UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JOSÉ UESLEI MARQUES PASCOAL

"UM BREVE ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE JAGUARUANA-CE"

MOSSORÓ/RN

2014

JOSÉ UESLEI MARQUES PASCOAL

UM BREVE ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE JAGUARUANA-CE

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Antônio Ronaldo Gomes

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)
Setor de Informação e Referência

P281e Pascoal, José Ueslei Marques.
O ensino-aprendizagem de cálculo diferencial e integral na educação básica de Jaguaruana-CE./ José Ueslei Marques Pascoal. -- Mossoró, 2014.
56f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Ronaldo Gomes.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pós-Graduação.

1. Cálculo. 2. Ensino básico. 3. Aplicações. I.Titulo.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 515.3

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva
CRB-15/120

JOSÉ UESLEI MARQUES PASCOAL

UM BREVE ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL NA EDUCAÇÃO BÁSICA DE JAGUARUANA-CE.

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 26 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA

Prof°. Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA

Presidente

Mauricio Zuluaga M

Prof°. Dr. Mauricio Zuluaga Martinez - UFERSA

Primeiro Membro

Odirlei Silva Jesus

Prof°. Dr. Odirlei Silva Jesus - UFRN

Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 26 de Abril de 2014.

Dedico este trabalho a todas as pessoas próximas a mim que foram muito importantes para a sua conclusão, pois deram os estímulos necessários sendo companheiros e compreensivos nos momentos difíceis, e na certeza de que estarão comigo em todos os momentos da vida.

Agradecimentos

A Deus, por tudo que tens me dado.

Aos meus pais, pelo carinho e dedicação.

A minha noiva, pelo incentivo, amor, dedicação e exemplo profissional como educadora.

A todos que não mediram esforços para me ajudar no decorrer deste trabalho.

Ao meu orientador, Dr. Antônio Ronaldo Gomes, pela paciência, companheirismo e pelas tantas sugestões.

“Se as leis da matemática referem-se à realidade,
elas não estão corretas; e,
se estiverem corretas,
não se referem a realidade.
(Albert Einstein)

Resumo

O presente trabalho tem por intuito abordar o ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica do Município de Jaguaruana-CE, verificando se o conteúdo está inserido no PNLD 2012 e no currículo das escolas públicas do respectivo município, além de sugerir algumas formas de como o Cálculo poderia ser trabalhado em sala de aula, utilizando aplicações práticas e noções intuitivas de limite, derivada e integral, conceitos estes que vem sendo bastante discutido por alguns autores que consideram este conteúdo a nível de Ensino Básico. Além disso, o Cálculo é reconhecidamente um dos ramos mais importantes da Matemática, usado em inúmeros campos do conhecimento humano e de importância fundamental no cenário cientifico mundial, devido a sua imensa aplicabilidade prática. O Cálculo é exaustivamente usado no Ensino Superior, principalmente na área de exatas, ficando plenamente justificado sua inclusão no Ensino Básico, servindo como uma ponte para o Ensino Superior. Também seria muito útil no ensino de várias ciências como Física, Química entre outras, e no estudo das funções elementares, conteúdo este tão abordado no primeiro ano do Ensino Médio e usado nas séries seguintes. Foi realizada uma simples verificação nos currículos das escolas e nos livros didáticos, nas três séries do Ensino Médio, dando-se ênfase maior ao 3º ano, etapa final da educação básica, na tentativa de encontrar algum conteúdo típico do Cálculo. Para uma melhor compreensão das informações, foram utilizadas tabelas para organização dos dados e posterior transformação em gráficos. Verificou-se que é possível utilizar ideias intuitivas de Cálculo Diferencial e Integral no âmbito do Ensino Básico, auxiliando no processo de ensino aprendizagem de outras disciplinas e de vários dos demais conceitos matemáticos.

Palavras-chaves: Cálculo. Ensino Básico. Aplicações.

Abstract

The present work is aimed at addressing the teaching of Differential and Integral Calculus in Basic Education of the City of Jaguaruana-CE, making sure the content is inserted into PNLD 2012 and in the curriculum of public schools in the respective municipality, and suggest some ways of how Calculation could be worked into the classroom, using full practical applications and intuitive notions of limit, derivative, and concepts that has been extensively discussed by some authors consider that this content the level of formal education. In addition, the calculation is admittedly one of the most important branches of mathematics, used in numerous fields of human knowledge and of fundamental importance in the global scientific landscape, due to its immense practical applicability. The calculation is extensively used in higher education, especially in the exact sciences, getting fully justified their inclusion in formal education, serving as a bridge to higher education. It would also be very useful in teaching various sciences like Physics, Chemistry, among others, and in the study of elementary functions, such as content addressed during the first year of high school and used in the following series. A simple check was performed in the curricula of schools and textbooks in the three series of high school, giving greater emphasis to the 3rd year, the final stage of basic education in an attempt to find some typical contents of Calculus. For a better understanding of the information tables for organization of data and subsequent transformation graphs were used. It was found that it is possible to use intuitive ideas of differential and integral calculus within the formal education, assisting in the teaching and learning of other disciplines and various other mathematical concepts of the process.

Key-words: Calculation. Basic Education. Applications.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

1 Introdução

> O Cálculo teve sua origem nas dificuldades encontradas pelos antigos matemáticos na sua tentativa de expressar suas ideias intuitivas sobre as razões ou proporções de segmentos de retas, que vagamente reconheciam como continuas, em termos de números, que consideraram discretos. (BOYER,1996, p.87).

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Educação Básica é algo bastante discutido por alguns pesquisadores atuantes em Educação Matemática, vários deles acreditam que o ensino de elementos do Cálculo tais como limite, derivada e integral sejam favoráveis para este nível de ensino. Conforme Machado (2002, p. 14), o Cálculo Diferencial e Integral é um conhecimento muito importante que:

> [...] nas mais variadas áreas do conhecimento, como Engenharia, Química, Física, Biologia, Economia, Computação, Ciências Sociais, Ciências da Terra etc., a análise sistemática de modelos que permitem prever, calcular, otimizar, medir, analisar o desempenho e performance de experiências, estimar, proceder a análises estatísticas e ainda desenvolver padrões de eficiência que beneficiam o desenvolvimento social, econômico e humanístico dos diversos países do mundo.

Observa-se a relevância que o Cálculo Diferencial e Integral tem como ferramenta básica para o conhecimento humano, assim ficaria plenamente justificado uma abordagem significativa a nível de Ensino Básico, dando aos estudantes desse nível de ensino a oportunidade de conhecer uma das partes mais importantes da matemática, não ficando restrito apenas ao ensino superior.

No Brasil, nos anos 60 e 70 o ensino de matemática foi influenciado pelo Movimento da Matemática Moderna[1] . Neste período ocorreram algumas exclusões de conteúdos do antigo programa, dentre eles, o Cálculo Diferencial e Integral. O Cálculo fez parte do currículo das escolas secundárias por duas vezes. Sobre este fato, Carvalho (1996) afirma que: “A primeira em 1891, com a reforma proposta por Benjamim Constant no início da República e uma segunda vez, no governo de Getúlio Vargas, na Reforma Capanema, em 1942, constando do currículo escolar oficialmente até 1961.”

Aparentemente um dos motivos que levaram as escolas a deixarem de ensinar o Cálculo foi o começo do ensino superior mais forte no país, antes não constava na grade

---
[1] Projeto de internacionalização do ensino de Matemática, que pretendia aproximar a Matemática trabalhada na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. (Wielewski, 2013, p. 1)

de exigências de muitas instituições superiores. Com sua inclusão, como disciplina quase obrigatória, nas universidades ele foi sumindo gradativamente da educação básica. Outro fator importante foi que "[...] o vestibular prestado na época também não cobrava em seu edital, o estudo de cálculo"(OLIVEIRA, 2010, p.17).

A maioria dos processos seletivos para Universidades entre eles o ENEM (exame nacional do ensino médio), ainda não cobram entre seus conteúdos o Cálculo Diferencial e Integral, mas durante a formação acadêmica, principalmente dos alunos que ingressam em algum curso superior na área de exatas, o Cálculo está muito presente, logo seria importante um contato prévio, ainda no ensino básico. Atualmente alguns livros didáticos de ensino médio já apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral como limite e noções intuitivas de derivada e integral.

Os conceitos de cálculo, quando presentes nos livros didáticos, são abordados de maneira simples e muito tarde, geralmente através de definições, exemplos e exercícios propostos. Segundo (PNLD, 2012, p.65) "A abordagem dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, presente no volume 3, é realizada com ênfase em procedimentos, o que limita a compreensão desses conceitos, que são mais elaborados e, nessa fase escolar, estudados pela primeira vez."

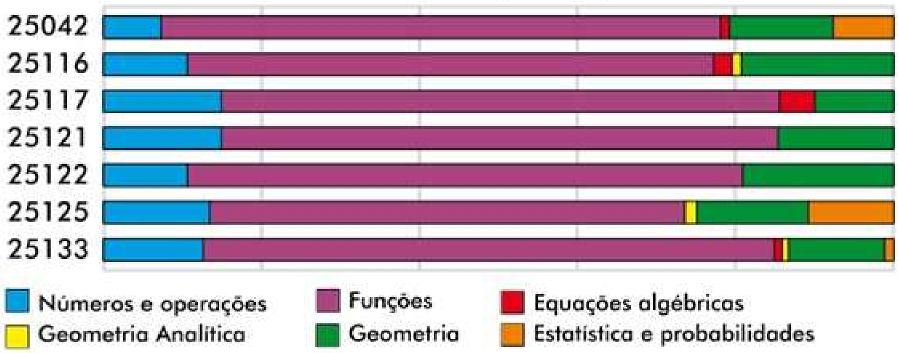
De acordo com Ávila (1991, p. 2) "o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem, logo na primeira série do segundo grau, ao lado do ensino de funções".

Seria vantajoso trabalhar o Cálculo Diferencial e Integral com os alunos desde o 1º ano do ensino médio, pois é neste período que os alunos começam um estudo um pouco mais aprofundado de funções, isto é corroborado pela análise realizada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) 2012, segundo o qual, os livros destinados ao 1º ano dão um enfoque maior ao ensino das funções em todas as sete obras, e podemos ver, no gráfico a seguir, que é dada uma "[...] uma atenção excessiva ao campo de funções no livro da 1ª série, em que praticamente 70% das 500 páginas do volume tratam desse tema.", sendo que na primeira série dá-se uma ênfase maior e nas duas séries seguintes tem-se a continuação deste estudo, e como o Cálculo Diferencial e Integral aborda funções, poderia ser uma ferramenta básica para o estudo das mesmas, podendo tornar o processo de ensino aprendizagem mais produtivo, pois fornece um método geral para o estudo de algumas de suas propriedades. Por exemplo, a derivada poderá auxiliar uniformizando o estudo de diversas propriedades, como crescimento e decrescimento, por exemplo, presentes nos próximos conteúdos que fazem parte do currículo do ensino médio.

Ideias elementares como conceito de limite, derivada e integral podem ser trabalhadas de forma simples já no 1º ano do ensino médio, paralelamente, ao estudo das funções com aprendizado significativo e sem sobrecarregar o programa oficial de matemática.

Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau,

Figura 1 – Distribuição dos campos de matemática por coleção–1ª série.



Fonte: PNLD 2012

> ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa. (ÁVILA, 1991, p.5).

Os livros didáticos levam muito tempo explicando conceitos sobre funções, muitas vezes de forma excessivamente complicada, alguns desses conceitos poderiam ser abordados usando o Cálculo, podendo tornar a aprendizagem mais simples já que o mesmo método poderia ser usado com vários tipos de funções.

Como o Cálculo Diferencial e Integral já fez parte do currículo escolar, caso fosse inserido no projeto pedagógico das escolas, novamente, e trabalhado efetivamente em sala de aula, poderia tornar a prática pedagógica do ensino da matemática mais proveitosa. Introduzir o conceito de limite e derivadas no ensino básico não tornaria o programa destinado a este ensino mais longo, como pode parecer, já que o ensino de algumas propriedades e conceitos poderia favorecer a aprendizagem de outros assuntos da matemática de maneira mais natural e contextualizada, certamente seria relevante para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual.

Frente a seguinte indagação, tomamos como base para investigarmos: **O Cálculo Diferencial e Integral e se é efetivamente trabalhado nas escolas de ensino médio de Jaguaruana-CE?**

Com o intuito de responder a questão, foram propostos os seguintes objetivos para este trabalho.

Analisar se o Cálculo Diferencial e Integral está no currículo das escolas e é efetivamente trabalhado no ensino médio pelos professores de Jaguaruana-CE.

Propor uma abordagem simples, possível de ser utilizada no ensino básico, para algumas propriedades das funções usando o Cálculo.

Em específico:

Verificar se o conteúdo de cálculo faz parte dos livros didáticos adotados pelas instituições de ensino públicas e privadas do município de Jaguaruana-CE.

Verificar se os elementos de cálculo estão inseridos no currículo das escolas.

Mostrar que algumas propriedades das funções podem ser introduzidas com grande vantagem usando o Cálculo.

Propor uma abordagem intuitiva, focada em aplicações práticas para o estudo do Cálculo no ensino básico.

Mostrar algumas aplicações interessantes para serem usadas no ensino médio.

Esta monografia está dividida em seis capítulos, referências bibliográficas e anexos, organizados da seguinte maneira.

O presente capítulo, **introdução** subdivide-se em três tópicos o primeiro uma problematização sobre o uso do Cálculo no ensino médio, onde abordamos o porquê do Cálculo não ser largamente usado no ensino médio. O segundo tópico, justificativa ressalta a importância de se ensinar Cálculo no ensino básico, em seguida apresentamos os objetivos deste trabalho.

O capítulo dois referente a fundamentação teórica trata do **Cálculo Diferencial e Integral: aspectos históricos**, neste capítulo procuramos mostrar uma pequena parte da história do Cálculo, destacando-se a origem desta poderosa ferramenta matemática, ressaltando a contribuição de diferentes matemáticos da época.

O terceiro capítulo traz algumas definições intuitivas sobre tópicos importantes do Cálculo que poderiam ser ativamente trabalhados no ensino médio, junto com alguns problemas de aplicações.

O capítulo quatro traz uma caracterização dos livros que foram analisados, obras do PNLD 2012, em seguida traz uma análise dos livros adotados pelos professores de Jaguaruana-CE.

O quinto capítulo traz alguns dos possíveis tópicos do ensino médio onde o Cálculo poderia ser utilizado. Cada tópico contém exemplos contextualizados.

Por último temos o capítulo seis denominado **considerações finais**. Este capítulo irá fazer uma síntese das ideias discutidas durante todo o desenvolvimento deste trabalho, e as possibilidades do tema abordado no ensino básico atual, assim como algumas lacunas e indagações que poderão vim a ser trabalhados em estudos posteriores, a fim de proporcionar um ensino de matemática completo e que possa estimular os alunos das séries finais da educação básica em aprender e compreender a matemática.

Agora faremos uma breve exposição sobre as origens do Cálculo Diferencial e Integral, para que o leitor perceba a importância e o contexto de seu aparecimento.

2 CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: ASPECTOS HISTÓRICOS

No intuito de fazer com que o leitor tenha uma maior familiaridade com o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, inicialmente discorreremos acerca de alguns aspectos históricos relacionados ao desenvolvimento deste importante ramo da matemática.

> Começamos destacando que Cálculo Diferencial e Integral, como disciplina matemática preocupada com o estudo de mudanças de situação e estado, não é apenas considerado um marco na fundação da ciência moderna, mas uma disciplina (alguns dizem linguagem) essencial para o desenvolvimento de inúmeras áreas do conhecimento. (FIRER, TOZONI E SAA, 2012, p.4).

Os primórdios do Cálculo remonta a antes de Cristo, período em que foram encontrados papiros egípcios e tábuas babilônicas contendo problemas relacionados ao cotidiano desses povos que utilizavam conceitos rudimentares de cálculo para a sua resolução.

> Papiros egípcios e tabulas cuneiformes babilônicas incluem problemas de mensuração retilínea e curvilínea que pertencem ao domínio do cálculo; [...] O papiro de Rhind, copiado pelo escriba Ahmes (ou Ahmose) por volta de 1650 a.C. mostra que os egípcios acharam corretamente o volume de uma pirâmide quadrada com 1/3 do volume do prisma retangular de mesma base e mesma altura. Não era dada nenhuma demonstração do acerto dessa relação, e no nosso século mostrou-se que é impossível prová-la rigorosamente sem considerações infinitesimais - isto é, sem o cálculo. (BOYER,1992, p.1)

Assim como é conhecida a contribuição extremamente importante dos matemáticos helênicos em questões intrigantes relacionadas ao Cálculo, os gregos atingiram um bom nível de desenvolvimento utilizando alguns métodos interessantes como o do equilíbrio de Arquimedes[1] e o da exaustão[2] de Eudoxo (408 a. C.- 347 a.C.), que foi o mais próximo que

---

[1] Vejamos qual é a ideia fundamental do método de Arquimedes. Para determinar uma área ou um volume, corte a região correspondente num número muito grande de tiras planas ou de fatias paralelas finas e (mentalmente) pendure esses pedaços numa das extremidades de uma alavanca dada, de tal maneira a estabelecer o equilíbrio com uma figura de área ou volume e centroide conhecidos. (NETO, 2011, p. 16)

[2] O método da exaustão é um método para se encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Disponível em:< http://matematicablog.zip.net/arch2010-07-18$_2010-07-24.html > .Acessadoem$: 29/01/2014.

eles chegaram do cálculo, a importância dessas contribuições pode ser vista no seguinte comentário.

> O cálculo de Euclides (derivado, presumivelmente, de Eudóxio) pode ter sido menos efetivo que o de Newton e Leibniz dois milênios mais tarde; mas, em termos de idéias básicas, não estava muito longe do conceito de limite usado rudemente por Newton e aprimorado no século XIX. (BOYER, 1996, p.5).

Problemas que envolviam a tentativa de calcular áreas e volumes, usando minúsculos pedacinhos de uma figura plana ou sólido geométrico foram resolvidos utilizando o famoso método de equilíbrio de Arquimedes tão importante que, segundo Eves (2004), "[...] teria um significado maior no desenvolvimento do cálculo se a imprensa fosse uma invenção dos tempos antigos e não do renascimento."

Após o domínio da Grécia por Roma aconteceu o declínio da civilização grega e consequentemente a matemática helênica, que estava no auge, enfrentou um período de estagnação, já que os romanos estavam mais preocupados em aplicações práticas da matemática e relegaram o desenvolvimento teórico a segundo plano, entregando somente contribuições pontuais não muitos notáveis.

O fim do Império romano com a queda de Constantinopla iniciou o período conhecido como Idade Média, onde grande parte dos textos gregos foi destruída e a cultura clássica quase esquecida. Esse panorama mudou somente com o Renascimento que trouxe à tona o interesse pela cultura helênica novamente, os trabalhos de Arquimedes, Eudoxo entre outros voltaram a ser estudados durante os séculos anteriores ao século XVII.

Após uma estagnação no desenvolvimento devido à falta de apoio que era dado as ciências nas civilizações posteriores aos gregos, o desenvolvimento do Cálculo teve que esperar até o final do século XVII.

> No período que vai das notáveis realizações de Arquimedes até praticamente os tempos modernos, a teoria da integração quase não foi ativada. Só por volta de 1450 os trabalhos de Arquimedes chegaram à Europa Ocidental, através de uma tradução, achada em Constantinopla, de uma cópia (do século IX) de seus manuscritos. Essa tradução foi revisada por Regiomontanus e impressa em 1540. Alguns anos mais tarde apareceu uma outra tradução. Mas só por perto do início do século XVII as ideias de Arquimedes passaram por outros desdobramentos. (EVES, 2011, p. 424)

A importância do desenvolvimento matemático desse século pode ser medida analisando-se a produtividade dessa época, pois surgiram novas áreas de pesquisa, culminando com a realização mais impressionante do período que foi a invenção do Cálculo no final do século. Sobre as realizações desse século, vejamos o que diz Eves (2011, p. 417).

> O século XVII foi extremamente produtivo para o desenvolvimento da matemática, graças, em grande parte, as novas e vastas áreas de pesquisa que nele se abriram. Indubitavelmente, porém, a realização matemática mais notável do período foi a invenção do cálculo, perto do final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Com essa invenção a matemática criativa passou a um plano superior e a história da matemática elementar essencialmente terminou.

O Cálculo como qualquer outra teoria matemática foi o resultado de muitos anos de desenvolvimento. As primeiras ideias para o uso do cálculo foram sobre o que hoje nos cursos universitários chamamos de integral, seguindo o caminho contrário do que é ensinado nesses mesmos cursos, pois eles começam introduzindo o uso do conceito de derivadas e após desenvolver toda essa parte, utiliza à integral (antidiferenciação). O nome Cálculo Diferencial e Integral que usamos atualmente vem da forma antiga de como era conhecido. “Achar tangentes exigia o uso do calculus differentialis e achar quadraturas o calculus summatorius ou calculus integralis, frases de onde resultaram as expressões que usamos” (BOYER,1992, p.217).

Um exemplo da importância dos predecessores do cálculo pode ser visto no fato de que foi Pierre de Fermat (1601-1665), o inventor do processo que hoje chamamos de diferenciação, que originou-se do estudo de retas tangentes a uma curva e de sua relação com o estudo de processos para se obter os valores de máximos e mínimos de uma função. Algumas considerações sobre esses assuntos podem ser encontradas em alguns textos da Grécia antiga, mas foi realmente Fermat que apresentou um trabalho com uma exposição clara das diferenciais, isso aconteceu durante o processo de invenção da geometria analítica, do qual participou ativamente.

Nessa altura do desenvolvimento do cálculo, já tinham sido traçadas tangentes, muitas áreas calculadas, máximos e mínimos encontrados, usando conceitos do cálculo. A ideia de limite estava quase clara para todos da comunidade de matemáticos da época, faltava somente à criação de um simbolismo, um conjunto de regras gerais e uma união sólida dos fundamentos já descobertos para a criação do cálculo. Isso teve que esperar até próximo do final do século por Newton e Leibniz.

O Cálculo de Newton foi desenvolvido numa tentativa de explicar problemas relacionados a Física, e desta forma seria um mecanismo a mais para estudar fenômenos naturais, seu trabalho usava de conceitos geométricos e tinha um grande rigor.

Leibniz, por sua vez, desenvolveu o Cálculo numa tentativa de obter uma

> linguagem simbólica universal, aplicável a todos os trabalhos relacionados a essa área da matemática. Procurou colocar todos os seus trabalhos em formas algorítmicas, simplificando assim elementos do raciocínio lógico, utilizando assim a aritmética e o formalismo como peças fundamentais no desenvolvimento de suas ideias. "Seu projeto de vida foi procurar uma linguagem universal para padronizar e mecanizar todo processo do pensamento racional humano". (MENEGUETTI, 2010, p.103).

Leibniz não era um matemático "profissional", logo não tinha uma matemática perfeitamente formal, isso levou seu trabalho a ser original. Esse fato também o levou a cometer alguns erros.

Figura 2 – Sir Isaac Newton e Gottfried Leibniz

Fonte: www.bbc.co.uk

Antes disso houve avanços importantes, nos quais quase todas as ferramentas usadas por Newton e Leibniz foram encontradas. Contudo, somente no final do século eles perceberam que a união de todas essas ferramentas fornecia uma teoria poderosa, o que culminou com a sistematização e o desenvolvimento de novos conceitos e notações. Eles foram responsáveis por organizar o estudo do cálculo, mas antes, durante todo o século XVII, nesse longo período de tempo, muitos matemáticos importantes prestaram contribuições valiosas para a descoberta do cálculo como Arquimedes (287a.C.-212a.C.), Isaac Barrow (1630-1677), Pierre de Fermat(1601-1665), Bonaventura Cavaliere (1598-1647), John Wallis (1616-1703) entre outros.

> Embora a discussão tenha continuado entre os adeptos de Leibniz, Newton, inicialmente, ganhou para si a honra da descoberta, e está permaneceu por muito tempo até a descoberta de manuscritos de Leibniz que comprovaram que ele havia chegado aos resultados que o levariam à descoberta do Cálculo

> Diferencial e Integral em 1675, portanto, antes e de forma independente ao que havia sido feito por Isaac Newton. (EVES, 2011, p. 427)

Todo o desenvolvimento anterior levou ao que Isaac Newton inicialmente chamou de método dos fluxos. Independentemente Leibniz provavelmente sem conhecer os resultados de Newton, desenvolveu sua versão do cálculo e introduziu um novo tipo de notação que fez muito sucesso, espalhando-se rapidamente na comunidade cientifica da época. Para Newton o Cálculo surgiu naturalmente com o prosseguimento de seus estudos, como ele mesmo disse, "apoiou-se sobre o ombro de gigantes". Já Leibniz, após ter estudado trabalhos de matemáticos anteriores, teve a inspiração definitiva ao ler uma carta de um matemático desconhecido.

> Em particular, foi ao ler a carta de Amos Dettonville sobre Traité dês sinus Du quart de cercle que Leibniz diz ter uma luz jorrado sobre ele. Percebeu então, em 1673, que a determinação da tangente a uma curva dependia da razão das diferenças das ordenadas e das abscissas, quando essas se tornavam infinitamente pequenas, e que as quadraturas dependiam da soma dos retângulos infinitamente finos que formam a área. (BOYER,1996, p. 279).

A discussão entre esses dois gigantes da matemática em torno do cálculo, levou a um dos mais famosos casos de disputa em torno da "paternidade" de uma descoberta, desencadeando um longo debate que teve seu desfecho com a decisão da Royal Society[3] de acusar Leibniz de plagio e dar total crédito a Newton. É importante notar que Newton era um membro importante da Royal Society, inclusive ele redigiu o relatório final sobre o caso. Como podemos ver no comentário abaixo.

> Uma disputa acadêmica foi travada entre Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz. Após ter sido acusado por Newton de ter plagiado suas idéias, Leibniz apelou para que a Royal Society of London realizasse o julgamento do caso. Newton, que era o presidente da entidade, indicou uma comissão composta por seus amigos, e bons newtonianos, para estudar o assunto. Ao final do processo, ele próprio escreveu o relatório referente ao processo instaurado e publicou anonimamente. Nesse famoso relatório, intitulado Commercium epistolicum de analysi promota (cópia da página inicial baixo), Newton escreveu uma abordagem histórica acerca do assunto em questão com o intuito de chegar a um resultado conclusivo que, naturalmente, foi a seu favor. (Nobre, 2000, p.23)

[3] A Royal Society é uma comunidade dos cientistas mais eminentes do mundo e é a mais antiga academia científica de existência contínua.

Uma criação tão importante e reconhecida imediatamente por todos os contemporâneos despertou a dúvida sobre quem teria o privilégio de ser chamado de descobridor do cálculo, isso criou uma legião de seguidores de ambos os lados o que tornou o debate muito acirrado. Essa disputa era desnecessária por sinal, já que Leibniz nunca discutiu quem foi o primeiro a usar o cálculo, ele queria somente o reconhecimento por ter publicado primeiro.

A convivência entre Newton e Leibniz era pacifica isso pode ser mostrado no fato de que na "primeira edição de sua obra mais famosa os Principia Newton reconheceu que Leibniz tinha chegado a um resultado semelhante ao seu" (BOYER,1996). O ambiente entre eles estava tranquilo até ocorrer algo inusitado, que teve como estopim o fato de que em alguns lugares a invenção do cálculo era atribuída totalmente a Leibniz, e isso pode ser visto no seguinte comentário de Boyer (1996, p. 285).

> [...] um acontecimento lançou uma nuvem sobre a vida de Newton após 1695. Nesse ano Wallis lhe disse que na Holanda o cálculo era considerado descoberta de Leibniz. Em 1699 Nicolas Fatio de Duillier(1664-1753), um obscuro matemático suíço que vivia na Inglaterra, insinuou num artigo para a Royal Society que Leibniz poderia ter tirado suas idéias sobre o cálculo de Newton. Ante essa afronta Leibniz em Acta Eruditorum de 1704 insistiu em que tinha direito à prioridade na publicação e protestou perante a Royal Society contra a acusação de plagio.

Após esse "boato maldoso" começou uma grande disputa entre eles sobre quem foi o pioneiro na descoberta do cálculo, isso levou Newton a omitir qualquer citação a Leibniz em edições posteriores dos Principia. Ainda existem dúvidas sobre quem descobriu o cálculo, mas toda essa polêmica aconteceu por causa do medo de Newton em publicar seus resultados, o que permitiu a Leibniz expor seu trabalho antes. Esse "medo" veio devido a críticas sofridas anteriormente, assim mesmo tendo trabalhado no cálculo antes, seu trabalho foi publicado após o de Leibniz.

> Newton escreveu várias descrições substanciais de seus métodos do cálculo e publico-as bem mais tarde. Leibniz, ao contrário, escreveu pouco mas publicou cedo. Limitou-se a alguns pequenos artigos, publicados na Acta eruditorum logo após a fundação desse jornal. Seu primeiro artigo publicado em 1684, três anos antes da breve indicação (duas páginas) de Newton nos Principia. (BOYER ,1996, p. 272).

Apesar de tudo, Leibniz não considerava a possibilidade de ser reconhecido como criador do cálculo, ele pretendia somente que o fato de ter publicado sua descoberta antes fosse reconhecido.

O cálculo de Newton estava melhor fundamentado, já que ele era muito melhor matemático, fatos que o próprio Leibniz reconhecia, mas foi à versão de Leibniz que ganhou uma maior aceitação, isso aconteceu por causa do estilo de notação criado por ele, que obteve tanto sucesso que, em grande parte, usamos até hoje.

> O raciocínio de Newton estava mais perto dos modernos fundamentos do cálculo que o de Leibniz, mas a plausibilidade da atividade de Leibniz e a eficácia de sua notação diferencial produziram uma maior aceitação das diferenciais que dos fluxos. (BOYER, 1996, p. 278).

O cálculo diferencial e integral, mostrou ao longo dos anos ser uma das grandes criações da mente humana, permitindo um grande avanço em vários campos de pesquisa. Para ver essa importância basta consultar um livro destinado ao ensino superior de alguma área relacionada principalmente, as ciências exatas, nestas obras vemos o uso abundante de conceitos como limites, derivadas, integrais, gradiente, divergentes entre muitos outros, que permitiram avanços inimagináveis.

Newton e Leibniz foram igualmente importantes para o cálculo, pois ambos prestaram enormes serviços a matemática já que o uso do cálculo foi um sucesso estrondoso, após Newton e Leibniz terem lançado suas bases passou muito tempo até alguém desenvolver uma ideia nova nesse ramo, todos estavam tão empolgados com as muitas aplicações da nova teoria que relegaram o desenvolvimento teórico e entregaram-se as aplicações práticas do cálculo. É interessante notar que todas as técnicas necessárias ao cálculo já estavam disponíveis antes de Newton e Leibniz, elas eram usadas como ferramentas matemáticas individuais de utilidade limitada, eles perceberam que elas formavam um conjunto geral de grande utilidade obtido através da análise infinitesimal.

O redesenvolvimento dos conceitos fundamentais do cálculo em bases aceitáveis, rigorosamente falando, teria de esperar o período de aplicação vigorosa do assunto e seria levado a efeito pelo grande analista francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e seus sucessores do século XIX.

Esses dois homens usaram o conhecimento anterior sabiamente, antes deles já era conhecido muita coisa sobre integração e diferenciação, mas foram eles que tiveram a iniciativa de organizar o conhecimento já existente e desenvolver as bases para um estudo aprofundado.

No capítulo a seguir trataremos de alguns aspectos teóricos que poderiam ser usados no ensino médio.

3 UM POUCO DE TEORIA, ALGUMAS NOÇÕES INTUITIVAS

Objetivando situar melhor o público alvo deste trabalho, a saber, professores e principalmente alunos do ensino básico, nesse capítulo procuraremos mostrar definições intuitivas ou informais de alguns dos conceitos que poderiam ser introduzidos no ensino médio, seguidos de alguns exemplos simples.

Nenhuma definição ou propriedade mostrada virá acompanhada de demonstrações formais, que podem ser facilmente encontradas em livros específicos de cálculo, a intenção é somente relembrar, para os professores, e mostrar rapidamente, para os alunos, tópicos importantes do cálculo que poderiam ser utilizados no ensino médio.

Começaremos com limite.

3.1 Noção intuitiva de limite

Se os valores da função $f(x)$ se aproximam cada vez mais do número L, enquanto x se aproximar cada vez mais do número a, dizemos que L é o limite de $f(x)$, quando x tende a a, e escrevemos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \tag{3.1}$$

Exemplo 1 *Se* $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$ *calcule* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

Observe as tabelas a seguir.

x	$f(x)$
0	3
$0,25$	$3,5$
$0,5$	4
$0,75$	$4,5$
$0,9$	$4,8$
$0,99$	$4,98$
$0,999$	$4,998$

Tabela 1 – Aproximando-se de 1 pela esquerda

x	$f(x)$
2	7
$1,75$	$6,5$
$1,5$	6
$1,25$	$5,5$
$1,1$	$5,2$
$1,01$	$5,02$
$1,001$	$5,002$

Tabela 2 – Aproximando-se de 1 pela direita

Nelas podemos observar que quando x aproxima-se de 1 pela esquerda (valores tomados menores que 1) ou x aproxima-se de 1 pela direita (valores tomados maiores que 1), $f(x)$ fica cada vez mais próximo de 5.

Então, intuitivamente podemos perceber que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1} = 5$$

3.1.1 Teoremas sobre limites

A seguir temos alguns teoremas envolvendo limite, úteis na demonstração de vários dos teoremas sobre derivada.

Nos teoremas a seguir considere que $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, então:

Teorema 1 $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

Exemplo 2 $\lim_{x\to 1}(x^2 + x^3) = \lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} x^3 = 1^2 + 1^3 = 2$

Teorema 2 $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

Teorema 3 $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \lim_{x\to a} f(x). \lim_{x\to a} g(x)$.

Exemplo 3 $\lim_{x\to 0}(x - 1)(2x - 3) = \lim_{x\to 0}(x - 1). \lim_{x\to 0}(2x - 3) = (-1).(-3) = 3$

Teorema 4 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$.
Com $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Exemplo 4 $\lim_{x\to 1} \dfrac{2x - 1}{x} = \dfrac{\lim_{x\to 1} 2x - 1}{\lim_{x\to 1} x} = \dfrac{1}{1} = 1$

Teorema 5 (Limite da potência.) *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$, *então*

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^p = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^p = L^p.$$

Exemplo 5 $\lim_{x\to -1}(x^{1000}) = \left[\lim_{x\to 1} x\right]^{1000} = (-1)^{1000} = 1$

Teorema 6 (Limite da constante) $\lim_{x\to a} k = k.$

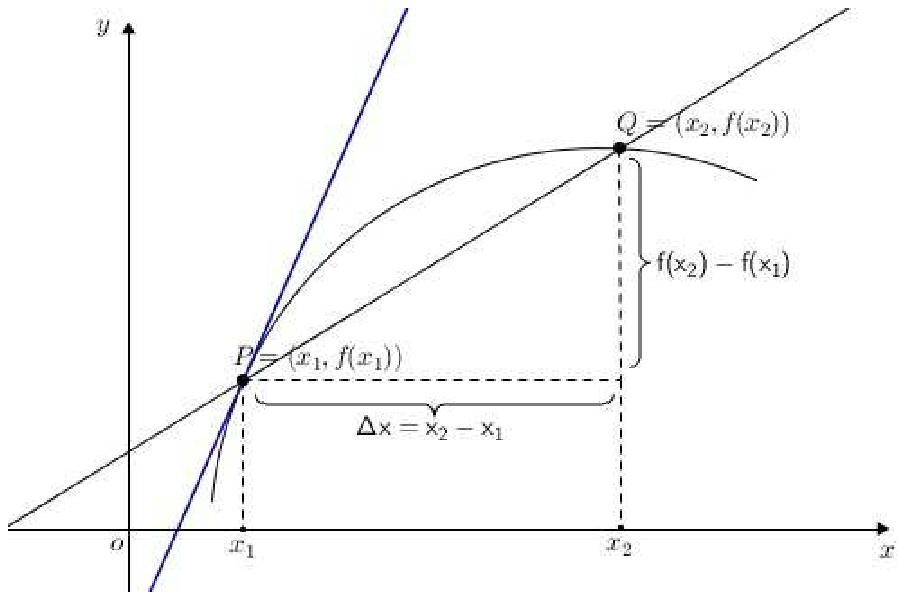
Teorema 7 $\lim_{x\to a} x = a.$

3.2 Derivada: interpretação geométrica

Uma definição muito intuitiva da derivada é a geométrica, onde a derivada de uma função, determina o coeficiente angular(inclinação) da reta tangente em um ponto de uma curva.

Para chegar a uma definição adequada de uma reta tangente ao gráfico de uma função em um de seus pontos, começamos pensando em definir a inclinação da reta tangente em um ponto qualquer da curva. Então, a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.

Figura 3 – Definição geométrica de derivada.



Fonte: Autor.

Logo, da figura temos que a inclinação (m) da reta tangente no ponto P será dada por:

$$m_{PQ} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{\Delta x} \Rightarrow m_{PQ} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Considerando o ponto P como fixo e Q como móvel ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tende a P ou seja $\Delta x \to 0$, a reta tangente ao gráfico de f ao ponto $P = (x_1, f(x_1))$ é:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \tag{3.2}$$

Exemplo 6 *Ache a inclinação da reta tangente ao gráfico da função definida por* $f(x) = x^3 - 3x + 4$ *no ponto* (x_1, y_1). *Em seguida encontre a equação da reta tangente a curva dada no ponto* $(2, 6)$.

Temos que

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= (x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) + 4 \\ &= x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x_1 - 3\Delta x + 4 \end{aligned}$$

e

$$f(x_1) = x_1^3 - 3x_1 + 4.$$

Sendo $m(x_1)$ a inclinação em um ponto de abscissa x_1.Usando a equação 3.2.

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^3 + 3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3x_1 - 3\Delta x + 4 - x_1^3 + 3x_1 - 4}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x_1^2\Delta x + 3x_1\Delta x^2 + \Delta x^3 - 3\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x_1^2 + 3x_1\Delta x + \Delta x^2 - 3)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Como $\Delta x \neq 0$, podemos dividir o numerador e o denominador por Δx.

$$\begin{aligned} m(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} 3x_1^2 + 3x_1.0 + 0^2 - 3 \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 3x_1^2 - 3 \end{aligned}$$

Estamos interessados na inclinação no ponto $(2, 6)$ tomando $x_1 = 2$, teremos:

$$\begin{aligned} m(2) &= 3.2^2 - 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

E a equação da reta será dada por.

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(2)(x - x_0) \\ y - 6 &= 9(x - 2) \\ y - 6 &= 9x - 18 \end{aligned}$$

E a equação será.

$$y - 9x + 12 = 0$$

Algumas notações possíveis de serem utilizadas para derivadas são as seguintes:

$$D_x, \frac{dy}{dx}, f'(x) \text{ e } y'.$$

3.2.1 Teoremas sobre derivação

Com a definição anterior podemos demonstrar vários teoremas, abaixo citaremos os principais, as demonstrações ficam por conta do leitor. Uma lista um pouco mais completa de regras de derivação pode ser encontrada facilmente em livros de específicos sobre cálculo.

Teorema 8 *Se c for uma constante e se* $f(x) = c$*, então* $f'(x) = 0$*, ou seja, a derivada de uma constante é zero* $\forall x \in \mathbb{D}_f$.

Exemplo 7 *Se* $f(x) = 5$ *então* $f'(x) = 0$.

Teorema 9 *Se n for um racional e se f(x)=*x^n*, então*$f'(x) = nx^{n-1}$

Exemplo 8 *Se* $f(x) = x^8$ *então* $f'(x) = 8x^7$.

Teorema 10 *Se f for uma função, c uma constante e g a função definida por g(x)=c.f(x), então se f'(x) existir, g'(x)=c.f'(x).*

Exemplo 9 *Se* $g(x) = 5x^7$ *então* $g'(x) = 35x^6$.

Teorema 11 *Se f e g forem funções e se h for a função definida por h(x)=f(x)+g(x), então se f'(x) e g'(x) existirem, h'(x)=f'(x)+g'(x).*

Teorema 12 *A derivada da soma de um número finito de funções é igual a soma de suas derivadas, se elas existirem.*

Exemplo 10 *Se* $f(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$*, então* $f'(x) = 28x^3 - 6x^2 + 8$.

Teorema 13 *Se f e forem funções e h for a função definida por h(x)=f(x).g(x), então h'(x)=f(x).g'(x)+g(x).f'(x)*

Exemplo 11 *Calcule a derivada de* $h(x) = (x + 1)(x + 3)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2+1)(1)+(x+3)(2x) \\ &= x^2+1+2x^2+6x \\ &= 3x^2+6x+1 \end{aligned}$$

Teorema 14 *Se f e g forem funções e h for a função definida por $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde $g(x) \neq 0$, então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem*

$$h'(x) = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Exemplo 12 *Qual a derivada de $h(x) = \dfrac{x}{2x^2+1}$?*

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x^2+1).1 - x.(4x)}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{2x^2+1-4x^2}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x^2+1}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Teorema 15 (Regra da cadeia) *Se f é a função definida por $f(x) = (ax+b)^n$ então $f'(x) = n(ax+b)^{n-1}.D_x(ax+b)$.*

Exemplo 13 *Qual a derivada de $f(x) = \left(\dfrac{2}{x-1}\right)^5$?*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 .D_x\left(\frac{2}{x-1}\right) \\ &= 5\left(\frac{2}{x-1}\right)^4 \left[\frac{(x-1).0-2.1}{(x-1)^2}\right] \\ &= \frac{5.16}{(x-1)^4}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] \\ &= \frac{-160}{(x-1)^6} \end{aligned}$$

3.3 Integral definida

Considere f uma função de x, chamaremos de integral definida, a integral restrita à valores de um intervalo específico de x, por exemplo, $a \leq x \leq b$. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x representado por:

$$\int_a^b f(x) = G(b) - G(a).$$

Onde:

- a é o limite inferior de integração;
- b é o limite superior de integração;
- $f(x)$ é o integrando;
- G é uma função tal que $G'(x) = f(x)$ para todo x em $[a, b]$.

3.3.1 Teoremas sobre integração

Nos teoremas a seguir c representa uma constante.

Teorema 16 $\int dx = x + c$

Teorema 17 *Se n for um número racional,*

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

Com $n \neq -1$, o caso onde $n = -1$ foge ao escopo deste trabalho.

Exemplo 14 *Calcule a integral* $\int x^3 dx$.

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Teorema 18 $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$, *onde a é uma constante.*

Exemplo 15 *Calcule a integral* $\int 2xdx$.

$$\begin{aligned} \int 2xdx &= 2 \int xdx \\ &= 2.\frac{x^2}{2} + c \\ &= x^2 + c \end{aligned}$$

Teorema 19 $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Exemplo 16 *Calcule a integral* $\int (x + x^{-2})dx$.

$$\begin{aligned}
\int (x + x^{-2})dx &= \int xdx + \int x^{-2}dx \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c \\
&= \frac{x^3 - 2}{2x} + c
\end{aligned}$$

Teorema 20 $\int [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)]dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx + \ldots + c_n \int f_n(x)dx.$

Exemplo 17 *Calcule a integral* $\int (3x - 5x^2 + x^{-2})dx.$

$$\begin{aligned}
\int (3x - 5x^2 + x^{-2})dx &= \int 3xdx - \int 5x^2dx + \int x^{-2}dx \\
&= \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + c \\
&= \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{1}{x} + c \\
&= \frac{9x^3 - 10x^4 - 6}{6x} + c
\end{aligned}$$

No capítulo a seguir serão apresentados os livros didáticos do PNLD 2012, de onde foram escolhidos os livros adotados pelos professores das instituiçoes publicas do município de Jaguaruana-CE. Nestes livros prucuraremos pela presença do Cálculo, se presente realizaremos uma pequena análise do conteúdo.

4 ANÁLISE DOS LIVROS PNLD 2012: ABORDAGEM DO CÁLCULO

Apesar da modernização cada vez mais rápida da sociedade atual, o livro didático ainda é de suma importância no ensino, na maioria das vezes os professores o utilizam como principal material didático usado para ministrar suas aulas. O conteúdo existente, a ordem e os exercícios propostos fazem com que ele ainda seja considerado ferramenta básica no processo de ensino-aprendizagem.

> Os livros didáticos no decorrer da tradição escolar e cultural têm se estabelecido como um influente instrumento de seleção, organização dos conteúdos e métodos de ensino, desde de tentativas iniciais de organização de um sistema escolar brasileiro, especialmente a partir de 1970, os livros didáticos ampliaram sua importância no cenário educacional brasileiro' (SELLES E FERREIRA, 2004, p.122).

Na tabela seguinte estão os livros do PNLD 2012.

Código no PNLD	Nome da coleção	Autor(es)	Editora
25042C0L02	Conexões da matemática	Juliane Matsubara Barroso	Moderna
25116COL02	Matemática: Contexto e aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática
25117COL02	Matemática Paiva	Manoel Paiva	Moderna
25121COL02	Matemática Ciência e aplicação	David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo	Saraiva
25122COL02	Matemática: Ciência linguagem e tecnologia	Jackson Ribeiro	Scipione
25125COL02	Matemática Ensino Médio	Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole	Saraiva
25133COL02	Novo olhar	Joamir Souza	FTD

Tabela 3 – Livros didáticos analisadas do PNLD 2012

Os livros didáticos analisados foram os de matemática incluídos no guia destinado as escolas públicas, todos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2012), disponibilizado aos professores de rede pública de ensino, para a escolha do livro que será utilizado durante três anos pela instituição de ensino.

Tabela 4 – Análise da presença do cálculo nos livros do PNLD 2012

Obras aprovados no PNLD 2012	**Volumes**	**Traz o Cálculo**	**Em qual volume?**	**Quais partes do cálculo são abordadas**	**Como são abordadas**
Conexões da matemática	3	Não			
Matemática: contexto e aplicações	3	Sim	3º	Limite e derivada	Taxa de variação; noções intuitivas; situações problemas; gráficos etc.
Matemática Paiva	3	Não			
Matemática ciências e aplicações	3	Não			
Matemática ensino médio	3	Sim	3º	Limite e derivada	Noções intuitivas; situações problemas; definições e formulasg; ráficos etc.
Novo olhar	3	Não			
Matemática ciência, linguagens e tecnologia	3	Não			

Inicialmente iremos verificar se os livros didáticos do ensino médio nos três volumes de cada coleção contém elementos de cálculo diferencial e integral.

Dos livros aprovados pelo programa nacional do livro didático (PNLD 2012), três obras são adotadas pelos professores de Jaguaruana-CE. A tabela 4 caracteriza os livros didáticos que serão analisados que são os livros do ensino médio aprovados pelo PNLD 2012.

Inicialmente foi feita uma verificação simples no sumário de cada coleção par ver se entre seus conteúdos o cálculo está inserido, caso esteja vamos analisar o conteúdo abordado utilizando alguns critérios simples, que podem ser verificados na tabela 4.

Em seguida foi feita uma análise mais detalhada dos livros didáticos do PNLD 2012, na tentativa de tentar identificar algum conteúdo típico do cálculo.

Pelo que podemos constatar na tabela 4, o Cálculo está tornando-se cada vez mais raro nos livros didáticos destinados ao ensino médio e consequentemente, também nas escolas.

4.1 Livros do PNLD 2012

Aqui será feita uma breve análise dos livros do PNLD 2012, onde procuramos encontrar o Cálculo Diferencial e Integral.

> Analisar um livro é estudar, verificar, fazer anotações e reflexões sobre os conteúdos abordados e sobretudo em relação ao auxílio do processo de ensino aprendizagem. “A prática de analisar os conteúdos permite ao professor de Matemática identificar tipos de situações-problema que favoreçam um ambiente em que os discentes possam trabalhar de forma autônoma e apropriarem-se do saber a ser ensinado” (PAIS, 2008).

Como mencionado anteriormente, foi feita a análise de todos os livros didáticos adotados pelo PNLD 2012 para verificação se as sete obras analisadas nos volumes 1,2 e 3 de cada coleção abordam elementos de cálculo diferencial e integral e entre eles estão os livros adotados pelos professores das instituições públicas de Jaguaruana-CE.

Todos os livros didáticos analisados eram destinados ao professor, além de conter o mesmo conteúdo do livro do aluno, apresentam em anexo o manual do professor.

Agora falaremos especificamente sobre cada uma das coleções submetidas para a avaliação dos professores no PNLD 2012.

4.1.1 Conexões com a matemática

Os livros de autoria Juliane Matsubara Barroso (2010) iniciam cada unidade com situações problemas como parte introdutória do capítulo, entre as diversas seções encontra-se resumo do capítulo, auto avaliação para os alunos, uma revisão dos conteúdos e resolução comentada de alguns capítulos. Os volumes são concluídos com questões de vestibular, questões do Enem de 1998 a 2009, sugestões de leitura (como curiosidades de matemática), respostas, lista de siglas e bibliografia.

Porém não aborda o cálculo em nenhum dos volumes.

4.1.2 Matemática: Contexto e Aplicações

De Luiz Roberto Dante (2012) há conexão entre os diversos campos da matemática e desta com outras áreas do conhecimento. A coleção é composta por capítulos, divididos em unidades. No início de cada capítulo, há textos com informações e propostas de atividades sobre os temas a serem trabalhados. Cada capítulo incluem uma seção de exercícios com diferentes fases de resolução do problema. No final dos livros, encontram-se: questões do Enem; glossário; sugestões de leituras complementares; significado das siglas de vestibulares; referências bibliográficas e respostas dos exercícios.

A coleção em seu terceiro volume aborda o cálculo diferencial e integral, apresentado da seguinte maneira.

Começa usando taxa de variação da função, para introduzir o conceito de derivada, para isso usa a interpretação geométrica da derivada de uma função em um ponto. A seguir, o autor define a função derivada usando a noção de limite, e determina a derivada de algumas funções elementares.

4.1.3 Matemática Paiva

Nos livros de Manoel Paiva na abertura de cada capítulo é apresentado uma situação contextualizada relativa ao tema abordado. Os capítulos incluem questões para serem resolvidas em grupo e exercícios complementares para fixação dos conteúdos tratados. No final do livro tem as indicações de leituras complementares; respostas de todos os exercícios propostos; siglas de instituições educacionais e bibliografia da obra.

Destaca-se, ainda, a seção Matemática sem fronteiras, em que as conexões com outras áreas do conhecimento são bem exploradas.

Porém não trabalha entre seus conteúdos o cálculo diferencial e integral.

4.1.4 Matemática ciência e aplicações

Os livros dos autores David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce e Roberto Périgo, está distribuído em capítulos seguindo sempre a mesma linha: introdução, conteúdo, exercícios propostos e exercícios complementares. As aplicações da matemática estão presentes nos livros por meio de exemplos ou seções. Em algumas partes aborda a história da matemática. No final dos livros contém respostas dos capítulos e no final do volume 3 tem-se uma coletânea de provas de Enem, para uma preparação dos alunos da série final do ensino médio.

Porém nenhum dos volumes traz o cálculo.

4.1.5 Matemática ensino médio

Os livros de Maria Ignez Diniz e Katia Stocco Smole caracterizam-se por começar sempre com situações contextualizadas. Trabalham com diversos recursos didáticos que auxiliam na prática e na relação ensino aprendizagem. Estruturam-se em unidades dividas por capítulos, que começam com explanação do conteúdo, seguido de exercícios resolvidos, propostos e de revisão além de temas interdisciplinares. No final do livro contém tabela trigonométrica, alfabeto grego, jogos, referências bibliográficas, significados das siglas e respostas.

Esta coleção aborda o cálculo, no volume 3, trazendo uma introdução a limite e derivada, praticamente no final do livro. O capítulo que trata do cálculo inicia com uma situação problema sobre taxa de variação média, analisada por meio de gráficos. Em seguida temos a interpretação cinemática, definição e função derivada, com exercícios resolvidos. Após mostrar o teorema do valor médio, coeficiente angular da reta e finaliza com exercícios resolvidos e uma lista de problemas.

Também temos uma utilização de máximos e mínimos por meio de uma planilha eletrônica onde é feita a análise de um conjunto de dados em tabelas seguido de uma definição para ponto de máximo ou mínimo.

Para terminar, traz alguns textos tratando de aspectos históricos do cálculo, intitulados: método de exaustão, avanços não eliminaram fantasmas do passado e triângulos empilhados.

4.1.6 Novo olhar

Os livros de Joamir Souza apresentam uma abordagem interessante, havendo uma interligação da matemática com as práticas sociais e outras áreas do conhecimento. Ao final de cada capítulo encontram-se seções voltadas à contextualização dos conhecimentos; refletindo sobre o capítulo, com questionamentos ao aluno e atividades complementares, de revisão e articulação entre diversas áreas. No final do livro tem questões do ENEM e vestibulares, sugestões de leitura e de sites, respostas das atividades e bibliografia.

Não trabalha entre seus conteúdos elementos de cálculo.

4.1.7 Matemática ciência, linguagem e tecnologia

Os livros de Jackson Ribeiro, caracterizam-se pela interdisciplinaridade com as práticas sociais ou outras áreas do conhecimento, também apresentam os conteúdos por meio de definições e propriedades. Todas as obras são organizadas em unidades e subdivididas em capítulos com exercícios resolvidos e propostos. Além disso no desenvolvimento do capítulo a obra apresenta algo relacionando com o conteúdo trabalhado como a história da matemática. No final de cada coleção tem as respostas dos exercícios propostos, além de uma lista de sugestões de leitura e de sites da internet.

A coleção não aborda entre seus conteúdos o cálculo diferencial e integral.

Observa-se que poucas coleções do PNLD 2012 trazem rudimentos de cálculo e destas uma é utilizada em Jaguaruana-CE, a saber, Matemática ensino médio de autoria de Maria Ignez Diniz e Kátia Stocco Smole (2010) usada na Escola de Ensino Médio Francisco Jaguaribe[1] . Apesar de encontrarmos o conteúdo de forma tímida em apenas dois livros de 3º ano, etapa final da educação básica. Ávila (2006, p.37) da importância ao aparecimento do cálculo.

> É gratificante constatar que alguns autores já estão incluindo a derivada em seus livros para o ensino médio, de maneira sensata, breve e equilibrada: mas, infelizmente, ainda na terceira série, já no final do curso, quando pouco se pode aproveitar desse estudo.

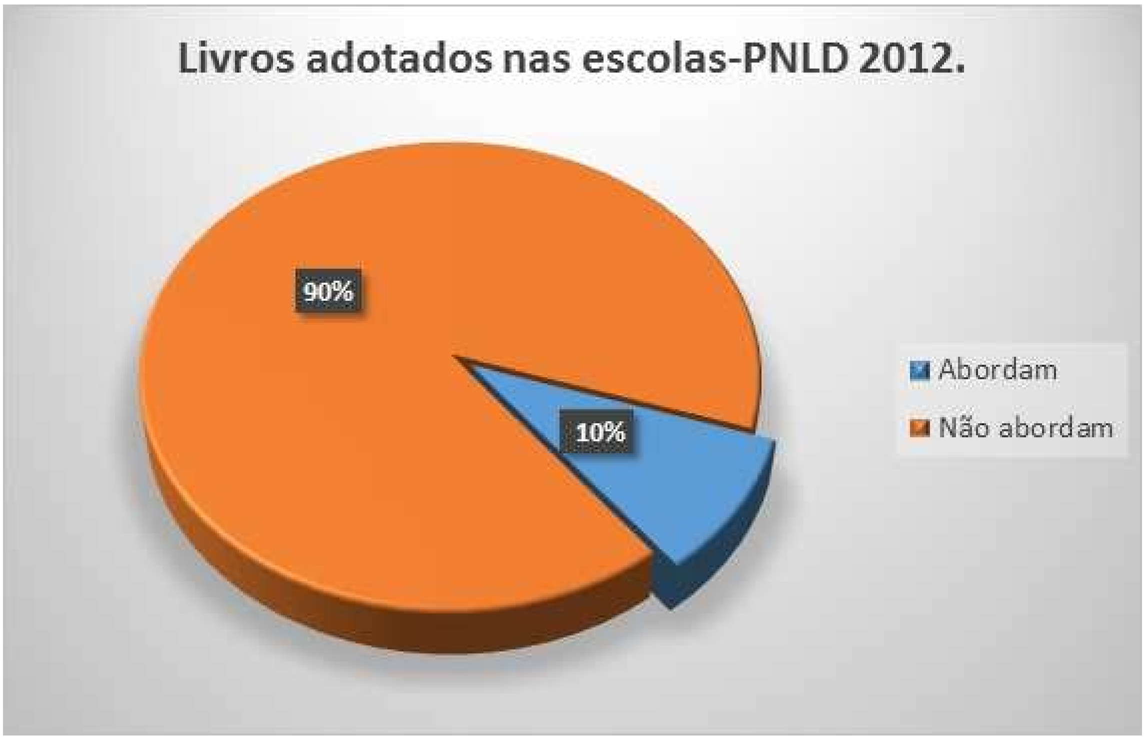
Outro fator a ser considerado é que as coleções, principalmente nos livros de 3º ano, dão ênfase ao Enem, que hoje é considerado a porta de entrada para as universidades.

4.2 O currículos das escolas

> "Currículo é uma construção social do conhecimento, pressupondo a sistematização dos meios para que esta construção se efetive; a transmissão dos conhecimentos historicamente produzidos e as formas de assimilá-los, portanto, produção, transmissão e assimilação são processos que compõem uma metodologia de construção coletiva do conhecimento escolar, ou seja, o currículo propriamente dito." (VEIGA, 2002, p.7)

[1] Em conversa informal com os professores de matemática da escola citada, tive a informação que apesar de estar no livro nada sobre cálculo é ensinado aos alunos.

Figura 4 – Livros adotados nas escolas–PNLD 2012.



Fonte: Autor.

Um aspecto constatado nessa pesquisa foi que nas escolas públicas do município de Jaguaruana-CE, o cálculo diferencial e integral está inserido no projeto pedagógico de apenas uma escola. Na instituição onde está no currículo estão presentes apenas uma introdução ao estudo de limite e da derivada.

Observa-se no gráfico a seguir, que a presença de elementos de cálculo nos currículos das escolas ainda é mínima.

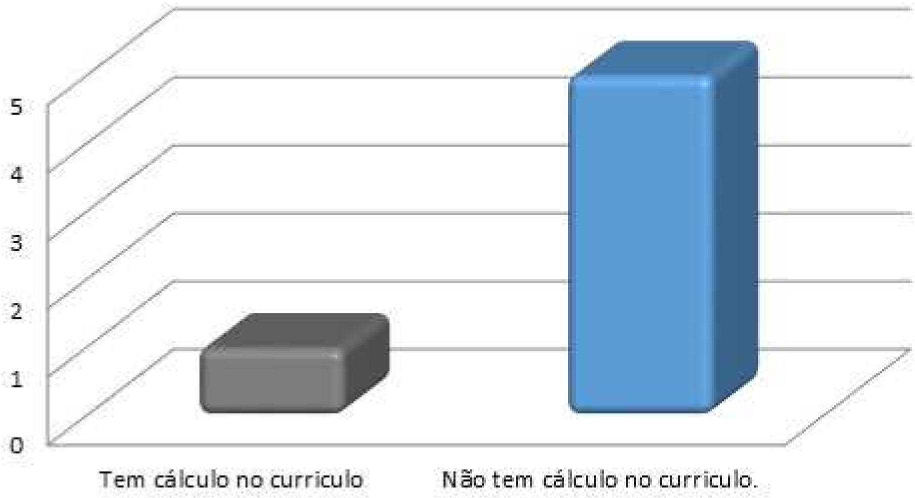
Na análise feita com as obras do PNLD 2012, constatamos que alguns livros didáticos de 3º ano trazem o conteúdo, mas como o mesmo não está presente no currículo da maioria das escolas os professores não verificam a presença do cálculo nas obras no momento da escolha.

Existem vários outros fatores que levaram o Cálculo a não está no currículo das escolas, alguns professores tem certa dificuldades com o conteúdo, eles também veem o conteúdo como algo difícil para os alunos de ensino médio, procurando ministrar assuntos que eles consideram adequados a esse nível de ensino, também podemos citar a ausência deste conteúdo da matriz curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

Esse panorama deve ser agravado com a reforma do ensino médio proposta pelo MEC (ministério de educação e cultura).

A reforma do ensino médio nos moldes do Exame Nacional do Ensino Médio

Figura 5 – O Cálculo nos currículos das escolas do município de Jaguaruana-CE.



Fonte: Autor.

> (Enem) já começou antes mesmo da reestruturação do currículo. A partir de 2015, os livros didáticos das redes públicas serão interligados dentro das quatro áreas de conhecimento propostas pela prova. "Não significa o fim do livro didático por disciplina, mas cada matéria terá de dialogar com outras", explica o secretário de educação básica do Ministério da Educação (MEC), Romeu Caputo. Essa mudança faz parte do projeto do MEC para redefinir todo o currículo do ensino básico - fundamental e médio - em um formato interdisciplinar semelhante ao Enem. "A mudança faz parte do que chamamos de Base Nacional Comum do Currículo. Converge avaliação, formação dos professores e produção de material", explica o secretário de educação básica do Ministério da Educação (SANTOS, B. F. e VIEIRA).

Como os livros didáticos do ensino médio, principalmente de 3º ano, cada vez mais dão ênfase ao Enem a partir de 2015 a utilização do cálculo nas instituições públicas de ensino tende a desaparecer completamente.

5 Aplicações

Neste capítulo o objetivo é dar condições para usarmos a derivada como ferramenta na resolução de problemas contextualizados, comuns nas avaliações nacionais como o ENEM.

Usando derivadas podemos estudar rapidamente aspectos importantes de uma função.

5.1 Funções crescentes e decrescentes.

Saber os intervalos onde uma função é crescente ou decrescente é importante em várias situações, conhecer um método geral para estudar o comportamento em um intervalo seria útil ao trabalhar com funções que não são monótonas. A definição comum, presente na maioria dos livros didáticos é a seguinte:

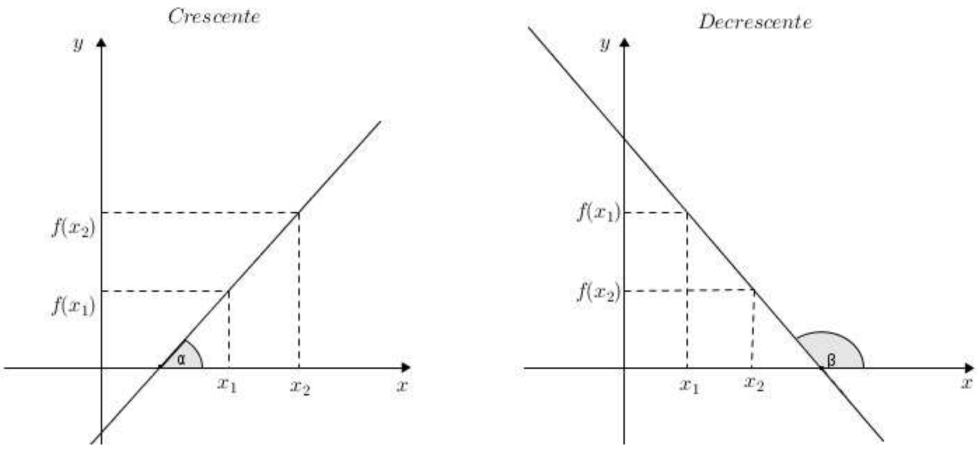
> [...]uma função $f : X \to R$, com $X \in \mathbb{R}$, chama-se :
> crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
> decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
> monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
> monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.
> Em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona. Nos dois primeiros (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é estritamente monótona. Nestes dois casos, f é uma função injetiva.(LIMA et al. 2006, p. 99)

Em algumas ocasiões a definição anterior não é fácil de ser aplicada, algumas funções são difíceis de ser examinadas. Um método alternativo seria calcular a derivada, já que o sinal da primeira derivada nos dá essa informação, como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente, quando a inclinação $f'(x)$ for positivo, a função será crescente e quando for negativo a função será decrescente.

> "Seja f uma função continua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):
> (i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;
> (ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$."(LEITHOLD, 1994, p.237).

Alguns problemas interessantes podem ser formulados utilizando crescimento e decrescimento.

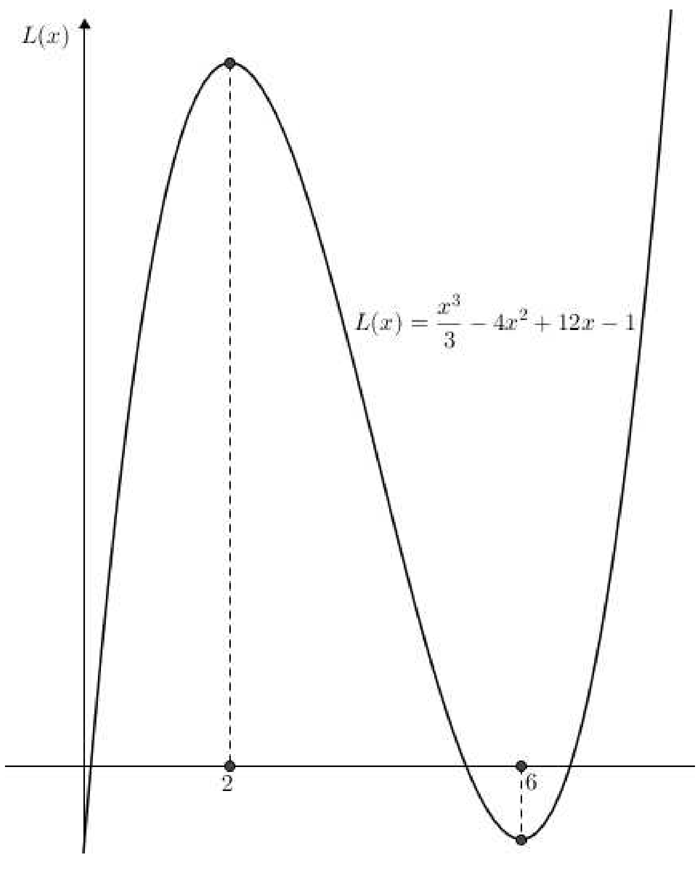
Figura 6 – Função crescente e decrescente–Geometricamente.



Fonte: Autor.

Exemplo 18 *O lucro de uma empresa, em milhões, é dado por* $L(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + 12x - 1$ *onde x(em milhares) representa a quantidade vendida de um produto qualquer. Quando o lucro da empresa está crescendo?*

Figura 7 – Gráfico da função L(x).



Fonte: Autor.

Primeiramente, devemos observar que o domínio de $L(x)$ é $\mathbb{N}^+$.

Calculando a primeira derivada teremos

$$L'(x) = x^2 - 8x + 12 \tag{5.1}$$

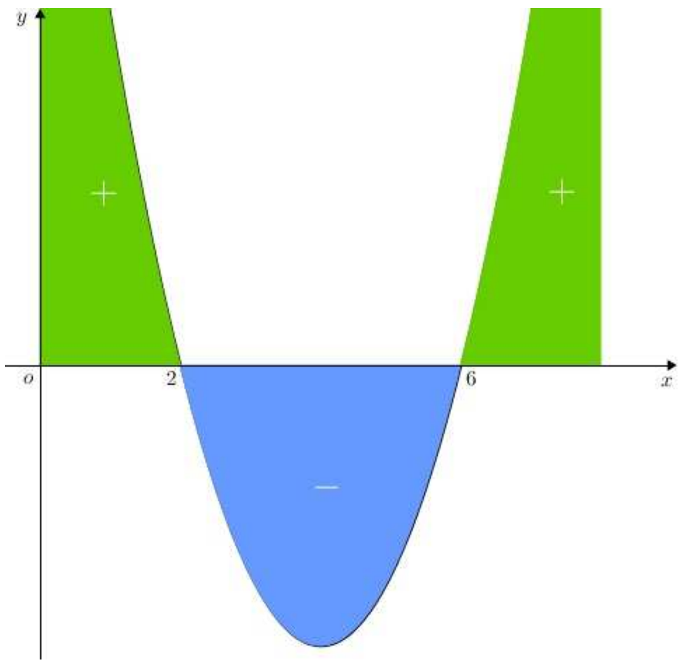
Calculando as raízes de $L'(x)$ usando a fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.12}}{2.1} \\ x &= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} \end{aligned}$$

As raízes serão: $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.

Estudando o sinal da equação 5.1.

Figura 8 – Sinal de $L'(x)$



Fonte: Autor.

Logo o lucro da empresa está crescendo quando $L'(x) > 0$, ou seja, quando $x \in]0, 2]$ ou $x \in [6, +\infty[$.

5.2 Concavidade e ponto de inflexão (PI)

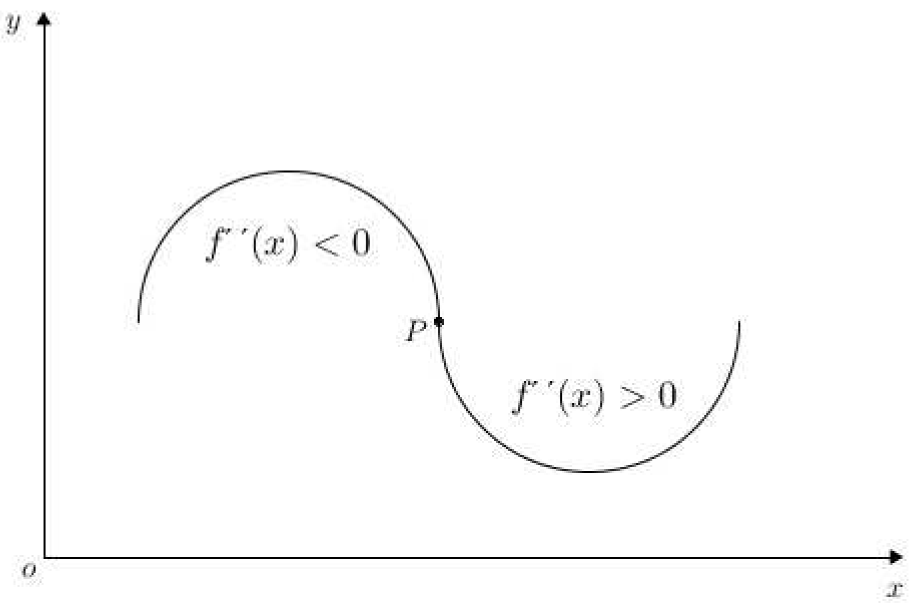
O sinal da segunda derivada, $f''(x) > 0$, indica que o coeficiente angular $f''(x)$ é uma função crescente de x, ou seja, a curva é côncava para cima.

Analogamente se a derivada é negativa $f''(x) < 0$ o coeficiente angular é uma função decrescente, logo a curva é côncava para baixo.

Segundo Leithold(1994, p.243)

> "Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então,
> (i) se $f''(c) > 0$, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;
> (ii) se $f''(c) < 0$, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$."

Figura 9 – Concavidade e ponto de inflexão.



Fonte: Autor.

O ponto P (ponto de inflexão) é o ponto no qual a função muda de concavidade, e é definido em $f''(x) = 0$.

> "Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se $(c, f(c))$ for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$"(LEITHOLD, 1994, p.245)

Exemplo 19 *Determinar os pontos de inflexão e reconhecer os intervalos onde a função* $f(x) = (x-1)^3 + 2$ *tem concavidade voltada para cima ou para baixo.*

$$f(x) = (x-1)^3 + 2$$

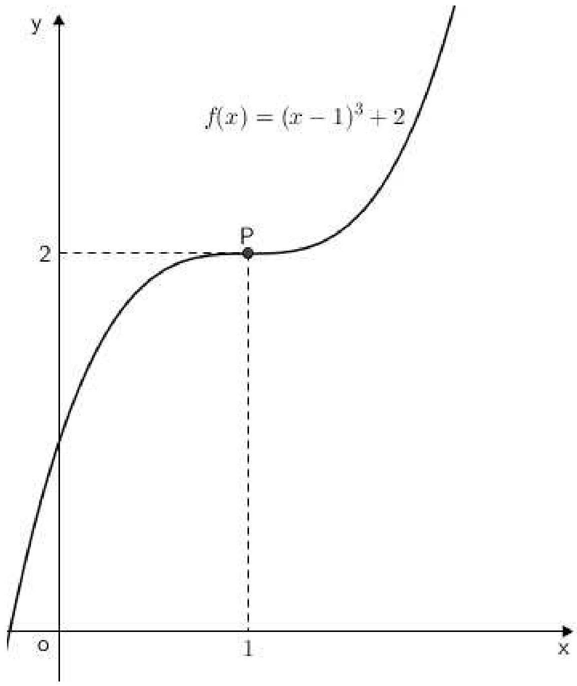
Temos $f'(x) = 3(x-1)^2$ e $f''(x) = 6(x-1)$. Fazendo-se $f''(x) = 0$ temos:

$$6(x-1) = 0$$

$$x = 1$$

Logo para $x = 1$, temos $f(1) = (1-1)3+2 = 2$ e o ponto $P = (1, 2)$ é o ponto de inflexão da função, como podemos ver na figura 10.

Figura 10 – Ponto de inflexão e concavidade da função $f(x)$.



Fonte: Autor.

Nesse ponto a concavidade muda de sentido.

Portanto no intervalo $]1, +\infty[$, $f''(x) > 0$. Analogamente, no intervalo $]-\infty, 1[$, $f''(x) < 0$. Então f é côncava para baixo em $]-\infty, 1[$ e no intervalo $]1, +\infty[$ f é côncava para cima.

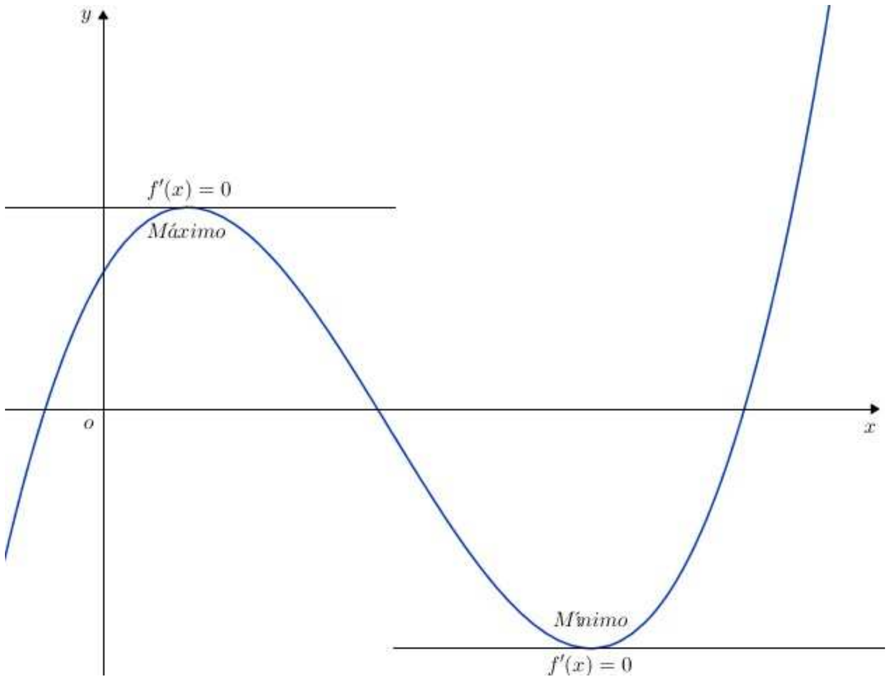
5.3 Máximo e mínimo de uma função

Uma curva só pode se transformar de crescente em decrescente passando por um pico onde o coeficiente angular da reta tangente é zero. Nesses pontos temos um valor máximo ou mínimo da função (quando $f'(x) = 0$).

Depois resolvemos a equação $f'(x) = 0$ descobrindo suas raízes. Os pontos críticos são x_1, x_2,. . ., x_n e os correspondentes valores críticos os valores da função nesses pontos, isto é, $f(x_1)$, $f(x_2)$,. . ., $f(x_n)$.

Exemplo 20 *Uma empresa contratada para fazer caixas de embalagens a partir de pedaços de papelão com dimensões de* $30x50$ *cm, cortando pedaços iguais nos quatro cantos e*

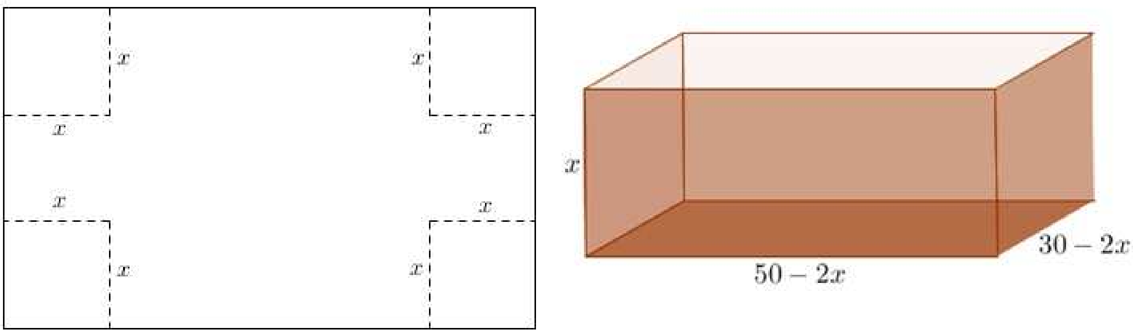
Figura 11 – Máximo e mínimo.



Fonte: Autor.

dobrando para cima. Qual o comprimento do quadrado que deve ser cortado para obtermos uma caixa com o maior volume possível?

Figura 12 – Papelão e caixa.



Fonte: Autor.

Na figura 12 estão representados o pedaço de papelão e a caixa após o corte de tamanho x.

O volume da caixa é dado por

$$\begin{aligned} V(x) &= x(50-2x)(30-2x) \\ &= 4x^3 - 160x^2 + 1500x \end{aligned}$$

O domínio dessa função deve satisfazer as condições.
$I)\quad x > 0$
$II)\quad 50 - 2x > 0 \Rightarrow x < 25$
$III)\quad 30 - 2x > 0 \Rightarrow x < 15$
Logo fazendo $I \cap II \cap III$, teremos:

$$x \in \quad]0, 15[$$

Calculando $V'(x)$ obtemos

$$V'(x) = 12x^2 - 320x + 1500$$

Fazendo $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 320x + 1500 = 0$$

Encontramos

$$x_1 \approx 20,6 \quad e \quad x_2 \approx 6,07.$$

Portanto devemos cortar pedaços de aproximadamente $6,07$ cm, x_1 não está no *domínio* da função.

5.4 Comprimentos de arcos.

Uma possível aplicação da integral seria para o cálculo do comprimento do arco de uma curva qualquer, aplicações interessantes podem ser introduzidas no ensino básico usando a seguinte formula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \tag{5.2}$$

Onde L representa o comprimento do trecho entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

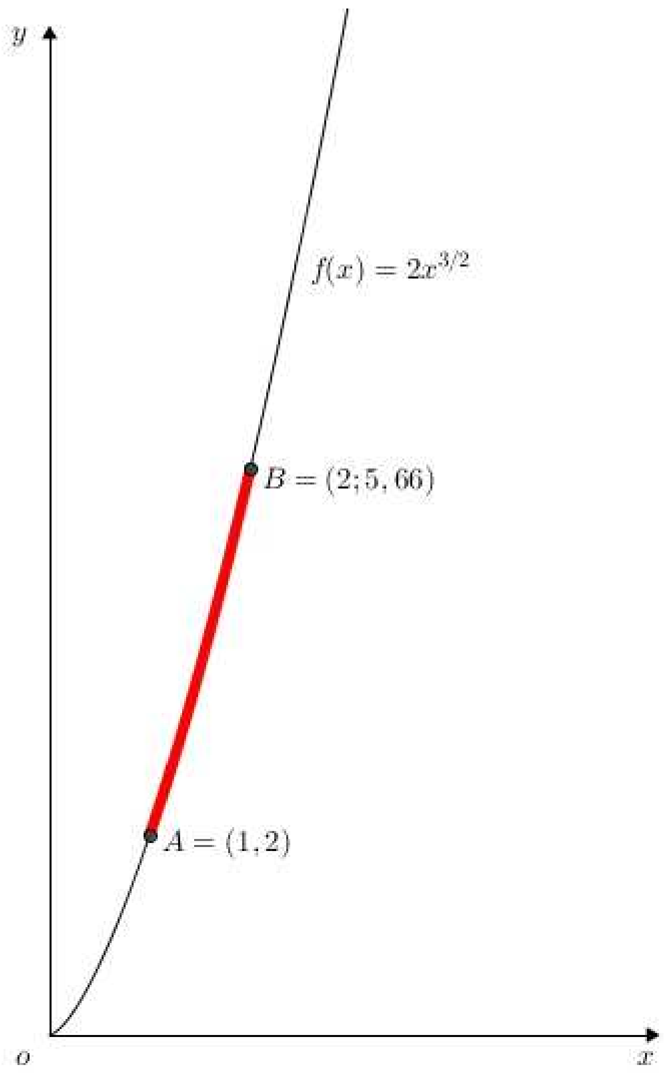
Exemplo 21 *Um engenheiro pretende construir uma estrutura como mostrado na figura a seguir. Para calcular o custo de produção ele precisa saber o comprimento do arco da curva $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ entre os pontos $A = (1, 1)$ e $B = (4, 8)$ que será feito de um material diferente do resto. Qual o custo de produção dessa parte da estrutura sabendo que o material entre A e B custa R\$ $50,00$ cada metro?*

Devemos calcular o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ chamaremos esse segmento de L.

$$f(x) = 2x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (f'(x))^2 = 9x$$

Usando a equação 5.2.

Figura 13 – Comprimento entre A e B



Fonte: Autor.

$$L = \int_1^2 \sqrt{1+9x}dx.$$

Fazendo a substituição.

$$u = 1 + 9x \Rightarrow du = 9dx \Rightarrow dx = \frac{1}{9}du.$$

Logo

$$\begin{aligned} L &= \int_{10}^{19} \sqrt{u}\frac{1}{9}du \\ &= \frac{1}{9}\int_{10}^{19} u^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\frac{2\sqrt{u^3}}{27}\right]_{10}^{19} \\
&= \frac{2}{27}[\sqrt{19^3} - \sqrt{10^3}] \\
&\approx \frac{2}{27}[82,82 - 31,62] \\
&\approx 3,8
\end{aligned}
$$

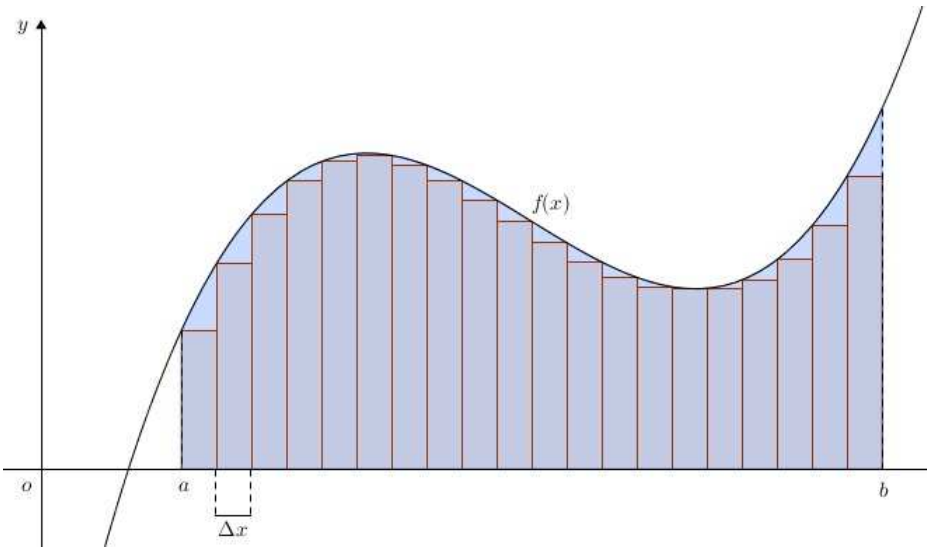
Como cada metro em $\widehat{\text{AB}}$ custa $R\$$ $50,00$ o preço de $\widehat{\text{AB}}$ será

$$50.3,8 \approx R\$190,00$$

5.5 Áreas sob curvas

Uma das principais aplicações da integral é o cálculo da área de uma região com fronteira limitada por uma ou mais curvas como podemos ver na figura a seguir.

Figura 14 – Área sobre curva



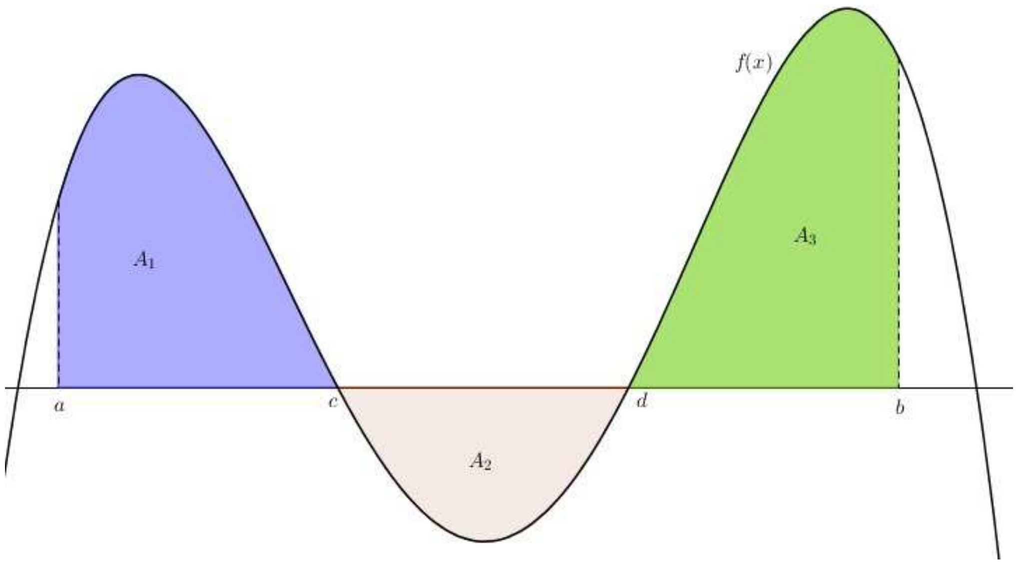
Fonte: Autor.

A área procurada seria tudo que está compreendida entre as retas $x = a$, $x = b$, o eixo x e a curva $f(x)$ assim para efetuar o cálculo dessa área, devemos somar a área de todos os retângulos de base Δx e altura na função $f(x)$. Quando $\Delta x \to 0$ a soma dessas áreas é a integral definida entre a e b, representada por:

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{5.3}$$

No caso de alguma parte da curva está localizada abaixo do eixo x esta será considerada como uma contribuição negativa e a área total será a soma das partes acima do eixo x subtraída das partes abaixo do eixo x.

Figura 15 – Contribuições de áreas



Fonte: Autor.

$$A = \int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2 + A_3$$

Onde:

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx,\ A_2 = \int_c^d f(x)dx \text{ e } A_3 = \int_d^b f(x)dx.$$

Exemplo 22 *Ache a área da região limitada pelas curvas $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = -x^2+4x$?*

Nesse tipo de questão devemos primeiro descobrir os pontos de encontro das curvas para sabermos onde são os limites de integração, para encontrar esses pontos vamos resolver a equação $x^2 = -x^2 + 4x$

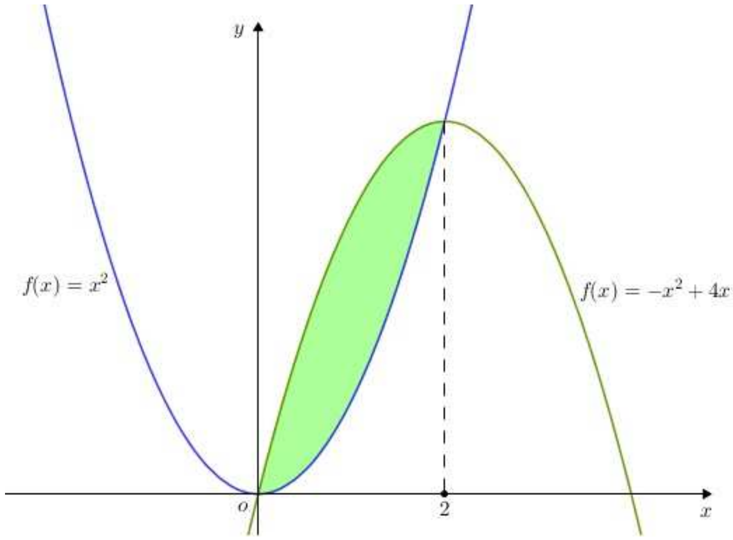
$$x^2 + x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

As raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Observando a figura 16 vemos que área pedida é uma região delimitada superiormente pela parábola $-x^2 + 4x$ e inferiormente pela parábola x^2, então para encontrar a função a ser integrada devemos montar uma expressão comparando as duas equações, ficando com o seguinte.

$$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x - x^2)dx$$

Figura 16 – Área entre curvas.



Fonte: Autor.

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx \\
&= -2\int_0^2 x^2 dx + 4\int_0^2 x dx \\
&= -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \\
&= \left[\frac{-2}{3}x^3\right]_0^2 \\
&= \frac{-2.2^3}{3} + 2.2^2 \\
&= \frac{-16}{3} + 8 \\
A &= \frac{8}{3}ua^2
\end{aligned}
$$

No próximo exemplo será mostrada uma região com partes da sua área acima e abaixo do eixo x sendo necessário subtrair a contribuição negativa localizada abaixo do eixo x.

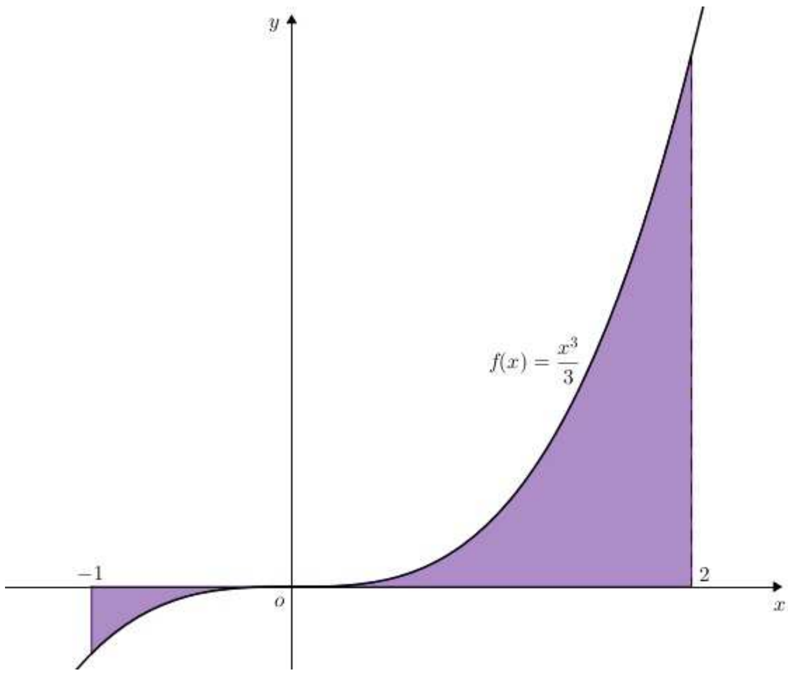
Exemplo 23 *Qual a área sob o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^3}{3}$ *entre* $x = -1$ *e* $x = 3$*?*

Examinando a figura 17 verificamos quais são as contribuições positiva e negativa.

Para calcular a área pedida devemos trabalhar com a seguinte expressão.

$$A = -\int_{-1}^{0} \frac{x^3}{3}dx + \int_0^3 \frac{x^3}{3}dx$$

Figura 17 – Área de $f(x)$.



Fonte: Autor.

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{-x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{3} \\
&= \frac{-1}{4}[0^4 - (-1)^4] + \frac{1}{4}[3^4 - 0^4] \\
&= \frac{-1(-1)}{4} + \frac{1.81}{4} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{81}{4} \\
A &= 20,5\ ua^2
\end{aligned}$$

Considerações finais

Foi constatado nesta breve pesquisa que somente uma escola do município de Jaguaruana-CE, tem o Cálculo Diferencial e Integral no currículo, mas não é efetivamente trabalhado, e que entre os livros do PNLD 2012 apenas dois contém uma introdução ao estudo de limite e derivada, aparecendo no final do livro e trabalhado com apresentação de conceitos e resoluções de problemas e destes dois livros um é adotado por uma escola pública de Jaguaruana-CE. Estes claramente são os principais motivos para os professores destas escolas não lecionarem cálculo, já que geralmente são trabalhados assuntos que estão contidos no livro didático, que ainda é usado como uma das ferramentas básicas para o ensino.

Os professores ao adotarem os livros de matemática, devem analisar bem o material pelo qual os mesmos irão trabalhar, e que os autores passem a inserir mais o conteúdo de cálculo em suas obras, de forma positiva afim de que todos juntos possam ministrar este conteúdo para os alunos da educação básica sem nenhum prejuízo para o ensino.

O Cálculo Diferencial e Integral poderia voltar a fazer parte do currículo do ensino médio, usando uma abordagem adequada focada em um conteúdo acessível e em aplicações. O capítulo cinco deve servir de motivação para a inclusão do cálculo de maneira significativa em sala de aula, usando exemplos simples, podemos introduzir o cálculo de forma a ser utilizado proveitosamente na continuação dos estudos em matemática e também em outras ciências. Como exemplo podemos citar a Física que poderia fazer amplo uso do cálculo simplificando várias demonstrações, que de outra maneira tornam-se muito complicadas, algumas necessitando de verdadeiros malabarismos para obter a compreensão do aluno.

Na área da matemática temos as funções elementares que são abordadas no decorrer do ensino medio, sendo que o cálculo poderia auxiliar o ensino destas funções de maneira simples e satisfatória para este segmento de ensino, já que na maioria das vezes os livros demonstram este assunto de maneira mais complexa.

Atualmente existem aplicativos que tornam bem mais fácil introduzir conceitos que antes eram não era possível, então acreditamos hoje ser mais fácil hoje apresentar no ensino médio não apenas funções mas também introduzir intuitivamente o Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, espero que esse trabalho tenha deixado em aberto para futuras discussões, em curso de formação de professores da área de matemática, algumas questões sobre a inserção Cálculo Diferencial e Integral, com suas inumeras aplicabilidades, como ferramenta básica no ensino médio.

Referências

ÁVILA, G.; **O Ensino do Cálculo no Segundo Grau.** In: Revista do Professor de Matemática, $n\circ$ 18, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p.1-9.

ÁVILA, G.; **Limites e Derivadas no Ensino Médio?** In: Revista do Professor de Matemática, $n\circ$ 60, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p.30-38.

BOYER, Carl B.; **História da Matemática**: São Paulo, Blucher, 1996.

BOYER, Carl B.; **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula: Cálculo.** São Paulo: Atual,1992. Volume 6

CARVALHO, J. B. P. de.; **O cálculo na escola secundaria-algumas considerações históricas.** Caderno CEDES. Campinas: Papirus,n. 40, p.68-81,1996.

EVES, Howard; **Introdução a história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

EVES, Howard; **Introdução a história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.

FERREIRA, Maria Serra; SELLES Sandra Escovedo; **Análise de livros didáticos em ciências: Entre as ciências de referência e as finalidades sociais da escolarização Educação em foco.** Juiz de fora.v.8, n.1 e 2.p.63-78, 2004.

FIRER, Marcelo; TOZONI, Sérgio; SAA, Alberto. **O ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Unicamp**, 2013.
Disponível em: < http://www.unicamp.br/unicamp/ju/587/o-ensino-de-calculo-diferencial-e-integral-na-unicamp>Acesso em 06 outubro 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO P.C.P.; WAGNER E.; MORGADO A.C.;**A matemática do ensino médio.**; Volume 1; 9$\circ$ edição; Rio de Janeiro: SBM 2006.

MACHADO, Luiz Elpídio de Melo; **O hipertexto na aprendizagem do cálculo diferencial e integral.** 2002, 94p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas). Florianópolis: UFSC.

MENEGHETTI, R.C.G.; **Constituição do saber matemático: reflexões filosóficas e históricas.** Eduel. Londrina, 2010.

NETO, Irineu;**Aplicações de máximo e mínimo na obtenção do volume de sólidos geométricos.**; FTD; 2014.

NOBRE, S. R.; **Elementos historiográficos da matemática presentes em enciclopédias universais.** Rio Claro, UNESP, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2000 (Tese de Livre Docência em Geociências).

OLIVEIRA, Fernando Rodrigues de; **Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no ensino médio.** Porto Alegre. 2010. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29140/000775857.pdf?sequence=1>. Acesso em 02 Julho 2013.

PAIS, Luis Carlos.; Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática: uma (nova) introdução.** 3º ed. (revisada). São Paulo: EDUC, 2008. p. 11-48.

PNLD; MEC; 2012.

SANTOS, B. F. e VIEIRA, V.; **Cálculo diferencial e integral nos cursos de Engenharia da UFOP: Estratégias e desafios no ensino Aprendizagem**. O Estado de São Paulo [Internet].
Disponível em: <http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=89453>Acesso em 15 outubro 2013.

SELLES, Sandra E.; FERREIRA, Marcia S.; **Influências histórico-culturais nas representações sobre as estações do ano em livros didáticos de Ciências.** Ciências Educação, Bauru, vol. 10, n.1, 2004.

VEIGA NETO, A.; **Geometrias, Currículo e Diferenças IN: Educação e Sociedade**, Dossiê Diferenças; 2002.

WIELEWSKI, G. D.;**O MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA E A FORMAÇÃO DE GRUPOS DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA NO BRASIL**; 2013.