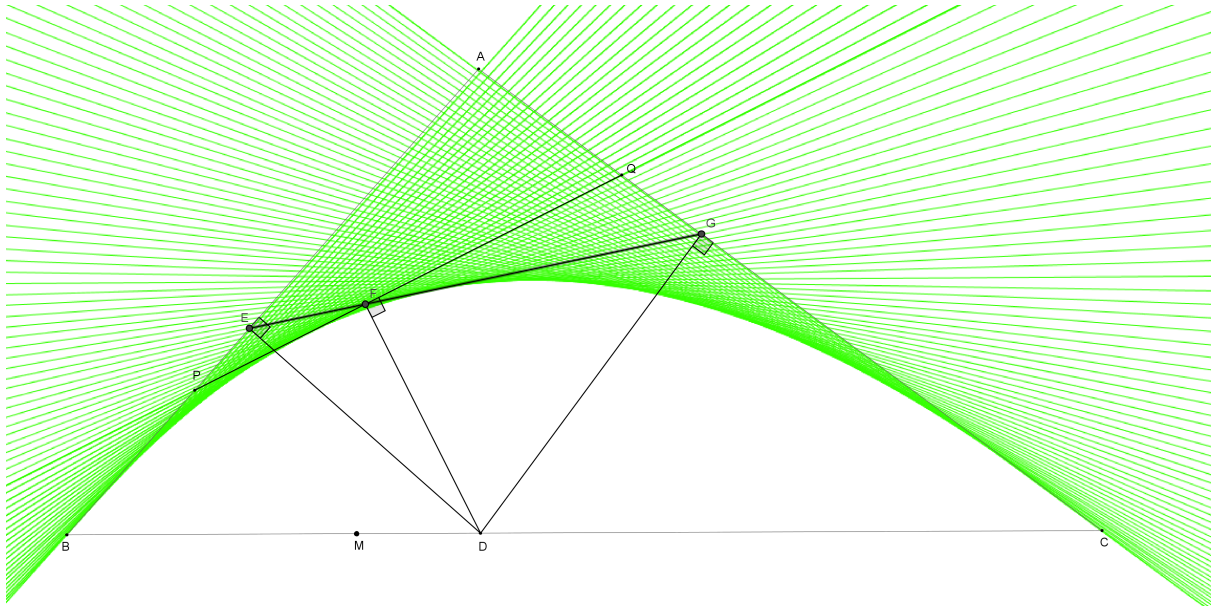


Figura 1.33: Parábola

Note que as retas que contém as alturas do $\triangle ABC$ a partir dos vértices B e C são tangentes a essa parábola, pois quando M coincide com B ou C a reta PQ com uma ou outra dessas retas.

Capítulo 2

Aplicações

Neste capítulo vamos apresentar alguns problemas que não são comuns na literatura de livros didáticos de nível básico, porém despertam a curiosidade e o pensamento matemático e para resolvê-los usamos construções geométricas, teoremas e definições apresentadas no capítulo anterior.

Problema 2.1 (Teorema de Ptolomeu) *Prove que em todo quádrilátero inscritível, o produto dos comprimentos de suas diagonais é igual a soma dos produtos dos comprimentos de seus lados opostos.*

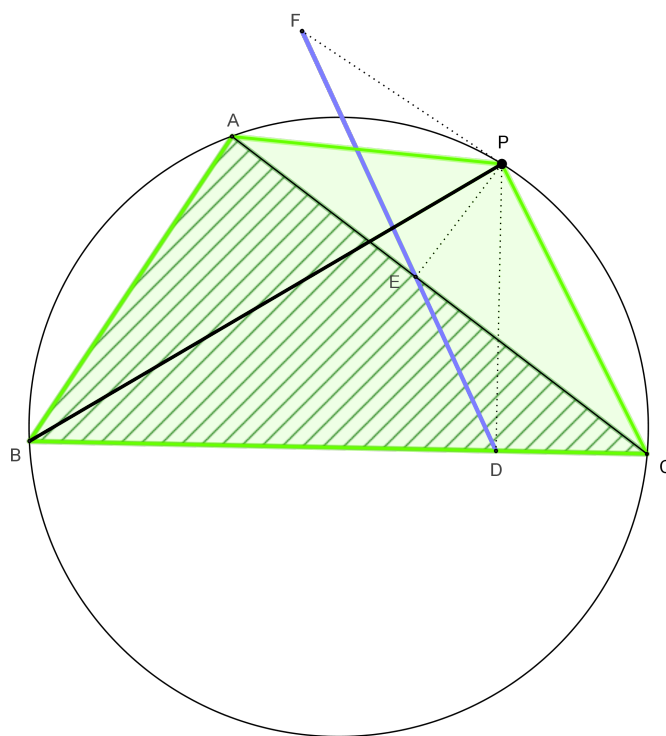


Figura 2.1: Quadrilátero $ABCP$

Solução: A Figura 2.1 mostra que $ABCP$ é um quadrilátero inscritível cujo lados são AB, CP, BC e AP e diagonais AC e BP , sendo DEF a reta de Simson. Embora o "triângulo pedal" DEF seja degenerado, os comprimentos de seus "lados" são ainda dado por

$$EF = \frac{BC \cdot AP}{2R} \quad (2.1)$$

$$DE = \frac{AB \cdot CP}{2R} \quad (2.2)$$

$$DF = \frac{AC \cdot BP}{2R} \quad (2.3)$$

Como D, E e F estão alinhados podemos escrever

$$DE + EF = DF \quad (2.4)$$

Substituindo (2.1), (2.2) e (2.3) em (2.4) e mutiplicando a expressão por $2R$ temos:

$$AB \cdot CP + BC \cdot AP = AC \cdot BP$$

Problema 2.2 *Mostre que o baricentro do triângulo medial é o mesmo do triângulo original.*

Solução: Como as três medianas de um triângulo são concorrentes no baricentro, basta mostrar que as medianas do triângulo original passam pelos pontos médios dos lados do triângulo medial.

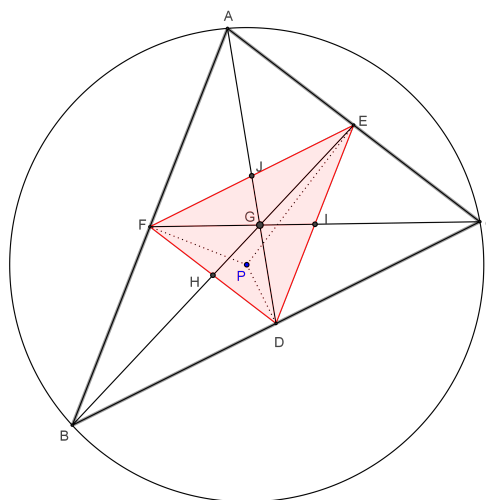


Figura 2.2: Baricentro do Triângulo Medial

Uma vez que EF é a base média do triângulo ABC , $EF \parallel BC$ e $EF = \frac{1}{2}BC$. Analogamente $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$ e por definição $BDEF$ é um paralelogramo de diagonais BE e DF . As diagonais de um paralelogramo se cortam no seu ponto médio H , conforme o teorema 1.7 citado no trabalho da Liliana (MOURA, 2013), ou seja H é ponto médio de DF . De modo semelhante, pode se mostrar que I e J são pontos médios de DE e EF .

Problema 2.3 (Problema de Fagnano) Dado um triângulo acutângulo ABC , inserir um triângulo DEF cujo perímetro seja o menor possível. (COXETER, 1967, pag. 44).

Solução: Tomamos D' e D'' pontos simétricos a D em relação a AB e AC , respectivamente, assim temos que $DF = FD'$ e $DE = ED''$, como ilustra a Figura 2.3.

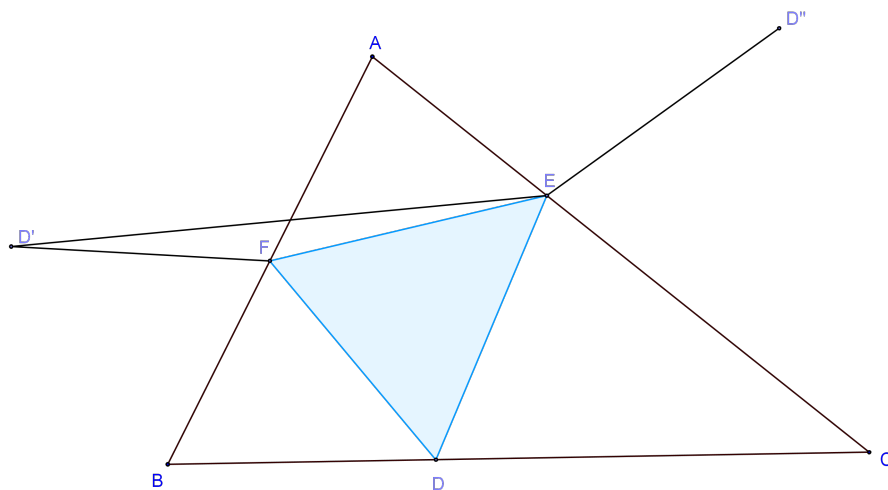


Figura 2.3: Ponto simétrico ao ponto pedal D

O perímetro do $\triangle DEF = DE + EF + DF = ED' + EF + FD'$. Portanto, o $\triangle DEF$ inscrito no $\triangle ABC$, com vértice fixo D , aquele cujos vértices F e E são colineares a D' e D'' possui menor perímetro, ou seja, $ED' + EF + FD'$ é mínimo quando D', F, E e D'' são colineares.

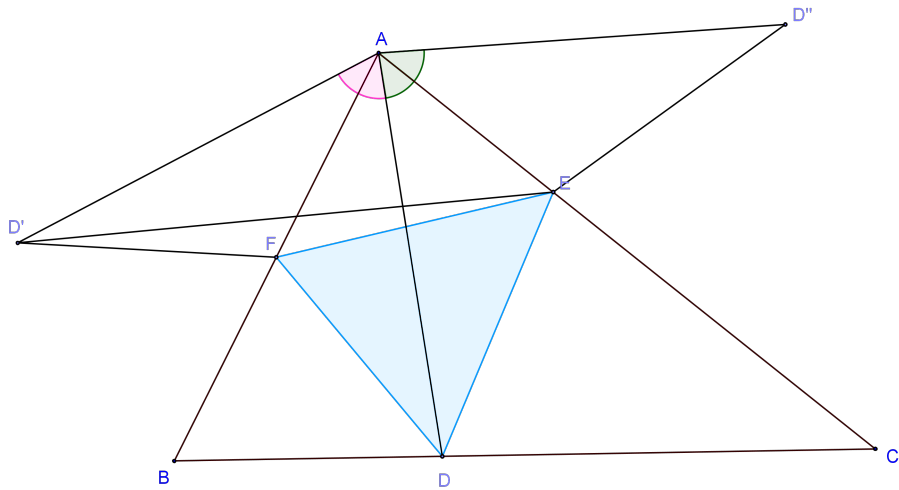


Figura 2.4: Ponto simétrico ao ponto pedal D

O $\angle D'AB = \angle BAD$ e $\angle DAC = \angle CAD''$ pois D' e D'' são simétricos de E em relação AB e AC respectivamente, então $\angle D'AD'' = 2\angle BAC$.

Temos o menor valor de $D'A = AD'' = AD$, quando AD é perpendicular a BC , ou seja, o perímetro $\triangle DEF$ para D fixo é mínimo quando AD é a perpendicular (altura) a BC .

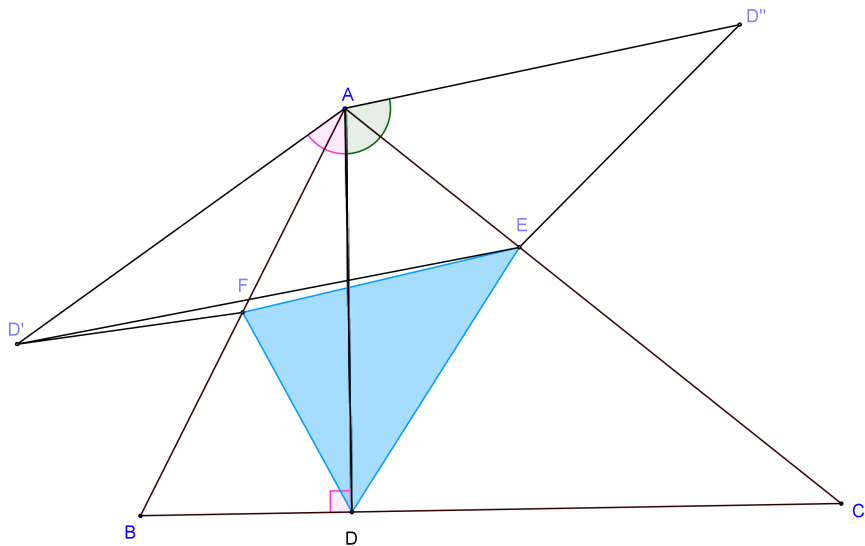


Figura 2.5: Menor perímetro de $\triangle DEF$ para D fixo

Da mesma forma temos que, quando BF e CD são alturas do triângulo ABC , o perímetro $\triangle DEF$ é mínimo para F e D fixo respectivamente. Assim fixando D , E e F

como pés das alturas do triângulo ABC temos que o perímetro do $\triangle DEF$ é mínimo.

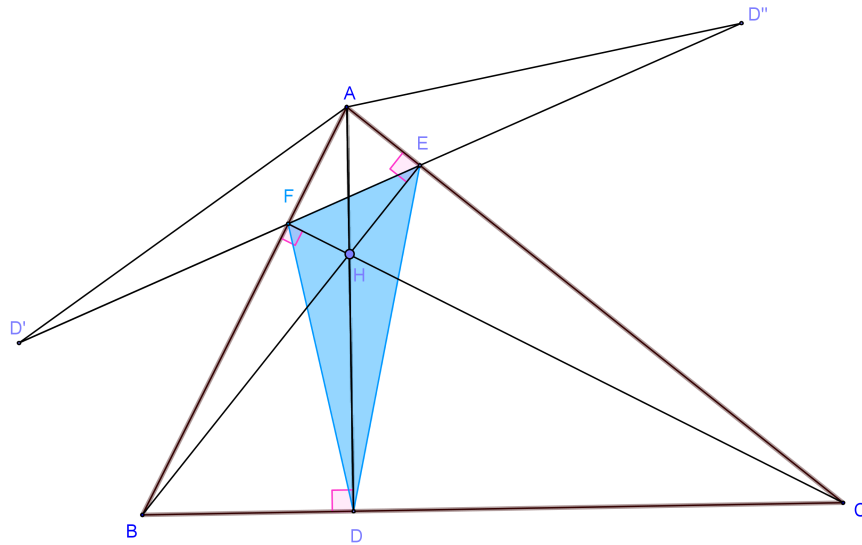


Figura 2.6: Triângulo Órtico

O triângulo pedal gerado pelo ortocentro H (Intersecção das alturas) do triângulo é chamado *triângulo órtico*.

Problema 2.4 (Balkan) *Seja ABC um triângulo acutângulo. Sejam D , E e F as projeções do baricentro G sobre os lados do triângulo. Prove que*

$$\frac{2}{9} \leq \frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} \leq \frac{1}{4}$$

Solução: O teorema 1.71, pag.19 do livro Geometria Revisited (COXETER,1967) diz que *O ortocentro H , baricentro G e circuncentro O de qualquer triângulo são colineares. O baricentro divide a distância do ortocentro ao circuncentro na proporção de 2: 1., ou seja $OG = \frac{1}{3}.OH$, sendo H o ortocentro do triângulo ABC . Como ABC é acutângulo, o ortocentro H é ponto interno do triângulo, assim $OH \leq R$ e substituindo em 1.9 temos:*

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} \geq \frac{R^2 - (\frac{1}{3}R)^2}{4R^2} = \frac{\frac{8R^2}{9}}{4R^2} = \frac{2}{9}$$

$$\frac{2}{9} \leq \frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} \tag{2.5}$$

Obsevando 1.9 temos que $\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)}$ é máxima quando O coincide com G , ou seja, $OG = 0$

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} = \frac{R^2 - OG^2}{4R^2} \leq \frac{R^2}{4R^2} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} \leq \frac{1}{4} \tag{2.6}$$

por 2.5 e 2.6, temos

$$\frac{2}{9} \leq \frac{\text{Área}(ABC)}{\text{Área}(DEF)} \leq \frac{1}{4}$$

Problema 2.5 *Mostre que a reta de Simson de P relativa ao triângulo ABC intersecta o segmento PH , onde H é o ortocentro do triângulo ABC , em seu ponto médio. Consequentemente, o ponto H pertence à reta de Steiner de P relativa ao triângulo ABC .*

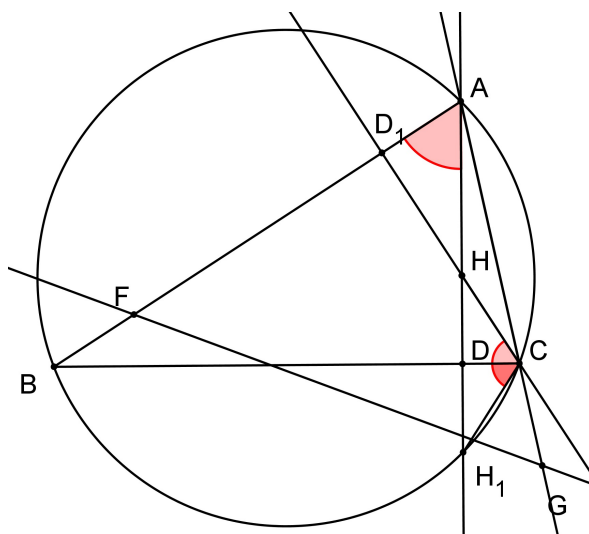


Figura 2.7: Reta Steiner

Demonstração: Seja D_1 o pé da altura relativo ao AB , D o pé da altura relativo ao lado BC e H_1 o ponto onde essa altura reencontra o circuncírculo, conforme a Figura 2.7. Os triângulos AD_1H e CDH são semelhantes, pois possuem um ângulo oposto pelo vértice H e os ângulo D e D_1 é reto, portanto $\angle D_1AH = \angle DCH$. Os ângulos $\angle DCH_1$ e $\angle D_1AH$ estão no mesmo arco capaz BH_1 então $\angle DCH_1 = \angle D_1AH$. Concluímos que $\angle DCH = \angle DCH_1$, como CD é lado comum aos triângulos DCH e DCH_1 e D é ângulo

reto então os triângulos DCH e DCH_1 são congruentes e

$$DH = DH_1$$

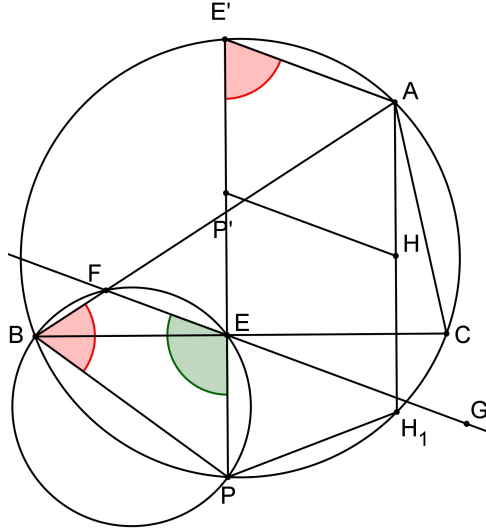


Figura 2.8: Reta Steiner

O prolongamento de PE intercepta a circunferência em E' é paralela a AH_1 , pois ambas são perpendiculares a BC , como mostra a Figura 2.8. Temos assim:

$$\angle PBA = \angle PE'A, \text{ pertencem ao arco capaz } PA \quad (2.7)$$

$$\angle PBF = 180^\circ - \angle PEF \Rightarrow \angle PEG = \angle PBF, \text{ pertencem ao arco capaz } PF \quad (2.8)$$

$$\angle PBF = \angle PBA, \text{ pois os pontos } B, F \text{ e } A \text{ pertencem a } AB \quad (2.9)$$

Por (2.7), (2.8) e (2.9)

$$\angle PEG = \angle PE'A$$

Logo a reta de Simson de P que contém E, F e G é paralela AE' .

Conforme o tcc da Liliana pag 50 (MOURA,2013), o quadrilátero $PE'AH_1$ é um trapézio e, por estar inscrito na circunferência, é um trapézio isósceles. Logo se P' é simétrico de P em relação à reta BC então HP' e AP são retas paralelas e, portanto a reta de Simson de P é paralela à reta HP' .

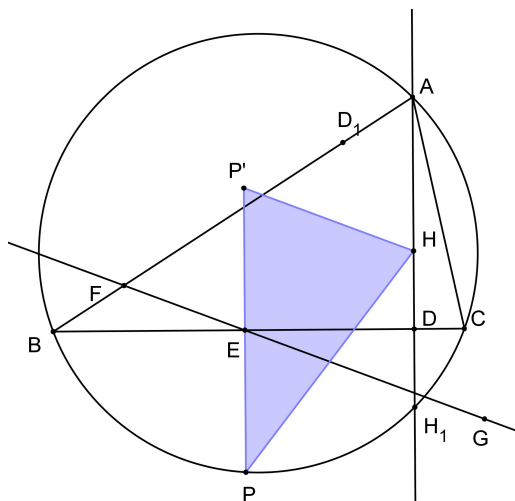


Figura 2.9: Reta Steiner

Finamente, observamos na Figura 2.9 que a reta de Simson é base média do triângulo $PP'H$, pois $EF \parallel HP'$ e E é ponto médio de PP' assim também intersecta o segmento PH em seu ponto médio.

Problema 2.6 *Seja P um ponto no interior do triângulo ABC . Se PD , PE e PF são as distâncias de P aos lados do triângulo ABC , prove que:*

$$PA + PB + PC \geq 2.(PD + PE + PF)$$

Com a igualdade acontecendo se, e somente se, o triângulo ABC é equilátero e P é o circuncentro.

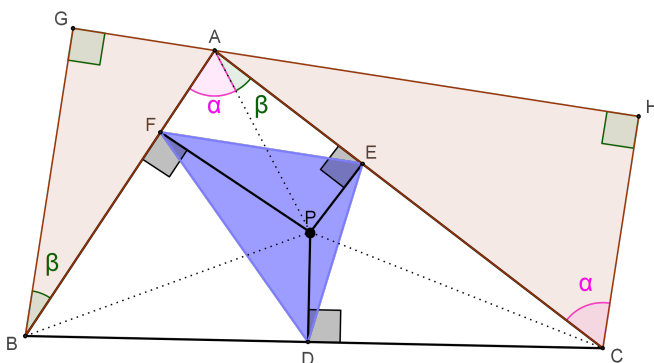


Figura 2.10: Triângulos Auxiliares

Solução: Construimos um triângulo semelhante ao triângulo AEP de lado AB e outro semelhante ao triângulo APF de lado AC como mostra 2.10 de razão de semelhaça K_1 e

K_2 maiores que 1, ou seja

$$AG = K_1 \cdot PE \quad (2.10)$$

$$\frac{AB}{PA} = K_1 \quad (2.11)$$

$$AH = K_2 \cdot PF \quad (2.12)$$

$$\frac{AC}{PA} = K_2 \quad (2.13)$$

Observando a Figura 2.10, o trapézio $GHCB$ tem como altura GH , logo

$$BC \geq GH \Rightarrow BC \geq AG + AH \quad (2.14)$$

Aplicando 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 em 2.14, temos:

$$BC \geq \frac{AB}{PA} PE + \frac{AC}{PA} PF$$

$$BC \cdot PA \geq AB \cdot PE + AC \cdot PF$$

$$PA \geq \frac{AB \cdot PE}{BC} + \frac{AC \cdot PF}{BC} \quad (2.15)$$

De forma análoga, temos:

$$PB \geq \frac{AB \cdot PD}{AC} + \frac{BC \cdot PF}{AC} \quad (2.16)$$

$$PC \geq \frac{AC \cdot PD}{AB} + \frac{BC \cdot PE}{AB} \quad (2.17)$$

Somando membro a membro 2.15, 2.16 e 2.17 temos:

$$PA + PB + PC \geq PD \left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} \right) + PE \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) + PF \left(\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} \right) \quad (2.18)$$

Aplicando a desigualdade das médias aritmética/geométrica, temos:

$$\frac{\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}}{2} \geq \sqrt{\frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB}}$$

$$\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB} \geq 2 \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}}{2} &\geq \sqrt{\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC}} \\ \frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC} &\geq 2\end{aligned}\tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}\frac{\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}}{2} &\geq \sqrt{\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{AB}} \\ \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} &\geq 2\end{aligned}\tag{2.21}$$

Substituindo $\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}$, $\frac{AC}{BC} + \frac{BC}{AC}$ e $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB}$ por 2, continua valendo a desigualdade 2.18 por 2.19, 2.20 e 2.21 e colocando 2 em evidência, temos:

$$PA + PB + PC \geq 2.(PD + PE + PF)$$

É fácil ver que quando o triângulo ABC for equilátero e P o circuncentro, temos $PA = PB = PC = R$ sendo R o raio da circunferência que circunscreve ABC , $PE = PD = PF = \frac{R}{2}$, logo vale a igualdade.

Capítulo 3

Generalização

O problema apresentado neste trabalho, talvez seja simples. No entanto, fez com que entendêssemos melhor a geometria, contribuindo para o amadurecimento das nossas habilidades matemáticas e possibilitando o surgimento de novos problemas. Dentre esses problemas vamos, neste capítulo, apresentar os resultados da área do triângulo e da reta se Simson quando abrimos mão das projeções ortogonais.

Teorema 3.1 *Seja $\lambda(O, R)$ a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Considere um ponto P no plano do triângulo e um ângulo $0^\circ < \beta < 180^\circ$, sejam D, E e F pontos sobre as retas AB, BC, CA tais que PD, PE, PF formam um ângulo β com as retas AB, BC, AC , respectivamente, na mesma orientação. Então:*

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2 \cdot \text{sen}^2 \beta} \quad (3.1)$$

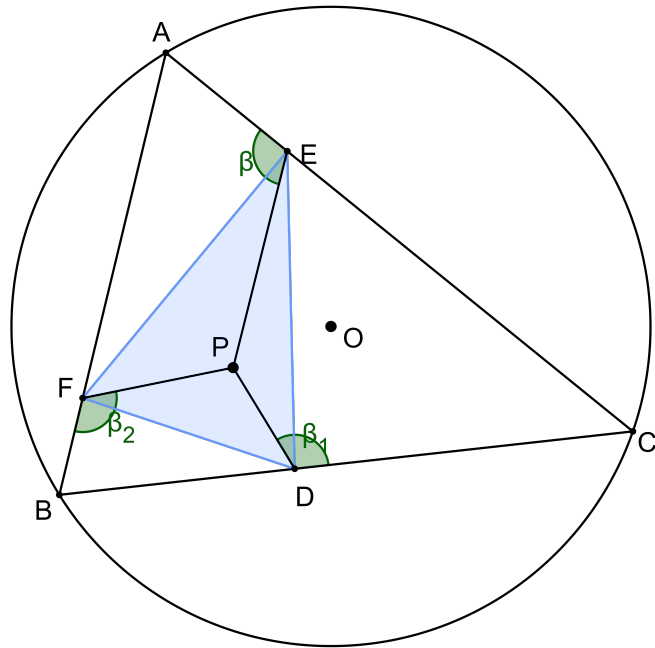


Figura 3.1: Triângulo DEF gerado pelas projeções de P em ABC

Demonstração: Seja G , H e I os pontos de intersecção das retas AP , BP e CP com a circunferência λ como mostra a Figura 3.2.

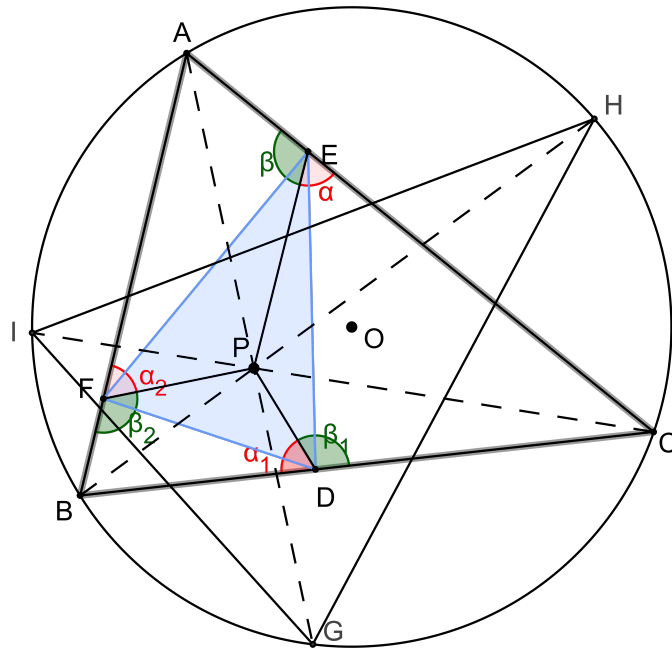


Figura 3.2: Triângulo GHI semelhante a DEF

Os triângulos IPH e BPC são semelhantes, pois os ângulos $\angle HIP$ e $\angle PBC$ são iguais por pertencerem ao mesmo arco capaz \widehat{HC} e $\angle IHP$ e $\angle PCB$ também são iguais por pertecerem ao mesmo arco capaz \widehat{IB} . Então:

$$\frac{IH}{BC} = \frac{HP}{CP} = \frac{IP}{BP} \quad (3.2)$$

Observando a Figura 3.3 é fácil ver que os quadriláteros $FBDP$ e $PDCE$ são incritíveis, pois os ângulo α e β_1 são suplementares, pois pertecem ao lado BC , então:

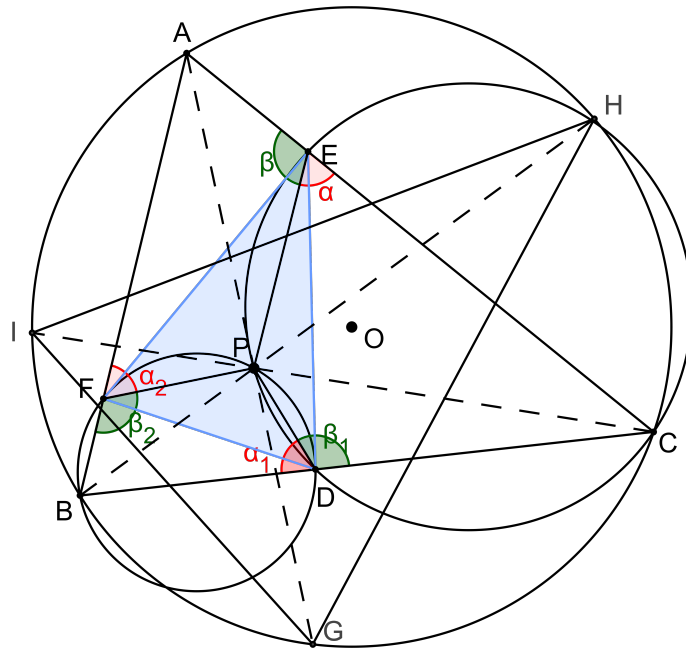


Figura 3.3: Circunscrição de $FBDP$ e $PDCE$

- α e β são suplementares e opostos em relação ao quadrilátero $FBDP$, o que o torna inscritível em uma circunferência de diâmetro $2r$.
- α e β são opostos em relação ao quadrilátero $ECDP$, o que o torna inscritível em uma circunferência de diâmetro $2r_1$. Usando a propriedade de arco capaz na circunferência que os circunscreve temos:

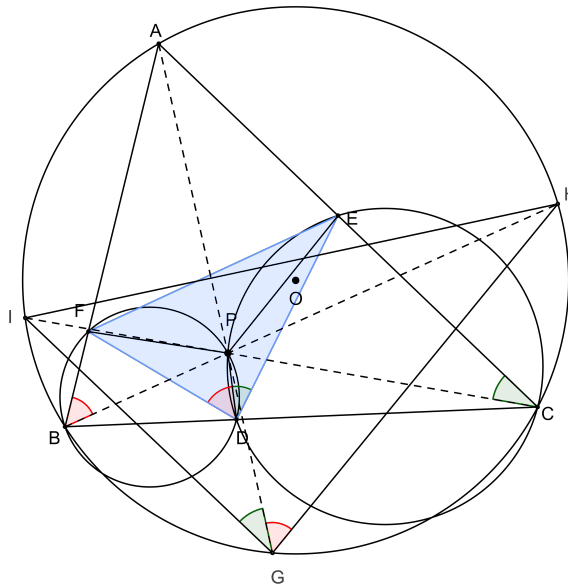


Figura 3.4: triângulos DEF e HIG semelhantes

$$\angle FDP = \angle FBP, \text{ pois pertencem ao mesmo arco capaz } \widehat{FP}$$

$$\angle FBP = \angle AGH, \text{ pois pertencem ao mesmo arco capaz } \widehat{AH}$$

Logo, $\angle FDP = \angle AGH$

$$\angle PDE = \angle PCE, \text{ pois pertencem ao mesmo arco capaz } \widehat{PE}$$

$$\angle PCE = \angle IGA, \text{ pois pertencem ao mesmo arco capaz } \widehat{IA}$$

Logo, $\angle PDE = \angle IGA$

Sabendo que

$$\angle FDE = \angle FDP + \angle PDE \quad \text{e} \quad \angle IGH = \angle IGA + \angle AGH$$

temos:

$$\angle FDE = \angle IGH$$

Analogamente $\angle HIG = \angle EFD$ e $\angle IHG = \angle FED$, portanto os triângulos DEF e HIG são semelhantes e o razão de semelhança entres os raios R e R_{DEF} que circunscribe HIG e DEF respectivamente obdece a mesma razão de semelhança.

$$\frac{EF}{HI} = \frac{R_{DEF}}{R} \quad (3.3)$$

Sendo $FBDP$ é inscritível em uma circunferência de diâmetro $2r$. Aplicando a lei dos Senos nos triângulos FBP , FDP e ABC temos:

$$\frac{BP}{\text{sen}\beta} = 2r \quad (3.4)$$

$$\frac{DF}{\text{sen}B} = 2r \quad (3.5)$$

$$\frac{AC}{\text{sen}B} = 2R \Rightarrow \text{sen}B = \frac{AC}{2R} \quad (3.6)$$

por 3.4 e 3.5 temos:

$$\frac{BP}{\text{sen}\beta} = \frac{DF}{\text{sen}B} \Rightarrow DF = \frac{BP \text{sen}B}{\text{sen}\beta} \quad (3.7)$$

substituindo 3.6 em 3.7, temos:

$$DF = \frac{AC \cdot BP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \quad (3.8)$$

Se usarmos o mesmo raciocinio para encontrar DE e EF , teremos:

$$DE = \frac{AB \cdot CP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \quad (3.9)$$

$$EF = \frac{BC \cdot AP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \quad (3.10)$$

Fazendo a razão entre as áreas dos triângulos DEF e ABC , temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{\frac{DE \cdot DF \cdot EF}{4R_{DEF}}}{\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}} = \frac{R \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{R_{DEF} \cdot AB \cdot BC \cdot AC} \quad (3.11)$$

Substituindo 3.3 em 3.11, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{HI \cdot DE \cdot DF \cdot EF}{EF \cdot AB \cdot BC \cdot AC}$$

e usando 3.2, 3.9 e 3.8 , temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP}{PB} \frac{AB \cdot CP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \frac{AC \cdot BP}{2R \cdot \text{sen}\beta} \frac{1}{AB \cdot AC}$$

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{GP \cdot CP}{4R^2 \cdot \text{sen}^2\beta} \tag{3.12}$$

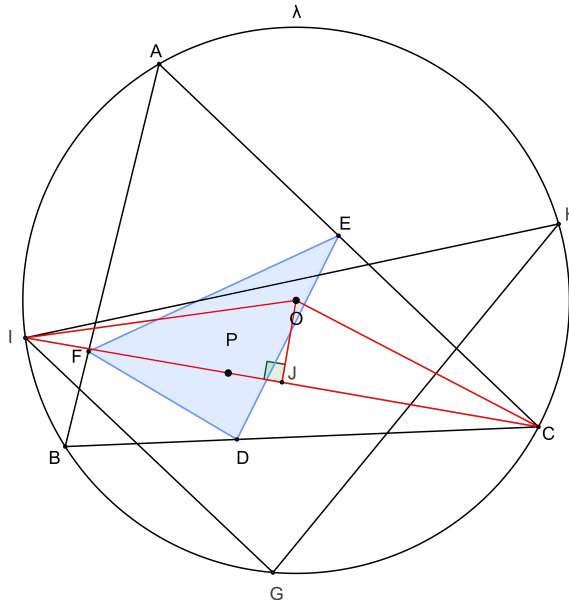


Figura 3.5: Triângulo isósceles COI

O triângulo COI que se apresenta na Figura 3.5 detalhado em 3.6 é isósceles, pois $OI = OC = R$. Sendo J em CI tal que OJ seja altura de COI , então $IJ = JC$.

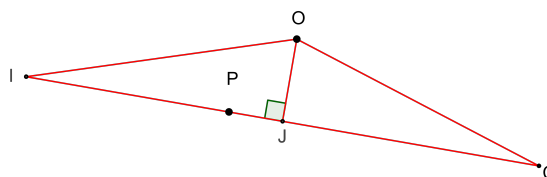


Figura 3.6: COI extraído da Figura 3.5

No triângulo OCJ , temos:

$$OC^2 = CJ^2 + OJ^2$$

$$OC^2 - CJ^2 = OJ^2 \quad (3.13)$$

No triângulo OPJ , temos

$$OP^2 = OJ^2 + JP^2$$

$$OP^2 - JP^2 = OJ^2 \quad (3.14)$$

Igualando 3.13 e 3.14 e sabendo que $OC = R$, temos

$$R^2 - OP^2 = (CJ - JP)(CJ + JP)$$

$$R^2 - OP^2 = IP \cdot CP \quad (3.15)$$

Substituindo 3.15 em 3.12, temos:

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2 \sin^2 \beta}$$

Teorema 3.2 (Reta de Simson Generalizado) *Seja ABC um triângulo de circuncírculo λ . Dados um ponto P e um ângulo β , sejam D , E e F pontos sobre as retas AB , BC , CA tais que PD , PE , PF formam um ângulo β com as retas AB , BC , CA , respectivamente, na mesma orientação. Então D , E e F são colineares se, e somente se P pertence à circunferência λ .*

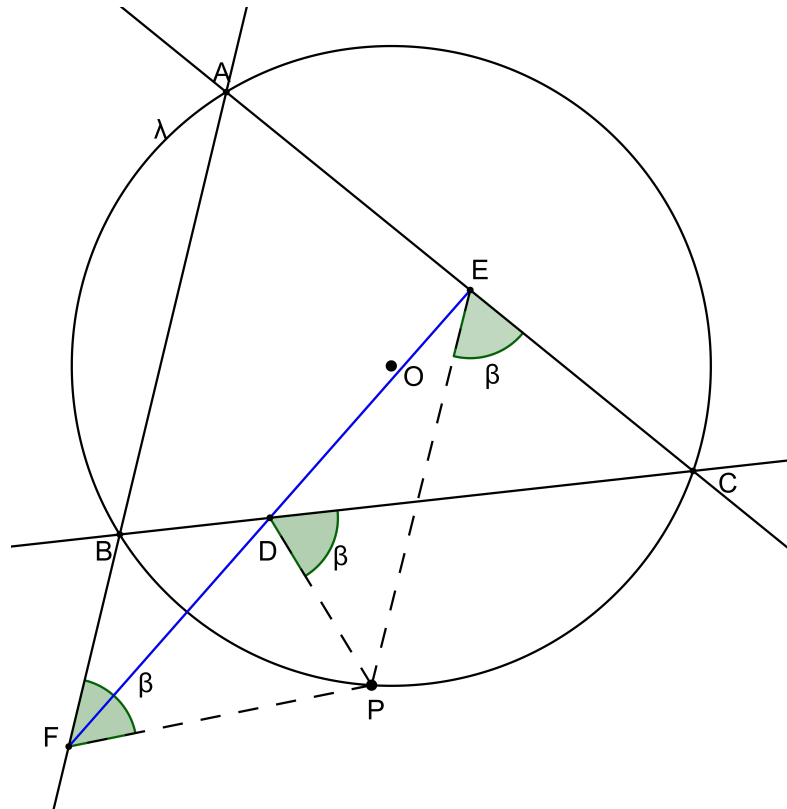


Figura 3.7: Reta de Simson Generalizada

Demonstração: Como mostra a Figura 3.8 os quadriláteros $BFPB$, $DPCE$ e $AFPE$ são inscritíveis, então

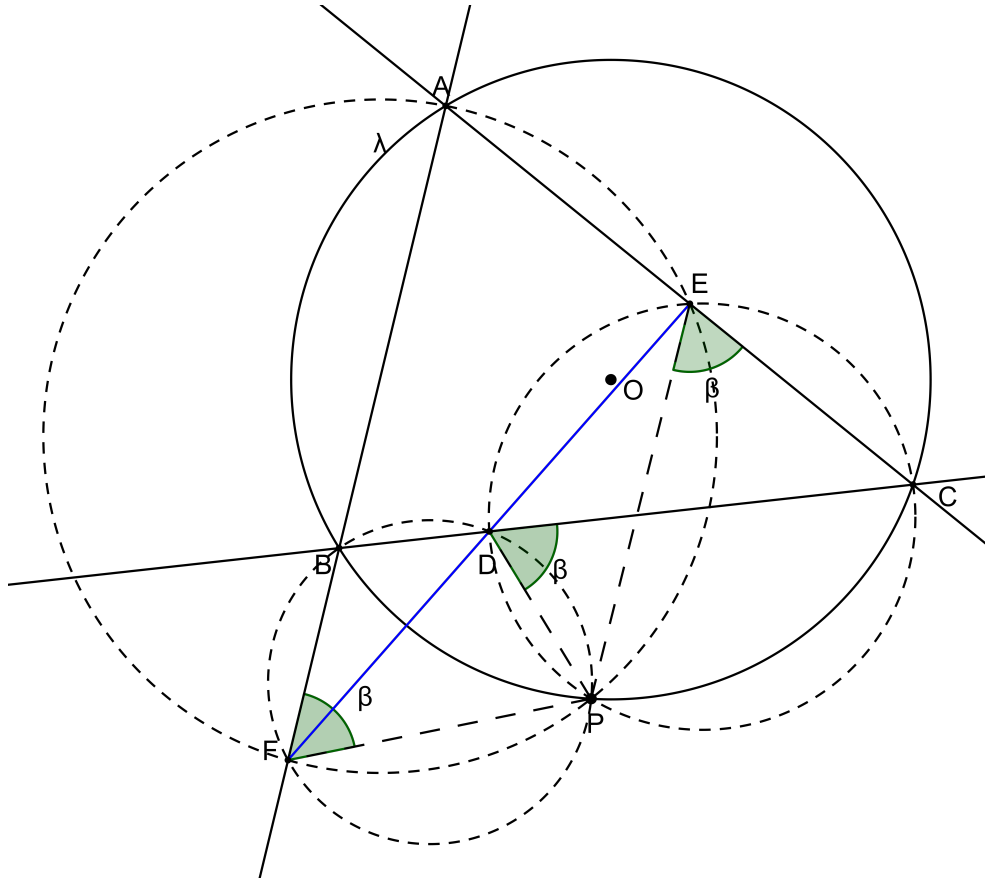


Figura 3.8: Circunscricao de $BFPB$, $DPCE$ e $AFPE$

$$\angle BDF = \angle BPF \text{ e } \angle EPC = \angle EDC$$

$$\angle FPE = \angle BPC, \text{ pois s\~{a}o suplementares do } \angle B \Rightarrow \angle EDC = \angle BDF$$

A soma dos \~{a}ngulos que est\~{a}o em BC \~{e} dada por:

$$\angle BDF + \angle FDP + \angle PDC = 180^\circ$$

Logo,

$$\angle FDP + \angle PDC + \angle EDC = \angle BDF + \angle FDP + \angle PDC = 180^\circ$$

O que mostra que D , E e F est\~{a}o alinhados.

Da mesma forma, citado em 1.4, a demonstração deste teorema torna-se trivial se usarmos a fórmula 3.1, como segue:

$$P \in \lambda \Rightarrow OP = R \Rightarrow \frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - R^2|}{4R^2 \cdot \text{sen}^2\beta} = 0$$

Se D, E, F estão alinhados

$$\frac{\text{Área}(DEF)}{\text{Área}(ABC)} = \frac{|R^2 - OP^2|}{4R^2 \cdot \text{sen}^2\beta} = 0 \Rightarrow |R^2 - OP^2| = 0 \Rightarrow R = OP$$

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma forma de aprendizado de geometria baseado em investigação, construções geométricas utilizando o Geogebra e demonstrações.

Com a investigação desses problemas apresentados no trabalho que raramente encontramos nos livros didáticos, queremos buscar o estímulo a curiosidade de alunos e professores oferecendo ferramentas para a construção de um conhecimento matemático sólido.

Deparamo-nos, no decorrer da pesquisa, a todo momento o surgimento de novos problemas mediante a solução de outro, fazendo com que este trabalho se torne inacabado mesmo que o tempo tenha se esgotado.

Percebemos assim a necessidade de um estudo contínuo investigativo, mesmo não tendo nos últimos tempos resultados novos em geometria, mais as aplicações e variações do que já foi descoberto é fantástico.

Terminamos assim as considerações com uma fala de Paulo Freire que diz:

Gosto de ser gente porque, inacabado, sei que sou um ser condicionado, mas, consciente do inacabamento, sei que posso ir mais além dele.

Referências Bibliográficas

- [BORSENCO,2007] BORSENCO, I. **On the area of a pedal triangle**. . Disponível em: [https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/reflections/2007_2/pedal\(2\).pdf](https://www.awesomemath.org/wp-content/uploads/reflections/2007_2/pedal(2).pdf)
Acesso em: 20 de fev. 2013,2007.
- [COXETER,1967] COXETER, H.S.M; GREITZER, S. **Geometry Revisited**, volume 19. Washington, D.C. The Mathematical Association of America,1967.
- [FREIRE,2004] FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido**. Rio de Janeiro, Paz e Terra,2004.
- [HONSBERGER,1995] HONSBERGER, R. **Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry**. washington, The Mathematical Association of America,1995.
- [MEC ,2006] MEC , M. **Parâmetros curriculares nacionais: Ensino médio**, volume 2. Brasília, MEC. Ciência da natureza, matemática e tecnologia,2006.
- [MORGADO et al.,2002] MORGADO, A., WAGNER, E., e JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro, FC e Z Livros,2002.
- [MOURA,2013] MOURA, L. K. **Abordagem Alternativa no Estudo dos Quadráteros**. Cuiabá, MT,2013.
- [POLYA,1995] POLYA, G. **A arte de resolver problemas:um novo aspcto do método matemático**. Rio de Janeiro, Interciência. Traduç ã e adaptaç ão: Heitor Lisboa de Araújo,1995.
- [Sergio,2008] Sergio, A. **A Parábola Revisitada**. IME-USP,2008.
- [TORRES,2003] TORRES, A. **Desigualdade Erdos-Mordell**, volume 18. Rio de Janeiro, EUREKA-SBM,2003.

[WILSON,] WILSON, J. Disponível em: <http://www.jwilson.coe.uga.edu> Acesso em: 21 de nov. 2012.