



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIDO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

JAKSON NEY DA COSTA REIS

**“FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: DA OBSERVAÇÃO DE PADRÕES DA  
NATUREZA AO USO DO GEOGEBRA”**

MOSSORÓ/RN

2014

JAKSON NEY DA COSTA REIS

**FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: DA  
OBSERVAÇÃO DE PADRÕES DA  
NATUREZA AO USO DO GEOGEBRA.**

**Mossoró-RN**

**Abril de 2014**

JAKSON NEY DA COSTA REIS

**FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO: DA OBSERVAÇÃO  
DE PADRÕES DA NATUREZA AO USO DO  
GEOGEBRA.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado  
ao Corpo Docente do Mestrado Profissional  
em Matemática em Rede Nacional PROF-  
MAT - UFERSA, como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Matemática

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMIÁRIO - UFERSA

Orientador Antonio Ronaldo Garcia

Mossoró-RN  
Abril de 2014

JAKSON NEY DA COSTA REIS

**FRACATAIS NO ENSINO MÉDIO: DA OBSERVAÇÃO DE PADRÕES DA  
NATUREZA AO USO DO GEOGEBRA.**

Dissertação apresentada a Universidade  
Federal Rural do Semiárido – UFERSA,  
Campus Mossoró para obtenção do título  
de Mestre em Matemática.

APROVADO EM : 25 de abril de 2014

BANCA EXAMINADORA



---

Prof.º Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA

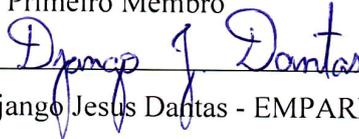
Presidente



---

Prof.º Dr. Walter Martins Rodrigues - UFERSA

Primeiro Membro



---

Prof.º Dr. Django Jesus Dantas - EMPARN

Segundo Membro

MOSSORÓ/RN, 25 de Abril de 2014.

**O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade de seus autores**

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Biblioteca Central Orlando Teixeira (BCOT)  
Setor de Informação e Referência**

R375f Reis, Jakson Ney da Costa.  
Fractais no Ensino Médio: da observação de padrões da natureza ao uso do GeoGebra. / Jakson Ney da Costa Reis. -- Mossoró, 2014  
88f.: il.

Orientador: Prof. Antonio Ronaldo Garcia.  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Pró-Reitoria de Pós-Graduação.

1. Ensino da Matemática. 2. Fractais. 3. Padrões. 4. GeoGebra. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 510

Bibliotecária: Keina Cristina Santos Sousa e Silva  
CRB-15/120

*Este trabalho é dedicado especialmente aos meus alunos  
do 3º ano do Ensino Médio da Escola Gabriel Epifânio dos Reis,  
pela dedicação e entrega na realização das atividades aqui propostas.*

---

# AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a Deus que me deu inspiração e sabedoria para conduzir essa pesquisa com seriedade e ética.

Agradeço também a minha esposa Karla Daniele, que de forma especial e gentil me deu força e coragem, me apoiando nos momentos mais difíceis desta árdua jornada.

Agradeço também a todos os meus familiares, amigos e colegas de trabalho, pela amizade, apoio e compreensão dedicados a mim durante todo o tempo da pesquisa. Por suas palavras de incentivo, tornando mais fácil esta caminhada.

Agradeço a todos os meus professores que me conduziram sabiamente até este ponto, em especial meu orientador Antonio Ronaldo Garcia, pelo apoio e paciência que foram primordiais para a conclusão e sucesso da pesquisa;

Por fim, mas não menos importante, eu gostaria de agradecer aos meus alunos da Escola Gabriel Epifânio dos Reis, fontes de inspiração para a escolha do tema. Sou grato então a todos pela dedicação na realização das atividades propostas, por contribuírem pacientemente e tornarem possível a obtenção dos dados para alcançarmos o objetivo deste trabalho.

*"Bons alunos aprendem a Matemática numérica, alunos fascinantes vão além, aprendem a Matemática da emoção, que não tem conta exata e que rompe a regra da lógica."*  
*(Augusto Cury)*

# Resumo

A beleza da natureza é fator de inspiração para as mais diversas áreas. Não poderia ser diferente na Matemática. Na verdade, os padrões vistos em elementos presentes na natureza são o principal combustível da investigação Matemática. Neste trabalho, propomos uma breve análise de padrões geométricos da natureza como pontapé inicial para a introdução da Geometria Fractal no currículo do Ensino Médio. Partindo da história dos fractais, coleta de amostras (principalmente de conchas de crustáceos e moluscos), seguindo pela utilização do Ambiente de Aprendizagem GeoGebra, construímos bases sólidas para a exploração e aprofundamento de temas como Progressões Geométricas, Análise Combinatória e noções de Geometria Plana. Utilizando atividades complementares visando o aprimoramento da prática pedagógica. Findamos propondo a implementação simplificada de temas como Recorrências Lineares de Primeira Ordem.

**Palavras-chaves:** Ensino da Matemática, Fractais, Padrões, GeoGebra.

# Abstract

The beauty of nature is an inspiring factor for many different areas. Could not be otherwise in Mathematics. In fact, the patterns seen in elements present in nature are the main fuel of research mathematics. In this paper, we propose a brief analysis of geometric patterns nature as a kickoff for the introduction of fractal geometry in the curriculum of secondary education. Leaving the history of fractals, collecting samples (mainly shells of crustaceans and molluscs), followed by the use of the Learning Environment GeoGebra, built solid for exploration and develop issues as Geometric Progressions, Combinatorial Analysis and notions of Plane Geometry bases. Using complementary activities aiming at the improvement of teaching practice. Findamos proposing a simplified implementation topics such as First Order Linear Recurrences.

**Key-words:** Teaching Mathematics, Fractals, Standards, GeoGebra.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Georg Cantor . . . . .	21
Figura 2 – Sierpinski . . . . .	22
Figura 3 – Koch . . . . .	22
Figura 4 – Mandelbrot . . . . .	23
Figura 5 – Primeiro e segundo nível . . . . .	24
Figura 6 – Terceiro e quarto nível . . . . .	24
Figura 7 – Nível 1 da Curva de Koch . . . . .	26
Figura 8 – Nível 2 da Curva de Koch . . . . .	26
Figura 9 – Nível 3 da Curva de Koch . . . . .	26
Figura 10 – Nível 4 da Curva de Koch . . . . .	26
Figura 11 – Floco de neve de Koch. . . . .	27
Figura 12 – Nível 1 do Triângulo de Sierpinski . . . . .	27
Figura 13 – Nível 2 do Triângulo de Sierpinski . . . . .	27
Figura 14 – Níveis 3 e 4 do Triângulo de Sierpinski . . . . .	27
Figura 15 – Níveis 5 e 6 do Triângulo de Sierpinski . . . . .	28
Figura 16 – Fractais na natureza . . . . .	29
Figura 17 – Praia de Requenguela . . . . .	31
Figura 18 – Manguesal onde amostras foram colhidas . . . . .	32
Figura 19 – Coleta de conchas para estudo . . . . .	32
Figura 20 – Reprodução e estudo de padrões geométricos . . . . .	33
Figura 21 – Amostras coletadas na aula de campo . . . . .	34
Figura 22 – A Interface do usuário . . . . .	38
Figura 23 – A Interface do usuário . . . . .	40
Figura 24 – A Interface do usuário . . . . .	40
Figura 25 – Insere o ponto $C$ a $1/3$ de $A$ no segmento $\overline{AB}$ . . . . .	41
Figura 26 – Obtenção do ponto $E$ . . . . .	41
Figura 27 – Janela Planilha . . . . .	41
Figura 28 – Segundo nível da Curva de Koch . . . . .	42
Figura 29 – A cada novo seguimento foi aplicado a Ferramenta CurvaDeKoch . . . . .	42
Figura 30 – Configurações do Controle deslizante . . . . .	42
Figura 31 – Configurações de condição lógica para exibição dos níveis . . . . .	43
Figura 32 – Os 6 níveis construídos no processo . . . . .	43
Figura 33 – Construção da curva de Koch no GeoGebra . . . . .	44
Figura 34 – Primeiro nível do Triângulo de Sierpinski . . . . .	44
Figura 35 – Segundo nível do Triângulo de Sierpinski . . . . .	45
Figura 36 – Configurações da nova ferramenta denominada Sierpinski . . . . .	45

Figura 37 – Sete níveis construídos no processo . . . . .	46
Figura 38 – Conclusão do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra . . . . .	47
Figura 39 – Árvore de Pitágoras . . . . .	48
Figura 40 – Configurações do controle deslizante . . . . .	48
Figura 41 – Base para construção do triângulo retângulo . . . . .	49
Figura 42 – Primeiro nível da Árvore de Pitágoras . . . . .	49
Figura 43 – Criação da ferramenta Pitágoras . . . . .	50
Figura 44 – Árvore de Pitágoras no nível 5 a um ângulo de $45^\circ$ (Árvore Simétrica de Pitágoras) . . . . .	50
Figura 45 – Árvore de Pitágoras no nível 5 a um ângulo de $60^\circ$ . . . . .	51
Figura 46 – Primeira etapa da construção do novo Fractal . . . . .	52
Figura 47 – Configurações da nova ferramenta . . . . .	52
Figura 48 – Fractal no nível 6 de interação . . . . .	52
Figura 49 – Fractal no nível 0 de interação . . . . .	56
Figura 50 – Fractal no nível 1 de interação . . . . .	56
Figura 51 – Fractal no nível 2 de interação . . . . .	56
Figura 52 – Fractal no nível 3 de interação . . . . .	57
Figura 53 – Nova região (em vermelho) que surge no nível 1 . . . . .	61
Figura 54 – Nova região (em azul) que surge no nível 2 . . . . .	62
Figura 55 – Nova região (em verde) que surge no nível 3 . . . . .	63
Figura 56 – Número de triângulos válidos no nível 1 . . . . .	65
Figura 57 – Número de triângulos válidos no nível 2 . . . . .	66
Figura 58 – Detalhes da Árvore de Pitágoras. . . . .	69
Figura 59 – Triângulos considerados na análise . . . . .	71
Figura 60 – Quadrados que inicialmente entram na contagem . . . . .	72
Figura 61 – Perímetro da Árvore de Pitágoras no seu nível 5. . . . .	73
Figura 62 – Preenchimento da tabela proposta na atividade 01 . . . . .	84

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Níveis da Poeira de Cantor . . . . .	25
Tabela 2 – Ferramentas que serão usados neste trabalho . . . . .	39
Tabela 3 – Perímetro em cada nível de interação . . . . .	58
Tabela 4 – Fator de crescimento do perímetro do Floco de Neve de Koch em relação ao nível 0 . . . . .	60
Tabela 5 – Área total da Árvore de Pitágoras . . . . .	76
Tabela 6 – Elementos do Floco de Neve de Koch . . . . .	83
Tabela 7 – Elementos do Triângulo de Sierpinski . . . . .	86

Tabela 8 – Elementos da Árvore de Pitágoras. . . . .	89
--	----

# Sumário

	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
	<b>1 INFORMAÇÕES HISTÓRICAS E FRACTAIS FAMOSOS</b>	<b>18</b>
1.1	Uma breve noção sobre a Teoria do Caos	18
1.2	A formalização Matemática dos Fractais	19
1.3	Matemáticos que estudaram os Fractais	21
1.3.1	Georg Cantor	21
1.3.2	Sierpinski	21
1.3.3	Koch	22
1.3.4	Mandelbrot	23
1.4	O conjunto de Cantor (Poeira de Cantor)	24
1.5	A Curva de Koch	26
1.6	O triângulo de Sierpinski	27
1.7	A presença dos fractais na natureza	28
	<b>2 AULA DE CAMPO E COLETA DE AMOSTRAS</b>	<b>30</b>
2.1	Local da aula de campo	31
2.2	Observando padrões	32
2.3	Catalogando as amostras	33
	<b>3 CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS NO GEOGEBRA E ANÁLISE DE ATIVIDADES PROPOSTAS</b>	<b>35</b>
3.1	Entendendo o GeoGebra	37
3.1.1	Interface de usuário do GeoGebra	37
3.1.2	Criar uma Nova Ferramenta	40
3.2	A Curva e Koch	40
3.3	O Triângulo de Sierpinski	44
3.4	A Árvore de Pitágoras	47
3.5	Criando novos Fractais	51
3.6	Análise das atividades propostas	53
	<b>4 EXPLORANDO A MATEMÁTICA DOS FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO</b>	<b>55</b>
4.1	O Floco de Neve de Koch	55
4.1.1	Número de lados	55
4.1.2	Perímetro	57

4.1.3	Cálculo da Área . . . . .	61
<b>4.2</b>	<b>O triângulo de Sierpinski . . . . .</b>	<b>64</b>
4.2.1	Número de triângulos . . . . .	65
4.2.2	O Cálculo do Perímetro . . . . .	66
4.2.3	O cálculo da área . . . . .	67
<b>4.3</b>	<b>A Árvore de Pitágoras . . . . .</b>	<b>68</b>
4.3.1	O número de triângulos . . . . .	68
4.3.2	O número de quadrados . . . . .	68
4.3.3	O perímetro de cada triângulo . . . . .	69
4.3.4	O perímetro de cada quadrado . . . . .	70
4.3.5	A área de cada triângulo . . . . .	71
4.3.6	A área de cada quadrado . . . . .	72
4.3.7	Perímetro total . . . . .	72
4.3.8	A Área total . . . . .	75
	<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>79</b>
	<b>ANEXOS . . . . .</b>	<b>81</b>
	<b>A – ATIVIDADE 1 (O FLOCO DE NEVE DE KOCH) . . . . .</b>	<b>82</b>
	<b>B – ATIVIDADE 2 (O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI) . . . . .</b>	<b>85</b>
	<b>C – ATIVIDADE 3 (A ÁRVORE DE PITÁGORAS) . . . . .</b>	<b>88</b>

---

# INTRODUÇÃO

A Matemática tem figurado há um bom tempo entre os grandes vilões dos índices de reprovação nas escolas em geral. A disciplina é vista quase que consensualmente pelo alunado, e – infelizmente – por parte dos professores, como um conjunto de regras inflexíveis preestabelecidas, que devem ser seguidas à risca sem direito a interpretação e/ou interação dinâmica. Tal concepção dificulta uma aproximação por parte do aluno que estabelece um pré-conceito em relação à Matemática. Entretanto, muitas vezes o docente corrobora com essa concepção deturpada da disciplina, afastando ainda mais o aluno da compreensão eficiente dessa tão importante ferramenta da ciência.

Para [SILVEIRA \(2002\)](#), existe na fala do aluno o sentido pré-constituído de que a Matemática é difícil. A autora verificou em seu estudo que grande parte dos professores de Matemática busca modos para tornar a Matemática mais fácil, assumindo eles mesmos que acham a disciplina difícil. Os professores identificam, na voz do aluno, que ela é considerada chata e misteriosa, que assusta e causa pavor, e por consequência, o aluno sente medo da sua dificuldade e vergonha por não aprendê-la. Esse conjunto de sentimentos ruins proporcionados pela disciplina aos alunos, destrói qualquer possibilidade de aproximação da Matemática. Resulta desse quadro que o aluno desenvolve uma antipatia pela disciplina.

Neste trabalho, veremos atividades que visam tornar o ensino de Matemática instigante e divertido. Usaremos como subsídio para tal um dos principais atrativos da Matemática: a sua beleza estética. E nesse aspecto, a Geometria merece um lugar de destaque. Esse ramo da Matemática é rico em elementos concretos que favorecem a percepção espacial e a visualização, características que dão a professor e aluno suporte para desenvolverem uma relação ensino-aprendizagem mais eficiente.

A escolha da Geometria como tema central do trabalho deu-se principalmente por ela permear o mundo em que vivemos. A plena compreensão das competências e habilidades

relacionadas a essa área da Matemática é indispensável, se considerarmos o quanto a Geometria está presente no dia a dia do aluno.

Sobre a importância do estudo da Geometria, [JORGE \(2002\)](#), diz que a linguagem gráfica é universal, pois independe dos idiomas e proporciona compreensão imediata e interpretação exata dos símbolos usados. Por exemplo, um técnico brasileiro pode construir fielmente algo projetado por um técnico chinês com base apenas em seus desenhos. Da mesma forma, uma pessoa pode ir a qualquer lugar, orientando-se somente por mapas e sinais visuais. Adquirir o conhecimento que permita compreender a linguagem gráfica e comunicar-se com ela é, hoje, essencial.

Como falamos anteriormente, a Matemática tem sua beleza estética como um dos principais atrativos. Na Geometria existe um tema que vislumbra até mesmo os menos educados matematicamente, trata-se dos Fractais. A escolha desse tema deu-se principalmente por se tratar de um conteúdo esquecido pelas escolas e quase sempre deixado de lado na elaboração dos currículos, muito embora a Geometria Fractal, ultimamente, tenha ganhado destaque no cenário da Educação Matemática ([BRANDÃO \(2002\)](#); [BAIER \(2005\)](#); [SALLUM \(2005\)](#); [GOUVEA \(2005\)](#); [ALMEIDA \(2006\)](#); [GONÇALVES \(2007\)](#); [PALLESSE \(2007\)](#)). Além disso, embora os PCNs para o Ensino Médio não explicitem a abordagem desse tema no currículo escolar, nos PCNs para o ensino Fundamental há uma menção clara à Geometria não-euclidiana<sup>1</sup>. De acordo com esse documento, uma

mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única Geometria do real, a Geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. ([BRASIL, 1998](#))

A renovação das práticas pedagógicas de Matemática é um grande desafio. Teóricos como Vygotski e Skinner alertam para falhas no sistema de educação que acabam atrasando a reformulação do modelo de aprendizagem. Para Skinner,

Estamos no limiar de uma época excitante e revolucionária, na qual o estudo científico do homem será posto a serviço dos mais altos interesses humanos. A educação deve desempenhar a sua parte. Precisa aceitar o fato de que uma revisão global das práticas educacionais é tanto possível como inevitável. ([SKINNER, 1972](#))

A abordagem da Geometria dos fractais no Ensino Médio é uma proposta que visa trazer um primeiro contato dos alunos com a Geometria não-euclidiana e a temas importantes na área da computação como as recorrências e até mesmo, mais timidamente, as estruturas lógicas dos algoritmos de programação. Tudo isso sem fugir das competências e habilidades em Matemática esperadas para um aluno de Ensino Médio.

---

<sup>1</sup> Ramo da Matemática que estuda, entre outras coisas, os fractais

Temos ainda que elementos da natureza podem ser explorados pelos alunos em aulas de campo, com o intuito de associação à Geometria fractal e padrões da natureza. Segundo [Zazkis Rina; Liljedahl \(2002\)](#), os padrões são o coração e a alma da Matemática, a Geometria e demais áreas da Matemática estão fundamentadas na generalização de padrões. Em [VALE I.; PIMENTEL \(2005\)](#), temos um amplo debate reforçando a Matemática como uma ciência que estuda os padrões. Os padrões retificam a harmonia da matemáticos. O processo de ensino de Matemática não pode ignorar este fato.

Os fractais possibilitam a abordagem de uma ampla variedade de tópicos da Matemática. Em [BARBOSA \(2002\)](#), podemos perceber a exploração de temas como sequências, contagem, perímetro, áreas, volumes e até algoritmo de programação. Sempre buscando despertar a busca pelos padrões e o senso estético dos fractais. Nesse momento o professor surge como interlocutor do processo, inserindo o aluno em uma aventura de descobertas da beleza e harmonia da Matemática.

Na construção de famosos fractais é possível extrair importantes elementos matemáticos. No entanto, a construção eficiente de algumas figuras não é viável usando ferramentas como régua e compasso. Nesse ponto entra um dos mais importantes instrumentos facilitadores do processo de aprendizagem da Matemática: o computador. Na ocasião, a plataforma a ser explorada é o Ambiente Dinâmico de Aprendizagem GeoGebra, que possibilitará a manipulação de objetos de maneira interativa pelo aluno. O uso das TICs<sup>2</sup> favorece a exploração da Geometria Fractal, além de ser uma ferramenta de fortalecimento da cidadania. Segundo [BRANDÃO \(2002\)](#) a Geometria dinâmica simula no computador construções usualmente feitas com régua e compasso, com o diferencial de que o estudante pode mover alguns dos objetos construídos. O GeoGebra possibilita ao aluno, a partir de uma única construção, efetuar vários testes, o que é quase impossível somente com régua e compasso.

Os próprios PCNs enfocam o bom uso das TICs na aprendizagem da Matemática:

As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. ([BRASIL, 1997](#))

Com este estudo, uniremos a beleza da Matemática à eficiência da prática no processo de ensino-aprendizagem. A inserção do aluno como protagonista é fator preponderante para a obtenção do êxito.

No Capítulo 1, apresentamos aos alunos uma breve História dos fractais. Onde foi possível conhecer um pouco sobre as primeiras ideias que surgiram a respeito do tema. Além disso, apresentamos alguns dos mais importantes matemáticos que estudaram

<sup>2</sup> Tecnologias da Informação e Comunicação

os fractais, seguido da exposição de famosos fractais e suas principais propriedades e características.

No Capítulo 2, relatamos a aula de campo que serviu como despertar da curiosidade dos alunos para o tema dos padrões geométricos na natureza. Na ocasião, catalogamos os itens coletados na aula de campo e analisamos os mesmos detalhadamente na escola.

No Capítulo 3, introduzimos as principais ferramentas e funcionalidades do software GeoGebra. Em seguida, com o auxílio do computador, construímos três importantes fractais: A Curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras. Todas as construções culminaram com uma atividade proposta voltada para o fractal construído.

No Capítulo 4, iniciamos uma investigação minuciosa sobre alguns elementos matemáticos presentes nos fractais construídos no Capítulo 3. Sugerimos a utilização de várias técnicas na resolução das atividades propostas, além de propormos outras atividades e elencamos diversos fatos curiosos sobre os fractais estudados. Mostramos que assuntos como Progressões Geométricas, Análise Combinatória, noções de Geometria Plana e até Recorrências Lineares de Primeira Ordem podem ser trabalhadas de forma prática com a ajuda dos fractais.

Este trabalho é uma oportunidade de aprimoramento da prática pedagógica, mostrando que a Matemática está por toda parte, e que ela é sinônimo de beleza e perfeição.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## INFORMAÇÕES HISTÓRICAS E FRACTAIS FAMOSOS

As ideias e informações apresentadas neste Capítulo foram baseadas nos trabalhos de [BRITO \(1995\)](#), [LINTZ \(1999\)](#), [BOYER \(1996\)](#) e [BAIER \(2005\)](#).

### 1.1 Uma breve noção sobre a Teoria do Caos

As ciências exatas estudam há tempo a regularidade da natureza. Durante muito tempo acreditou-se que os fenômenos naturais poderiam ser descritos com precisão por modelos quantitativos simples, através dos quais o homem poderia prever acontecimentos com exatidão conhecendo apenas um certo número de variáveis envolvidas. Em linguagem Matemática, tinha-se uma visão linearizada da natureza. Hoje em dia, sabe-se que a grande maioria dos fenômenos e dos elementos da natureza seguem padrões não-lineares. Muito embora os modelos determinísticos lineares satisfaçam muitas situações particulares.

Diante das lacunas deixadas pela ciência clássica no estudo desse tipo de fenômeno, é inevitável (e até imprescindível) o surgimento de novas ferramentas investigativas, de uma quebra de paradigmas. É necessário uma intervenção que dê suporte e se adeque às supostas irregularidades da natureza. É nesse cenário que uma nova ideia timidamente reponta: a Teoria do Caos.

Um dos primeiros matemáticos a notar a aleatoriedade e possível desordem de fenômenos da natureza foi o francês Henri Poincaré. Ao tentar resolver um problema referente à estabilidade do sistema solar, proposto pelo rei Oscar II da Suécia em 1887,

Poincaré descobriu uma desordem nas órbitas dos planetas. O equilíbrio, regularidade e harmônico esperados não foram observados, ao invés disso Poincaré deparou-se com um sistema verdadeiramente desestabilizado, onde o que prevaleceria não era a ordem natural, e sim o caos, a confusão, e a aleatoriedade dos movimentos dos astros em suas órbitas. Na época não houve um interesse prático na sua teoria de órbitas irregulares, sendo muitas vezes considerada uma aberração Matemática. Segundo Poincaré:

Uma causa muito pequena, que nos passa despercebida, determina um efeito considerável que não podemos deixar de ver, e então dizemos que o efeito é devido ao acaso. Se conhecêssemos exatamente as leis da natureza e a situação do universo no momento inicial, poderíamos prever exatamente a situação desse mesmo universo em um momento seguinte. Contudo mesmo que as leis naturais já não tivessem segredos para nós, ainda assim poderíamos conhecer a situação aproximadamente. Se isso nos permitisse prever a situação seguinte, com a mesma aproximação, seria tudo que precisaríamos, e diríamos que o fenômeno tinha sido previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre é assim, pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes nos fenômenos finais. A previsão torna-se impossível. (POINCARÉ, 1908 apud FERRARI, 2008, p.41)

Mas foi na década de 60 que o meteorologista Edward Lorenz iniciou, por acaso, seu estudo sobre a teoria do caos, seu objetivo inicial era encontrar uma maneira de prever o movimento do vento e das nuvens. Edward Lorenz, projetava simulações usando modelos matemáticos em supercomputadores. Em um de seus experimentos resolveu alterar uma casa decimal em uma das variáveis. Ele esperava que as mudanças seriam insignificantes, porém a simulação mostrou resultados completamente diferentes, a pequena mudança na variável havia gerado um efeito dominó que mudou significativamente o resultado final.

A partir da constatação de que pequenas mudanças são capazes de interferir no comportamento de todo um sistema Lorenz percebeu a complexidade envolvida em previsões a longo prazo, sejam fenômeno físico como o deslocamento das nuvens ou mais sofisticados, como a prever quantidade de chuvas no próximo verão, ambos estão submetidos a complexas leis da física e regidas pelo acaso, isso impossibilita qualquer tentativa de previsão. A Teoria do Caos tenta organizar essas ideias buscando uma possível ordem na desordem.

## 1.2 A formalização Matemática dos Fractais

Alguns elementos da natureza despertam uma inquietude por parte dos matemáticos, especialmente por possuírem um alto grau de complexidade, o que impossibilita descrevê-los por meio de ferramentas Matemáticas conhecidas, como a Geometria euclidiana. Em consequência dessa inquietude, tornou-se necessário o surgimento de uma nova teoria, mas precisamente de uma nova Geometria, a qual foi denominada Geometria Fractal.

Essa nova abordagem da natureza está vinculada a um novo conceito da ciência chamado CAOS.

O que nos chama a atenção nos fractais é a beleza e complexidades das formas geométricas. Essa beleza levou os matemáticos a refletirem a cerca de uma possível ordem no CAOS, graças à observação de padrões dentro de um sistema aparentemente aleatório.

Essas “entidades” geométricas já haviam sido observadas timidamente por matemáticos como Poincaré, Cantor, entre outros. Mas foi somente na década de 70 que o Matemático polonês Benoit Mandelbrot deu os primeiros passos na formalização dessa ideia. Inclusive o nome Fractais, do latim *fractus*, cujo significado é quebrar, fragmentar, gerar fragmentos irregulares, é uma denominação atribuída por ele.

As mais diversas áreas do conhecimento, tais como economia, meteorologia, física, entre outras, viram na teoria dos fractais uma possível saída para a resolução de problemas complexos oriundos de fenômenos naturais que outrora se mostravam incompreensíveis pela sua aleatoriedade e aparente ausência de padrões.

Diante de um mundo repleto de aleatoriedade, de imprecisão de medidas, em casos que exigem uma aproximação maior da realidade, torna-se inviável utilizar as ferramentas clássicas da Geometria Euclidiana. É razoável admitir a utilização da Geometria Fractal como alternativa mais adequada para descrever com maior precisão fenômenos e elementos da natureza.

A formalização Matemática dos fractais não surgiu do dia pra noite, foi fruto de anos de observação e estudos. De acordo com [BARBOSA \(2005\)](#), Na década de 40 Mandelbrot ingressou na empresa IBM, onde deveria trabalhar no setor de economia. No entanto, um problema de ruído nas linhas telefônicas em rede da empresa lhe chamou atenção. Os engenheiros da IBM não conseguiram eliminar os ruídos devido a aleatoriedade do fenômeno, o que impossibilitava qualquer diagnóstico preciso a cerca do problema. Mandelbrot interviu na solução do problema e o resolveu aplicando o conceito de fractais, mais precisamente ele utilizou um estudo de Georg Cantor conhecido como o Conjunto de Cantor<sup>1</sup>. A partir de então a comunidade científica começou a notar a potencialidade dessa nova ferramenta. Mandelbrot havia chamado a atenção para a importância de aprofundamento no estudo dos fractais, obtendo o reconhecimento de seu trabalho. Seus esforços lhe renderam importantes espaços no mundo acadêmico, por exemplo, professor emérito em Harvard.

---

<sup>1</sup> Georg Cantor publicou em 1883 um trabalho em que aparece um conjunto, conhecido como “Conjunto de Cantor” ou “Poeira de Cantor”

## 1.3 Matemáticos que estudaram os Fractais

Os fractais encantaram e ainda encantam matemáticos de diversas gerações. Em 1980 o polonês Mandelbrot utilizou pela primeira vez o termo Geometria Fractal. Muito embora, bem antes disso, matemáticos como Peano, Hilbert, Hausdorff, Menger entre outros tenham observado a natureza singular desses objetos. Iremos destacar, com uma breve biografia, os matemáticos Georg Cantor, Sierpinski, Koch e o próprio Mandelbrot. A predileção por estes últimos se dá simplesmente por estarem diretamente ligados aos exemplos de fractais que serão abordados nesse texto.

### 1.3.1 Georg Cantor

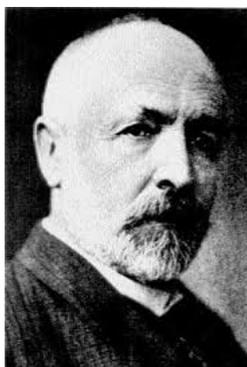


Figura 1 – Georg Cantor

Matemático alemão, Georg Cantor é famosa por introduzir o conceito de Teoria dos Números como modelo para descrever a Matemática. As ideias de Cantor se opunham por muitos de seus contemporâneos, mas, ele se recusou a curvar-se às suas críticas e continuou a sua pesquisa. Além dos números cardinais, Georg Cantor também desenvolveu importantes trabalhos direcionados ao estudo dos números transfinitos e trigonometria. Ele foi condecorado com a Medalha Sylvester, que é o mais prestigioso prêmio de Matemática. Cantor também estava interessado em música e artes. Cantor era uma personalidade espiritual e acreditava que Deus comunicou algumas das suas descobertas Matemáticas para ele. Dentre muitas contribuições de Cantor, destacamos o Conjunto de Cantor, um ensaio para o estudo da Geometria fractal.

### 1.3.2 Sierpinski



Figura 2 – Sierpinski

Sierpinski nasceu em 14 março de 1882 e morreu em 14 de maio de 1969, então com 87 anos de idade. Nascido em Varsóvia, Polônia, Sierpinski estudou na Universidade de Varsóvia, em 1900, rapidamente seus professores descobriram o seu talento para a Matemática, o que lhe rendeu ao final da formatura uma medalha de ouro em Matemática. Depois de formado, ele tornou-se professor de Matemática e física de uma escola para meninas em Varsóvia.

Ao longo de sua carreira, Sierpinski publicou mais de setecentos trabalhos, a grande maioria sobre a teoria dos conjuntos e teoria dos números. Seus estudos continham novas e importantes contribuições para a Matemática, dentre as quais podemos destacar sua contribuição para a Geometria fractal com as Curvas de Sierpinski.

Sierpinski recebeu muitas honrarias e homenagens no decorrer de sua carreira. Ele foi agraciado com títulos honorários das Universidades de Lvov, São Marcos de Lima, Amsterdam, Tartu, Sofia, Praga, Wrocław, Lucknow, e Lomonosov de Moscou.

### 1.3.3 Koch



Figura 3 – Koch

Matemático sueco nascido 25 de janeiro de 1870, em Estocolmo, Suécia. Von Koch foi um brilhante professor de Matemática na Universidade de Estocolmo. Seu primeiro trabalho foi na teoria dos determinantes de matrizes infinitas, com base em estudos iniciados pelo matemático francês Henri Poincaré. Seus trabalhos nesse campo são utilizados na Álgebra Linear, com importantes aplicações no estudo da mecânica quântica. Koch também trabalhou na hipótese de Riemann e na teoria dos números primos.

No entanto, ele é mais lembrado por um de seus trabalhos desenvolvidos em 1906. Na ocasião Koch apresentou uma curva contínua que nunca tem uma tangente. Na linguagem do Cálculo diferencial, essa curva era contínua em toda sua extensão, mas em nenhum ponto era diferenciável. Começando com um triângulo equilátero, ele substituiu o terço parte central de cada segmento por outro triângulo equilátero, excluindo a parte que pertencia ao triângulo maior. Esta operação de substituição é repetida sucessiva e indefinidamente, com o resultado de que a curva limite é contínua, mas em nenhuma parte diferenciável. A curva resultante após várias interações terá uma impressionante semelhança com um floco de neve, e por isso a curva é muitas vezes chamada floco de Koch.

#### 1.3.4 Mandelbrot



Figura 4 – Mandelbrot

Matemático polonês universalmente conhecido como o pai dos fractais. Mandelbrot estudou na Escola Politécnica de Paris nos anos de 1945 a 1947, e no Instituto de Tecnologia da Califórnia, de 1947 a 1949. Em seguida ele retornou à França onde concluiu seu doutorado em Paris entre 1949 e 1952. De 1958 a 1993, ele trabalhou para a IBM, em Nova York, tornando-se um pesquisador em 1974. Em 1987 ingressou como professor na conceituada Universidade de Yale, onde lecionou Ciências Matemáticas.

Em 1982 lançou seu primeiro livro de sucesso intitulado "A Geometria Fractal da Natureza", além de muitos artigos. O trabalho de Mandelbrot é uma mistura estimulante de conjecturas e observação, destacando processos matemáticos e sua ocorrência

na natureza e na economia. Muitas de suas conjecturas já foram provadas por outros matemáticos. Hoje em dia, os conjuntos que tem as propriedades características de um fractal, onde pequenas regiões no conjunto são parecidas com cópias de menor escala de todo o conjunto (uma propriedade chamada auto-similaridade), recebem o nome de Conjunto de Mandelbrot. O trabalho inovador de Mandelbrot vem ganhando força com o uso da computação gráfica, dando espaço a um novo uso dos computadores em Matemática.

Mandelbrot ganhou uma série de prêmios e honrarias. Em 1982, ele se tornou um membro da Academia Americana de Artes e Ciências. Em 1987, entrou para a Academia Nacional de Ciências em 1987. Ele foi agraciado com o Prêmio da Fundação Wolf para Física em 1993 por seu trabalho sobre fractais, e em 2003 dividiu o Prêmio Japão, da Fundação de Ciência e Tecnologia do Japão por "uma contribuição substancial para o avanço da ciência e da tecnologia."

## 1.4 O conjunto de Cantor (Poeira de Cantor)

Como foi supracitado, Georg Cantor foi o fundador da teoria dos conjuntos. Entre muitas de suas contribuições para a Matemática encontra-se uma das primeiras formas fractais.

O fractal chamado Poeira de Cantor é gerada através de sucessivas remoções de partes de uma semirreta de dimensão finita conforme os passos a seguir. Mostraremos a construção dos oito primeiros níveis do fractal Poeira de Cantor.

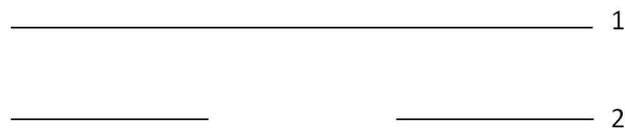


Figura 5 – Primeiro e segundo nível

O primeiro nível, obviamente, é apenas um segmento de reta. E o processo consiste em dividir cada segmento, a partir do nível anterior, em 3 partes iguais, removendo em seguida a parte do meio. Vamos admitir que o segmento inicial tem tamanho 1. No nível 2, temos dois segmentos de tamanho  $1/3$ , totalizando  $2/3$ . Vamos agora analisar os níveis 3 e 4.



Figura 6 – Terceiro e quarto nível

No nível 3, temos 4 segmentos de tamanho  $1/9$ , que representam juntos o tamanho

4/9. Já no nível 4, temos 8 segmentos de comprimento 1/27, o que totaliza o tamanho 8/27.

Esse processo pode ser seguido infinitamente. A Poeira de Cantor é o resultado do que sobra depois de repetir o processo um número infinito de vezes.

Para uma análise mais precisa, podemos representar o processo através de uma tabela, onde descrevemos um número n de interações.

Tabela 1 – Níveis da Poeira de Cantor

Nível	Comprimento de um dos segmentos	Número de segmentos	Comprimento por nível	Comprimento total removido
1	1	1	1	0
2	$\frac{1}{3}$	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	4	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{9}$
4	$\frac{1}{27}$	8	$\frac{8}{27}$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	$2^{n-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2^{n-1}}{3^n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

O comprimento total do segmento inicial fica menor a cada nível. Chamemos de  $\delta$  (delta) a soma das partes removidas a cada nível. O valor de  $\delta$  é dado por:

$$\delta = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \dots$$

Daí

$$\delta = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots \right)$$

Note que a sequência em parêntese é uma PG, de forma que podemos facilmente determinar a soma de seus infinitos termos tal que,

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \dots = 3$$

Com isso, curiosamente, temos que o comprimento total das partes removidas no processo é igual a 1. Sendo assim temos que o comprimento inicial do segmento era 1 e

após infinitas interações removemos um segmento também de comprimento 1, concluímos que após infinitos níveis a poeira de Cantor tem comprimento 0.

Esse fractal serve apenas de demonstração para futuras análises. Deixaremos portanto os próximos fractais para um maior detalhamento nos capítulos que seguem.

## 1.5 A Curva de Koch

1. Inicialmente vamos criar um segmento AB, como mostrado abaixo;



Figura 7 – Nível 1 da Curva de Koch

2. Dividimos esse segmento em três partes iguais com os pontos C e D;



Figura 8 – Nível 2 da Curva de Koch

3. Criamos um triângulo equilátero CDE de base CD, em seguida excluímos esse segmento CD, obtendo assim a figura abaixo;

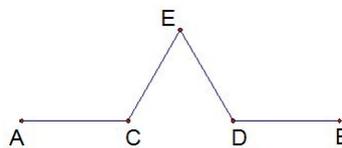


Figura 9 – Nível 3 da Curva de Koch

4. Repetindo os passos 1, 2 e 3 para cada um dos segmentos AC, CE, ED e DB, obtemos a figura abaixo:

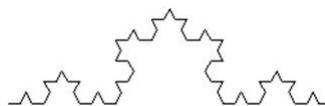


Figura 10 – Nível 4 da Curva de Koch

Esse processo pode seguir infinitamente para cada um dos novos segmentos de reta (lados dos triângulos equiláteros) que se formam. A curva de Koch apresenta uma complexa beleza quando aplicado um grande número de níveis. Um fator ainda mais marcante é o efeito observado quando formamos um triângulo equilátero com três curvas de Koch. Esse caso particular recebe o nome de "Floco de neve de Koch", e podemos observá-lo abaixo:

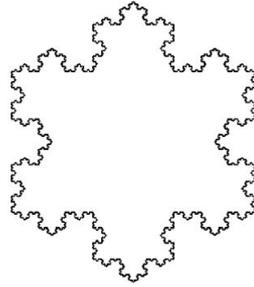


Figura 11 – Floco de neve de Koch.

## 1.6 O triângulo de Sierpinski

1. Inicialmente construímos um triângulo equilátero e marcamos o ponto médio de cada lado. (não necessariamente equilátero, mas para fins didáticos, consideraremos um triângulo equilátero como exemplo)

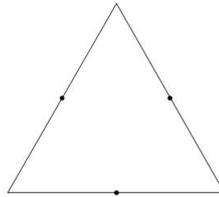


Figura 12 – Nível 1 do Triângulo de Sierpinski

2. Unimos os pontos médios criados na etapa 1 e formamos um novo triângulo. Esse novo triângulo formado pelos pontos médio será excluído da figura, restando assim três outros triângulos, conforme podemos observar abaixo:

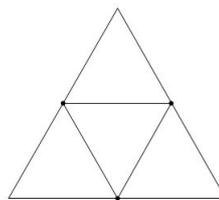


Figura 13 – Nível 2 do Triângulo de Sierpinski

3. Repetimos as etapas 1 e 2 nos três triângulos restantes;

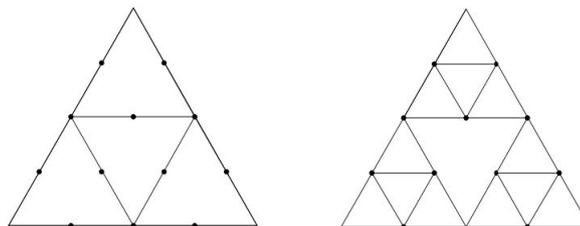


Figura 14 – Níveis 3 e 4 do Triângulo de Sierpinski

4. O processo pode seguir indefinidamente;

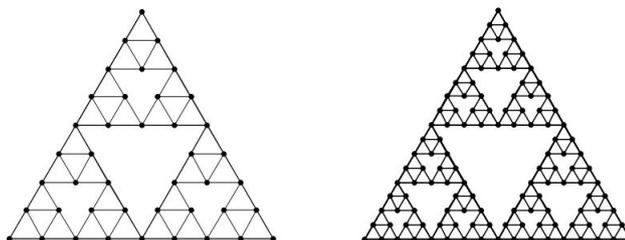


Figura 15 – Níveis 5 e 6 do Triângulo de Sierpinski

Podemos ainda hachurar todos os triângulos apontando para cima nas etapas 3 e 4. É importante notar que neste triângulo, este processo tem infinitas etapas. Além disso, podemos observar que ele é composto de cópias cada vez menores de si mesmo. É a característica de auto-similaridade presente nos fractais.

## 1.7 A presença dos fractais na natureza

A Geometria muitas vezes é cercada de rigor e precisão, é uma ciência inflexível. No entanto a natureza está repleta de incertezas e imprecisões.

Para [GERDES \(1992\)](#), “qualquer que seja a nossa definição de Homo sapiens, ele deve ter tido algumas ideias geométricas, de fato, a Geometria existiria mesmo se não tivesse havido Homines sapientes nenhum”. Formas geométricas aparecem tanto na natureza inanimada, como na vida orgânica. Podemos exemplificar com a construção de um favo de mel, ou teias de aranhas das mais diversas formas e tamanhos.

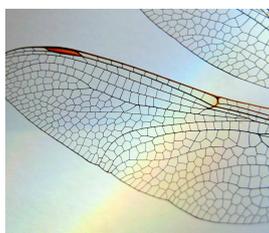
De uma forma geral, muitos padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que para a Geometria tradicional descrever a Geometria da natureza, não é preciso apenas um grau mais elevado, mas um nível completamente diferente de complexidade, a natureza pede outra abordagem. É nesse cenário que entra a Geometria Fractal. Nas últimas décadas, estudiosos estão cada vez mais convencidos da potencialidade dessa nova área da Matemática. Ao observar elementos da natureza nos deparamos com uma infinidade de exemplos onde os fractais parecem ser uma alternativa viável para descrever tais elementos. Segundo [MANDELBROT \(1977\)](#)

Por que a Geometria é frequentemente descrita como “fria” e “seca”? Uma razão repousa em sua inabilidade de descrever a forma de uma nuvem, uma montanha, uma linha costeira ou uma árvore. Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, linhas não são círculos, e uma casca de árvore não é lisa, tampouco um feixe de luz viaja em linha reta. (...) Eu afirmo que muitos dos padrões da Natureza são tão irregulares e fragmentados, que, se comparados com a Geometria tradicional, exibem não somente um grau mais alto, mas um nível de complexidade completamente diferente.

Uma das coisas mais curiosas acerca dos fractais é a frequência em que eles aparecem na natureza. As leis que regem a criação de fractais parecem ser encontradas em todo o mundo natural. Cristais de gelo se formam em formas fractal (o floco de neve de Koch), brócolis crescem com características de fractais, as ramificações dos rios em pequenos afluentes ao desembocar no mar possuem características fractais, até mesmo a distribuição das veias do nosso corpo parecem seguir essas leis. A natureza usa os fractais com tremenda engenhosidade e eficiência. A distribuição dos galhos e folhas de uma planta seguem padrões que permitem maximizar a sua exposição à luz solar, nosso sistema cardiovascular é distribuído de maneira a transportar mais eficientemente o oxigênio para todas as partes do corpo. Os fractais mostram que além de extremamente belos, são extremamente eficiente no tocante a desempenho e eficiência onde quer que apareçam. A natureza dá um show nesse sentido.



(a) Brócolis



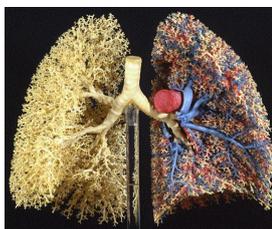
(b) Asas de uma libélula



(c) Cristais de gelo



(d) Galho de uma árvore



(e) Vasos respiratórios



(f) Conchas marinhas

Figura 16 – Fractais na natureza

Mostrar a beleza dos fractais presente na natureza é uma estratégia fundamental para despertar no aluno a curiosidade e aguçar sua visão para identificar os padrões que serão observados na aula de campo, na oportunidade, o aluno interagem com um ambiente fora da sala de aula e tenta ver Matemática onde antes ele ignorava.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# AULA DE CAMPO E COLETA DE AMOSTRAS

As ideias e informações apresentadas neste Capítulo foram baseadas nos trabalhos de [GONÇALVES \(2007\)](#) e [VALE I.; PIMENTEL \(2005\)](#).

A metodologia adotada na aula de campo foi construída em três passos:

1. Escolha do local;
2. Observação dos padrões;
3. Coleta e catalogagem de material.

O trabalho foi desenvolvido na EEM<sup>1</sup> Professor Gabriel Epifânio dos Reis. A escola localiza-se no município de Icapuí-CE, que faz parte da rede de escolas públicas do Estado do Ceará, estando ligada à 10<sup>a</sup> CREDE<sup>2</sup> localizada na cidade de Russas-CE. A proposta de intervenção pedagógica foi apresentada ao Coordenado Pedagógico da escola, o Sr. Francisco Edmilson Fernandes da Silva. Na ocasião, o Sr. Edmilson, que também é professor de Matemática e aluno do PROFMAT, comentou sobre a importância desse tipo de atividade no ambiente escolar: "A ideia é muito boa, acredito que tornar o aluno um protagonista no processo de ensino-aprendizagem sempre traz bons resultados. As aulas de campo motiva o educando e mostra a ele como a Matemática está presente em tudo que nos cerca. A escola Gabriel estará sempre aberta a atividades extra-curriculares que venham a agregar valor à nossas práticas pedagógicas".

---

<sup>1</sup> Escola de Ensino Médio

<sup>2</sup> Coordenadoria Regional de Desenvolvimento da Educação

A sala escolhida para realização do trabalho foi o 3º ano do Ensino Médio da Escola Gabriel, turma D, turno vespertino. A sala é composta por 24 alunos das mais diversas comunidades do município. A ideia inicial era levar os 24 alunos à aula de campo, no entanto, devido a inviabilidade do transporte, juntamos os alunos que possuíam transporte próprio e conseguimos levar à praia um grupo de apenas 7 alunos. Esse grupo ficou incumbido de coletar as amostras e voltar à escola para que toda a turma pudesse participar da atividade.

## 2.1 Local da aula de campo



Figura 17 – Praia de Requenguela

O local escolhido para a aula de campo foi a Praia do Requenguela situada no litoral leste do Ceará no município de Icapuí. A praia é caracterizada por sua faixa de areia escura e por pequenas dunas formadas por resto de carapaças de crustáceos. A escolha do Requenguela como cenário para a aula de campo justifica-se por uma peculiaridade vista em poucos lugares do mundo: o fenômeno do recuo da maré. Por duas vezes ao dia, durante a maré baixa, a praia torna-se uma planície seca. Segundo o geógrafo Arimatéia Silva, que estuda o afastamento do mar do Requenguela: “A área mais alta faz com que, quando a maré recua, haja uma planície muito grande. Ou seja, o lugar fica muito plano e descoberto”. Esse fenômeno possibilita que avancemos mar adentro para investigar com melhor eficiência elementos como conchas e raízes de mangue presentes naquele ecossistema. Moldados por milhares de anos de evolução, muitos seres marinhos desenvolveram formas e texturas com padrões impressionantes. Nosso objetivo será coletar o maior número de imagens possíveis para posterior análise.



Figura 18 – Manguesal onde amostras foram colhidas

Com a maré baixa, entramos no mangue em busca das amostras, inicialmente os alunos apresentaram rejeição, pois como o ambiente é lamacento, não queriam sujar as roupas. Mesmo assim, decidiram se aventurar na busca pelos crustáceos e moluscos.



Figura 19 – Coleta de conchas para estudo

Em poucos instantes, os alunos interagiram com o ambiente tornando a aula de campo bastante vantajosa. Diversas amostras foram rapidamente colhidas. Quanto mais eles se aventuravam mangue adentro, novas descobertas surgiam, novos padrões eram observados, desde a raiz dos mangues à grande diversidade de formas e cores das conchas marinhas.

## 2.2 Observando padrões

Na sua essência, a Matemática é a ciência da regularidade. Seu principal pilar é o estudo dos padrões. Como vimos anteriormente, a natureza está repleta de padrões e, conseqüentemente, é um grande cenário a ser desbravado pelos matemáticos.

Na natureza não é possível encontrar a formação perfeita de um fractal. No mundo real, encontramos padrões que possuem uma característica chamada autossimilaridade aproximada ou autossimilaridade estatística, que pode ser observada, em estruturas que não são fractais exatos mas podem ser descritos por eles, como a estrutura da couve-flor ou do brócolis.

As amostras colhidas foram levadas à escola, onde o restante dos alunos aguardavam o material para análise. Com a ajuda da câmera de um aparelho celular acoplada uma lente, foi possível fotografar detalhes minuciosos das conchas coletadas. Essas imagens foram projetadas em um quadro branco, em seguida os alunos contornaram os traços que identificavam como padrões.



Figura 20 – Reprodução e estudo de padrões geométricos

Na aula de campo, o material coletado apresenta padrões interessantes. Alguns mostram relações sutis com os fractais, mesmo que em partes. Mas, como dito anteriormente, o foco das figuras a serem catalogadas é o despertar para o lado belo da Matemática, servindo assim de gancho para adentrarmos posteriormente no mundo dos famosos fractais e sua inserção como tema transversal no currículo do Ensino Médio nas escolas públicas.

### 2.3 Catalogando as amostras

A maioria das amostras recolhidas trata-se do molusco *Neritina virginea*.<sup>3</sup> Além disso, tivemos exemplares de um molusco bivalve, o *Anomalocardia brasiliana*.<sup>4</sup> Outros exemplares coletados foram crustáceos *Clibanarius vittatus*, conhecidos na região por "catapu", ou mais popularmente ermitão.<sup>5</sup>

O principal objetivo na coleta e observação de objetos da natureza não é encontrar exatamente elementos que possam ser representados pelos fractais. Na verdade, o foco é despertar no aluno o senso estético da Matemática, levando-o a um mundo de descobertas e curiosidades. Para [BARBOSA \(2005\)](#),

“o despertar e desenvolver do senso estético pode muito bem ser cuidado e aproveitado com o tema fractais, quer apreciando o belo irradiante, quer observando a regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades”.(2005, p. 14).

<sup>3</sup> Ocorre em quase toda a costa do Brasil. Ampla variedade de cores e texturas.

<sup>4</sup> Molusco da família dos venerídeos

<sup>5</sup> Crustáceos decápodes encontrado em todo o litoral brasileiro

As imagens abaixo catalogadas mostram uma grande variedade de padrões geométricos bidimensionais e tridimensionais. Alguns apresentam um grau de autossimilaridade, muito embora, nesse momento, esse não seja o foco central da análise.



Figura 21 – Amostras coletadas na aula de campo

A observação desses padrões serviram de elemento motivador para o passo seguinte que é a construção de alguns fractais usando o GeoGebra. A aula de campo veio mostrar como simples objetos podem ser explorados para despertar um olhar curioso do aluno sobre determinado tema. Essa curiosidade certamente será um combustível para a busca do conhecimento.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

# CONSTRUÇÃO DE FRACTAIS NO GEOGEBRA E ANÁLISE DE ATIVIDADES PROPOSTAS

O estudo dos padrões instiga a investigação das formas fractais. O passo seguinte é construir alguns dos mais conhecidos fractais e investigar a fundo elementos matemáticos ocultos nessas figuras. Porém, nem sempre é viável a construção manual de alguns fractais, o trabalho com régua e compasso pode ser uma atividade trabalhosa, exigindo tempo e precisão de medidas. Existem ferramentas mais eficientes na construção desses objetos, dentre as quais, podemos destacar a utilização de recursos computacionais. Historicamente o estudo dos fractais está ligado ao uso dos computadores. O próprio Mandelbrot, “pai dos fractais”, fez suas primeiras considerações acerca do assunto ao estudar a propagação de um ruído num sistema de telefonia em rede. Além disso, antes dele o meteorologista Edward Lorenz já havia feito ensaios em simulações de computador com comportamentos até então anômalos em um grupo de dados.

No tocante à questão didática, os softwares educacionais possibilitam além de tudo uma inserção dos alunos às novas tecnologias. É preciso vencer as barreiras que separam as TICs do processo de ensino e aprendizagem. É comum notarmos escolas munidas de computadores que tonam-se meros adereços tecnológicos em total desuso.

Segundo VALENTE (1998), para que ocorra a implantação do uso do computador na educação são necessários, basicamente, quatro ingredientes: o computador, o software educativo, o professor capacitado para usar o computador como meio educacional e o aluno

É certo que a resistência de alguns professores ao uso dos computadores nas aulas de Matemática tem desfavorecido a mudança desse quadro, mas em muitos casos a falta de capacitação profissional e suporte pedagógico impossibilitam essa interação professor-computador-aluno.

A utilização do computador na aula de Matemática, em especial no estudo dos fractais, é um forte aliado na busca por uma Matemática mais atrativa e dinâmica. Uma Matemática viva.

Uma grande ferramenta na exploração dos fractais é o software livre GeoGebra. O programa é destaque pedagógico pela simplicidade de manuseio e facilidade para aquisição, tanto na plataforma Linux<sup>1</sup> como em Windows.

Utilizando o GeoGebra, vamos construir três importantes e históricos fractais: a curva de Koch, o Triângulo de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras. Em seguida, vamos utilizar o software para construir novos fractais baseados na característica de auto-similaridade.

Iniciamos os estudos sobre esses fractais com o guia de construção para o GeoGebra, em seguida, em cada um deles, lançamos uma atividade exploratória onde o aluno pode investigar os elementos matemáticos presentes nesta figura. Depois, no Capítulo 4, em uma análise mais profunda, faremos uma listagem de alguns aspectos interessantes e propostas de investigação, além de responder às indagações levantadas pela atividade proposta ao aluno.

Veremos como os fractais possibilitam o surgimento de temas<sup>2</sup> que compõem a grade curricular de Matemática no Ensino Médio, criando um novo cenário com o auxílio do computador. Além disso, o caráter prático das atividades propostas abre portas para a introdução de temas esquecidos pelos livros didáticos atuais, a exemplo, as Recorrências Lineares de Primeira Ordem.

Como parte da metodologia do trabalho, após a coleta e observação das amostras e construção dos fractais com o GeoGebra, os 24 alunos da turma foram divididos em 4 grupos de 6 pessoas cada. Os grupos receberam as Atividades 1, 2 e 3, (Anexo A), (Anexo B), (Anexo C), respectivamente. As atividades propostas possibilitam o "feedback" que possa constar que impactos a observação e construção dos fractais tiveram sobre a aprendizagem do aluno.

---

<sup>1</sup> O Linux Educacional é um Sistema Operacional livre distribuído às escolas pelo Ministério da Educação (MEC)

<sup>2</sup> Progressões Geométricas, Análise Combinatória, Noções de Geometria Plana, entre outros

## 3.1 Entendendo o GeoGebra

Os métodos tradicionais de ensino e aprendizagem ainda são dominantes no Brasil. A capacitação profissional na prática pedagógica mais moderna no ensino de Matemática é um desafio a ser cumprido. Muitas escolas brasileiras dispõem de computadores (mesmo que ultrapassados) que podem ser usados como ferramenta de ensino-aprendizagem. No entanto, são poucos os professores devidamente instruídos a fazer uso deste material.

Dentre os softwares educacionais existentes, podemos destacar o GeoGebra. Essa importante ferramenta é um software de Matemática Dinâmica para uso pedagógico que une Geometria e Álgebra. Uma das principais vantagens no uso do GeoGebra é a possibilidade de professores e alunos trabalharem em um ambiente de Geometria interativo. É possível fazer construções com pontos, vetores, segmentos, retas, círculos e polígonos em geral, bem como funções, podendo ainda mudá-las dinamicamente e plotar gráficos interativos. É um ambiente riquíssimo a ser explorado por educadores e educandos.

Segundo Piaget, a construção do conhecimento sugere uma reflexão seguida pelas observações e a atuações do indivíduo, o conhecimento é fruto de suas vivências, e através destas vivências é que o indivíduo desenvolve sua lógica e percepção. Com o caráter prático predominante no GeoGebra, é possível desenvolver um ambiente de ensino-aprendizagem mais propício a obter êxito.

A Matemática deve ser mediada, não simplesmente por modelos obsoletos, que não contribuem de modo significativo para o desenvolvimento e transformação do indivíduo, mas por metodologias alternativas em que o ser em formação vivencie novos processos educacionais, que façam sentido e tenham relação com os seus significados e valores. Sem uma Educação Matemática, com qualidade, o jovem, futuro professor, talvez não tenha oportunidades de crescer no saber matemático, saber esse, importante para sua qualificação profissional em qualquer área. (MISKULIN, 1999)

O Software é simples e autoexplicativo. Ele é gratuito e está disponível<sup>3</sup> para as plataformas Windows e Linux, e em 2013 foi lançada a versão para dispositivos móveis em Android e IOS.

Para efeito deste texto, listaremos apenas as ferramentas que serão usadas nas construções que seguem. Porém, qualquer usuário que pretende utilizar outras ferramentas, não enfrentará maiores obstáculos.

### 3.1.1 Interface de usuário do GeoGebra

No Menu você encontra configurações mais gerais. Como ajustar os elementos que serão exibidos, abrir e salvar arquivos, inserir imagens, configurar idiomas, criação de

<sup>3</sup> [http://www.GeoGebra.org/cms/pt\\_BR/download/](http://www.GeoGebra.org/cms/pt_BR/download/)

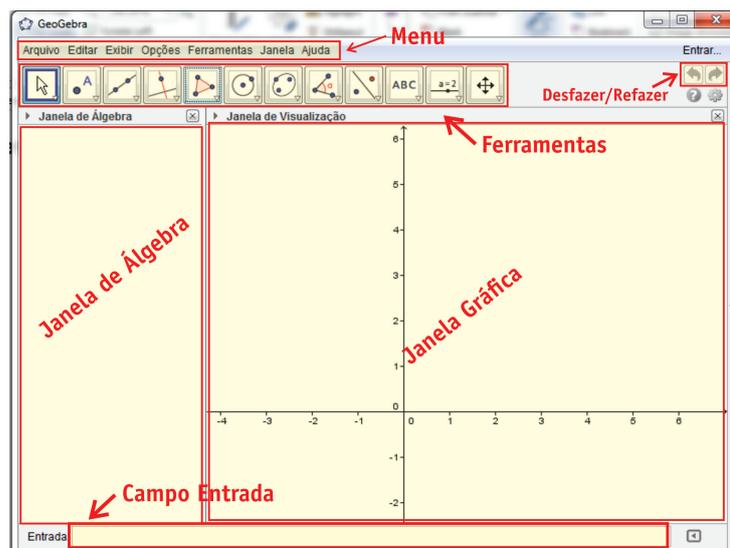


Figura 22 – A Interface do usuário

novas ferramentas, guia de ajuda entre outras funcionalidades.

A Janela Gráfica ou Janela de visualização, é onde as construções geométricas podem ser visualizadas. É a área de criação livre do programa, onde você pode interagir com os elementos matemáticos já criados além de ter liberdade para inserir pontos, retas, círculo e outras figuras.

A Janela de Álgebra lista os elementos presentes na construção, tais como pontos, retas, listas, vetores entre outros. É um espaço destinado a organizar os elementos matemáticos utilizados na construção.

O Campo Entrada possibilita entrar diretamente com um comando algébrico que resultará na apresentação do mesmo na Janela Gráfica. É um dos mais importantes espaços do programa, visto que algumas vezes, a construção utilizando apenas a Janela Gráfica pode ser inviável. O Campo Entrada possibilita uma maior precisão nas construções desejadas.

Você pode ainda corrigir algum processo indevido utilizando os botões Desfazer/Refazer.

Na tabela que segue, apresentamos as principais ferramentas que usaremos nas construções aqui propostas.

Tabela 2 – Ferramentas que serão usados neste trabalho

Ícone	Nome da Ferramenta	Descrição
	Mover	Arraste ou selecione um ou mais objetos.
	Ponto	Clique na Janela de Visualização ou sobre um objeto.
	Ponto Médio	Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica.
	Interseção de Dois Objetos	Selecione dois objetos ou clique diretamente sobre a interseção.
	Segmento	Selecione dois pontos.
	Semicírculo Definido por Dois Pontos	Selecione dois pontos.
	Ângulo com amplitude fixa	Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo.
	Polígono	Selecione todos os vértices e, então, clique no vértice inicial.
	Polígono Regular	Selecione primeiro dois pontos e, depois, digite o número de vértices.
	Reflexão em Relação a uma Reta	Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão.
	Homotetia	Selecione o objeto, depois o centro e, então, a razão de homotetia.
	Controle Deslizante	Clique na Janela de Visualização para especificar a posição do Controle Deslizante.
	Mover Janela de Visualização	Arraste a Janela de Visualização ou um eixo (Shift + Arrastar).

### 3.1.2 Criar uma Nova Ferramenta

Uma das principais utilizações do GeoGebra na criação de Fractais é a criação de ferramentas personalizadas. Com essa função, é possível automatizar um processo evitando a repetição sucessiva de tarefas.

Indo no menu Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta, uma nova janela se abre onde você pode configurar as características da nova ferramenta.

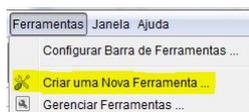


Figura 23 – A Interface do usuário

A nova janela tem três abas. Em Objetos Finais, você deve selecionar os objetos que devem aparecer ao fazer uso da nova ferramenta. Em Objetos Iniciais, você define que objeto deve ser acionado para que os objetos selecionados no passo anterior surjam na Janela de Visualização. Na aba Nome e Ícone é possível dar Nome e descrição à nova ferramenta.

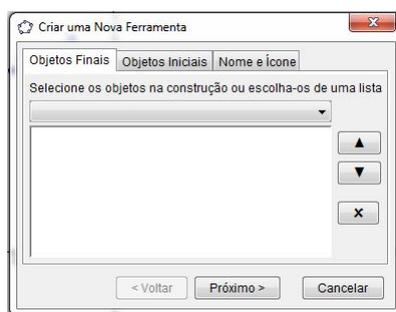


Figura 24 – A Interface do usuário

Durante o processo de construção que se segue será possível compreender com maiores detalhes a utilização desta ferramenta.

## 3.2 A Curva e Koch

Na Seção 1.5, detalhamos a construção da curva de Koch. Na ocasião, foi possível perceber que as três primeiras etapas se repetem indefinidamente gerando o fractal em questão. Vamos agora construir a curva de Koch utilizando o software GeoGebra. O processo consiste em: dado um segmento  $AB$ , construir sobre a terça parte central desse seguimento um triângulo equilátero, em seguida remover essa terça parte. O processo se repete para cada novo segmento gerado.

1. Abra o GeoGebra e determine os pontos  $A$  e  $B$  em qualquer posição no plano (preferencialmente com o segmento  $\overline{AB}$  na horizontal). Em seguida no campo Entrada

digite  $A + (B - A)/3$ , dê um enter, depois digite  $A + 2 * (B - A)/3$  e dê um enter novamente. Isso dividirá o seguimento  $\overline{AB}$  em três partes iguais.

Entrada:  $A+2*(B-A)/3$

Figura 25 – Insere o ponto  $C$  a  $1/3$  de  $A$  no segmento  $\overline{AB}$

- Com a ferramenta Polígono Regular construa um triângulo equilátero de base  $CD$ , obtendo assim o ponto  $E$  desejado.

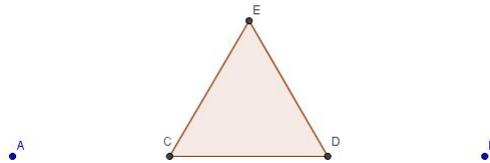


Figura 26 – Obtenção do ponto  $E$

Agora vamos iniciar a criação de uma nova ferramenta que facilitará a construção do fractal.

- Crie uma Lista digitando  $v = \{A, C, E, D, B\}$  no campo Entrada.
- No menu Ferramentas, vá em Criar uma Nova Ferramenta. Selecione como Objeto Final a lista criada no passo 3, Objeto Inicial Ponto  $A$  e Ponto  $B$  e dê o nome CurvaDeKoch a essa nova Ferramenta. Com a Ferramenta CurvaDeKoch criada, delete todos os elementos da Janela de Visualização e da Janela de Álgebra, depois exiba a planilha indo no menu Exibir.
- Na célula  $A1$  da Planilha, digite o ponto  $(0, 0)$  e em  $B1$  digite  $(6, 0)$ .

Planilha			
	A	B	C
1	(0, 0)	(6, 0)	
2			

Figura 27 – Janela Planilha

- Na célula  $A2$  digite o comando:

`CurvaDeKoch[A1,B1]`

- Na célula  $B2$  digite o comando:

`Sequência[Segmento[Elemento[A2,i],Elemento[A2,i+1]],i,1,Comprimento[A2]-1]`



Figura 28 – Segundo nível da Curva de Koch

8. Na célula  $A3$  digite o comando:

```
Concatenar[Sequência[CurvaDeKoch[Elemento[A2,i],Elemento[A2,i+1]]
,i,1,Comprimento[A2]-1]]
```

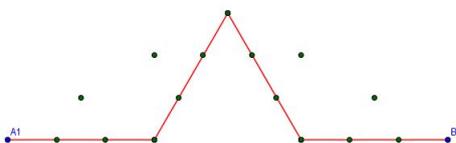


Figura 29 – A cada novo seguimento foi aplicado a Ferramenta CurvaDeKoch

9. Repita o comando da célula  $B2$  para a célula  $B3$  clicando e arrastando o canto inferior direito da célula  $B2$ .
10. Em seguida arraste os comandos da célula  $A3$  até  $A6$  e de  $B3$  até  $B6$  utilizando o mesmo procedimento do item 9.
11. Oculte os pontos criados selecionando as células  $A2$  até  $A6$ , clique direito do mouse, propriedades > Exibir Objetos.
12. No botão controle deslizante crie um seletor  $n$  variando de 0 a 5 com incremento 1.

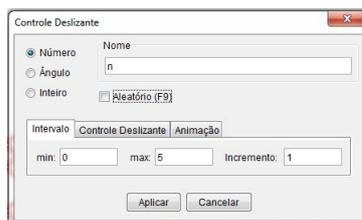


Figura 30 – Configurações do Controle deslizante

13. Na planilha, clique em  $B2$  com o botão direito do mouse e vá em propriedades. Na aba Avançado digite  $n == 1$  e dê enter. Repita para  $B3$  com  $n == 2$ ;  $B4$  com  $n == 3$ ;  $B5$  com  $n == 4$  e  $B6$  com  $n == 5$ .
14. Deixe o controle deslizante em  $n = 0$ . Com a ferramenta Segmento Definido por Dois Pontos, crie o segmento  $AB$ , dê um clique direito sobre ele, abra a janela propriedades, desmarque Rótulo e na aba Avançado digite  $n == 0$ .



Figura 31 – Configurações de condição lógica para exibição dos níveis

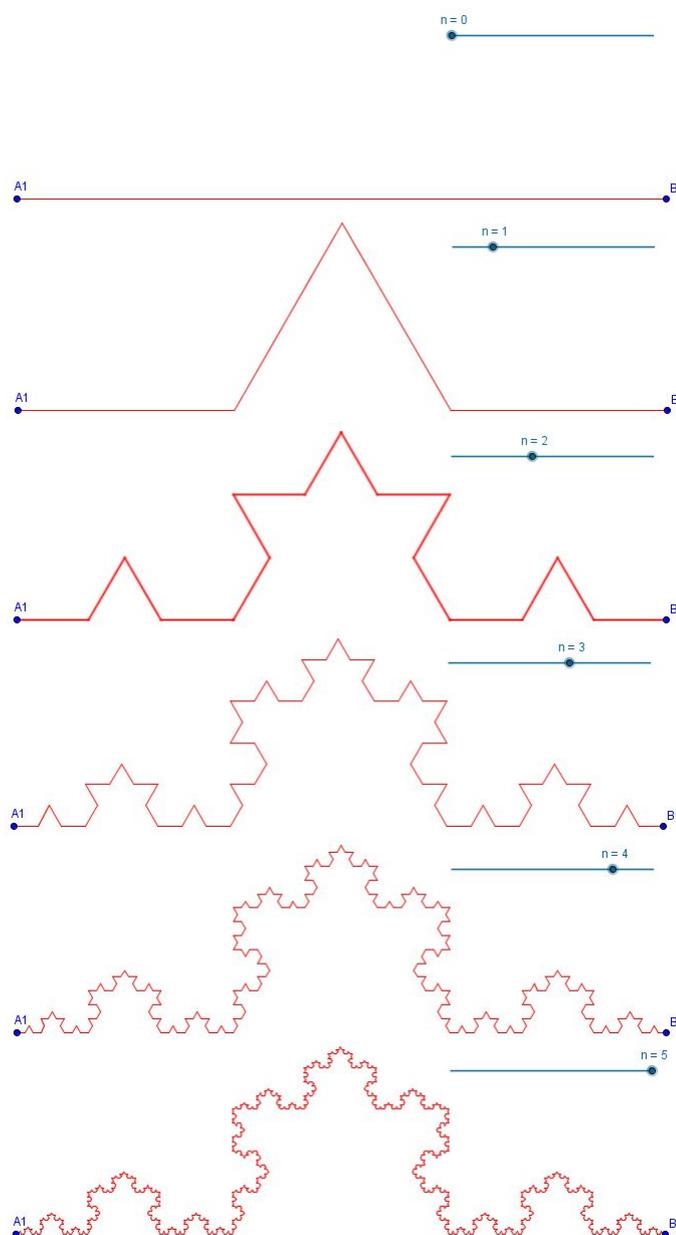


Figura 32 – Os 6 níveis construídos no processo

A curva de Koch foi criada de forma interativa e animada. Agora resta explorar suas propriedades. Com esse objetivo, propomos a seguinte atividade.

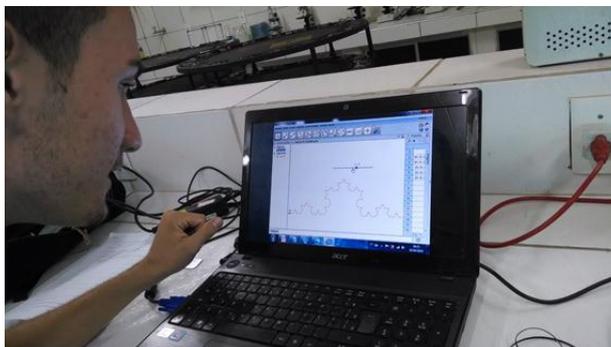


Figura 33 – Construção da curva de Koch no GeoGebra

Após a construção do fractal, propomos a Atividade 1 (Anexo A). Os resultados obtidos com a aplicação da atividade serão avaliados na Seção 3.6.

### 3.3 O Triângulo de Sierpinski

1. Abra o GeoGebra. Com a ferramenta Polígono Regular crie um triângulo equilátero de base na horizontal.
2. Com a ferramenta Ponto Médio clique em cada lado do triângulo gerando os pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ . Em seguida, com a ferramenta Polígono, crie o triângulo  $DEF$ .

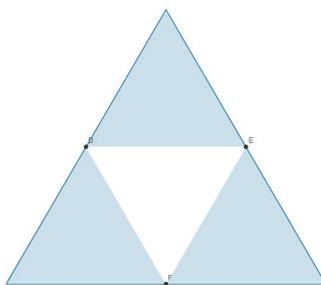


Figura 34 – Primeiro nível do Triângulo de Sierpinski

3. Dê um clique direito sobre o triângulo maior e vá em propriedades. Mude a cor para uma de sua preferência. Aumente a transparência do triângulo menor para destacá-lo na figura.
4. Clique com o botão direito sobre a Janela de Álgebra e selecione Objetos Auxiliares, para exibir todos os objetos da construção. Depois oculte os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
5. Com a ferramenta Reflexão em Relação a uma Reta, crie os pontos  $D'$ ,  $E'$  e  $F'$ , simétricos dos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$  em relação às retas  $d$ ,  $e$ ,  $f$ , respectivamente.

6. Com a ferramenta Homotetia, clique no triângulo central, depois no ponto  $D'$  digite 0.5 como fator de homotetia. Repita o mesmo para os pontos  $E'$  e  $F'$ . Em seguida oculte todos os pontos.

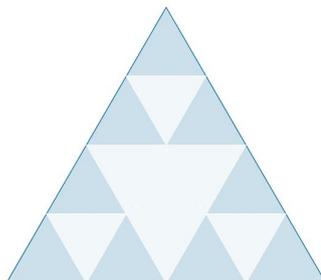


Figura 35 – Segundo nível do Triângulo de Sierpinski

7. No menu, vá em Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta. Na nova janela, em Objetos Finais, selecione 'Triângulo pol2'. Em Objeto Inicial, selecione Triângulo pol2: Polígono  $D, E, F$ . Em Nome do Ícone, chame a nova ferramenta de S1, clique em Concluir. Repita o mesmo processo para triângulos pol2'1 e pol2'2 dado os nome S2 e S3, respectivamente, às ferramentas.

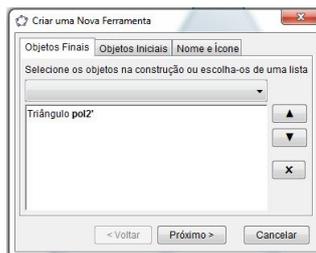


Figura 36 – Configurações da nova ferramenta denominada Sierpinski

8. No campo entrada, crie uma nova lista digitando  $L_1 = \{pol2\}$ .
9. No campo entrada digite o seguinte comando:

$$L_2 = \text{Concatenar}[\text{Sequência}[S1[\text{Elemento}[L_1, i]], i, 1, \text{Comprimento}[L_1]], \text{Sequência}[S2[\text{Elemento}[L_1, i]], i, 1, \text{Comprimento}[L_1]], \text{Sequência}[S3[\text{Elemento}[L_1, i]], i, 1, \text{Comprimento}[L_1]]]$$

10. Digite novamente o código do passo 9 substituindo  $L_2$  por  $L_3$  e  $L_1$  por  $L_2$ . Em seguida repita a substituição até construir 7 listas.
11. Crie um controle deslizante  $n$  com um intervalo variando de 1 a 7 e incremento 1.
12. Clique com o botão direito na Lista 1, vá em propriedades. Na aba Avançado, digite  $n \geq 1$  e dê enter. Repita o processo para as demais listas para criar a condição lógica de exibição de cada nível do Triângulo de Sierpinski.

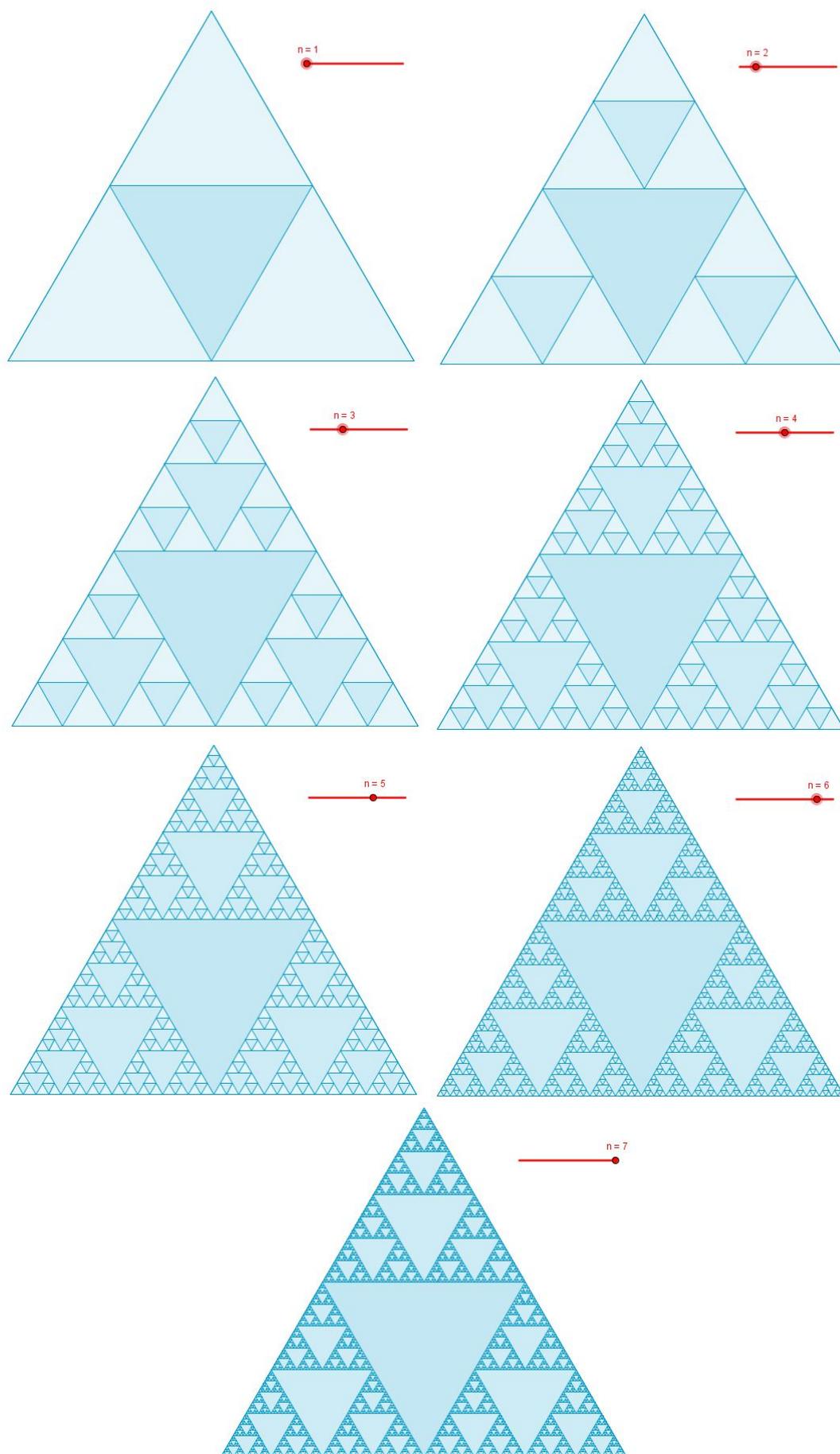


Figura 37 – Sete níveis construídos no processo

O Triângulo de Sierpinski foi criado de forma interativa e animado. Agora resta explorar suas propriedades.



Figura 38 – Conclusão do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra

Após a construção do fractal, propomos a Atividade 2 (Anexo B). Os resultados obtidos com a aplicação da atividade serão avaliados na Seção 3.6.

### 3.4 A Árvore de Pitágoras

A Árvore de Pitágoras, também conhecida como Hipertexto Pitágoras, é um famoso fractal que tem como base a conhecida figura do triângulo retângulo com quadrados construídos em cada um dos seus lados. O motivo do nome vem do histórico Teorema de Pitágoras, estudado desde o ensino fundamental até o mais alto nível acadêmico. O fractal foi construída pela primeira vez em 1942 pelo matemático alemão Albert Bosnam. Trata-se de uma sequência simples de interações que leva à construção de um dos mais belos fractais conhecidos.

A Árvore de Pitágoras corresponde a uma construção que consta dos seguintes passos:

1. Construa um quadrado,
2. Usando como base o lados de cima deste quadrado, construa um triângulo retângulo tendo como hipotenusa a base;
3. Em seguida, nos dois catetos restantes do triângulo, construa dois novos quadrados cujos lados são exatamente os catetos;
4. A partir daqui repita os 3 passos anteriores para os dois novos quadrados.

Seguindo os passos acima, você terá a seguinte imagem:

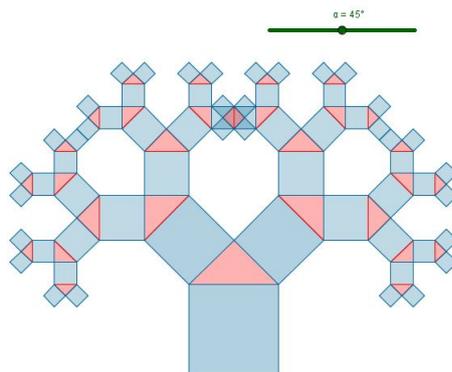


Figura 39 – Árvore de Pitágoras

Assim como outros fractais vistos anteriormente, construir esta figura utilizando apenas ferramentas convencionais, tais como régua e compasso, pode ser uma tarefa árdua, limitando nosso trabalho a um pequeno número de interações. Portanto, propomos mais uma intervenção do software GeoGebra visando uma maior interatividade e melhor manuseio do aluno.

Vamos à construção:

1. Abra o GeoGebra e com a ferramenta Segmento construa um segmento de reta horizontal  $AB$ .
2. Com a ferramenta Semicírculo Definido por Dois Pontos construa um semicírculo de diâmetro  $AB$ .
3. Crie um Controle Deslizante com a variável ângulo, min:  $0^\circ$ , max:  $90^\circ$  e Incremento  $1^\circ$ . Chame-o de  $\alpha$ .



Figura 40 – Configurações do controle deslizante

4. Com a ferramenta Ângulo com Amplitude Fixa, clique no ponto  $B$  em seguida no ponto  $A$ , marque sentido anti-horário e clique no ícone do final do campo que abrirá e escolha  $\alpha$ . Você já pode apagar na janela de álgebra o ângulo  $\beta$  que foi criado.

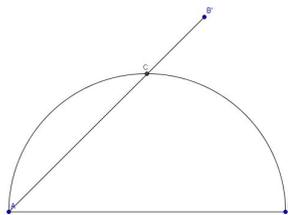


Figura 41 – Base para construção do triângulo retângulo

5. Com a ferramenta Segmento, defina o seguimento de  $A$  até o novo ponto que foi criado. Em seguida, com a ferramenta Intersetção de Dois Objetos clique no semicírculo e depois no segmento criado no passo 3. Por fim, oculte o semicírculo, o ponto e o segmento criados no passo 3.
6. Temos até aqui os três pontos que forma um triângulo equilátero de hipotenusa  $AB$ . Com a ferramenta Polígono crie esse triângulo.
7. Com a ferramenta Polígono Regular, crie quadrados nos lados dos triângulos, sempre seguindo os vértices no sentido horário.

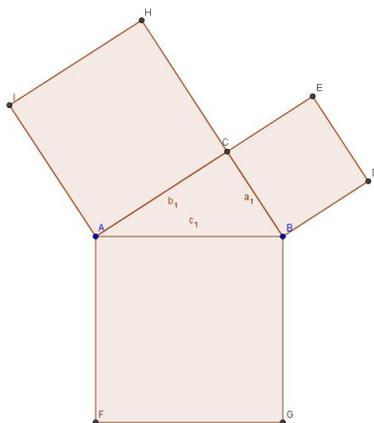


Figura 42 – Primeiro nível da Árvore de Pitágoras

8. Com a ferramenta Seleção, selecione os itens conforme a figura abaixo e segurando o Ctrl desmarque os pontos  $A$  e  $B$  na Janela de Álgebra.

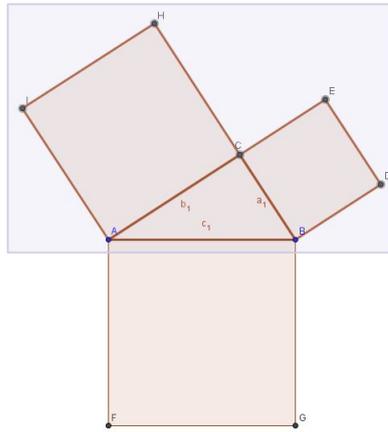
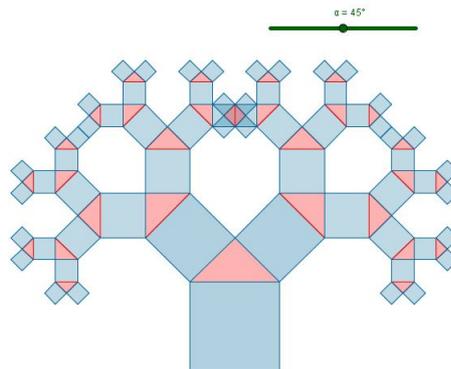


Figura 43 – Criação da ferramenta Pitágoras

9. Ainda com os item selecionados, vá no menu Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta. Não mude nada, apenas renomeie a nova ferramenta para Pitágoras.
10. Agora, para criar novos níveis no fractal, basta selecionar um dos vértices do quadrados gerados pelos catetos e depois o outro vértice adjacente (no sentido horário). Nesse momento forma-se, em cada cateto, um novo conjunto de triângulo retângulo e dois quadrados. Note que ao clicar em dois pontos, uma janela abrirá solicitando um ângulo, coloque  $\alpha$ .
11. Faça um total de 5 interações, oculte os pontos e rótulos, muda a cor conforme sua preferência. Mova o controle deslizante para ver a influência do ângulo no fractal.

Figura 44 – Árvore de Pitágoras no nível 5 a um ângulo de  $45^\circ$  (Árvore Simétrica de Pitágoras)

A árvore pode assumir diversas aparências conforme os ângulos dos triângulos que a compõem.

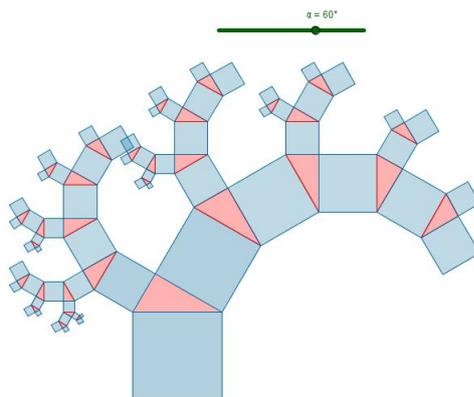


Figura 45 – Árvore de Pitágoras no nível 5 a um ângulo de  $60^\circ$

Após a construção do fractal, propomos a Atividade 3 (Anexo C). Os resultados obtidos com a aplicação da atividade serão avaliados na Seção 3.6.

### 3.5 Criando novos Fractais

O ambiente GeoGebra possibilita a criação de uma infinidade de fractais. Nesse processo, a opção Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta ganha um grande destaque. Através dessa funcionalidade, o aluno pode expressar sua criatividade criando belas imagens a partir de figura simples. É possível automatizar os níveis de interação de cada fractal, como fizemos nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4, porém, esse processo nem sempre é viável, pois requer um conhecimento mais avançado de ferramentas como Sequências. Consideramos então que para efeitos didáticos, como a construção é nosso foco principal, a criação de uma nova ferramenta é suficiente para atingir o objetivo em questão.

Vamos utilizar um exemplo para mostrar a criação de uma ferramenta de replicação.

1. Abra o GeoGebra e com a ferramenta Polígono Regular construa um quadrado, depois, usando o lado de cima do quadrado como base, com a mesma ferramenta, construa um triângulo equilátero.
2. Em seguida, com a ferramenta Ponto Médio crie os pontos médios dos lados laterais do triângulo.
3. Novamente com a ferramenta Polígono Regular, construa dois quadrados usando como base a metade dos lados do triângulo equilátero. Repita a construção do triângulo equilátero usando como base os lados dos quadrados paralelos aos triângulos equiláteros construídos por último. Nesse momento sua figura deve está assim:

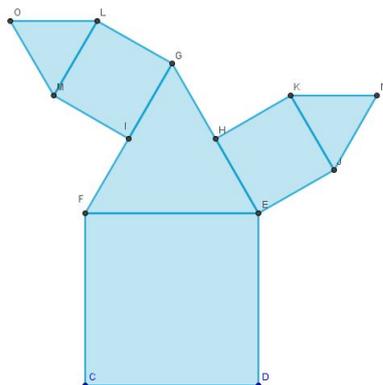


Figura 46 – Primeira etapa da construção do novo Fractal

- Vá ao menu Ferramentas > Criar uma Nova Ferramenta. Em Objetos Finais, selecione pol3, pol4, pol5, pol6. Em Objetos Iniciais selecione pol2. Dê o nome Fractal à nova ferramenta e clique em Concluir.

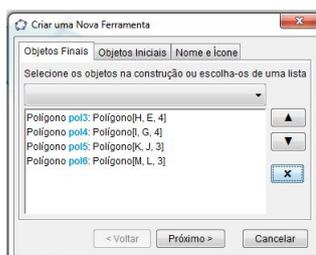


Figura 47 – Configurações da nova ferramenta

- Selecione a Ferramenta criada e clique nos triângulos menores da figura. Agora basta clicar nos novos triângulos que surgirão para construir o Fractal com um número qualquer de interações.

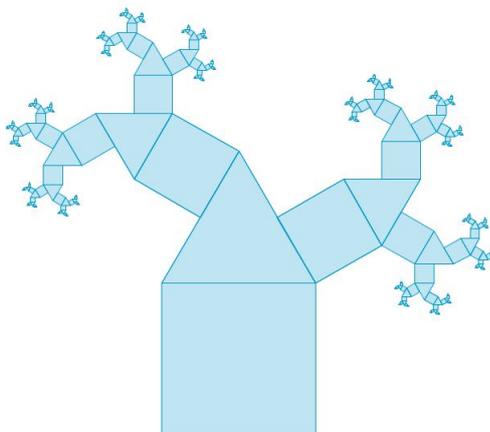


Figura 48 – Fractal no nível 6 de interação

A construção de novos fractais ancora o conceito de autossimilaridade presente nesses elementos. Essa fixação de conceitos é importante para a exploração da Matemática dos

fractais. Além disso, com a construção de novas figuras o aluno fica livre para desenvolver a sua criatividade despertando nele a vontade de aprender.

### 3.6 Análise das atividades propostas

As atividades propostas visavam obter uma respostas sobre o que o aluno havia absorvido durante a aula de campo e construção dos fractais no GeoGebra. As três atividades apresentavam características similares. As competências e habilidades exigidas são equivalentes. Observamos que os grupos de alunos apresentaram facilidade no preenchimento das primeiras linhas das Tabelas 6, 7 e 8. No entanto, conforme o número de interações de cada fractal crescia, ficava cada vez mais complicada a obtenção dos resultados, nesse momento, fez-se necessário a intervenção do professor como suporte na realização da atividade.

Nenhum dos grupos conseguiu sozinho chegar a generalizar o resultado de uma das colunas nas tabelas. Consideramos que o grau de abstração da atividade foi elevado para que, em apenas uma aula, os alunos conseguissem atingir essa meta. No entanto, vale destacar que 3 dos 6 grupos conseguiram perceber que algumas sequências se tratavam de Progressões Geométricas, no entanto, por serem alunos do 3º ano do Ensino Médio, não lembravam das fórmulas do termo geral, entre outras características desse tipo de sequência. Nesse momento, com a ajuda do professor, foi possível generalizar os resultados.

Notamos ainda que grande parte dos alunos conseguiu interligar conteúdos de séries anteriores. Expressões do tipo "eu estudei isso no ano passado (referindo-se às Progressões Geométricas)" podiam ser ouvidas nos diálogos dentro dos grupos.

A parte de Geometria Plana também foi um obstáculo para os alunos. Perguntas sobre perímetro e principalmente área de triângulos e quadrados mostravam a dificuldade dos alunos em relação a conceitos elementares da Geometria Plana, grande parte deles não lembravam conceitos, tampouco fórmulas. No entanto, com uma breve explanação sobre o assunto por parte do professor, os grupos conseguiram desenvolver satisfatoriamente algumas das atividades propostas.

Conceitos novos, como as Recorrências Lineares de Primeira Ordem foram bem aceitos, os alunos conseguiram assimilar a ideia do pensamento recursivo, o que ajudou na resolução das atividades.

Consideramos então que o as atividades propostas foram proveitosas, sobretudo por levar os alunos a desenvolver o raciocínio lógico e rever conteúdos trabalhados em séries anteriores. Mesmo diante da complexidade e nível de abstração de alguns elementos estudados, os resultados obtidos mostram que é perfeitamente possível introduzir o conceito de fractal no Ensino Médio e extrair dele conteúdos como Progressões, Geometria Plana,

Combinatória, entre outros. Basta que para isso o professor use a criatividade e consiga atrair o aluno para o fantástico mundo dos fractais.

---

---

## CAPÍTULO 4

---

# EXPLORANDO A MATEMÁTICA DOS FRACTAIS NO ENSINO MÉDIO

Os fractais estão repletos de elementos matemáticos interessantes, que podem ser explorados sem muita dificuldade pelos alunos do Ensino Médio. Para facilitar o estudo, vamos analisar as principais características Matemáticas de três dos mais conhecidos fractais: o Floco de Neve de Koch, Triângulo de Sierpinski e a Árvore de Pitágoras. Dentre os elementos, escolhemos investigar número de lados, o perímetro e a área de cada figura. Veremos como uma postura investigativa nos levará a tópicos de Matemática do Ensino Médio como Progressões Geométricas, Análise Combinatória, noções de Geometria Plana e um tema pouco conhecido, mas não menos importante, as Recorrências Lineares de Primeira Ordem.

### 4.1 O Floco de Neve de Koch

Na Seção 1.5, detalhamos a construção da curva de Koch e na Seção 3.2 a construímos no Ambiente de aprendizagem GeoGebra. Na ocasião, mencionamos a possibilidade de construir um triângulo usando como lados três curvas de Koch. Essa nova figura é chamada de Floco de Neve de Koch. Vamos agora analisar, sob uma perspectiva mais Matemática, alguns elementos envolvidos neste famoso fractal.

#### 4.1.1 Número de lados

Para determinar o número de lados, vamos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (Princípio Multiplicativo). Definido por [Morgado J.B.P. Carvalho \(1991\)](#) da

seguinte forma:

Se uma decisão  $d_1$  pode ser tomada de  $x$  maneiras e se, uma vez tomada a decisão  $d_1$ , a decisão  $d_2$  puder ser tomada de  $y$  maneiras então o número total de maneiras de tornarem as decisões  $d_1$  e  $d_2$  é  $xy$ . (MORGADO J.B.P. CARVALHO, 1991)

Vamos analisar nível por nível, no entanto, consideraremos apenas um dos lados, pois, em virtude da simetria do fractal, podemos, ao final, multiplicar o resultado obtido por 3.

Começamos com um segmento.

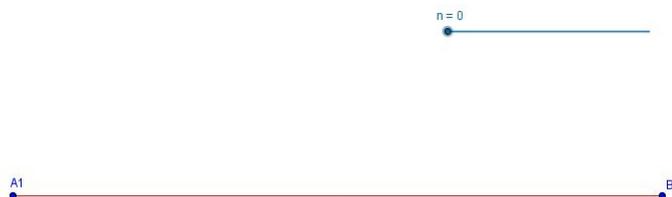


Figura 49 – Fractal no nível 0 de interação

Em seguida, no nível 1, dividimos o segmento inicial em 3 partes iguais, extraímos a central e construímos um triângulo equilátero sem a base no centro do segmento. Temos agora um total de 4 segmentos

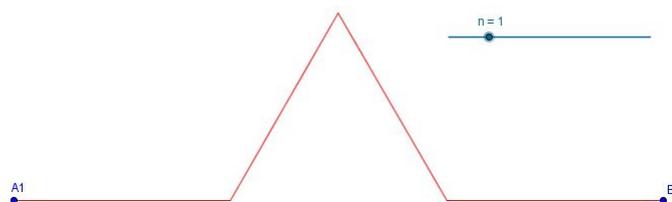


Figura 50 – Fractal no nível 1 de interação

No nível 2, cada segmento obtido no nível 1 foi novamente dividido em três novos segmentos, extraído a parte central e construído um novo segmento. Como resultado, para cada segmento do nível 1, temos outros 4 segmentos. Pelo princípio multiplicativo temos  $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$  segmentos.

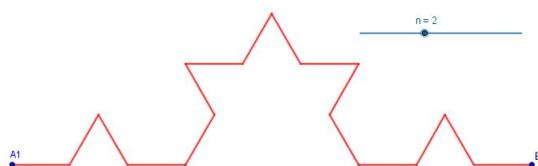


Figura 51 – Fractal no nível 2 de interação

No nível 3, seguindo o mesmo raciocínio, temos que para cada um dos 16 segmentos do nível 2, 4 novos segmentos se formam. Pelo mesmo Princípio Multiplicativo temos  $4 \cdot 16 = 4^3 = 64$  novos segmentos.

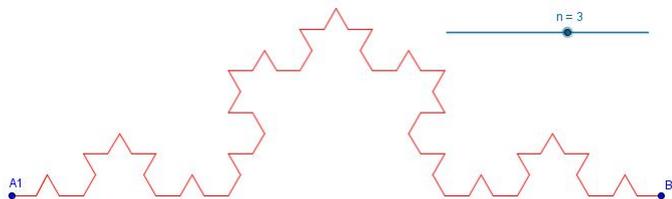


Figura 52 – Fractal no nível 3 de interação

Seguindo o mesmo raciocínio, se considerarmos um número  $n$  de passos. O Princípio Multiplicativo nos garante que o número de lados é dado por  $4^n$ .

Como o Floco de Neve de Koch é formado por 3 curvas de Koch e cada curva tem em seu  $n$ -ésimo nível um total de  $4^n$  lados. O Floco de neve tem em seu  $n$ -ésimo nível um total de  $3 \cdot 4^n$  segmentos. Chamemos  $S_n$  a quantidade de lados na  $n$ -ésima interação chegamos a:

$$S_n = 3 \cdot 4^n. \quad (4.1)$$

Trata-se portanto de uma Progressão Geométrica (ou PG) de razão  $q = 4$  e primeiro termo  $a_1 = 3$ .

A PG é crescente, portanto quando  $n$  tende ao infinito, o número de lados  $S_n$  também tende ao infinito.

### 4.1.2 Perímetro

Vamos analisar por níveis, considerando novamente apenas um dos lados da figura.

Consideremos o segmento inicial de comprimento  $x$ .

Em seguida, no nível 1, dividimos o segmento inicial em 3 partes iguais, extraímos a central e construímos um triângulo equilátero sem a base no centro do segmento. Cada segmento tem tamanho  $\frac{1}{3}x$ . Considerando o número de segmentos determinados na Seção 4.1.1, temos que o comprimento de um dos lados do triângulo é  $4 \cdot \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$ . Daí concluímos que, ao considerarmos os 3 lados teremos um perímetro total de  $3 \left(\frac{4}{3}\right)x$

No nível 2, cada segmento obtido no nível 1 foi novamente dividido em três novos segmentos, extraído a parte central e construído um novo segmento. O resultado é que cada novo segmento tem comprimento  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 x$ . Novamente considerando a Seção 4.1.1,

obtemos  $4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 x$ . Como são 3 lados, temos que no nível 2 o perímetro do Floco de Neve de Koch é dado por  $3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 x$ .

Construindo uma tabela podemos verificar o que acontece em cada nível com maior clareza.

Tabela 3 – Perímetro em cada nível de interação

Nível	Número de lados	Comprimento de cada lado	Perímetro
0	3	$x$	$3x$
1	$3 \cdot 4$	$\left(\frac{1}{3}\right) x$	$3 \left(\frac{4}{3}\right) x$
2	$3 \cdot 4^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 x$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 x$
3	$3 \cdot 4^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 x$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^3 x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$3 \cdot 4^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^n x$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^n x$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Uma simples análise nos revela que na n-ésima interação, o perímetro ( $P$ ) é dado pelo produto do Número de lados com o Comprimento de cada lado. Daí.

$$P_n = 3x \left(\frac{4}{3}\right)^n \quad (4.2)$$

Essa fórmula, a primeira vista ingênua, revela um fato curioso. Se o perímetro do Floco de Neve de Koch cresce na razão de  $\frac{4}{3}$ , temos que quando  $n$  tende ao infinito, o perímetro será infinito, mesmo nosso senso comum interpretando o espaço como limitado.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3x \left(\frac{4}{3}\right)^n = 3x \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

É possível explorar alguns problemas práticos utilizando a equação que acabamos de deduzir.

Situação-problema: Considerando um Floco de Neve de Koch cujo perímetro do triângulo em seu nível 0 é  $12\text{cm}$ , quantas interações precisamos realizar para que o perímetro desse fractal seja maior ou igual a  $12\text{m}$ ?

Devemos resolver a seguinte inequação:

$$12 \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq 1200$$

Segue que,

$$12 \left(\frac{4}{3}\right)^n \geq \frac{1200}{12}$$

Aplicando logaritmo na base 10.

$$n \geq \frac{\log 100}{\log 4 - \log 3}$$

$$n \geq 16,0078$$

Como  $n$  é inteiro positivo, temos que  $n = 17$ , ou seja, na décima sétima interação o perímetro do Floco de neve será superior a  $12m$  de comprimento. Isso equivale a dizer que em apenas 17 interações, o perímetro de  $12cm$  passou a pouco mais de  $1200cm$ , aumentando em um fator de mais de 100 vezes o perímetro inicial.

**Atividade para os alunos:** *Considerando um Floco de Neve de Koch cujo perímetro do triângulo em seu nível 0 é 12 cm. Qual o fator de aumento em relação ao perímetro inicial a cada interação? Esse valor é constante? Depende do perímetro inicial?*

Para responder estas perguntas, podemos analisá-las por etapas.

**Qual o fator de aumento em relação ao perímetro inicial a cada interação?**

O perímetro inicial é  $P_1 = 12cm$ .

O perímetro, em centímetros, após  $n$  interações é dado por:

$$P_n = 12 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Fazendo  $P_n/P_1$  teremos o fator de aumento da  $n$ -ésima interação em relação ao perímetro inicial. De fato, seja  $i$  esse fator de aumento, temos:

$$i = \frac{P_n}{P_1} = \frac{12 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}{12}$$

Daí,

$$i = \left(\frac{4}{3}\right)^n . \tag{4.3}$$

Perceba que esse procedimento também responde a pergunta “*Depende do perímetro inicial?*”. Se considerarmos um perímetro inicial  $p$ , temos

$$i = \frac{P_n}{P_1} = \frac{p \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n}{p}$$

Logo,

$$i = \left(\frac{4}{3}\right)^n .$$

Portanto o fator de crescimento independe do perímetro inicial.

Com a ajuda de uma planilha eletrônica é possível verificar com maior facilidade o fator de aumento em um número grande de interações conforme a planilha abaixo.

Tabela 4 – Fator de crescimento do perímetro do Floco de Neve de Koch em relação ao nível 0

Interação	Fator $i$
1	1,33
2	1,78
3	2,37
4	3,16
5	4,21
6	5,62
7	7,49
8	9,99
9	13,22
10	17,76
11	23,68
12	31,57
⋮	⋮
47	744.938,84
48	993.251,79
49	1.324.335,72
50	1.765.780,96

A Equação 4.3 revela o caráter exponencial do fator de crescimento do perímetro em relação ao perímetro inicial. O que responde à pergunta “Esse valor é constante?”. Obviamente não. Por exemplo: Da nona para a décima interação, temos uma diferença de aumento de pouco mais de 4 vezes em relação ao tamanho inicial; ao passo que da quadragésima nona para a quinquagésima interação, temos uma diferença de mais de 440 mil vezes.

### 4.1.3 Cálculo da Área

No nível inicial, o fractal tem o formato de um triângulo equilátero. Vamos assumir que este triângulo tem lado  $l$ , então a área do fractal no nível inicial é dada, simplesmente, por

$$A_0 = l \frac{\sqrt{3}}{2}$$

É importante perceber que essa área não sofrerá mais variação. Devemos então analisar as áreas dos novos triângulos que surgirão justapostos nos lados desse triângulo original. Mais uma vez, pela simetria da figura, vamos nos ater apenas a um dos lados e posteriormente multiplicar o resultado por 3.

No nível 1 de interação, surge um novo triângulo de lado  $\frac{1}{3}l$ . Por semelhança de triângulo ele terá  $\frac{1}{3}$  da altura do primeiro triângulo.

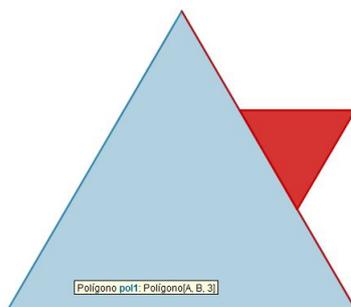


Figura 53 – Nova região (em vermelho) que surge no nível 1

Antes de iniciarmos nossa análise, vamos demonstrar a seguinte Proposição:

**Proposição 1.** *Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes. Se  $k$  é a constante de proporcionalidade entre os lados desse triângulo, temos que a constante de proporcionalidade entre as áreas desse triângulo é  $k^2$ .*

*Demonstração.* Dados  $\overline{BC} = a$ ,  $\overline{B'C'} = a'$  e  $h$  e  $h'$  as alturas dos triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , respectivamente relativas às bases  $BC$  e  $B'C'$ . Com, por hipótese, eles são semelhantes, temos que  $a = ka'$  e  $h = kh'$ .

Sabemos que a área  $A(ABC) = \frac{ah}{2}$  e  $A(A'B'C') = \frac{a'h'}{2}$ , daí

$$\frac{A(ABC)}{A(A'B'C')} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{a'h'}{2}} = \frac{ah}{a'h'} = \frac{ka'kh'}{a'h'} = k^2$$

□

Da Proposição 1, se a razão de semelhança dos triângulos equiláteros é  $\frac{1}{3}$ , a razão entre suas áreas será  $\frac{1}{9}$ . Segue que a nova região que surge na primeira interação é  $\frac{1}{9}A_0$ . Vamos chamar  $t_1$  essa área. Daí,

$$t_1 = \left(\frac{1}{9}\right) A_0 \quad (4.4)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio recursivo, podemos analisar o que acontece no nível 2 de interação. A cada novo triângulo que surge no segundo nível, a razão de semelhança entre a sua área e a área do triângulo do nível anterior continua sendo  $\frac{1}{9}$ .

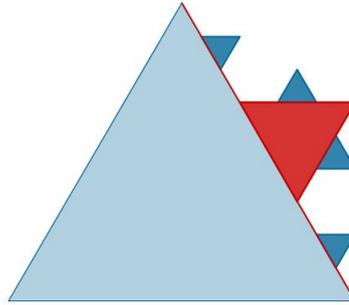


Figura 54 – Nova região (em azul) que surge no nível 2

No entanto agora temos 4 novos triângulos, cuja área de cada um, como já foi dito acima, é  $\frac{1}{9}$  da área do triângulo no nível anterior. Podemos então dizer que a área de cada novo triângulo é dada por  $\left(\frac{1}{9}\right) \left[\left(\frac{1}{9}\right) A_0\right] = \left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0$ . Como são quatro triângulos com essa área, a área adicionada no fractal pelo nível 2 é  $4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 A_0 = \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{1}{9}\right) A_0$ . Juntando à área já considerada, temos,

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{1}{9}\right) A_0 \\ &= \left(\frac{1}{9}\right) A_0 + \left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{1}{9}\right) A_0 \\ &= \frac{A_0}{9} \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Em um raciocínio análogo para o nível 3, temos que cada novo triângulo tem  $\left(\frac{1}{9}\right)$  da área de um triângulo do nível anterior e além disso, para cada um dos quatro lados do nível anterior, surgirão outros quatro lados, então, pelo Princípio Multiplicativo, a área que surge na terceira interação é dada por  $\left(\frac{4}{9}\right) \left[\left(\frac{4}{9}\right) \left(\frac{1}{9}\right) A_0\right] = \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{9}\right) A_0$ .

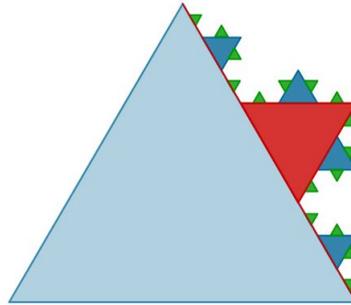


Figura 55 – Nova região (em verde) que surge no nível 3

Nos resta adicionar a nova região às já contabilizadas.

$$\begin{aligned}
 t_3 &= t_2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{9}\right) A_0 \\
 &= \frac{A_0}{9} \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{1}{9}\right) A_0 \\
 &= \frac{A_0}{9} \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pensando recursivamente, chegamos que expressão que determina a área na  $n$ -ésima interação é dada por:

$$t_n = \frac{A_0}{9} \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \tag{4.7}$$

Uma análise mais detalhada nos leva a perceber que o trecho  $\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$  é a soma de uma PG de razão  $q = \frac{4}{9}$  e primeiro termo  $a_1 = 1$ . Como a razão está entre 0 e 1, podemos aplicar a soma de uma PG infinita. De fato,

$$\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}.$$

Logo, a expressão de  $t_n$  se resume a,

$$t_n = \frac{A_0}{9} \times \frac{9}{5}$$

$$t_n = \frac{A_0}{5}$$

Considerando que esse valor refere-se apenas a um dos lados do triângulo inicial, temos que a área adicionada a partir do nível 1 é  $3t_n$ .

Então, para  $n$  suficientemente grande. Seja  $A_n$  a área do Floco de Neve de Koch, temos claramente que  $A_n = A_0 + 3t_n$ . Donde,

$$A_n = A_0 + \frac{3}{5}A_0$$

$$A_n = \frac{8}{5}A_0 \quad (4.8)$$

Chegamos a um restado surpreendente. Embora o fractal em estudo apresente perímetro infinito, a superfície interior a esse perímetro é finita e apenas 60% maior que a área no nível inicial.

## 4.2 O triângulo de Sierpinski

Para esta análise, utilizaremos o que já foi exposto na Seção 1.6. No entanto, vamos aproveitar esta oportunidade para introduzir um conceito simples, mas que quase sempre é excluído dos currículos escolares. Trata-se do “Pensamento recursivo”, ou Recorrência. Uma sequência é dita recursiva, quando é possível determinar uma relação entre um termo subsequente a partir do seu termo anterior, como as conhecidas Progressões Aritméticas (PA) e Progressões Geométricas (PG). Estamos interessados em um caso particular de recorrência: As Recorrências Lineares de Primeira Ordem. Esse tipo de sequência caracteriza-se pelo fato de que cada termo está associado por uma expressão ao termo anterior sem elevá-lo a um expoente maior que 1. PA e PG são exemplos desse tipo de sequência. Uma Progressão Geométrica de razão  $q$  pode ser expressa recursivamente como,

$$a_{n+1} = q \cdot a_n$$

O que indica que cada termo subsequente  $a_{n+1}$  é expresso pelo termo anterior  $a_n$  multiplicado pela razão da PG.

Se pensarmos em uma sequência onde o primeiro termo é 2 e cada termo subsequente é obtido multiplicando o anterior por 5, ( $a_{n+1} = 5 \cdot a_n$ ). Podemos definir um termo geral para essa sequência através de uma técnica chamada “Somadas telescópicas”, conforme segue,

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 5.a_1 \\
 a_3 &= 5.a_2 \\
 a_4 &= 5.a_3 \\
 &\dots = \dots \\
 a_n &= 5.a_{n-1}
 \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro obtemos a termo geral da expressão.

$$a_n = 5^{n-1}.a_1$$

Como  $a_2 = 2$

$$a_n = 2.5^{n-1}$$

Note que isso é simplesmente uma PG de razão 5 e primeiro termo 2. Porém pensar recursivamente pode trazer grandes vantagens no que tange o aprimoramento do raciocínio lógico matemático. Erroneamente esse conteúdo é esquecido no Ensino Médio e até mesmo na graduação, privando os alunos de desenvolverem técnicas eficientes para a resolução de problemas de natureza recursiva.

Veremos a seguir como pensar recursivamente pode simplificar em muito alguns problemas aparentemente trabalhosos.

#### 4.2.1 Número de triângulos

Como vimos na Seção 1.6, o processo de construção desse fractal consiste em, a cada nível, dividir um triângulo equilátero em quatro outros triângulos semelhantes ao inicial e descartar o triângulo central. Por esse motivo, estamos interessados em contar o número de triângulos válidos que restarão em cada novo nível de interação.

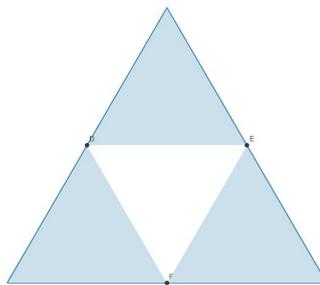


Figura 56 – Número de triângulos válidos no nível 1

Vamos utilizar o método recursivo para calcular esse número de triângulos. Chame-mos de  $t_n$  o número de triângulos no  $n$ -ésimo nível do Triângulo de Sierpinski. Obviamente que  $t_1 = 3$ , visto que no nível 1 teremos exatamente três triângulos válidos.

Como foi descrito acima, a cada novo nível, cada triângulo válido sofrerá o mesmo processo de divisão e descarte do triângulo central, transformando em 3 novos triângulos. Sendo assim, considerando  $t_n$  triângulos no nível  $n$ , teremos no nível  $n + 1$  um total de  $3t_n$ . Chegamos então à Recorrência Linear de Primeira Ordem  $t_{n+1} = 3t_n$ , onde  $t_1 = 3$ .

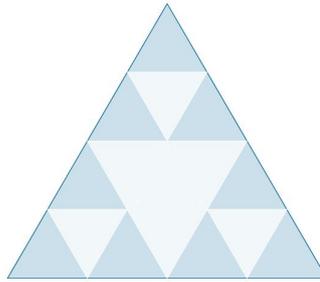


Figura 57 – Número de triângulos válidos no nível 2

Como vimos anteriormente, esse tipo de recorrência pode ser entendida como uma PG de razão 3 e primeiro termo igual a 3. Facilmente chegamos à conclusão que o número de triângulos no  $n$ -ésimo nível do Triângulo de Sierpinski é dado por,

$$t_n = 3^n \quad (4.9)$$

Esse resultado também pode ser obtido sob a ótica da Análise Combinatória. Basta para tal que cada nível do fractal pode ser interpretado como etapas. Na primeira etapa temos 3 triângulos gerados pelo triângulo inicial, na etapa seguinte teremos 3 novos triângulos para cada triângulo válido na etapa anterior, seguindo esse raciocínio até a  $n$ -ésima etapa, teremos, pelo Princípio Multiplicativo, um número de triângulos igual a,

$$\underbrace{3.3.3.3\dots3}_{n\text{vezes}} = 3^n$$

#### 4.2.2 O Cálculo do Perímetro

Consideremos um triângulo inicial de perímetro  $x$ . Novamente o pensamento recursivo pode nos ajudar. Seja  $p_n$  o perímetro de um triângulo no nível  $n$ . Vamos analisar o que acontece no nível  $n + 1$ . Do nível inicial para o nível 1, cada novo triângulo tem metade do perímetro do triângulo do nível anterior, ou seja,  $p_1 = \frac{1}{2}x$ . O mesmo acontece do nível 1 para o nível 2, daí  $p_2 = \frac{1}{2}p_1$

Pensando recursivamente, temos que  $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$ .

Trata-se de um PG de razão  $\frac{1}{2}$  e primeiro termo  $\frac{x}{2}$ , cujo termo geral é dado por,

$$p_n = x \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

No entanto, para determinarmos o perímetro total  $P_n$  no  $n$ -ésimo nível, devemos multiplicar o número de triângulo do nível  $n$  pelo seu perímetro, como já sabemos da Seção 4.2.1 que o número de triângulo no nível  $n$  é  $3^n$ , concluímos que o perímetro total do Triângulo de Sierpinski na  $n$ -ésima interação é dado por,

$$P_n = x \left( \frac{3}{2} \right)^n \quad (4.10)$$

Note que, para  $n$  suficientemente grande, o perímetro tende ao infinito, de fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x \left( \frac{3}{2} \right)^n = x \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} \right)^n = \infty$$

### 4.2.3 O cálculo da área

Seguindo a linha de raciocínio recursivo dos itens anteriores, consideremos  $A_0$  a área do triângulo inicial. Seja  $a_n$  a área de um dos triângulos do nível  $n$ . Se a razão do perímetro é de  $\frac{1}{2}$ , a razão da área será  $\frac{1}{4}$ , então, temos a Recorrência Linear de Primeira Ordem  $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n$ , que já sabemos ser equivalente a uma PG de razão  $\frac{1}{4}$  e primeiro termo  $A_0$ . Segue que seu termo geral é dado por,

$$a_n = A_0 \left( \frac{1}{4} \right)^n$$

Para determinarmos a área total  $A_n$  no  $n$ -ésimo nível de interação devemos multiplicar a área  $a_n$  de cada triângulo pelo número de triângulos  $3^n$ . O que resulta na fórmula do termo geral que determina a área do Triângulo de Sierpinski no nível  $n$ , como segue,

$$A_n = A_0 \left( \frac{3}{4} \right)^n$$

Observamos aqui mais um fator curioso no mundo dos fractais. Embora o Triângulo de Sierpinski possua um perímetro infinito para  $n$  suficientemente grande, ele possui área tendendo a 0(zero). De fato,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_0 \left( \frac{3}{4} \right)^n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n = 0$$

Embora a maioria das escolas de Ensino Médio, principalmente as públicas, não estudem noções de Limites, é possível introduzir uma ideia embrionária sobre o assunto

através dessa situação problema. O entendimento é intuitivo e pode ser perfeitamente absorvido pelos alunos.

## 4.3 A Árvore de Pitágoras

Na Seção 3.3 apresentamos o fractal conhecido como Árvore de Pitágoras, na ocasião construímos a figura com o auxílio do GeoGebra além de propor uma atividade investigativa sobre alguns elementos matemáticos presentes nesse fractal. Para restringir nossa explanação, consideremos a Árvore Simétrica de Pitágoras com o quadrado da base inicial de lado  $l$ . Vamos então ampliar a exploração e verificar que elementos podem ser estudados.

### 4.3.1 O número de triângulos

A figura inicial tem apenas 1 triângulo. No nível 2, note que cada cateto do triângulo anterior gera 2 novos quadrados, conseqüentemente 2 novos triângulos. No nível 3, os dois triângulos anteriores, que juntos possuem 4 catetos, vão gerar 4 quadrados e estes darão origem a 4 triângulos. Pensando recursivamente, temos a seguinte sequência:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$$

Essa sequência é claramente uma PG de razão  $q = 2$  e primeiro termo  $a_1 = 1$ . De onde podemos observar que o número de triângulos em um determinado nível de interação é dado pelo termo geral dessa progressão. Chamemos  $t_n$  o número de triângulos da  $n$ -ésima interação, temos.

$$t_n = 2^{n-1} \tag{4.11}$$

Se a intenção for determinar o número total de triângulo acumulados em determinado nível, basta utilizar a soma dos  $n$  termos dessa PG. No caso, essa soma em função do nível  $n$  de interação pode ser expressa por,

$$S_n = 2^n - 1$$

### 4.3.2 O número de quadrados

Existem muitas formas de calcular o número de quadrados. Vamos recorrer novamente a um pensamento indutivo e recursivo.

Começamos com 3 quadrados. Para efeitos práticos, vamos desconsiderar inicialmente o primeiro quadrado da base, posteriormente introduziremos ele ao resultado final,

quando necessário. Sendo assim, no nível 1, temos 2 quadrados. No nível 2, cada quadrado serviu de base para formação de um triângulo e estes, por sua vez, dão origem a 4 novos quadrados. No nível 3 o processo se repete, gerando agora 8 novos quadrados. Em um pensamento indutivo, temos claramente a sequência,

$$(2, 4, 8, 16, \dots)$$

que sabemos se tratar de uma PG de razão  $q = 2$  e primeiro termo  $a_1 = 2$ . Resulta então que o número de quadrados em cada nível será o termo geral dessa progressão (com exceção do primeiro nível que tem 3 quadrados). Então, denotemos por  $q_n$ , com  $n \geq 2$ , o número de quadrados da  $n$ -ésima interação, temos facilmente que,

$$q_n = 2^n \tag{4.12}$$

Novamente, se a intenção for o número total de quadrados acumulados na  $n$ -ésima interação, basta determinar a soma dessa PG, cuja expressão para a  $n$ -ésima interação, considerando-se a adição do quadrado inicial, é dada por,

$$S_n^* = 2^{n+1} - 1$$

### 4.3.3 O perímetro de cada triângulo

Como os triângulos são todos semelhantes (Caso AAA), para determinar o perímetro de cada um deles em função do nível de interação, precisamos investigar a razão de proporcionalidade entre um dos lados (no caso a base) dos triângulos de uma interação a outra e verificar se essa razão é constante. Para isso, vamos analisar a construção abaixo que descreve um ramo da Árvore de Pitágoras.

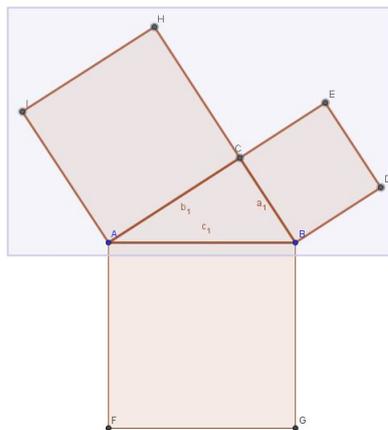


Figura 58 – Detalhes da Árvore de Pitágoras.

Note que o primeiro triângulo tem como base o lado do primeiro quadrado, no caso  $l$ . O segundo tem como base o lado do outro quadrado, que por sua vez é justaposto a um dos catetos do primeiro triângulo. Sendo assim, como o triângulo é retângulo isósceles de hipotenusa  $l$ , é fácil perceber que seus catetos medem  $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ . Com isso temos que a base do segundo triângulo é exatamente  $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ . Pela auto-similaridade dos fractais, podemos garantir que a proporcionalidade é constante. Como os triângulos são todos semelhantes, a razão de proporcionalidade entre os lados é a mesma razão entre os perímetros. Essa razão é a constante de proporcionalidade que, conforme observamos, vale  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Analisando nível por nível, vemos que no nível 1 de interação, o perímetro do triângulo é  $p_1 = l + \sqrt{2}l = l(1 + \sqrt{2})$ . Note que nossa sequência de perímetros será uma PG de razão  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e primeiro termo igual a  $a_1 = l(1 + \sqrt{2})$ . Como estamos interessado no perímetro de cada triângulo da  $n$ -ésima interação, basta determinar o termo geral da PG. Chamemos esse termo de  $p_n$ , simbolizando o  $n$ -ésimo perímetro. Temos,

$$p_n = l(1 + \sqrt{2}) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \quad (4.13)$$

#### 4.3.4 O perímetro de cada quadrado

Assim como na sessão anterior, vamos determinar a constante de proporcionalidade entre os lados dos quadrados. Da Figura 58, temos que o primeiro quadrado tem lado  $l$ , cada um dos quadrados seguintes tem lado  $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ , logo a constante de proporcionalidade é  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Assim como na Seção 4.3.2, vamos considerar a contagem a partir do primeiro quadrado justaposto no cateto do primeiro triângulo. Então, considerando os quatro lados de cada quadrado, temos que a sequência que representa os perímetros procurados é uma PG de razão  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  e primeiro termo  $a_1 = 2\sqrt{2}l$ . O perímetro do  $n$ -ésimo quadrado é portanto o termo geral da PG em questão. Denotemos por  $l_n$  o perímetro de um dos  $n$ -ésimos quadrados, temos,

$$l_n = 4l \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \quad (4.14)$$

Mais uma vez, para o nível 1, devemos adicionar os 4 lados do maior quadrado da base.

Esse resultado será especialmente importante para determinarmos o perímetro total do fractal.

### 4.3.5 A área de cada triângulo

Como nosso objetivo é determinar a área de cada um dos triângulos gerados em uma  $n$ -ésima interação, para melhor focar nossa análise, consideraremos apenas um ramo da Árvore de Pitágoras.

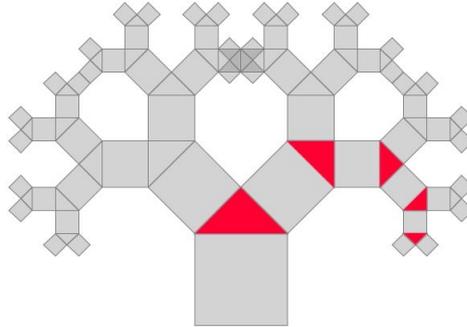


Figura 59 – Triângulos considerados na análise

De acordo com a Proposição 1, se conhecemos a razão de semelhança entre dois triângulos, a razão entre suas áreas será o quadrado desta razão. Sendo assim, vimos na Seção 4.3.3 que a razão entre dois lados de triângulos subsequentes é  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , logo, a razão entre as áreas será  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ . Com isso, se montarmos uma sequência com as áreas dos triângulos estudados temos,

$$\left(\frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2, \dots\right)$$

Fica claro que essa sequência é uma PG de razão  $q = \frac{1}{2}$  e primeiro termo  $a_1 = \frac{1}{4}l^2$ . E o que estamos interessado é exatamente o  $n$ -ésimo termo dessa sequência. Chamemos de  $T_n$  esse valor, temos,

$$T_n = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Não devemos esquecer que essa é a área de apenas um dos triângulos na  $n$ -ésima interação.

**Exemplo 1.** Qual a área de um dos triângulos na 4 interação?

$$T_4 = l^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{l^2}{32}$$

Esse valor é obtido em unidade de área.

### 4.3.6 A área de cada quadrado

Note que cada nível tem três quadrados associados a um triângulo, nesse caso, para facilitar nossa análise e afim de preencher a Tabela 8, consideraremos inicialmente apenas os quadrados justapostos aos catetos desses triângulos, posteriormente, quando necessário, adicionaremos a área do quadrado maior da base.

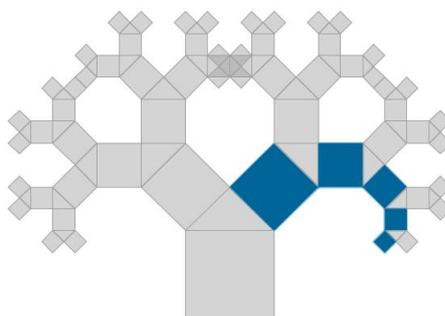


Figura 60 – Quadrados que inicialmente entram na contagem

Na Seção 4.3.4, temos que a razão de proporcionalidade entre os lados é  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Fazendo uso mais uma vez da Proposição 1, concluímos que a razão entre as áreas de dois quadrado subsequentes é exatamente  $\frac{1}{2}$ . Considerando um dos quadrado justapostos ao primeiro triângulo como primeiro elemento de nossa sequência, temos que, sendo seu lado  $\frac{\sqrt{2}}{2}l$ , sua área é  $a_1 = \frac{1}{2}l^2$ . Montando uma sequência com as áreas de cada quadrado em relação ao nível de interação do fractal, temos,

$$\left( \frac{1}{2}l^2, \frac{1}{4}l^2, \frac{1}{8}l^2, \frac{1}{16}l^2, \dots \right)$$

Novamente temos uma PG cuja razão é  $q = \frac{1}{2}$  e o primeiro termo  $a_1 = \frac{1}{2}l^2$ . Seu termo geral representa a área de um dos quadrados da n-ésima interação. Segue daí que, seja  $Q_n$  a área desse n-ésimo quadrado, podemos definir  $Q_n$  como,

$$Q_n = l^2 \left( \frac{1}{2} \right)^n \quad (4.15)$$

### 4.3.7 Perímetro total

Vamos analisar os traçados em vermelho, azul e verde da Figura 61 abaixo que mostra a Árvore de Pitágoras no seu nível 5 de interação:

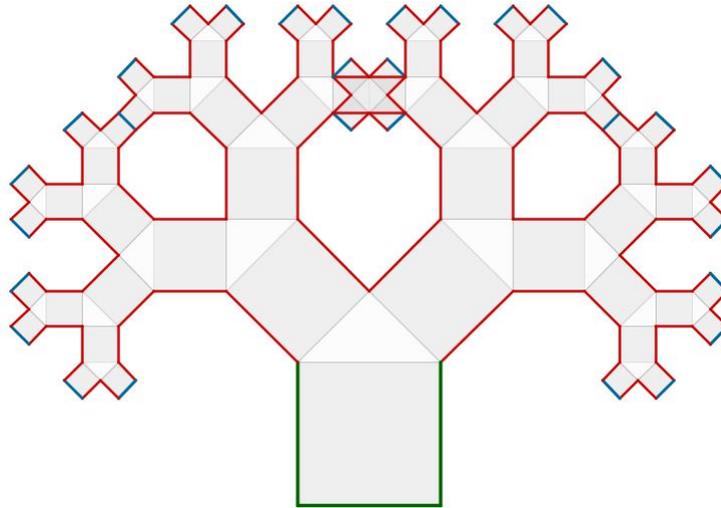


Figura 61 – Perímetro da Árvore de Pitágoras no seu nível 5.

Temos que os lados dos triângulos não fazem parte do perímetro do fractal, além disso, o primeiro e os últimos quadrados da figura contribuem com 3 de seus lados para compor o perímetro e todos os demais quadrados contribuem com apenas dois lados. Embora a Figura 61 represente apenas os cinco primeiros níveis de interação, a auto-similaridade do fractal nos garante que o raciocínio acima pode ser estendido à  $n$ -ésimo interação. Sendo assim, a ideia é dividir o processo em três partes: 1 - calcular o traçado verde (simples); 2 - Calcular o traçado vermelho; 3 - Calcular o traçado azul. Nas análises anteriores, já reunimos elementos suficientes para determinar o perímetro total da Árvore de Pitágoras em função do seu nível  $n$  de interação.

Seja  $P_n$  esse perímetro, temos que,

$$P_n = A + B + C$$

Onde,

$A = \text{Traçado Verde}; B = \text{Traçado Vermelho}; C = \text{Traçado Azul}$

1. Traçado Verde:

Esse é o mais simples de todos, é composto por 3 lados do primeiro quadrado, logo,

$$A = 3l$$

2. Traçado Vermelho

Antes de calcular B, vamos enunciar e demonstrar a seguinte Proposição:

**Proposição 2.** *O produto ordenado termo a termo de duas Progressões Geométricas ainda é uma Progressão Geométrica, e sua razão é o produto das razões das duas Progressões iniciais.*

*Demonstração.* Sejam  $x = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$  e  $y = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$  duas PGs de razão  $r$  e  $q$ , respectivamente.

Tomemos  $z = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ , onde  $c_i = a_i b_i$ , para  $i = (1, 2, 3, \dots, n)$ . Temos,

$$\frac{c_i}{c_{i-1}} = \frac{a_i b_i}{a_{i-1} b_{i-1}} = \frac{a_i}{a_{i-1}} \cdot \frac{b_i}{b_{i-1}} = r q$$

Portanto  $z = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$  é uma PG e sua razão é o produto das duas PGs iniciais

□

Na Seção 4.3.2, vimos que o número de quadrados em cada nível é dado pela PG  $(2, 4, 8, 16)$ . Cujo termo geral é dado por,  $q_n = 2^n$

Já na Seção 4.3.4, temos que o perímetro de cada quadrado também é dado por uma PG  $(2\sqrt{2}l, 2l, \sqrt{2}l, \dots)$ . Cujo termo geral é  $l_n = 4l \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ .

Logo, o perímetro de todos os quadrados no  $n$ -ésimo nível é dado pelo produto dos termos gerais das duas PGs acima. Esse novo termo geral representa a PG definida pelo produto termo a termo das sequências apresentadas nas Seções 4.3.2 e 4.3.4, dada por

$$(4\sqrt{2}l, 8l, 8\sqrt{2}l, \dots)$$

que, de acordo com a Proposição 2, também é uma PG, cujo primeiro termo é  $a_1 = 4\sqrt{2}l$  e a razão é  $q = \sqrt{2}$ . O que estamos interessados é na soma dos termos dessa PG, na verdade, como cada quadrado contribui com apenas dois lados, queremos metade dessa soma, daí

$$B = (4 + 2\sqrt{2})((\sqrt{2})^n - 1)$$

### 3. Traçado Azul

Para determinar o comprimento do traçado azul, basta calcular a quarta parte do produto das equações 4.12 e 4.14, que representam, respectivamente, o número de quadrados e o perímetro de cada quadrado no  $n$ -ésimo nível do fractal. Seguindo o mesmo raciocínio do item anterior,

$$C = l(\sqrt{2})^n$$

Logo,

$$P_n = l[(2\sqrt{2} + 5)(\sqrt{2})^n - (2\sqrt{2} + 1)] \quad (4.16)$$

Note que a sequência tende ao infinito para  $n$  suficientemente grande. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} l[(2\sqrt{2} + 5)(\sqrt{2})^n - (2\sqrt{2} + 1)] &= l[(2\sqrt{2} + 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n - \lim_{n \rightarrow \infty} (2\sqrt{2} + 1)] \\ &= l(2\sqrt{2} + 5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n - l(2\sqrt{2} + 1) = \infty \end{aligned}$$

Ou seja, a Árvore de Pitágoras tem perímetro infinito quando  $n$  tende ao infinito. Um fato curioso, visto que o perímetro de cada quadrado, visto na equação 4.14, tende a zero quanto  $n$  tende ao infinito.

### 4.3.8 A Área total

A área total da Árvore de Pitágoras é simplesmente a soma das áreas de todas os quadrados e triângulos. Já temos elementos suficientes para determiná-la. Chamemos  $A_n$  a área total em cada nível de interação, daí

$$A_n = (\text{Área de cada triângulo}) \times (\text{Número de triângulos}) + (\text{Área de cada quadrado}) \times (\text{Número de quadrado})$$

Ou seja, considerando os resultados obtidos nas Seções 4.3.1, 4.3.2, 4.3.5 e 4.3.6 temos que,

$$A_n = T_n \cdot t_n + Q_n \cdot q_n$$

Obtemos um resultado surpreendente:

$$A_n = \frac{5}{4} l^2 \quad (4.17)$$

para<sup>1</sup> todo  $n \geq 2$

A tabela abaixo mostra o que acontece com os valores de  $A_n$  supondo  $l = 6$  e considerando até o vigésimo nível do fractal.

<sup>1</sup> No nível 1 devemos somar  $l^2$  ao resultado

Tabela 5 – Área total da Árvore de Pitágoras

n	$T_n$	$t_n$	$Q_n$	$q_n$	$l^2$	$A_n$
1	9,00000	1	18,00000	2	36	81,00
2	4,50000	2	9,00000	4	0	45,00
3	2,25000	4	4,50000	8	0	45,00
4	1,12500	8	2,25000	16	0	45,00
5	0,56250	16	1,12500	32	0	45,00
6	0,28125	32	0,56250	64	0	45,00
7	0,14063	64	0,28125	128	0	45,00
8	0,07031	128	0,14063	256	0	45,00
9	0,03516	256	0,07031	512	0	45,00
10	0,01758	512	0,03516	1.024	0	45,00
11	0,00879	1.024	0,01758	2.048	0	45,00
12	0,00439	2.048	0,00879	4.096	0	45,00
13	0,00220	4.096	0,00439	8.192	0	45,00
14	0,00110	8.192	0,00220	16.384	0	45,00
15	0,00055	16.384	0,00110	32.768	0	45,00
16	0,00027	32.768	0,00055	65.536	0	45,00
17	0,00014	65.536	0,00027	131.072	0	45,00
18	0,00007	131.072	0,00014	262.144	0	45,00
19	0,00003	262.144	0,00007	524.288	0	45,00
20	0,00002	524.288	0,00003	1.048.576	0	45,00

Isso significa que a cada nível a área aumenta um valor constante de  $\frac{5}{4}l^2$ , independente de  $n$ . O que podemos, inclusive, interpretar como uma PA de primeiro termo  $a_1 = \frac{9}{4}l^2$  e razão  $r = \frac{5}{4}l^2$ , cujo  $n$ -ésimo termo representa a área total acumulada do fractal. Chamemos de  $F_n$  essa área, temos facilmente que,

$$F_n = l^2 \left( \frac{5n + 4}{4} \right) \quad (4.18)$$

Isso mostra que a área total da Árvore de Pitágoras tende ao infinito para um  $n$  suficientemente grande. Novamente nos surpreendemos, pois foge totalmente do nosso senso comum o fato de uma região limitada apresentar área infinita.

Com as equações obtidas, muitas atividades podem ser elaboradas. Além de outros questionamentos que podem vir a surgir. Fica a certeza de que os fractais podem servir de base para muitos temas da Matemática do Ensino Médio, basta um pouco de criatividade e força de vontade por parte do professor.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A história de grandes descobertas, principalmente na Matemática, é muitas vezes movida única e exclusivamente pela curiosidade do homem. A aplicabilidade de um conceito é elemento de segundo plano. A busca pelo saber simplesmente por saber mostra-se muitas vezes frutífera. Assim foi com a Geometria fractal. O que surgiu da observação de fenômenos "irregulares" apresenta-se agora como uma nova ferramenta para tratar aqueles problemas até então considerados imprevisíveis, anômalos ou irregulares; em uma melhor denominação, fenômenos caóticos. A Geometria fractal ultimamente vem sendo objeto de estudo de muitos cientistas em todo o mundo. As peculiaridades da teoria dos fractais vem mostrando bons resultado na solução de problemas outrora esquecidos pela ciência.

O estudo dos fractais abre muitas portas no tocante à educação Matemática. A beleza dos fractais serve como incremento para buscar no aluno interesse no estudo da Matemática. Privá-lo de conhecer e vislumbrar os fractais é um erro inconcebível. A educação Matemática busca incessantemente novas alternativas que facilitem o processo ensino-aprendizagem. [BARBOSA \(2005\)](#) nos lembra que o estudo da Geometria Fractal ajuda tanto na compreensão de conteúdos presentes no currículo escolar como no despertar da existência do belo na natureza e na Matemática, fatores que ajudam substancialmente o aluno a desenvolver de forma mais eficiente conceitos matemáticos "desinteressantes" do ponto de muitos livros didáticos atuais.

Observamos no desenvolvimento do trabalho que despertar o aluno para a beleza estética da Matemática é uma excelente estratégia didática. Observamos um interesse acima da média, especialmente na aula de campo e análise das amostras. Outro ponto que merece destaque é a utilização do software educativo (GeoGebra). A participação e interação dos alunos na construção dos fractais possibilitou o entendimento dos elementos

matemáticos e etapas da construção de cada fractal, facilitando a resolução das atividades propostas. Certamente, não seria possível tamanho êxito sem a ajuda do computador.

Os conceitos de Progressão Geométrica, Análise Combinatória e Noções de Geometria Plana foram bem explorados. As construções em GeoGebra viabilizaram a fixação das ideias de razão e proporção. Além disso, temas transversais como as Recorrências tiveram boa aceitação por parte do alunado. Junto com desenvolvimento desses temas nos deparamos diversas vezes com fatos curiosos, resultados imprevisíveis e impressionantes que fogem do nosso senso comum, o que vislumbra ainda mais o aluno.

Diante do exposto, entendemos que o trabalho foi exitoso. Os objetivos de explorar padrões e utilizar os fractais como subsídio de estudo em alguns tópicos do Ensino Médio foram atingidos com sucesso. Esperamos que este material sirva de suporte a outros profissionais da educação e estudiosos que pretendam reforçar a ideia de que é possível ensinar Matemática de forma prazerosa e divertida.

Assim, ao final de nossa análise sobre o universo dos fractais. Estudamos diversos temas do Ensino Médio e vimos como é possível inserir os fractais como estimuladores do processo de ensino. Muitas questões foram levantadas, algumas respondidas, e ainda ficaram tantas outras em aberto para serem exploradas.

Concluimos o trabalho na certeza de que o universo dos fractais expandiu a visão dos alunos sobre as belezas e aventuras no mundo das descobertas que a Matemática pode proporcionar. Tornar a Matemática uma disciplina prazerosa é o caminho para uma prática pedagógica mais eficiente.

---

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, A. A. O. *Os Fractais na formação docente e sua prática na sala de aula*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo-SP, 2006.
- BAIER, T. *O nexó “Geometria Fractal – Produção da Ciência Contemporânea” tomado como núcleo do currículo de Matemática do Ensino Básico*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro - SP, 2005.
- BARBOSA, R. M. *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: [s.n.], 2002.
- BARBOSA, R. M. *Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: [s.n.], 2005.
- BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo: [s.n.], 1996.
- BRANDÃO, L. d. O. Algoritmos e fractais com programas de gd. In: \_\_\_\_\_. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 2002. v. 49, p. 27–34.
- BRASIL. Pcn (parâmetros curriculares nacionais): Ensino fundamental – bases legais. In: \_\_\_\_\_. Brasília: [s.n.], 1997. v. 1.
- BRASIL. Pcn (parâmetros curriculares nacionais): Ensino fundamental – bases legais. In: \_\_\_\_\_. Brasília: [s.n.], 1998. p. 25.
- BRITO, A. J. *Geometrias Não-Euclidianas: Um estudo histórico-pedagógico*. Dissertação (Dissertação (Mestrado em Matemática)) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1995.
- GERDES, P. *Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico*. Curitiba: [s.n.], 1992. 105 p.
- GONÇALVES, A. G. N. *Uma sequência de ensino para o estudo de progressões geométricas via fractais*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica – PUC, São Paulo-SP, 2007.
- GOUVEA, F. R. *Um estudo de Fractais Geométricos através de caleidoscópios e softwares de Geometria dinâmica*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro - SP, 2005.

- JORGE, S. *Desenho Geométrico Idéias & Imagens*. 2ª. ed. São Paulo: [s.n.], 2002. 175 p.
- LINTZ, R. *História da matemática*. Blumenau: [s.n.], 1999.
- MANDELBROT, B. *Fractals: Form, Chance and Dimension*. San Francisco: [s.n.], 1977.
- MISKULIN, R. G. S. *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria*. 189 p. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), Campinas-SP, 1999.
- MORGADO J.B.P. CARVALHO, P. C. e. P. F. A. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: Coleção Vitae, 1991. 18 p.
- PALLESI, D. M. *Motivação do estudo de Progressões Aritméticas e Geométricas através da Geometria Fractal*. Curitiba: [s.n.], 2007.
- SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. In: \_\_\_\_\_. São Paulo: Revista do Professor de Matemática, 2005. v. 57, p. 1–8.
- SILVEIRA, M. R. A. “matemática é difícil”: Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. 2002.
- SKINNER, B. F. *Tecnologia do ensino*. São Paulo: [s.n.], 1972.
- VALE I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. In: \_\_\_\_\_. Portugal: Revista Educação e Matemática, 2005. v. 85, p. 14–20.
- VALENTE, J. A. *Análise dos diferentes tipos de softwares usados na educação*. Pirenópolis: [s.n.], 1998.
- ZAZKIS RINA; LILJEDAHN, P. Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, v. 49, n. 3, p. 379–402, 2002.

# Anexos

---

---

## ANEXO A

---

### ATIVIDADE 1 (O FLOCO DE NEVE DE KOCH)

Uma variação da Curva de Koch, que foi citada Seção 1.5. É o chamado Floco de Neve de Koch (Figura 11). Utilizando como base a Curva de Koch, preencha a tabela abaixo e faça as considerações necessárias.

Tabela 6 – Elementos do Floco de Neve de Koch

Nível	Número de lados	Comprimento de cada lado	Perímetro	Área
0				
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Utilizando a tabela, responda:

1. Que conteúdos do Ensino Médio você precisou para preencher a tabela?
2. Como você classifica a necessidade da construção no GeoGebra para o preenchimento dessa tabela?
  - ( ) Sem necessidade
  - ( ) Ajuda um pouco
  - ( ) É indispensável
3. Sobre o número de lados,
  - a) Quantos lados temos na sexta interação?
  - b) No momento em que temos 49153 lados, quantas interações foram feitas ?
4. Sobre o perímetro,

- a) O que acontece se fizermos um número muito grande de interações?
- b) Quando  $n$  é muito grande, qual a soma dos segmentos descartados?
5. E sobre a área,
- a) Qual será a área aproximada da figura para um número muito grande de interações?
- b) Qual a razão entre a área após 5 interações e a área inicial do Floco de Neve?

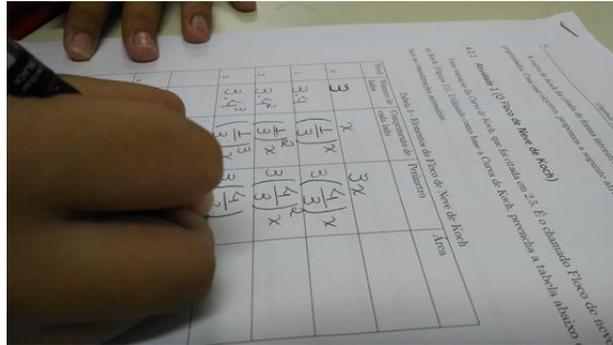


Figura 62 – Preenchimento da tabela proposta na atividade 01

---

---

## ANEXO B

---

### ATIVIDADE 2 (O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI)

Utilizando como base a figura criada no GeoGebra, preencha a tabela abaixo e faça as considerações necessárias.

Tabela 7 – Elementos do Triângulo de Sierpinski

Nível	Número de triângulos válidos	Perímetro	Área de cada triângulo	Área Total
0				
1				
2				
3				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Utilizando a tabela, responda:

1. Que conteúdos do Ensino Médio você precisou para preencher a tabela?
2. Como você classifica a necessidade da construção no GeoGebra para o preenchimento dessa tabela?
  - ( ) Sem necessidade
  - ( ) Ajuda um pouco
  - ( ) É indispensável
3. Sobre o número de triângulos,
  - a) Quantos triângulos temos na sexta interação?
  - b) É possível em algum momento termos 15600 triângulos? Justifique.
4. Sobre o perímetro,

- 
- a) O que acontece com o perímetro se fizermos um número muito grande de interações?
- b) Se o perímetro inicial do triângulo é 12cm, qual será o novo perímetro após 10 interações?
5. E sobre a área,
- a) Considerando o triângulo inicial de lado 10cm. Qual será a área aproximada da figura para um número muito grande de interações?
- b) Qual a razão entre a área após 5 interações e a área inicial do triângulo?

---

---

## ANEXO C

---

### ATIVIDADE 3 (A ÁRVORE DE PITÁGORAS)

Utilizando como base a figura criada no GeoGebra, considerando o maior quadrado com lado  $l = 10$  e fixando o ângulo de  $45^\circ$  (Árvore Simétrica de Pitágoras), preencha a tabela abaixo e faça as considerações necessárias.

Tabela 8 – Elementos da Árvore de Pitágoras.

Nível	Número de triângulos	Número de quadrados	Perímetro de cada triângulo	Perímetro de cada quadrado	Área de cada triângulo	Área de cada quadrado	Perímetro total	Área total
0								
1								
2								
3								
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n								
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Utilizando a tabela, responda:

1. Que conteúdos do Ensino Médio você precisou para preencher a tabela?
2. Como você classifica a necessidade da construção no GeoGebra para o preenchimento dessa tabela?
  - ( ) Sem necessidade
  - ( ) Ajuda um pouco
  - ( ) É indispensável
3. No item 4, o que garante que o triângulo criado será retângulo?
4. Sobre os triângulos,
  - a) Quantos triângulos temos na sexta interação?
  - b) Qual o perímetro total desses triângulos?
  - c) E a área total?
5. Sobre os quadrados,
  - a) Quantos quadrados temos na sexta interação?
  - b) Qual o perímetro total desses quadrados?
  - c) E a área total?
6. Sobre o Árvore de Pitágoras em estudo,
  - a) Qual o perímetro na sexta interação?
  - b) Qual a área na sexta interação?
  - c) Qual o perímetro quando o número de interações for muito grande?
  - d) Qual a área quando o número de interações for muito grande?