UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Otávio José Corrêa Júnior

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM FOCO NO MÉTODO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

Uberaba – M.G.

2014

Otávio José Corrêa Júnior

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM FOCO NO MÉTODO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática da Universidade Federal do Triângulo Mineiro- UFTM, Departamento de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni, DMA, ICTE – UFTM

Uberaba – M.G.

2014

Catalogação na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Corrêa Júnior, Otávio José

C843c Construções geométricas com foco no método dos lugares geométricos: aspectos teóricos e computacionais / Otávio José Corrêa Júnior. -- 2014.

143 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2014

Orientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni

1. Geometria plana. 2. Construções geométricas. 3. Desenho geométrico. 4. Solução de problemas. 5. Geogebra (Programa de computador). I. Ottoboni, Rafael Rodrigo. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 514.112

Otávio José Corrêa Júnior

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM FOCO NO MÉTODO DOS LUGARES GEOMÉTRICOS: ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

Dissertação de Mestrado apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM, como parte das atividades para obtenção do título de mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Osmar Alessio (ICENE-UFTM)

Prof. Dr. Durval José Tonon (IME-UFG)

Prof. Dr. Rafael Rodrigo Ottoboni (ICTE-UFTM)

Orientador

Uberaba – M.G.

2014

Dedico este trabalho à minha querida esposa, Maria Paula, aos meus queridos filhos, Tales e Helena, aos meus pais, Otávio (*in-memorian*) e Ítala (*in-memorian*), aos meus irmãos e irmãs e a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram, ao longo da minha vida, para que fosse possível sua realização.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem Ele tudo é em vão.

Agradeço ao meu orientador, Professor Doutor Rafael Rodrigo Ottoboni, pela presteza, confiança, amizade e apoio, que foram de importância ímpar para a elaboração deste trabalho.

Agradeço a todos os meus professores, desde os tempos do pré-primário até o presente momento e, em especial, aos professores do Profmat, os quais foram de suma importância para minha formação acadêmica.

Agradeço aos meus colegas de curso que, no decorrer desses dois anos, fizeram parte de minha vida, compartilhando dificuldades, vitórias e alegrias.

Agradeço à direção do Colégio Cenecista Dr. José Ferreira, bem como aos colegas de trabalho dessa Instituição, por terem estado a meu lado nessa jornada.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), idealizadora do Profmat, pela iniciativa de criar um mestrado profissional em âmbito nacional, bem como à Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), por ter tomado a iniciativa de se tornar um dos polos desse projeto.

Agradeço, por fim, a todos os meus familiares que, cada um a seu tempo, contribuíram para a formação do meu caráter.

“A Geometria é a arte de raciocinar sobre as figuras mal desenhadas.”
Poincaré

“Tirar das mãos de um estudante a régua e o compasso é como tirar de uma frase a pontuação que lhe dá sentido”.
O autor

RESUMO

O presente trabalho irá contemplar um breve estudo do "Método dos Lugares Geométricos", aplicado à resolução de problemas de construção geométrica plana. A abordagem apresentada é tradicional, com o uso da régua e do compasso, complementada com aplicações do *software* GeoGebra.

Nesse sentido, o trabalho é composto da apresentação (estabelecimento e construção) dos cinco Lugares Geométricos que podem ser considerados os mais importantes para as construções geométricas fundamentais e para a resolução de problemas elementares de Desenho Geométrico. Para a fixação dos conceitos, cada Lugar Geométrico (L.G.) contará com alguns exemplos de aplicação e, ao final do trabalho, serão apresentados alguns exercícios propostos (para o leitor que se interessar em praticar os conceitos e as construções abordadas). As respostas dos exercícios propostos estarão acompanhadas de sugestões que podem ajudar na resolução.

Além disso, o trabalho apresenta um breve manifesto em relação à exclusão quase total da disciplina Desenho Geométrica das grades curriculares das escolas brasileiras.

Palavras-chave: Geometria Plana, Construções geométricas, Desenho geométrico, Solução de problemas, GeoGebra (Programa de computador).

ABSTRACT

This work will provide a brief study of the "Method of Geometric Places" applied to the resolution of problems of flat geometric construction. The approach presented is traditional, with the use of ruler and compass, complemented with applications software GeoGebra.

In this sense, the work is composed of presentation (establishment and construction) of the five Geometric Places that can be considered the most important for fundamental geometric constructions and for problem solving of elementary geometric design. For the setting of the concepts, each Geometric Place (G.P.) will feature some application examples, and at the end of the presentation it will have some proposed exercises (for the reader who is interested in practicing the concepts and the constructs addressed).

Eventually, they will be presented Add-ons, composed of basic constructions, which must be carried out with the aid of Geometric Places that is being studied.

In addition, the work presents a brief manifest regarding the almost total exclusion of geometric design from the agenda of the brasilian schools.

Keywords: “ruler and compass”, constructions, “plane and solid loci”.

NOTAÇÕES

Neste texto, serão usados os símbolos, apresentados nesta tabela, juntamente com o seu significado.

$\overrightarrow{AB}$	Semirreta de origem **A** passando por **B**
$\overleftrightarrow{AB}$	Reta passando por **A** e **B**
$\overline{AB}$	Segmento de extremidades **A** e **B**
AB	Medida do segmento $\overline{AB}$
L.G.	Lugar Geométrico
$A\hat{O}B$	Ângulo de vértice **O** e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$
$\in$	Símbolo de pertinência
$<$	Menor que
$>$	Maior que
Fig.:	Figura
	Símbolo de ângulo reto
//	Símbolo de paralelismo
$\perp$	Símbolo de perpendicularidade
$\equiv$	Símbolo de congruência
$=$	Símbolo de igualdade
d(O, r)	Distância do ponto **O** até a reta **r**
d(r, s)	Distância entre as retas **r** e **s**
$\hat{A}$	Ângulo de vértice **A**
$\overset{\frown}{AMB}$	Arco de circunferência, passando por **M** com extremidades **A** e **B**

Tabela 1: Símbolos e significados

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

O capítulo 2, apresenta um breve comentário acerca da história e da motivação que nortearam a elaboração deste trabalho.

No capítulo 3, o objetivo principal do trabalho é citado. O capítulo 4 contempla a apresentação dos principais instrumentos de desenho, os quais serão usados ao longo das apresentações das construções geométricas.

O capítulo 5, refere-se à apresentação do Método dos Lugares Geométricos, dos formalismos a eles associados, bem como dos exemplos de aplicações.

O capítulo 6, há uma atividade dinâmica (no GeoGebra) referente ao $L.G._1$, na qual é possível estabelecer uma discussão sobre o número de soluções do problema proposto.

O capítulo 7, dispomos algumas considerações finais.

Nos capítulos 8, 9 e 10 há exercícios propostos, as respostas desses exercícios e a bibliografia adotada para a realização deste trabalho.

Nota: Tanto nos exemplos de aplicação quanto nos exercícios propostos, os dados dos problemas serão fornecidos já dispostos no próprio espaço de resolução. Isso facilita a obtenção de respostas para a conferência dos resultados.

2 HISTÓRIA E MOTIVAÇÃO

Segundo as referências [5] e [8], a Geometria é estudada, desde o Ensino Fundamental, baseando-se nos textos dos *Elementos*, do matemático grego Euclides, escrito por volta de 300 a.C., o qual é tido como o texto que teve o maior número de traduções depois da Bíblia Sagrada.

De acordo com a referência [8], algumas pessoas acreditam que Euclides jamais tenha existido e que esse nome foi usado para representar um grupo de autores dos *Elementos*. Seja lá como for, o texto existe e nele encontra-se a base de toda Geometria Clássica chamada de "Geometria Euclidiana".

De modo formal, a Geometria Euclidiana é estruturada de acordo com o princípio axiomático, segundo o qual conceitos tidos como complexos podem ser entendidos ou explicados por meio de conceitos mais simples. Além disso, os problemas de Geometria podem ter caráter puramente dedutivo ou, então, construtivo.

Os problemas de caráter construtivo são objetos de estudo do Desenho Geométrico Plano que, como o próprio nome sugere, se baseia em conceitos da Geometria Euclidiana Plana.

Por vários anos (cerca de 3 décadas), o Desenho Geométrico foi uma disciplina considerada como componente obrigatório do currículo escolar brasileiro. Ocorre que, na década de 1960, essa disciplina passa a ser opcional, não contando mais com referência quanto a seu conteúdo e a suas metodologias.

Como consequência, ao longo dos anos, o Desenho Geométrico foi sendo “deixado de lado” pela maioria das escolas (públicas e particulares). O resultado desse procedimento, como não poderia deixar de ser, apontava para deficiências no processo Ensino-Aprendizagem de todas as partes da Geometria (principalmente a Geometria Plana). Isso se explica pelo fato de o Desenho Geométrico prover ao estudante ferramentas para o desenvolvimento rigoroso dos postulados (axiomas), teoremas e conceitos, pois exercia o papel importante de unir o abstrato (teorias) e o concreto (construções).

É verdade que, nos dias atuais, existem várias outras ferramentas, como (*softwares*, vídeoaulas e aplicativos...) que podem ajudar no processo Ensino-Aprendizagem de Geometria. No entanto, os tradicionais “régua e compasso” nunca (segundo minha óptica) deveriam ter sido “tirados” das mãos dos estudantes, visto que o uso desses instrumentos ajuda no desenvolvimento das habilidades motora e lógico-criativa.

O Desenho Geométrico vale-se de uma forma de linguagem gráfica, que, como tal, é universal. Uma construção geométrica feita por um estudante brasileiro pode ser facilmente entendida por um estudante estrangeiro que esteja lá em seu país, envolvido com essa disciplina.

A relação do Desenho Geométrico Plano com a Geometria Plana é óbvia. Isso por si só é suficiente para assegurar que a primeira pode contribuir de forma determinante para o aprendizado da segunda. Além disso, o Desenho Geométrico pode contribuir para o Ensino-Aprendizagem de toda a Matemática, bem como de outras disciplinas, pois pode ajudar no desenvolvimento das capacidades de planejar, abstrair e executar projetos com bases em aspectos teóricos (conceitos, postulados e teoremas) e práticos (sob condições preestabelecidas ou sob condições em que se deve usar improvisações).

Na década de 1990, foi possível trabalhar com Desenho Geométrico nas turmas de 7ª e 8ª séries (hoje 8º e 9º anos do Ensino Fundamental) no Colégio Cenecista Dr. José Ferreira (na época, Escola da Comunidade Dr. José Ferreira – Uberaba-MG). A bibliografia adotada era *Elementos de Geometria e Desenho Geométrico* volumes 1, 2 e 3, de José Carlos Putnoki “Jota” [6] e, como material de apoio, era indicada a bibliografia *Desenho Geométrico*, e Isaías Marchesi Júnior.

Naquela época, foi possível perceber um bom desempenho dos alunos, não só em Geometria, mas também em várias outras disciplinas. Esse fato, bem como o contato com a disciplina (Desenho Geométrico), foi um fator motivador para a elaboração deste trabalho.

3 OBJETIVO

O principal objetivo deste trabalho é apresentar O Método dos Lugares Geométricos (parte integrante da disciplina Desenho Geométrico) como ferramenta auxiliar no processo Ensino-Aprendizagem (com ênfase em construções Geométricas Planas). Além disso, reforçar o desejo de que essa disciplina volte a ser parte integrante das grades curriculares das escolas brasileiras em todos os níveis (Ensino Fundamental, Médio e Superior).

4 APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS INSTRUMENTOS DE DESENHO

Como se sabe, as figuras planas ideais são compostas por elementos como vértices, lados e arcos. Tais elementos não possuem espessura. Ocorre que, ao estudar figuras geométricas, geralmente, há a necessidade de representá-las graficamente. Nesse sentido, quando se está diante de problemas de Geometria, são construídas, a mão livre, figuras que, embora sejam "bem feitas", não têm a menor pretensão de serem exatas. No entanto, quando se está diante de um problema de Desenho Geométrico (construção geométrica), o desejo é que a figura a ser construída seja a mais precisa possível (apesar de jamais chegar à exatidão). Para tanto, basicamente dois instrumentos são utilizados: a régua e o compasso (acompanhados de lápis e borracha).

Segundo a referência [6], no sentido original da palavra, a régua não é instrumento de medição. Ela, por excelência, é instrumento de traçados de linhas retas.

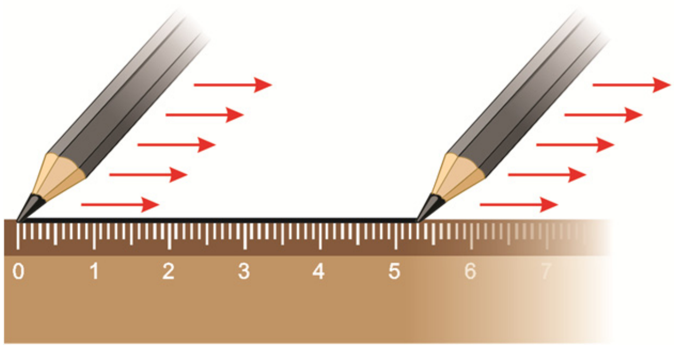


Figura 1: Traçado de linha reta.

Quanto à escala da régua, esta só pode ser usada para introduzir dados no problema ou para medir possíveis respostas de um problema resolvido (Figuras 2a e 2b). Nesse sentido, não é permitido medir um segmento com a régua e, com base nessa medida, obter o seu ponto médio, por exemplo. A obtenção desse ponto deve ocorrer por meio de construções, como teremos a oportunidade de ver ao longo deste texto.

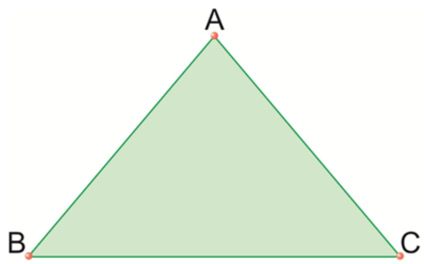


Figura 2a: Resultado final de um problema resolvido graficamente.

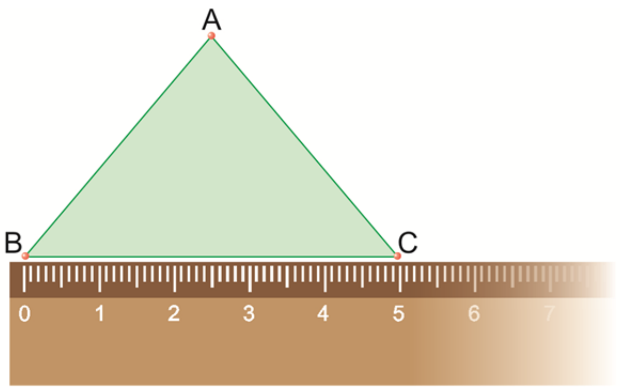


Figura 2b: Avaliação da medida de $\overline{BC}$ ($BC \cong 5{,}0$ cm).

Por outro lado, o compasso é o instrumento que, por excelência, é usado para traçar circunferências (ou arcos de circunferências) e, também, para executar o transporte de segmentos.

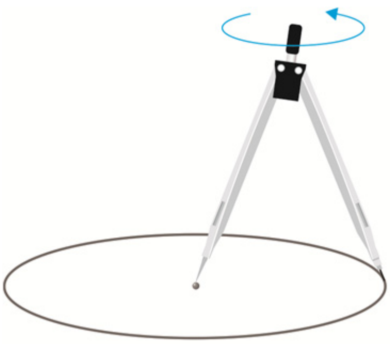


Figura 3a: Traçado de circunferência (ou arco de circunferência)

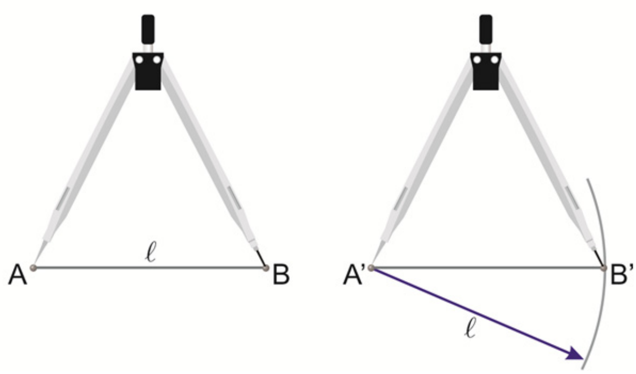


Figura 3b: Transporte de segmento

5 NOÇÕES PRELIMINARES

Ao longo do texto iremos usar algumas definições, alguns conceitos e alguns resultados que são fundamentais para um bom aproveitamento dos assuntos abordados. Nesse sentido, apresentamos as seguintes Noções Preliminares:

➢ Ponto médio de segmento

Ponto médio de um segmento de reta é o ponto desse segmento que o divide em dois outros segmentos congruentes entre si.

Assim, na figura, se **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$, ou seja, AM = MB.

Figura 4: Ponto médio.

➢ Retas concorrentes

Duas retas que têm um único ponto em comum (intersectam-se num único ponto) são chamadas de retas concorrentes.

Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são concorrentes no ponto **A**.

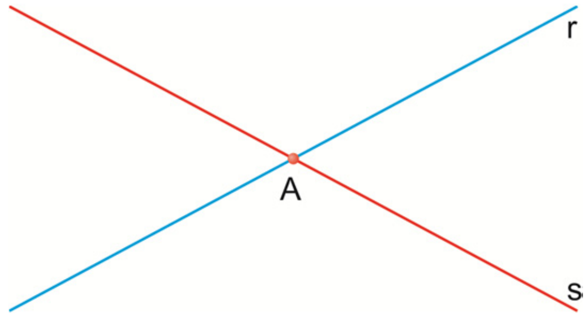


Figura 5: Retas concorrentes.

$r \cap s = \{A\} \Rightarrow$ **r** e **s** são concorrentes (r X s).

Um caso particular de retas concorrentes é o de retas perpendiculares, as quais formam 90° entre si, conforme figura a seguir:

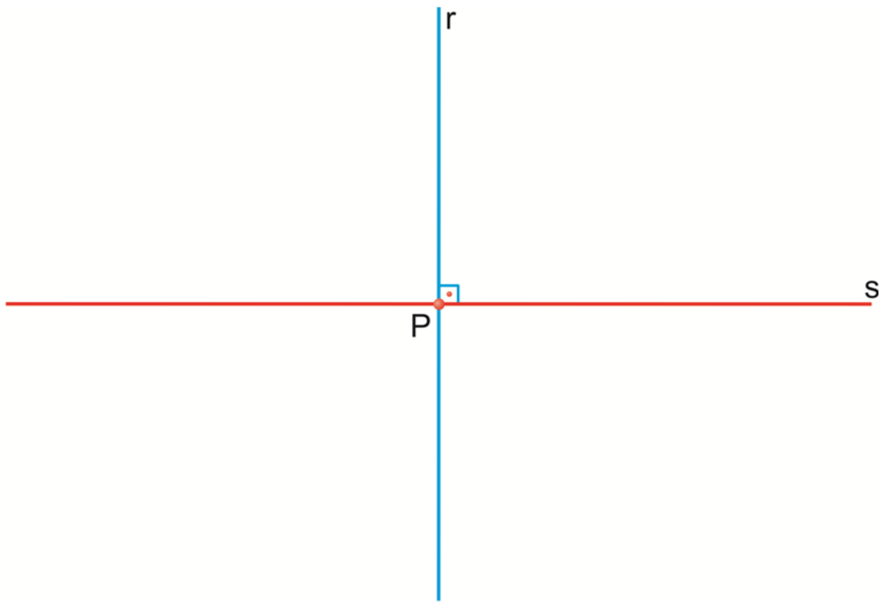


Figura 6: Retas perpendiculares.

$r \cap s = \{P\};\ \widehat{rs} = 90° \Rightarrow r \perp s$

➢ **Retas paralelas distintas**

Duas retas coplanares que não têm ponto em comum (não intersectam-se) são chamadas de retas paralelas distintas.

Na figura a seguir, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.

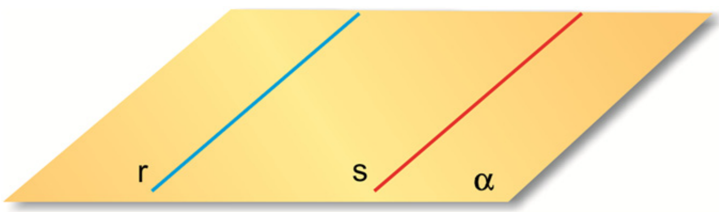


Figura 7: Retas paralelas distintas.

$r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$, $r \cap s = \emptyset \Rightarrow$ **r** e **s** são paralelas ($r \,//\, s$).

➢ Postulado de Euclides

Uma das proposições mais importantes da Geometria Euclidiana é o postulado de Euclides (300 a.C.), que pode ser assim enunciado:

Por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela a uma reta dada.

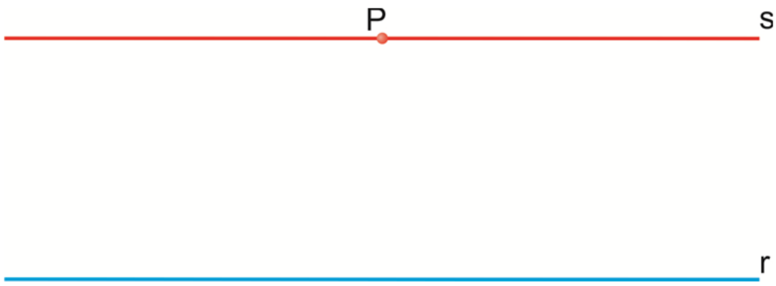
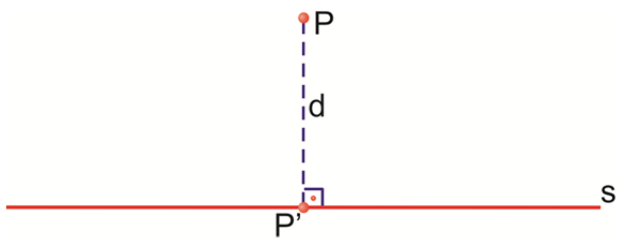


Figura 8: Postulado de Euclides.

A unicidade da reta paralela a uma reta dada, citada no postulado de Euclides ou postulado das paralelas, caracteriza a geometria que desenvolvemos neste texto (Geometria Euclidiana).

➢ Distância de ponto a reta

A distância **d** de um ponto **P** a uma reta **s** é dada pela medida do segmento perpendicular com uma extremidade em **P** e a outra em **s**.

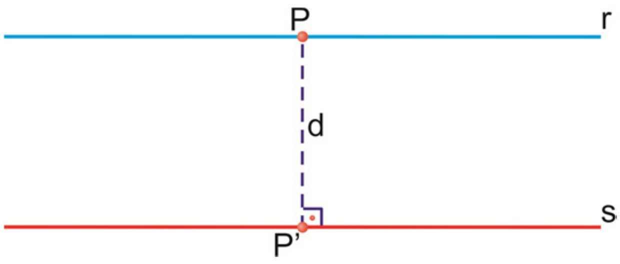


d = PP’

Figura 9: Distância de ponto a reta.

➢ Distância entre duas retas paralelas

A distância **d** entre duas retas paralelas **r** e **s** é dada pela distância de um ponto **P** de uma delas até a outra.



d = PP'

Figura 10: Distância de duas retas paralelas.

➢ Mediatriz de segmento

Chama-se mediatriz de um segmento a reta perpendicular ao segmento, conduzida pelo seu ponto médio.

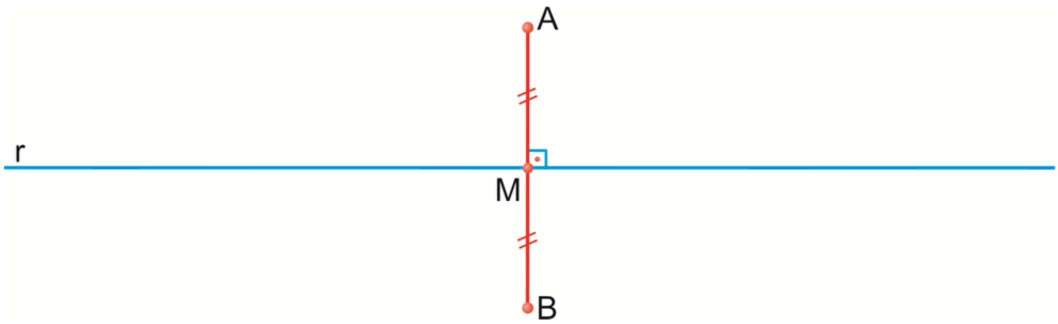


Figura 11: Mediatriz.

$$\left.\begin{array}{l} AM \equiv MB \\ M \in r \\ r \perp \overline{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{r} \text{ é a mediatriz de } \overline{AB}.$$

➢ **Bissetriz de um ângulo**

A bissetriz de um ângulo é a semirreta que tem origem no vértice do ângulo, dividindo-o internamente em dois ângulos de medidas iguais.

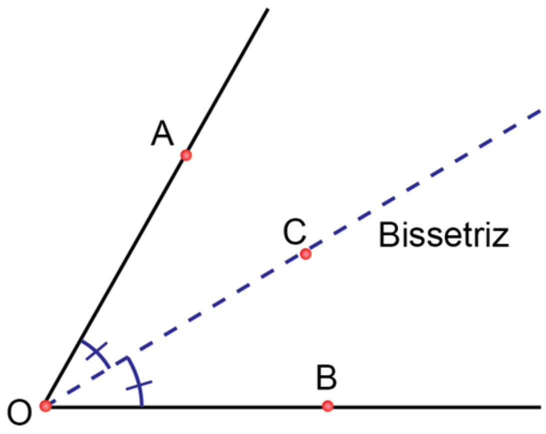


Figura 12: Bissetriz.

$A\hat{O}C = B\hat{O}C \Rightarrow \overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$.

➢ **Ceviana de um triângulo**

Tomando-se um vértice de um triângulo e um ponto qualquer da reta suporte do lado oposto, o segmento assim determinado recebe o nome de ceviana (em homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva que fez estudos sobre esses elementos).

Assim, na figura a seguir, os segmentos $\overline{AM}$, $\overline{AN}$ e $\overline{AP}$ são cevianas do triângulo ABC (bem como os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$).

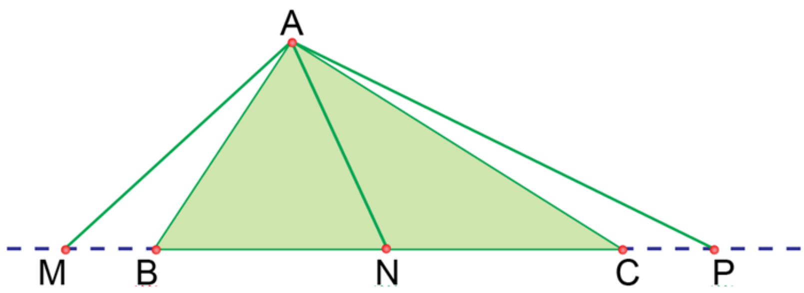


Figura 13: Cevianas.

- **Altura**

É a ceviana perpendicular à reta suporte do lado oposto.

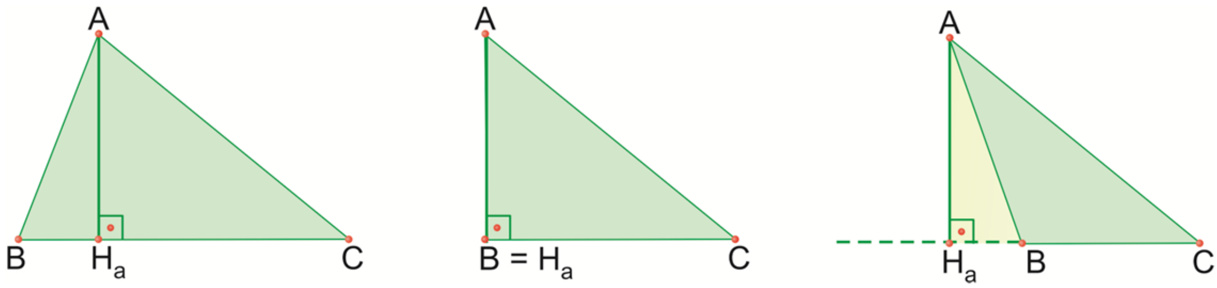


Figura 14: Altura.

$\overline{AH_a}$ é a altura relativa ao vértice **A**, sendo que $\mathbf{H_a}$ é o "pé" dessa altura.

Nessas figuras, podemos notar que a altura pode ser interna ao triângulo, externa a ele, ou coincidente com um de seus lados.

- **Mediana**

É a ceviana que une um vértice ao ponto médio do lado oposto.

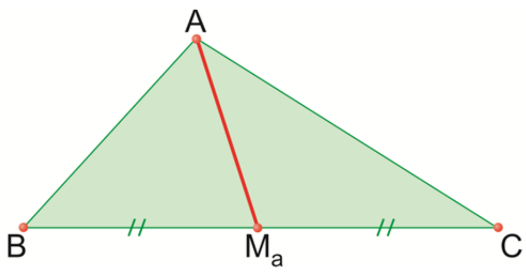


Figura 15: Mediana.

$\overline{AM_a}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$, sendo que $\mathbf{M_a}$ é o ponto médio desse lado.

- **Bissetriz interna**

É a ceviana que divide o ângulo interno do triângulo em dois outros congruentes.

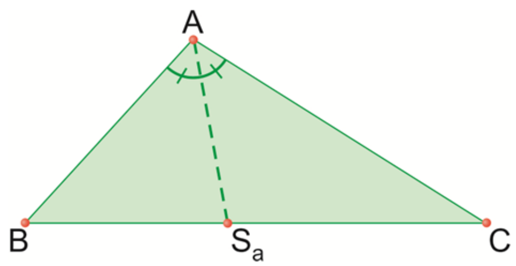


Figura 16: Bissetriz.

$\overline{AS_a}$ é a bissetriz interna relativa ao lado $\overline{BC}$.

➢ **Triângulo isósceles**

É aquele que tem dois lados de mesma medida.

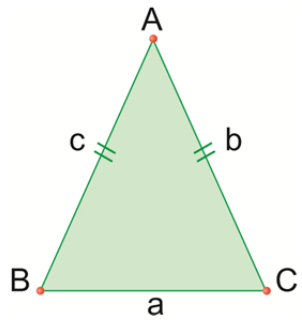


Figura 17: Triângulo isósceles.

$$\left.\begin{array}{l} AC = AB \\ b = c \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \text{ é isósceles.}$$

Num triângulo isósceles, diz-se que:

• os lados de mesma medida formam o que se chama ângulo do vértice do triângulo;

• o lado oposto ao ângulo do vértice denomina-se base do triângulo.

➢ **Triângulo equilátero**

É aquele que tem os três lados de mesma medida.

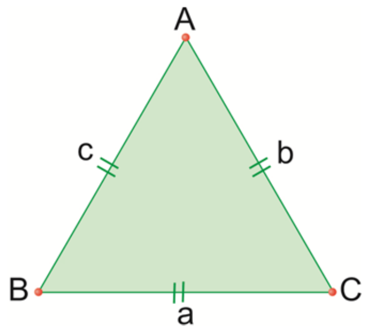


Figura 18: Triângulo equilátero.

$$\left.\begin{array}{l} AB = AC = BC \\ a \;=\; b \;=\; c \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\ ABC \text{ é equilátero.}$$

➢ **Teoremas do triângulo isósceles**

• Num triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Demonstração:

Consideremos o triângulo ABC, isósceles de base $\overline{BC}$, e a6nalisemos os triângulos ABC e ACB, que evidentemente são congruentes por qualquer caso de congruência.

Usemos o caso L.A.L.

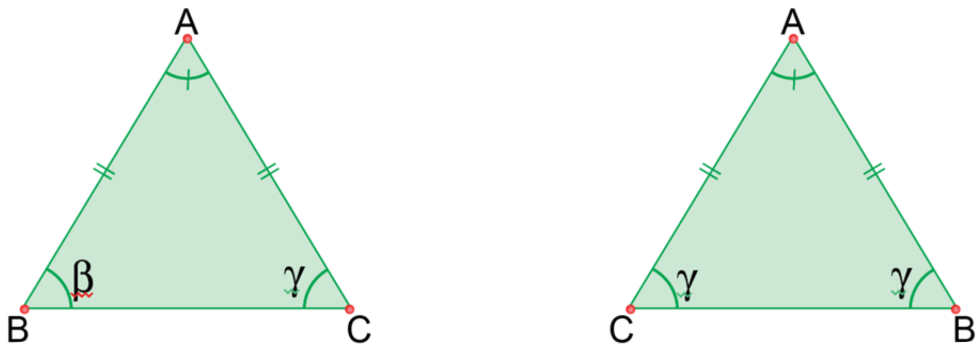


Figura 19: Caso L.A.L.

Tomando $\overline{AB}$ (no triângulo ABC) como homólogo de $\overline{AC}$ (no triângulo ACB), temos que $\hat{C}$ γ no triângulo ABC será correspondente de $\hat{B}$ (β no triângulo ACB). Assim:

$\alpha = \beta \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$

• Num triângulo isósceles a Mediana, a Bissetriz e a Altura relativas ao vértice oposto à base estão contidas na mediatriz dessa base.

Demonstração:

Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{AB}$, no qual traçamos a mediana $\overline{AM}$.

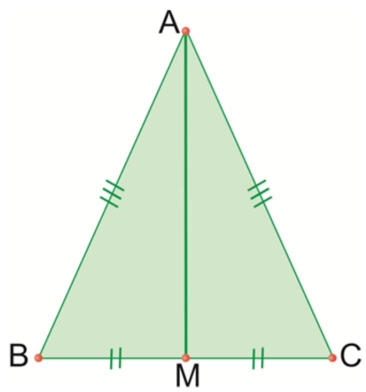


Figura 20: Mediana de $\overline{BC}$.

Os triângulos AMB e AMC são congruentes pelo caso Lado, Lado, Lado (L.L.L.). Então:

- $B\hat{A}M \equiv C\hat{A}M$, indicando que $\overline{AM}$ é bissetriz de $B\hat{A}C$.
- $A\hat{M}B \equiv A\hat{M}C$.

Como $A\hat{M}B + A\hat{M}C = 180°$, então $A\hat{M}B = A\hat{M}C = 90°$.

Desse modo $\overline{AM} \perp \overline{AB}$.

Desses resultados concluímos que $\overline{AM}$ é mediana (por construção), é altura, é bissetriz e está contida na mediatriz de $\overline{AB}$.

➢ **Teorema da soma dos ângulos internos**

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

$$\mathbf{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

Figura 21: Ângulos do triângulo.

Demonstração:

Sejam $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ e $\hat{\mathbf{C}}$ os ângulos internos de um triângulo ABC.

Por **A** trace uma reta (**r**) paralela ao lado $\overline{BC}$, determinando os ângulos $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$.

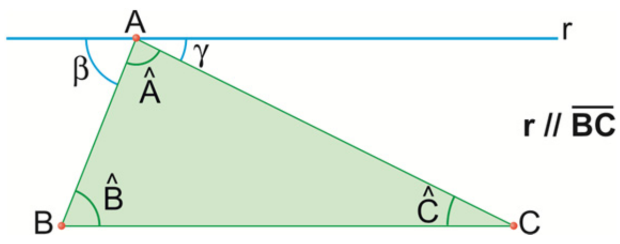


Figura 22: Construção auxiliar 1.

Como r // $\overline{BC}$, os ângulos $\boldsymbol{\beta}$ e $\boldsymbol{\gamma}$ determinados são tais que:

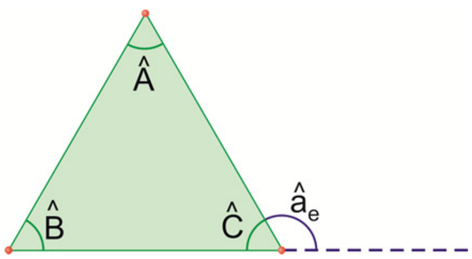
$\beta = \hat{B}$ (alt. internos) $\qquad \gamma = \hat{C}$ (alt. internos)

$\beta + \hat{A} + \gamma = 180°$ (ângulo raso) $\Rightarrow \hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180°$

$$\therefore\ \mathbf{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°}$$

➢ **Teorema da medida do ângulo externo**

A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não-adjacentes.

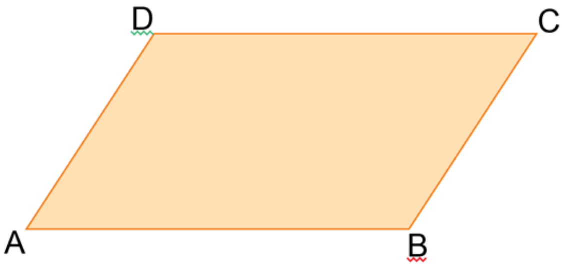


$$\mathbf{a_e = \hat{A} + \hat{B}}$$

Figura 23: Ângulo externo.

➢ **Paralelogramo**

É o quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

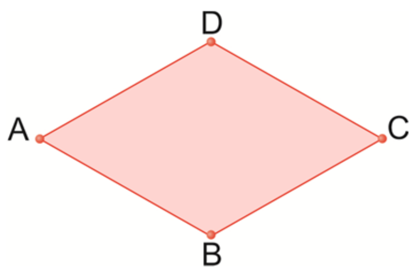


$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ e } \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

Figura 24: Paralelogramo.

➢ **Losango**

É todo quadrilátero equilátero (tem os quatro lados congruentes).



$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA}$$

Figura 25: Losango.

- **Retângulo**

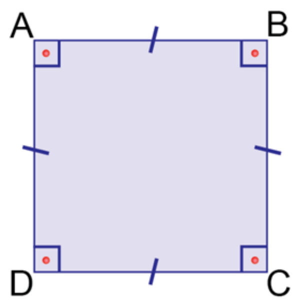
É todo quadrilátero equiângulo, ou seja, que tem todos os quatro ângulos congruentes, sendo 90° a medida de cada um, visto que somam 360°.

$$\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} = 90°$$

Figura 26: Retângulo.

- **Quadrado**

É todo quadrilátero equilátero e equiângulo.

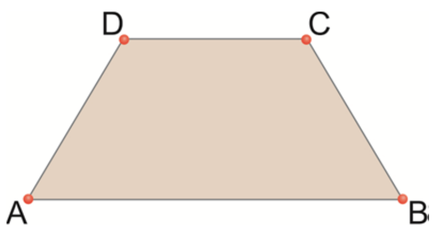


$$\overline{AB} \equiv \overline{BC} \equiv \overline{CD} \equiv \overline{DA} \quad \text{e} \quad \hat{A} \equiv \hat{B} \equiv \hat{C} \equiv \hat{D} = 90°$$

Figura 27: Quadrado.

- **Trapézio**

É todo quadrilátero que apresenta somente dois lados paralelos.



$$\overline{AB} \ // \ \overline{CD}$$

Figura 28: Trapézio.

__Nota:__ Se os lados não paralelos forem congruentes, o Trapézio é isósceles.

- **Circunferência**

Uma circunferência de centro **O** e raio **r** é a figura formada pelos pontos do plano que distam **r** de **O**.

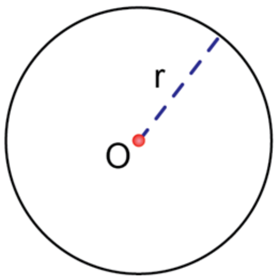


Figura 29: Circunferência.

- **Corda**

É todo segmento cujos extremos pertencem a uma mesma circunferência. A corda que passa pelo centro é denominada diâmetro da circunferência.

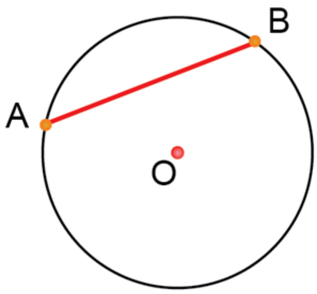


Figura 30a: Corda $\overline{AB}$

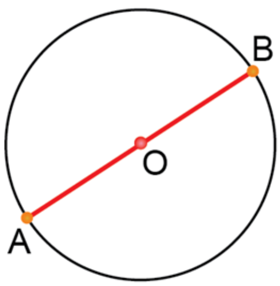


Figura 30b: Diâmetro $\overline{AB}$

Percebe-se que o diâmetro tem medida igual ao dobro do raio.

- **Ângulo inscrito**

É todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e cujos lados contêm cordas dessa circunferência.

Em cada figura a seguir o ângulo $A\hat{C}B$ está inscrito no arco $\overset{\frown}{ACB}$, sendo que $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente a esse ângulo.

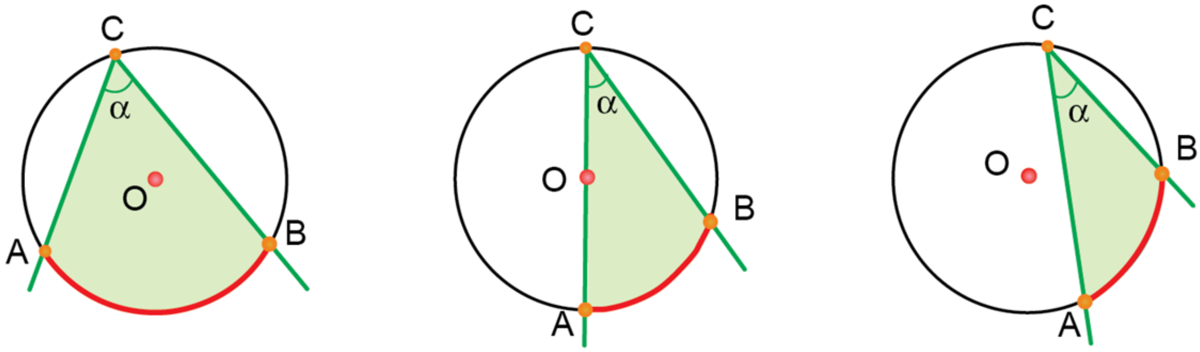


Figura 31: Ângulos inscritos.

A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco correspondente.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{\mathbf{AB}}}{\mathbf{2}}$$

Demonstração:

Usemos, sem perda da generalidade, o caso em que um dos lados do ângulo contém um diâmetro.

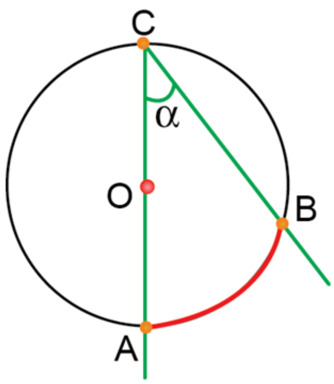


Figura 32a: Ângulo e arco.

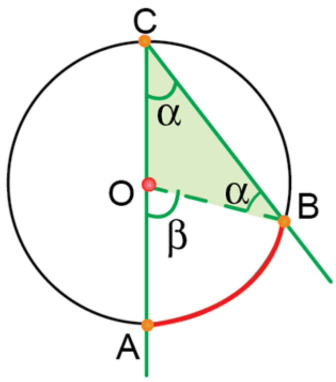


Figura 32b: Construção auxiliar 2.

ΔOBC é isósceles, pois $\overline{OC} \equiv \overline{OB}$. Daí, temos:

$O\hat{C}B \equiv O\hat{B}C = \alpha \Rightarrow A\hat{O}B = \beta$ (externo) $\Rightarrow A\hat{O}B = O\hat{C}B + O\hat{B}C$

$\beta = \alpha + \alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \Rightarrow \beta$ é ângulo central $\beta \Rightarrow 2\alpha = \overset{\frown}{AB}$

$$\therefore \alpha = \frac{\overset{\frown}{\mathbf{AB}}}{\mathbf{2}}$$

Consequência:

Ângulos inscritos num mesmo arco são congruentes.

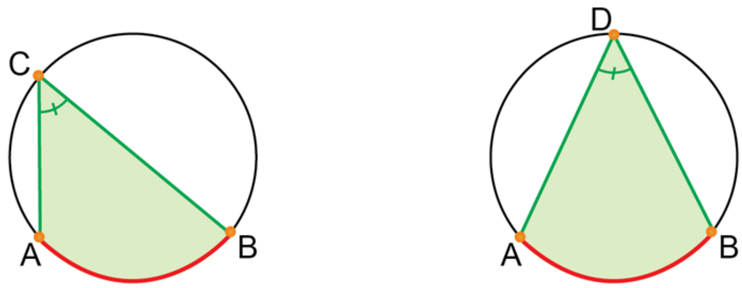


Figura 33: Ângulos inscritos 2.

Justificativa:

$A\hat{C}B$ e $A\hat{D}B$ estão inscritos nos arcos $\overset{\frown}{ACB}$ e $\overset{\frown}{ADB}$.

➢ **Ângulo de segmento (semi-inscrito)**

É todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência, sendo um de seus lados secante, e o outro, tangente à circunferência.

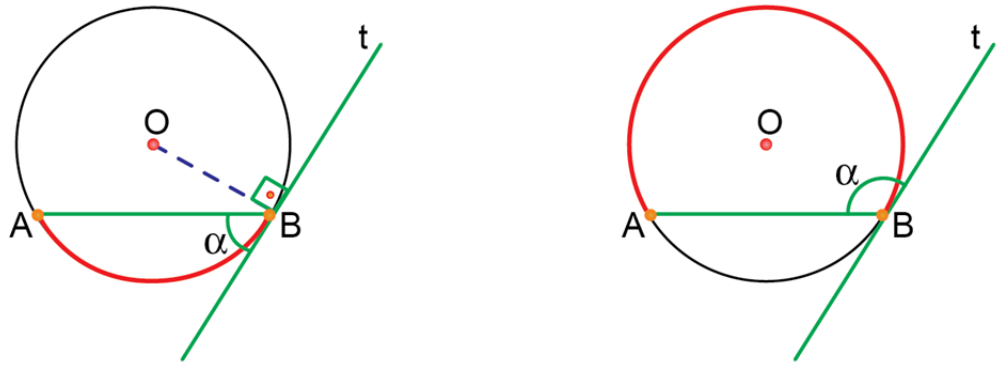


Figura 34: Ângulos semi-inscritos.

A medida do ângulo de segmento é igual à metade da medida do arco correspondente.

$$\therefore\ \alpha = \frac{\overset{\frown}{\mathbf{AB}}}{\mathbf{2}}$$

Demonstração:

Observe, sem perda da generalidade, o 1º caso.

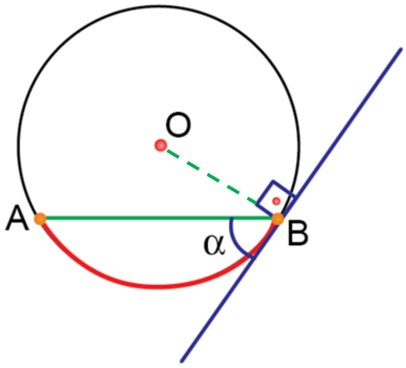


Figura 35a: Ângulo e arco 2.

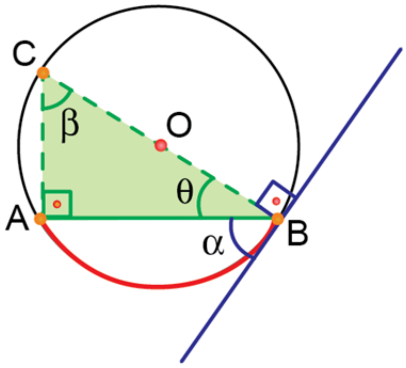


Figura 35b: Construção auxiliar 3.

No ΔABC, CÂB = 90° (ângulo inscrito em semicircunferência).

$$\left.\begin{array}{l}\theta + \alpha = 90^\circ \\ \beta + \theta = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \alpha$$

$$\beta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \text{inscrito}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

➢ **Incentro de um triângulo**

É o centro (**I**) da circunferência inscrita nesse triângulo.

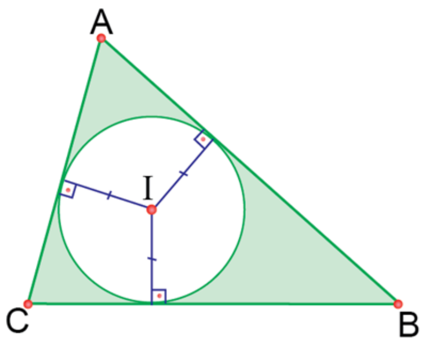


Figura 36: Incentro.

➢ **Circuncentro de um triângulo**

É o centro (**O**) da circunferência circunscrita a esse triângulo.

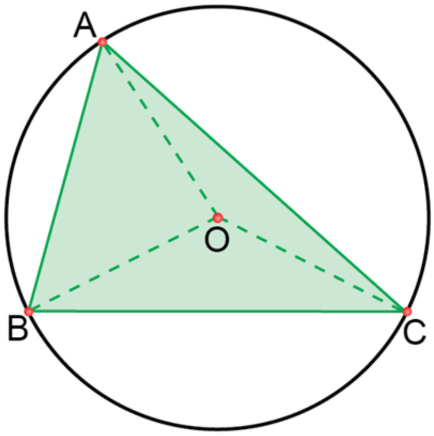


Figura 37: Circuncentro.

➢ **Hexágono Regular**

É o polígono equilátero e equiângulo que apresenta 6 lados.

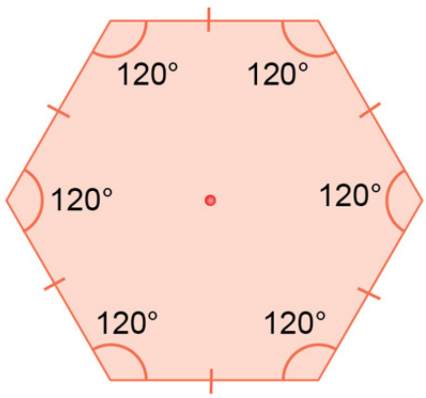


Figura 38: Hexágono regular.

Num hexágono regular a medida do lado é igual a medida do raio da circunferência circunscrita a ele.

Demonstração:

Seja $\overline{AB}$ o lado de um hexágono regular inscrito numa circunferência de centro **O**. Basta mostrarmos que o triângulo AOB é equilátero.

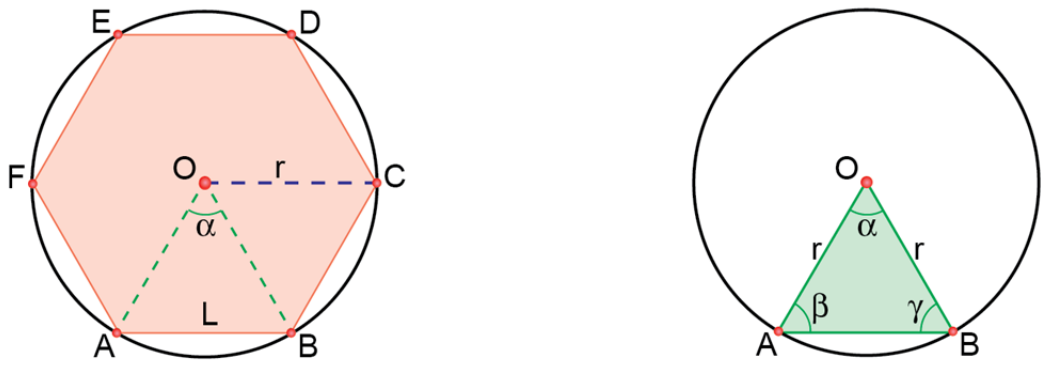


Figura 39: Construções auxiliares.

$6\alpha = 360° \Rightarrow \alpha = 60°$

ΔAOB:

$OA = OB \Rightarrow \gamma = \beta$

$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow 60° + \beta + \beta = 180°$

$2\beta = 120° \Rightarrow \beta = 60°$

Se $\alpha = \beta = \gamma = 60°$, então o triângulo AÔB é equilátero.

$\therefore$ **AB = r**

6 APRESENTAÇÃO DO MÉTODO

O Método dos Lugares Geométricos é constituído de um sistema de linguagem com procedimentos próprios que pode proporcionar maior praticidade no entendimento de enunciados e na elaboração de estratégias para a resolução de vários problemas de construção geométrica. Nesse sentido, serão apresentados cinco dos principais Lugares Geométricos Planos.

Primeiramente, é preciso definir Lugar Geométrico Plano de forma clássica e formal:

Uma figura plana é denominada Lugar Geométrico (L.G.) dos pontos que possuem uma determinada propriedade quando e somente quando:

- todos os pontos da figura possuem a citada propriedade (1ª parte);
- somente os pontos dessa figura possuem essa propriedade (2ª parte).

Neste texto, esses Lugares Geométricos serão apresentados de forma didaticamente gradativa, seguindo a seguinte rotina:

- definição por meio da propriedade;
- construção intuitiva (com base na definição);
- conjectura (com base na construção intuitiva);
- demonstração;
- construção com régua e compasso;
- construção com GeoGebra;
- aplicação genérica;
- exemplos de aplicação.

A **definição** visa à apresentação do Lugar Geométrico por meio de sua propriedade característica.

A **construção intuitiva** consiste em esboçar o Lugar Geométrico em questão sob a forma de uma figura a qual pode ser feita a mão livre. Essa figura deve ser elaborada mediante a propriedade fundamental do Lugar Geométrico (L.G.) em questão.

A **conjectura**, com base na construção intuitiva, consiste em criar uma expectativa em torno da natureza da figura que compõe o L.G. em questão.

A **demonstração** visa a formalizar e atribuir o rigor necessário ao estabelecimento do L.G. estudado. A demonstração será constituída de duas partes:

1ª Parte:
- Hipótese: Se um ponto pertence à figura que representa o L.G.
- Tese: Então, o ponto apresenta a propriedade do L.G.

2ª Parte:
- Hipótese: Se um ponto apresenta a propriedade do L.G.
- Tese: Então, o ponto pertence à figura que representa o L.G.

A **construção com régua e compasso** consiste em reproduzir, com o auxílio desses instrumentos, a figura plana que representa o L.G. em questão.

A **construção com uso do GeoGebra** visa à utilização desse *software*, incrementando o estudo.

A **aplicação genérica** visa a sistematizar o uso do L.G. estudado, no sentido de associá-lo à propriedade que o caracteriza (não no sentido de memorização).

Os **exemplos de aplicação** visam a fixar a propriedade e os conceitos associados ao L.G. estudado.

6.1 L.G.$_1$: Circunferência

– Definição:

É o Lugar Geométrico dos pontos **P** de um plano que se situam a uma distância **r** dada de um ponto **O** dado nesse plano.

– Construção intuitiva:

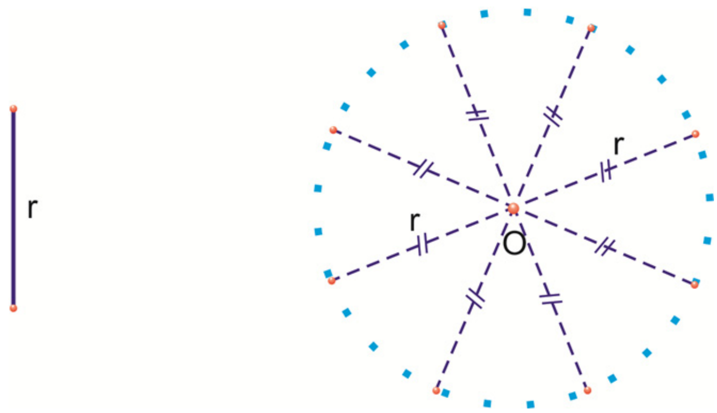


Figura 40: Esboço do L.G.$_1$.

– Conjectura:

A disposição dos pontos do L.G.$_1$ (equidistantes de **O** a uma distância **r**) sugere que ele seja uma circunferência de centro **O** de raio **r**.

– Demonstração:

1ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: Se } \mathbf{P} \text{ pertence ao L.G.}_1 \text{ (Circunferência)} \\ \text{Tese: Então } \overline{OP} = r \end{cases}$

Por definição, todos os pontos de uma circunferência equidistam de seu centro. Assim, os pontos que pertencem ao L.G.$_1$ situam-se em uma circunferência de centro **O** e raio **r**.

2ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: Se } \overline{OP} = r. \\ \text{Tese: Então, } \mathbf{P} \text{ pertence à circunferência de centro } \mathbf{O} \text{ e raio } \mathbf{r}. \end{cases}$

Seja **P** um ponto do plano tal que $\overline{OP}$ = r. Pela definição, esse ponto pertence a uma circunferência de centro **O** e raio **r**.

Uma outra forma de se comprovar essa 2ª parte é a seguinte:

Ao tomar um ponto **Q** externo à circunferência de centro **O** e raio **r**, tem-se $\overline{QR} > r$ (Fig: 41a), e, ao tomar **S** interno à essa circunferência, tem-se $\overline{OS} < r$ (Fig. 41b).

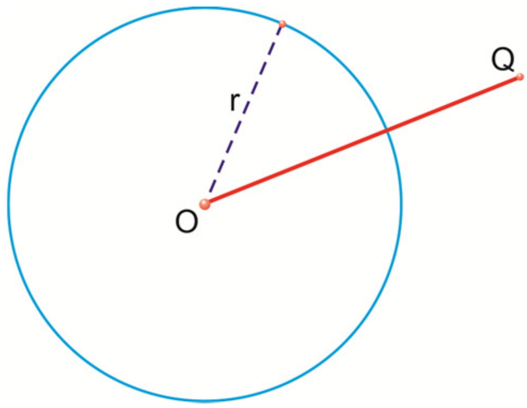


Figura 41a: Pontos externos.

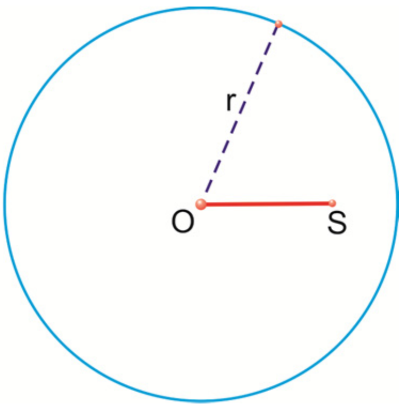


Figura 41b: Pontos internos.

Portanto, o L.G.$_1$ é uma circunferência de centro **O** e raio **r**.

– Construção com compasso:

1º passo:

Promover uma abertura de medida **r** nas "pernas" do compasso.

2º passo:

Centrar o compasso em **O** (Ponta seca em **O**)

3º passo:

Traçar a circunferência λ de centro em **O** e raio medindo **r**.

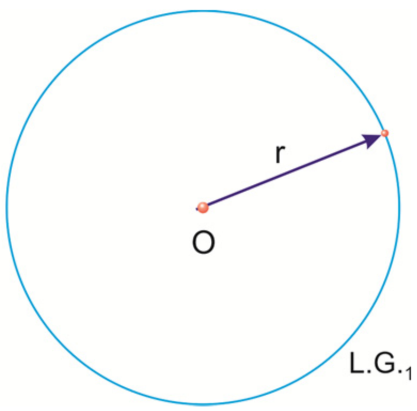
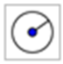


Figura 42: L.G.$_1$ Construído.

– Construção com uso do GeoGebra:

1º caso: São dados o ponto **O** e a medida do raio do L.G.$_1$.

1º passo:

Na barra de ferramentas, selecionar o ícone , o qual permite construir uma circunferência de centro **O**, com raio de medida conhecida.

2º passo:

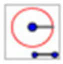
Selecionar o ponto **O**. Feito isso, uma janela se abrirá.

3º passo:

Digitar a medida do raio, completando a construção.

2º caso: São dados o ponto **O** e o segmento que representa a medida do raio do L.G.

1º passo:

Na barra de ferramentas, selecionar o ícone , o qual permite construir uma circunferência de centro dado e raio conhecido.

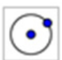
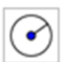
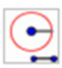
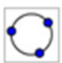
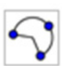
2º passo:

Selecionar o ponto **O** e, em seguida, o segmento dado.

3º passo:

Selecionar o ponto **O**, finalizando a construção.

<u>**Nota:**</u>

– Os ícones , , , , , , , ,  fazem parte de um mesmo grupo de ferramentas.

É importante ressaltar que, ao construir o L.G. dos pontos que distam **r** de **O**, estamos determinando dois Lugares Geométricos: o L.G. dos pontos cuja distância até **O** é menor que **r**, internos ao L.G.$_1$ (Fig. 43a), bem como o L.G. dos pontos cuja distância até **O** é maior que **r**, externos ao L.G.$_1$ (Fig. 43b).

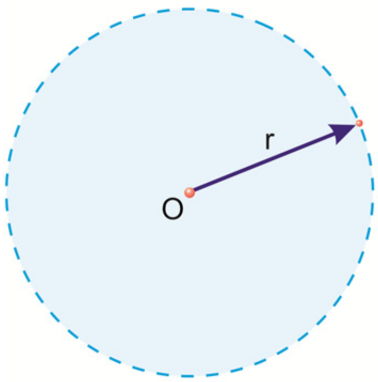


Figura 43a: Pontos cuja distância até **O** é menor do que **r**.

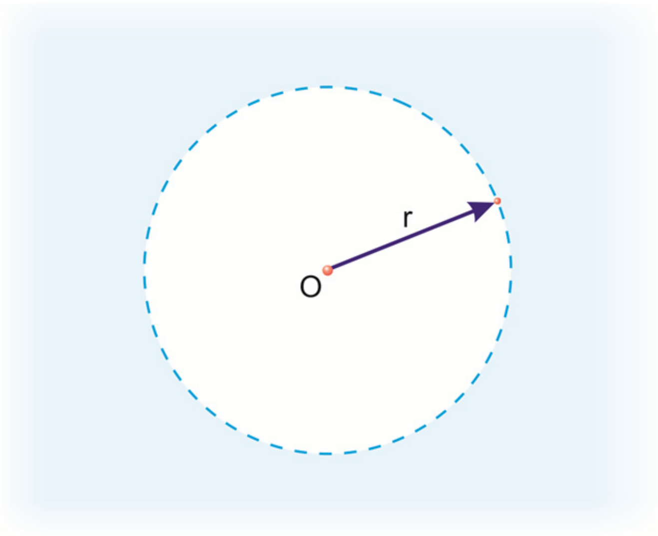


Figura 43b: Pontos cuja distância até **O** é maior do que **r**.

– Aplicação genérica:

O L.G.$_1$ deverá ser construído sempre que procurarmos um ponto de um plano que esteja a uma distância conhecida (**r**) de um ponto conhecido (**O**) desse plano.

A seguir, seguem alguns exemplos de aplicações:

Exemplo 1: São dados um ponto **O**, uma distância **r** e uma reta **s** em um plano.

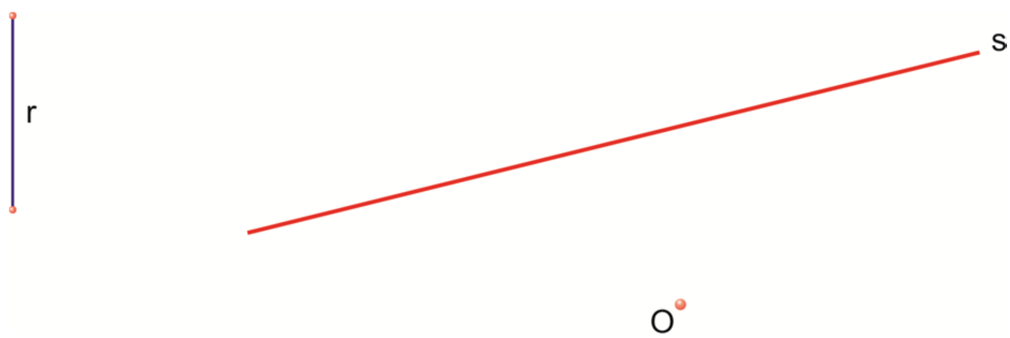


Figura 44: Dados do problema (Exemplo 1 do L.G.$_1$).

Obtenha, na reta **s**, um ponto **P** que dista **r** de **O**.

Resolução:

– Solução intuitiva:

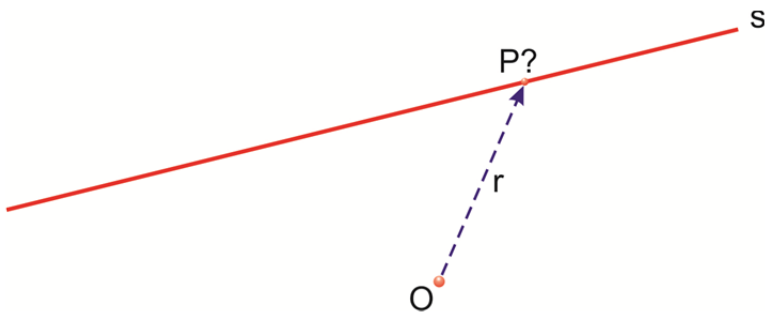


Figura 45: Suposto resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_1$).

A solução intuitiva sugere que o ponto procurado pertence à reta **s** ($P \in s$) e dista **r** de **O** ($\overline{OP} = r$) Deve-se, então, construir o L.G.$_1$ de centro **O** e raio **r**.

– Solução gráfica:

1º passo:

Construir para, o ponto **O**, o L.G.$_1$ de medida **r**.

2º passo:

Verificar, na reta **s**, os pontos pertencentes ao L.G. construído.

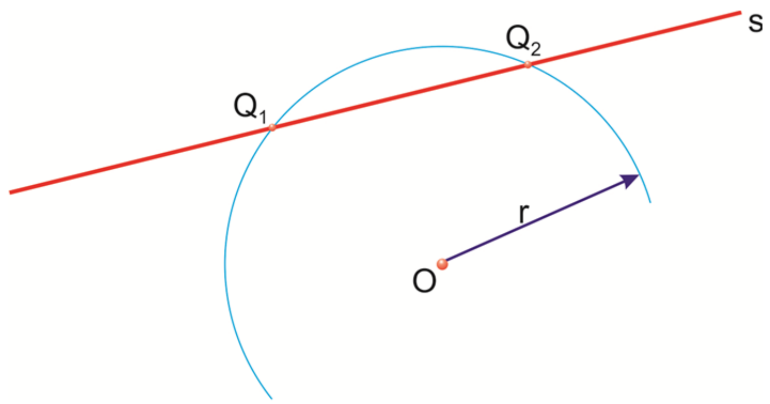


Figura 46: Problema resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_1$).

O problema admitiu duas soluções: $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$.

Exemplo 2: É dada uma curva **c**, um ponto **O** e uma distância **r**.

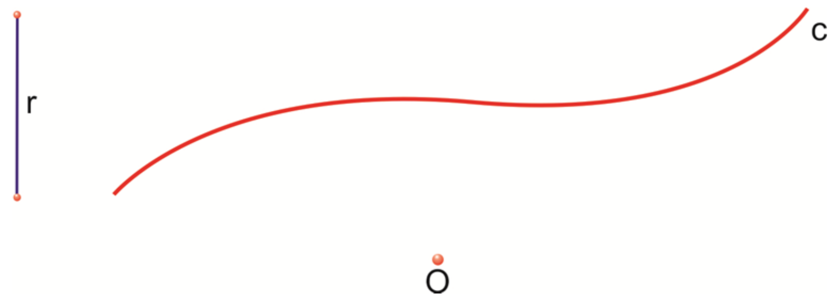


Figura 47: Dados do problema (Exemplo 2 do L.G.$_1$).

Construa, passando por **O**, uma circunferência de raio **r** com centro em **c**.

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do centro **P** da circunferência procurada (λ).

– Solução intuitiva:

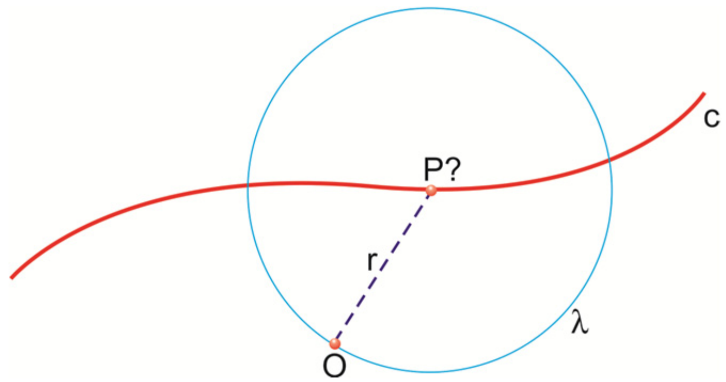


Figura 48: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_1$).

–Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro **P** da circunferência λ pertence à curva **C** ($P \in C$) e dista **r** de **O** ($\overline{OP} = r$). Deve-se, então, construir o L.G.$_1$ de centro **O** e raio **r**.

1º passo:

Construir, para o ponto **O**, o L.G.$_1$ de medida **r**.

2º passo:

Verificar, na curva **c**, o ponto **P** pertencente ao L.G. construído.

3º passo:

Construir a circunferência λ de centro **P** e raio **r** (a qual passará por **O**).

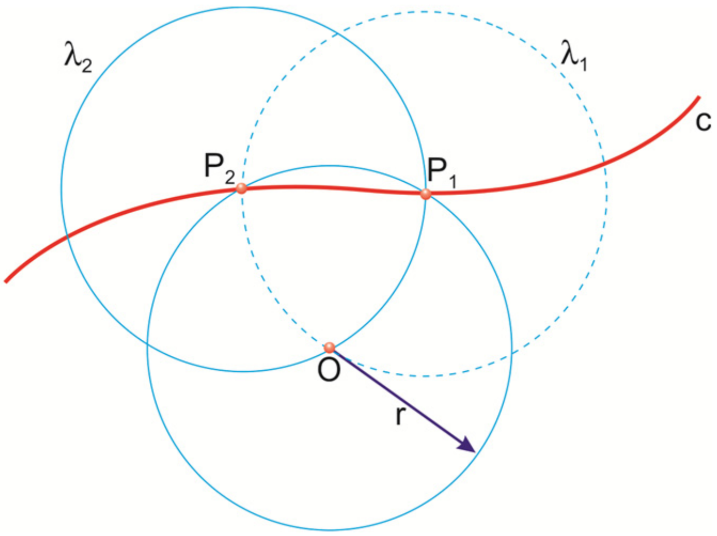


Figura 49: Problema resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_1$).

O problema admitiu duas soluções λ_1 e λ_2.

Exemplo 3: De um triângulo ABC são dados o lado $\overline{AB}$ (Fixo), a medida a do lado $\overline{BC}$ e a medida **b** do lado $\overline{AC}$.

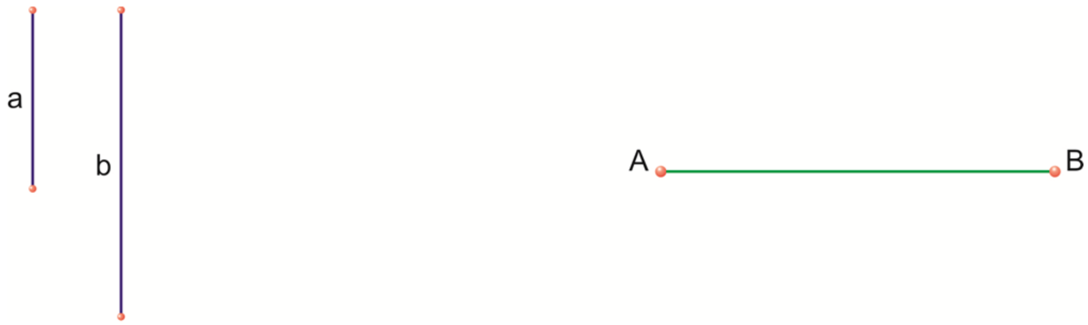


Figura 50: Dados do problema (Exemplo 3 do L.G.$_1$).

Construa esse triângulo.

Resolução:

O problema se resolve obtendo-se o vértice **C**, visto que **A** e **B** são conhecidos.

– Solução intuitiva:

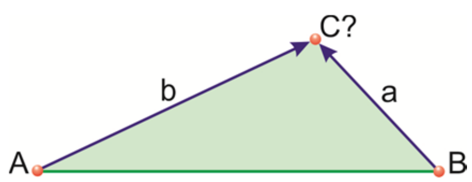


Figura 51: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_1$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que **C** dista **a** de **B** ($\overline{BC}$ = a) e dista **b** de **A** ($\overline{AC}$ = b). Deve-se, então, construir um L.G.$_1$ de centro **B** e raio a e outro L.G.$_1$ de centro **B** e raio **a** e outro L.G.$_1$ de centro **A** e raio **b**. O vértice **C** pertencerá a ambos os L.Gs construídos.

1º passo:

Construir, para o vértice **A**, um L.G.$_1$ de medida **b**.

2º passo:

Construir, para o vértice **B**, um L.G.$_1$ de medida **a**.

3º passo:

Observar o ponto **C** nas intersecções dos L.Gs construídos.

4º passo:

Construir os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

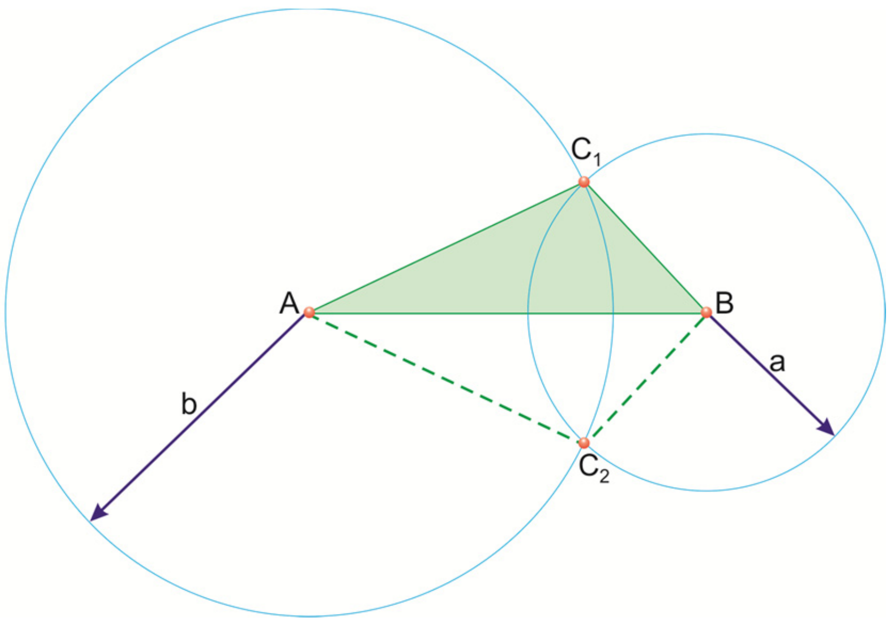


Figura 52: Problema resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_1$).

No que se refere a resultado métrico, no qual apenas as medidas dos elementos são relevantes, o problema admite solução única (pois os triângulos ABC$_1$ e ABC$_2$ são congruentes, embora distintos).

Exemplo 4: De um losango ABCD são dados o lado $\overline{AB}$ (fixo) e a reta r, suporte do lado $\overline{CD}$, tal que $\overline{AB}$ // r.

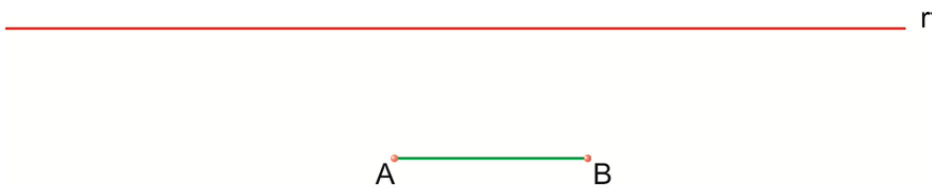


Figura 53: Dados do problema (Exemplo 4 do L.G.$_1$).

Construa esse losango.

Resolução:

O problema se resolve obtendo-se os vértices **C** e **D**, visto que **A** e **B** são conhecidos.

– Solução intuitiva:

Seja ℓ a medida de $\overline{AB}$. Como vimos nas Noções Preliminares os quatro lados do losango são congruentes.

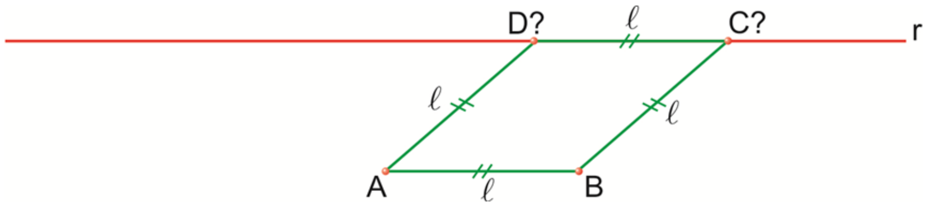


Figura 54: Suposto resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_1$).

–Solução Gráfica:

A solução intuitiva sugere que **C** dista ℓ de **B** ($\overline{BC} = \ell$) e pertence a **r** ($C \in r$). Sugere também que **D** dista ℓ de **C** ($\overline{CD} = \ell$) e pertence à reta **r** ($D \in r$). Devemos, então, para obter **C**, construir um L.G.$_1$ de centro **B** e raio ℓ. Para obter **D**, devemos construir um L.G.$_1$ de centro **C** e raio ℓ.

1º passo:

Construir para **B** um L.G.$_1$ de medida ℓ, obtendo $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ em **r**.

2º passo:

Construir para $\mathbf{C_1}$ e $\mathbf{C_2}$ um L.G.$_1$ de medida ℓ, obtendo $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ em **r**.

3º passo:

Construir os demais lados do losango.

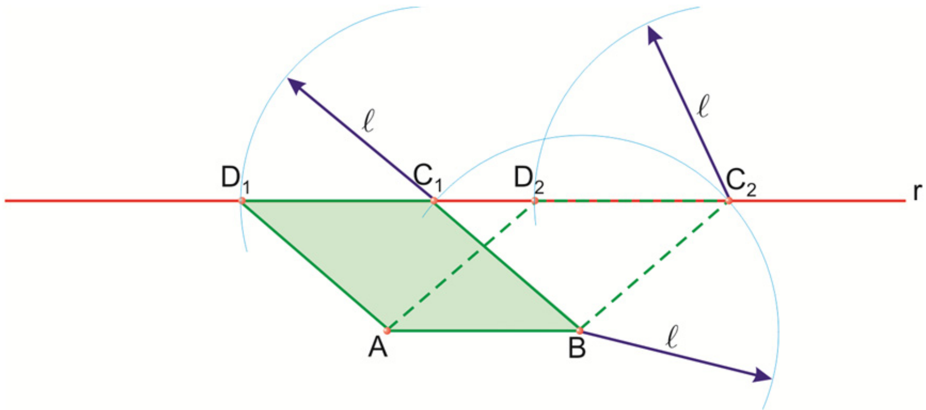


Figura 55: Problema resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_1$).

O problema admite duas soluções: ABC_1D_1 e ABC_2D_2 congruentes entre si.

Exemplo 5: Os pontos **A**, **B** e **C** da figura a seguir (feita na escala 1: 400 000) representam um albergue, a unidade do corpo de bombeiros e o colégio municipal de uma pequena comunidade, respectivamente.

Figura 56: Dados do problema. (Exemplo 5 do L.G.$_1$)

A prefeitura pretende construir uma unidade de pronto atendimento (U.P.A.) distante 10 km do albergue e 8 km do corpo de bombeiros. Obtenha, graficamente, o local de instalação dessa unidade, de modo que os moradores próximos ao colégio sejam geograficamente beneficiados.

Resolução:

Primeiramente, devem-se obter as medidas representativas das distâncias citadas em função da escala dada.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida representativa}}{\text{Medida Real}} \Rightarrow \text{Escala} = \frac{1}{400\,000}$$

$$\frac{1}{400\,000} = \frac{\overline{AP}}{10\text{ km}} \Rightarrow \frac{1}{400\,000} = \frac{\overline{AP}}{10\,000} \Rightarrow \overline{AP} = 2{,}5\text{ cm}$$

$$\frac{1}{400\,000} = \frac{\overline{BP}}{8\text{ km}} \Rightarrow \frac{1}{400\,000} = \frac{\overline{BP}}{8\,000} \Rightarrow \overline{BP} = 2{,}0\text{ cm}$$

– Solução intuitiva:

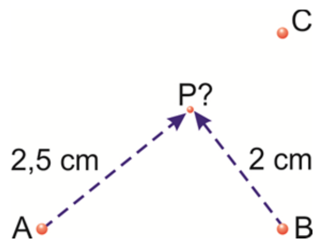


Figura 57: Suposto resolvido (Exemplo 5 do L.G.$_1$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto **P** (que representa o local de construção) dista 2,5 cm de **A** ($\overline{AP}$ = 10 km ≅ 2,5 cm) e 2 cm de **B** ($\overline{BP}$ = 8 km ≅ 2 cm). Então, devemos construir um L.G.$_1$ de centro **A** e raio 2,5 cm, e um L.G.$_1$ de centro **B** e raio 2,0 cm, o ponto procurado pertence a ambos.

1º passo:

Com o auxílio do compasso, tomar a medida de 2,5 cm na régua e construir um L.G.$_1$ de centro **A** e raio 2,5 cm.

2º passo:

Analogamente ao primeiro passo, construir um L.G.$_1$ de centro **B** e raio 2 cm.

3º passo:

Escolher, dentre os pontos de intersecção dos L.Gs construídos, aquele mais próximo de **C**, o qual indicará o local procurado.

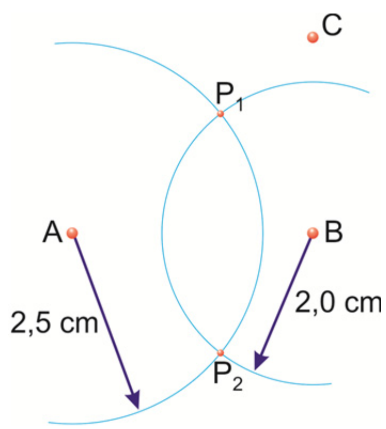


Figura 58: Problema resolvido (Exemplo 5 do L.G.$_1$).

Com esse procedimento, encontramos dois pontos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ que distam 2,5 cm de **A** e 2,0 cm de **B**. No entanto, tendo em vista a otimização em relação aos moradores próximos de **C**, somente o ponto $\mathbf{P_1}$ passa a ser solução.

Exemplo 6: Transportar o ângulo dado, de medida α, de modo que um de seus lados esteja contido na reta **r** dada.

Figura 59: Dados do problema. (Exemplo 6 do L.G.$_1$).

1º passo:

Tomar na reta **r** um ponto **O'** qualquer para ser o vértice do ângulo transportado.

2º passo:

Centro em **O** e raio arbitrário **a**, traçar um L.G.$_1$ determinando os pontos **A** e **B** nos lados do ângulo dado.

3º passo:

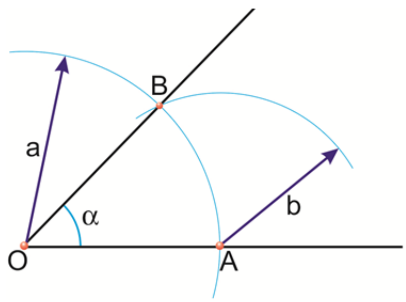
Centro em **O'** e mesmo raio do 2º passo, traçar um L.G.$_1$ determinando **A'** em **r**.

4º passo:

Centro em **A'** e raio $\overline{AB}$, obter, no último L.G.$_1$ construído, o ponto **B'**.

5º passo:

Traçar a semirreta $\overrightarrow{O'B'}$, finalizando o transporte.



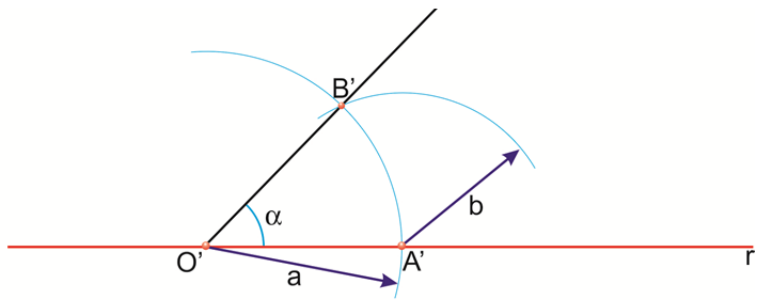


Figura 60a: Tomada dos dados. (Exemplo 6 do L.G.$_1$)

Figura 60b: Problema resolvido. (Exemplo 6 do L.G.$_1$)

A justificativa é que o triângulo O'A'B' é congruente ao triângulo OAB pelo caso Lado, Ângulo, Lado (L, A, L).

Exemplo 7: Construir um ângulo de 60°, com vértice no ponto **O** da reta **r** dada.

Figura 61: Dados do problema (Exemplo 7 do L.G.$_1$).

1º passo:

Centro em **O** e raio arbitrário **a** construir um L.G.$_1$ determinando **A** em **r**.

2º passo:

Centro em **A** e mesmo raio anterior construir um L.G.$_1$ determinando no L.G.$_1$ do 1º passo um ponto **B**.

3º passo:

Construir o lado $\overrightarrow{OB}$, finalizando a construção.

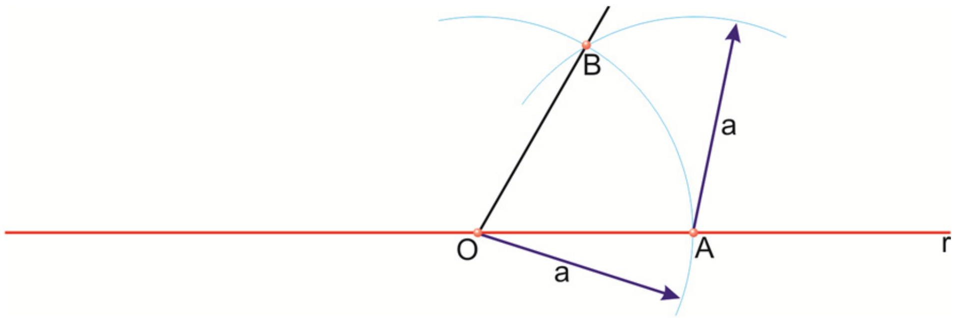


Figura 62: Problema resolvido (Exemplo 7 do L.G.$_1$).

A justificativa é que o triângulo OAB é equilátero, já que os arcos usados têm, todos, a mesma medida.

Exemplo 8: Construir pelo ponto **P** dado uma reta paralela à reta **r** dada.

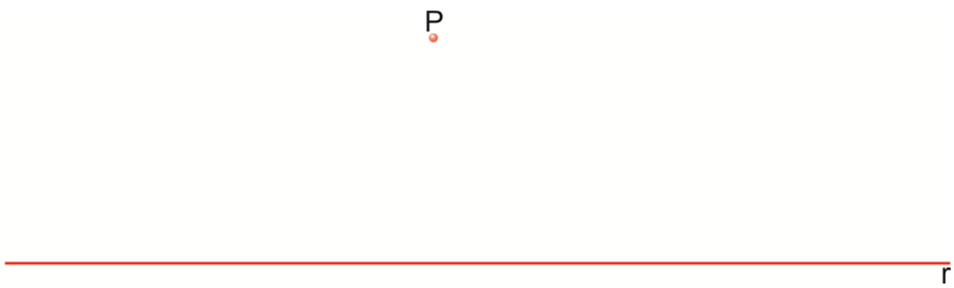


Figura 63: Dados do problema (Exemplo 8 do L.G.$_1$).

1º passo:

Centro em **P** e raio suficientemente grande **a**, traçar um L.G.$_1$ que determina **Q** em **r**.

2º passo:

Centro em **Q** e mesmo raio anterior, traçar um L.G.$_1$ que determina **R** em **r**.

3º passo:

Centro em **R** e mesmo raio anterior, traçar um L.G.$_1$ que determina, no L.G.$_1$ do 1º passo, um ponto **S**.

4º passo:

Conduzir a reta **s** por **P** e **S**, finalizando a construção.

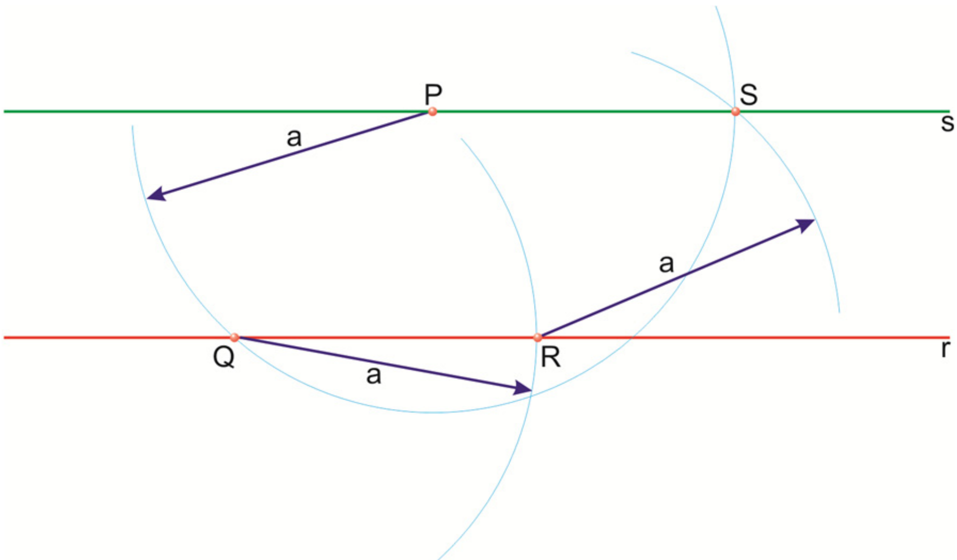


Figura 64: Problema resolvido (Exemplo 8 do L.G.$_1$).

A justificativa é que o quadrilátero PQRS é um losango.

Exemplo 9: Construir um hexágono regular cujo lado tem medida **a** dada.

Figura 65: Dado do problema (Exemplo 9 do L.G.$_1$).

1º passo:

Construir, com centro arbitrário **O**, um L.G.$_1$ de medida **a**.

2º passo:

Com centro em um ponto arbitrário **A** do L.G. construído e raio **a**, obter um ponto **B** nesse L.G.

3º passo:

Centro em **B** e raio **a**, obter **C** no L.G., e, analogamente, obter os vértices **D**, **E** e **F**.

4º passo:

Construir os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$, finalizando a construção.

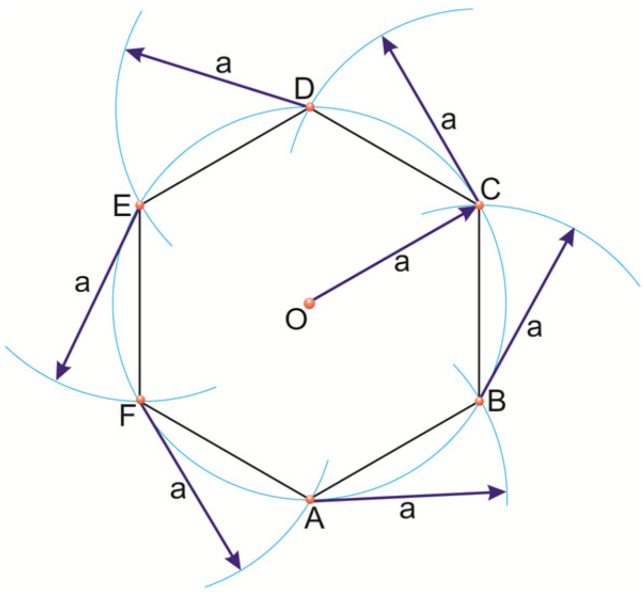


Figura 66: Problema resolvido (Exemplo 9 do L.G.$_1$).

A justificativa é, como vimos nas Noções Preliminares, que o lado do hexágono regular tem a mesma medida do raio da circunferência circunscrita a ele.

6.2 L.G.$_2$: Mediatriz

– Definição:

É o Lugar Geométrico dos pontos **P** de um plano que equidistam dos pontos **A** e **B** dados nesse plano.

– Construção intuitiva:

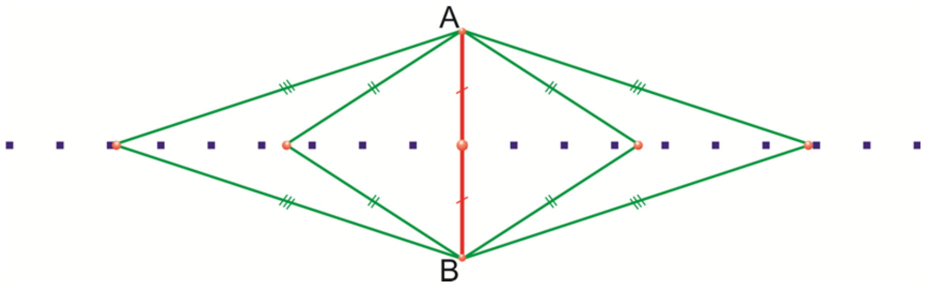


Figura 67: Esboço do L.G.$_2$.

– Conjectura:

A disposição dos pontos na construção intuitiva (equidistantes de **A** e **B**) sugere que eles pertencem à mediatriz dos segmento de extremidades **A** e **B**.

Demonstração:

1ª Parte: Hipótese: Se **P** pertence ao L.G.$_2$ (Mediatriz)
Tese: Então **P** equidista de **A** e **B**, ou seja, $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

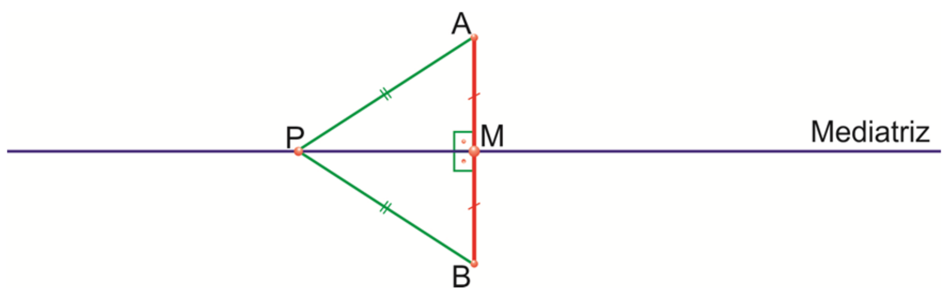


Figura 68: Mediatriz de $\overline{AB}$.

Notemos que os triângulos PAM e PBM são congruentes pelo caso Lado, Ângulo, Lado (L,A,L). Portanto, $\overline{PA}$ é congruente $\overline{PB}$, indicando que **P** equidista de **A** e **B**.

2ª Parte:
- Hipótese: Se **P** equidista de **A** e **B**.
- Tese: Então, **P** pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

Seja **P** um ponto tal que $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$ e seja **M** o ponto médio de $\overline{AB}$ (Fig. 69a). Então, o triângulo PAB é isósceles de base $\overline{AB}$, sendo que é uma $\overline{PM}$ mediana. Como vimos nas Noções Preliminares em todo triângulo isósceles, a mediana relativa à base está contida na mediatriz dessa base (Fig. 69b).

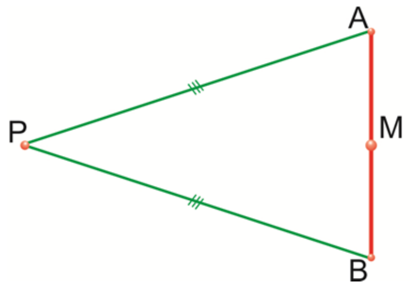


Figura 69a: $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

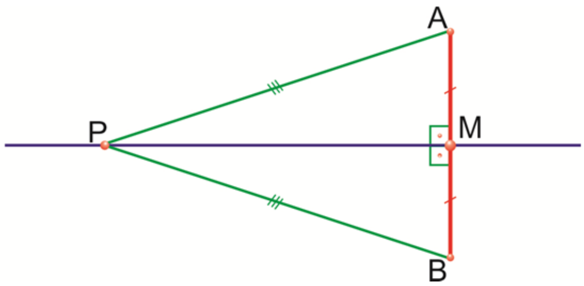


Figura 69b: $\overline{PM} \subset$ na mediatriz de $\overline{AB}$.

Isso indica que **P** pertence à mediatriz de $\overline{AB}$.

Uma outra forma de comprovarmos essa segunda parte é a seguinte:

Se tomarmos um ponto **Q** fora da mediatriz de $\overline{AB}$, o triângulo QAB não será isósceles e $\overline{QA}$ não será congruente a $\overline{QB}$ (Fig. 70).

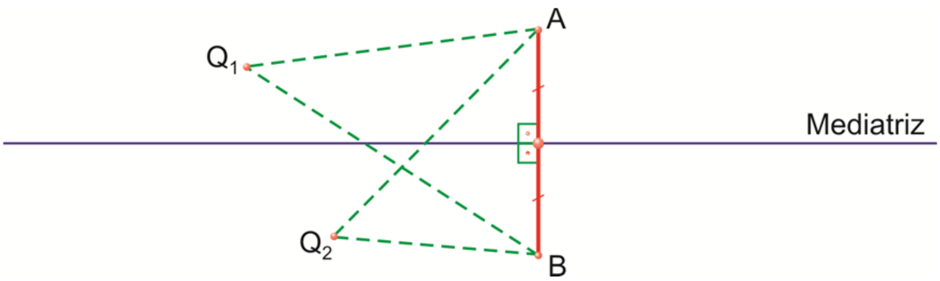


Figura 70: $\overline{Q_1A} < \overline{Q_1B}$ e $\overline{Q_2A} > \overline{Q_2B}$.

Portanto, o L.G.$_2$ é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

– Construção com régua e compasso:

1º passo:

Com centro em **A**, construir um L.G.$_1$ de raio $r > \frac{AB}{2}$ qualquer.

2º passo:

Repetir o passo anterior com centro em **B**.

3º passo:

Traçar a reta determinada pelos pontos de intersecção $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ dos L.Gs construídos. Essa reta será a mediatriz de $\overline{AB}$, visto que $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ equidistam de **A** e **B**.

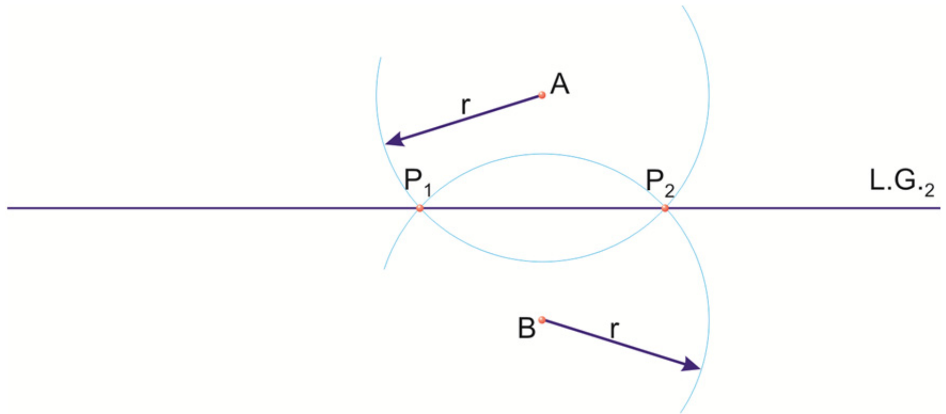


Figura 71: L.G.$_2$ Construído.

– Construção com GeoGebra:

Dados os pontos **A** e **B**.

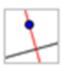
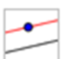
1º passo:

Selecionar, na barra de ferramentas, o ícone  .

2º passo:

Selecionar o ponto **A** e, em seguida, o ponto **B**. Isso feito aparecerá a mediatriz de $\overline{AB}$ completando a construção.

<u>Nota:</u>

– Os ícones , , , , , , , , fazem parte de um mesmo grupo de ferramentas.

É importante ressaltar que, ao construir o L.G. dos pontos equidistantes de **A** e **B**, estamos determinando os dois Lugares Geométricos: o L.G. dos pontos cuja distância até **A** é menor que a sua distância até **B** (Fig. 72a) e, também, o L.G. dos pontos cuja distância até **A** é maior que a sua distância até **B** (Fig. 72b).

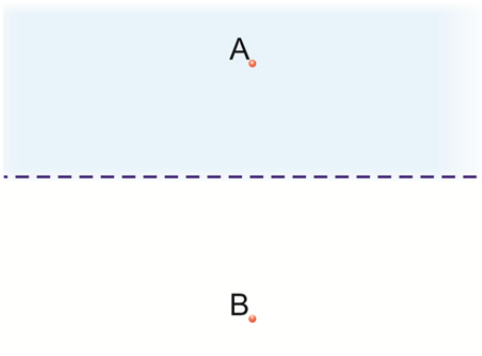


Figura 72a: Pontos mais próximos de **A** do que de **B**

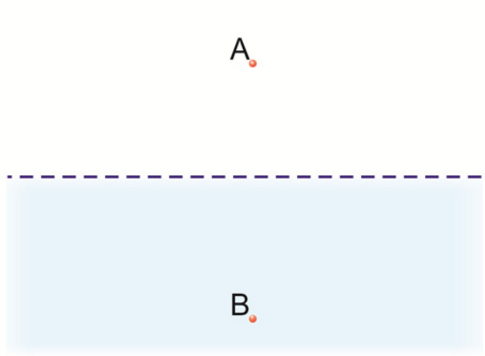


Figura 72b: Pontos mais próximos de **B** do que de **A**

– Aplicação Genérica:

O L.G.$_2$ deve ser construído sempre que procurarmos, num plano, um ponto equidistante de dois pontos (**A** e **B**) desse plano.

Apresentaremos agora alguns exemplos de aplicações:

Exemplo 1: Dado o segmento $\overline{AB}$, divida-o em duas partes congruentes.

Figura 73: Dado do problema (Exemplo 1 do L.G.$_2$).

Resolução:

O problema se resolve obtendo-se o ponto médio **M** de $\overline{AB}$.

– Solução intuitiva:

Figura 74: Suposto resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_2$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que **M** equidista de **A** e **B**. Então, devemos construir um L.G.$_2$ para $\overline{AB}$.

1º passo:

Traçar o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$.

2º passo:

Identificar em $\overline{AB}$ o ponto **M**.

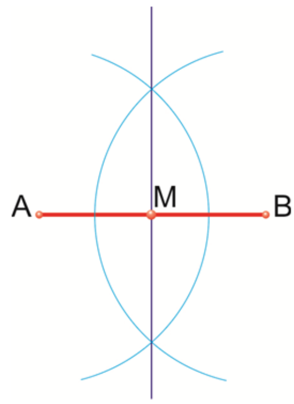


Figura 75: Problema resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_2$).

O problema admite solução única, que é o ponto **M**.

Exemplo 2: São dados os pontos **A** e **B**, bem como a reta **r**.

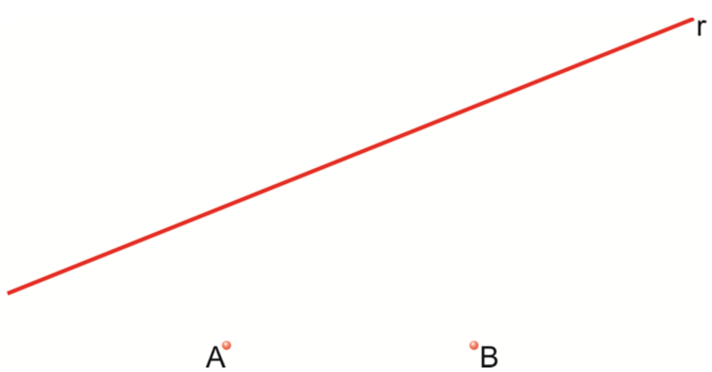


Figura 76: Dados do problema (Exemplo 2 do L.G.$_2$).

Construa uma circunferência, de centro **O** pertencente a **r**, passando por **A** e **B**.

Resolução:

O problema se resolve ao se obter o centro da circunferência procurada.

– Solução intuitiva:

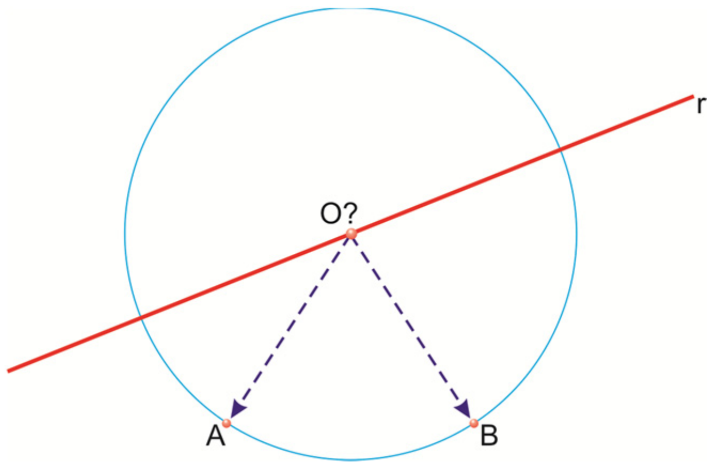


Figura 77: Suposto resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_2$).

– Solução Gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro **O** procurado pertence à reta **r** ($O \in r$) e equidista de **A** e **B** ($\overline{OA} \equiv \overline{OB}$). Devemos, então, construir o L.G.$_2$ para **A** e **B**.

1º passo:

Construir o L.G.$_2$ para **A** e **B**.

2º passo:

Identificar em **r** o ponto **O** pertencente ao L.G.$_2$ construído.

3º passo:

Centro em **O** e raio $\overline{OA}$ (ou $\overline{OB}$), construir a circunferência procurada.

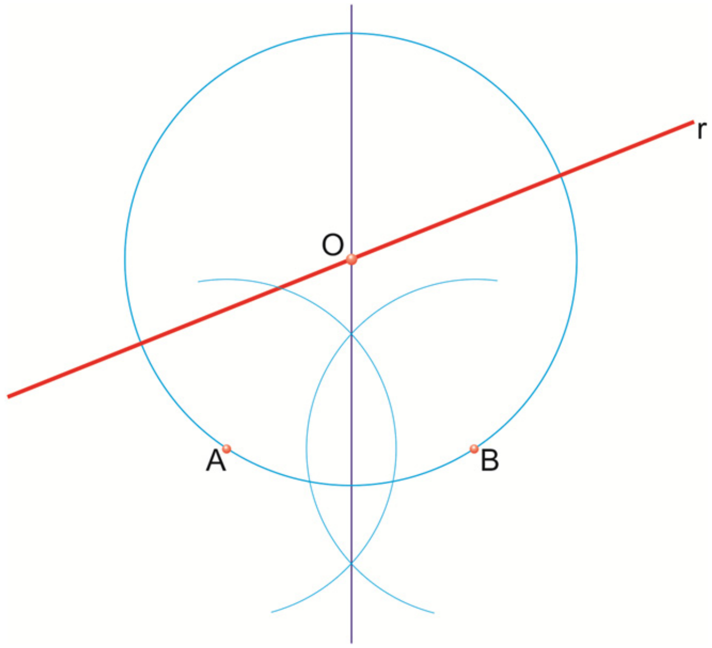


Figura 78: Problema resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_2$).

O problema admitiu solução única.

Exemplo 3: Dados os pontos **P**, **A** e **B** da figura a seguir e a distância **r**, construa um triângulo isósceles ABC de base $\overline{AB}$, sabendo que $\overline{PC}$ = r.

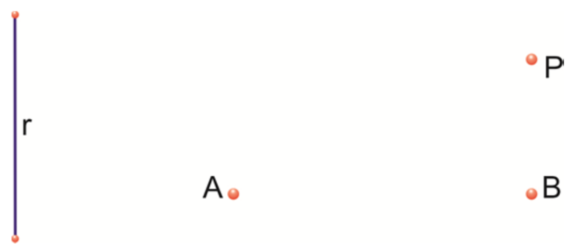


Figura 79: Dados do problema. (Exemplo 3 do L.G.$_2$).

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do vértice **C**.

– Solução intuitiva:

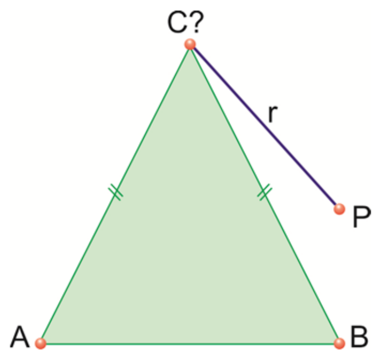


Figura 80: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_2$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto **C** equidista de **A** e **B** ($\overline{AC} \equiv \overline{BC}$) e dista **r** de **P** ($\overline{PC} = r$).

Devemos, então, construir o L.G.$_2$ para **A** e **B** e, para **P**, o L.G.$_1$ de raio **r**.

1º passo:

Construir o L.G.$_2$ para **A** e **B**.

2º passo:

Construir o L.G.$_1$ de raio **r** para **P**, obtendo-se **C** no L.G.$_2$ construído.

3º passo:

Traçar os lados restantes.

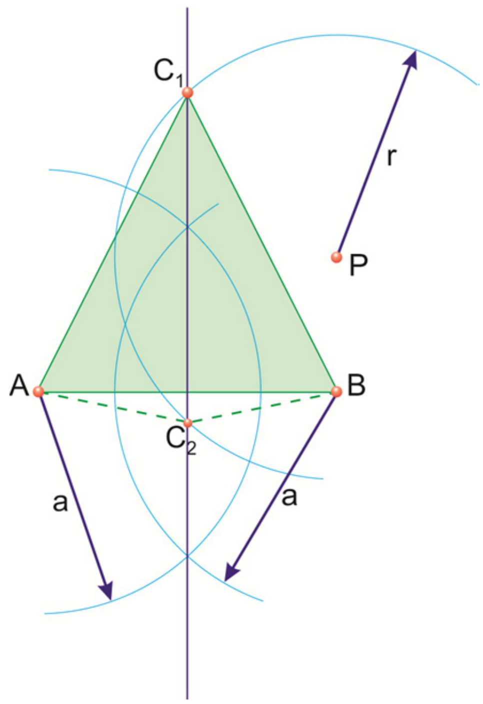


Figura 81: Problema resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_2$).

O problema admitiu duas soluções, triângulos ABC_1 e ABC_2.

Exemplo 4: Dado o triângulo ABC, construa sua circunferência circunscrita.

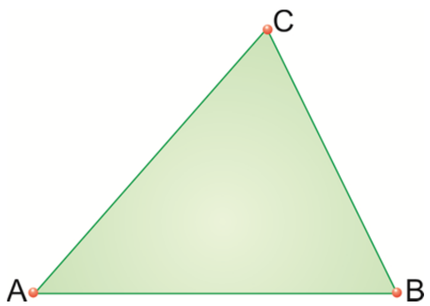


Figura 82: Dados do problema (Exemplo 4 do L.G.$_2$).

Resolução:

O problema se resolve obtendo-se o centro **O** da circunferência.

– Solução intuitiva

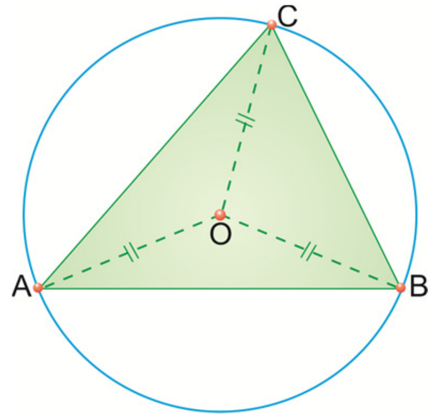


Figura 83: Suposto resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_2$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro da circunferência procurada equidista dos vértices do triângulo. Então, devemos construir o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ (ou para $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ ou para $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$).

1º passo:

Construir o L.G.$_1$ para $\overline{AB}$ (por exemplo)

2º passo:

Construir o L.G.$_2$ para $\overline{AC}$ (por exemplo)

3º passo:

Identificar **O** na intersecção dos L.Gs construídos.

4º passo:

Construir a circunferência de centro **O** e raio $\overline{OA}$, a qual passará por **B** e **C**.

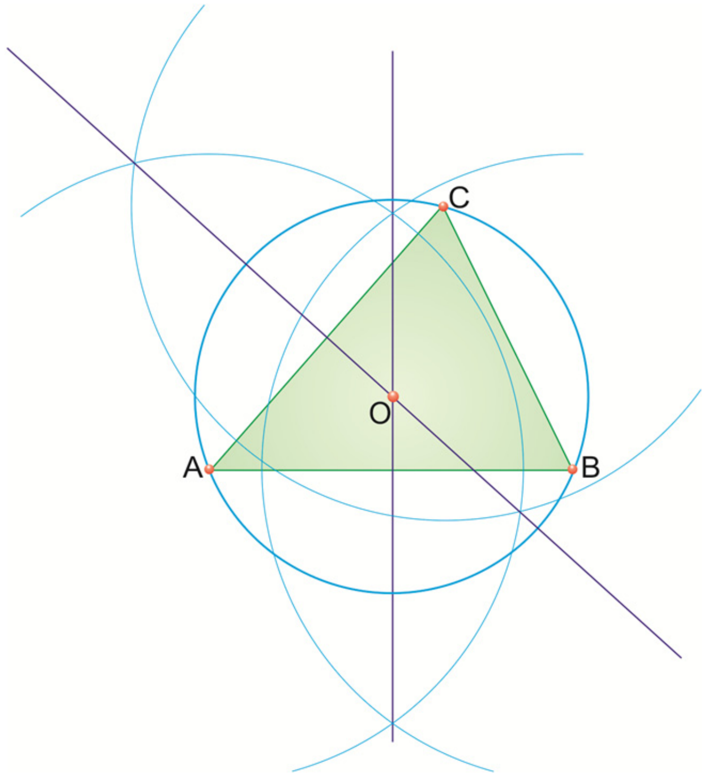


Figura 84: Problema resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_2$).

O problema admite solução única.

Exemplo 5: A curva **c** da figura a seguir representa uma das margens de parte de um rio que passa perto das chácaras do senhor Anísio e do senhor Benísio, representadas pelos pontos **A** e **B**, respectivamente.

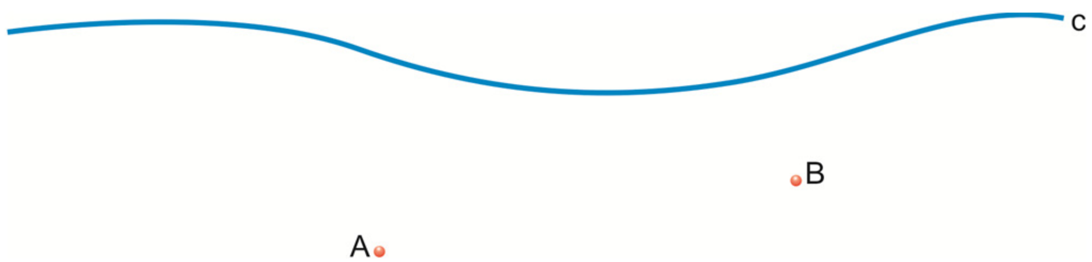


Figura 85: Dados do problema (Exemplo 5 do L.G.$_2$).

Esses dois senhores desejam instalar nessa margem do rio uma bomba para recalcar água até suas chácaras. No entanto, nenhum deles quer gastar mais com tubulações que o outro. Indique, graficamente, o local ideal para instalar essa bomba.

Resolução:

O problema se resolve obtendo, na curva **c**, o ponto **I** (de instalação da bomba) equidistante de **A** e **B**.

– Solução intuitiva:

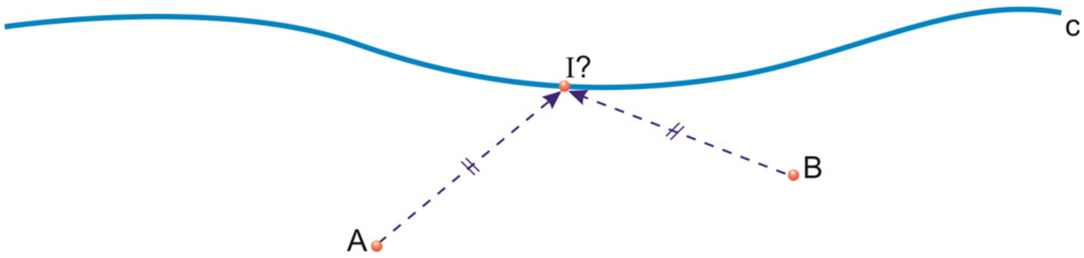


Figura 86: Suposto resolvido (Exemplo 5 do L.G.$_2$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que $\overline{AI} \equiv \overline{BI}$. Devemos, então, construir o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$.

1º passo:

Construir o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$.

2º passo:

Identificar em **c** o ponto **I** procurado.

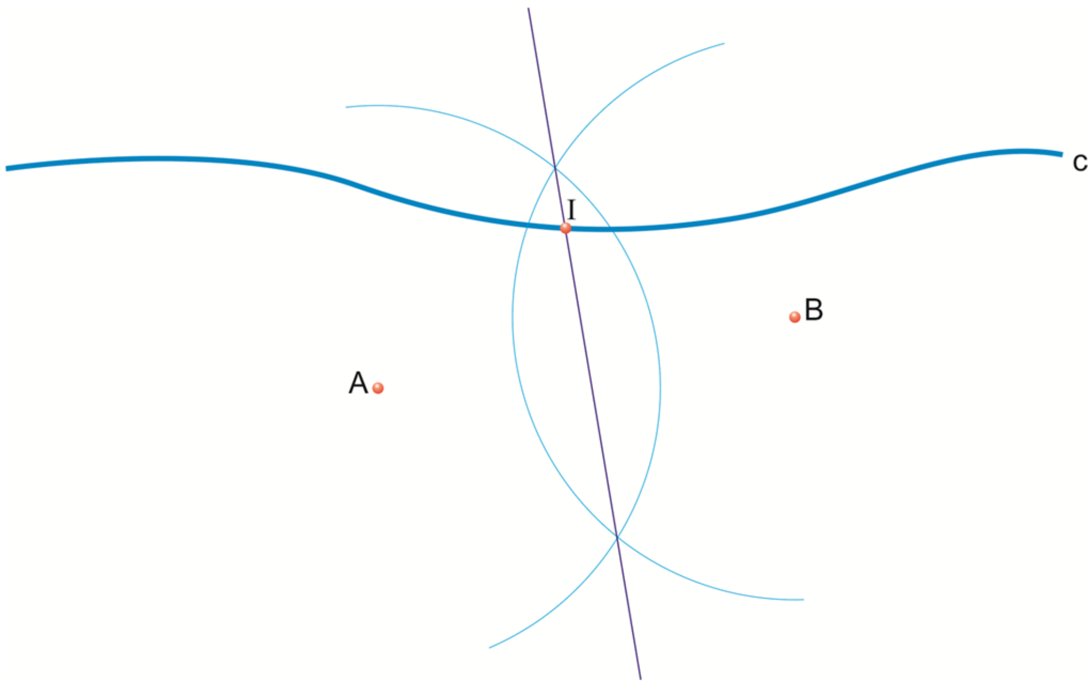


Figura 87: Problema resolvido (Exemplo 5 do L.G.$_2$).

O problema admite solução única, que é o ponto **I**.

Exemplo 6: Conduzir por um ponto **P**, da reta **r**, uma reta **s** perpendicular à reta **r**.

Figura 88: Dados do problema (Exemplo 6 do L.G.$_2$).

Resolução:

1º passo:

Construir para **P** um L.G.$_1$ qualquer, determinando **A** e **B** em **r**.

2º passo:

Construir o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$ (sendo que **P** já pertence a esse L.G.$_2$, pois $\overline{AP} \equiv \overline{BP}$). O L.G.$_2$ construído é a reta **s** procurada.

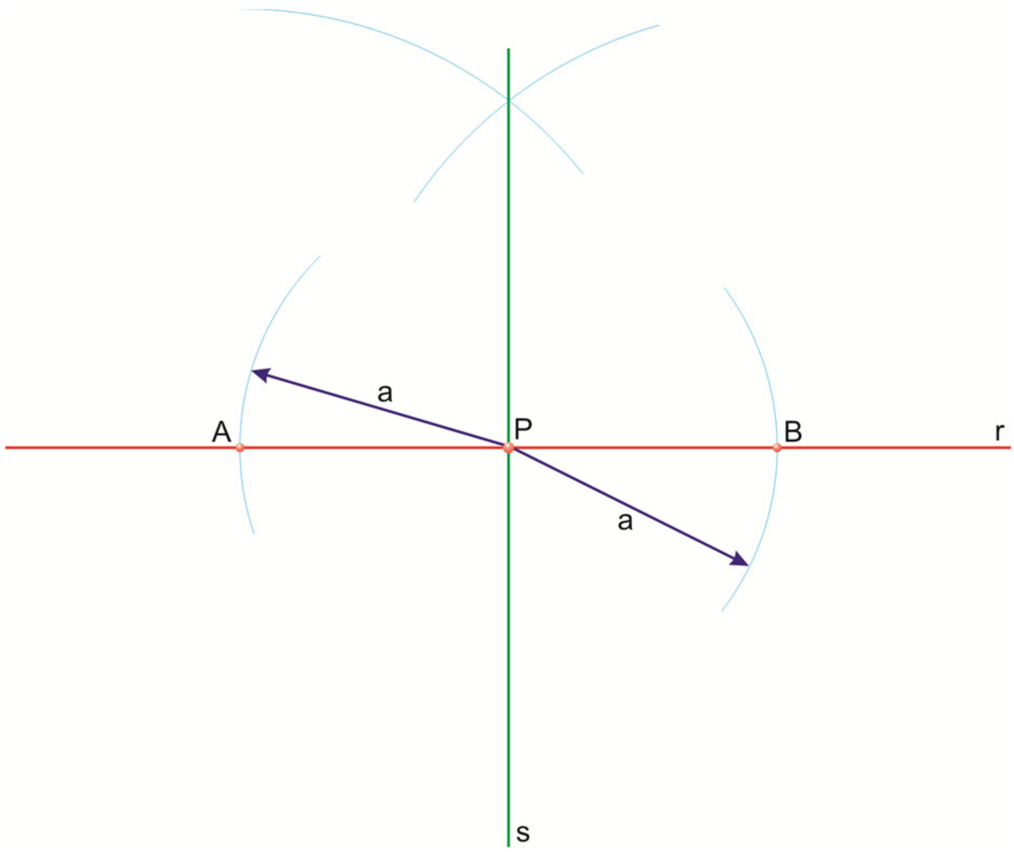


Figura 89: Problema resolvido (Exemplo 6 do L.G.$_2$).

A justificativa é que a reta **s**, mediatriz de $\overline{AB}$, é perpendicular a $\overline{AB}$.

Exemplo 7: Construir por um ponto **P**, não pertencente à reta **r**, uma reta perpendicular a **r**.

Figura 90: Dados do problema (Exemplo 7 do L.G.$_2$).

1º passo:

Centro em **P** e raio arbitrário conveniente, obter os pontos **A** e **B** em **r**.

2º passo:

Construir o L.G.$_2$ para $\overline{AB}$ (sendo que **P** já pertence a esse L.G., pois $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$).

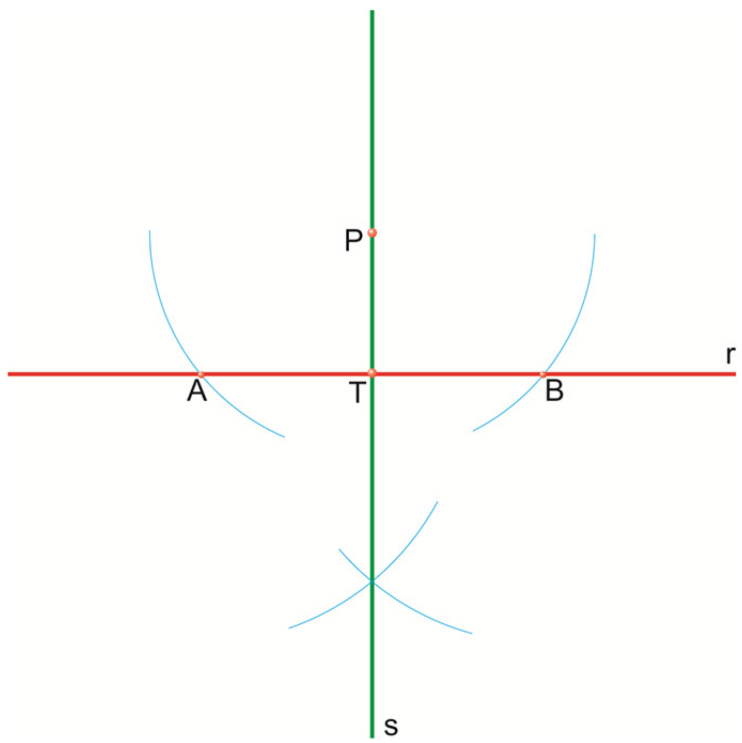


Figura 91: Problema resolvido (Exemplo 7 do L.G.$_2$).

Exemplo 8: Construir uma circunferência, de centro em **O**, tangente à reta **t**.

Figura 92: Dados do problema (Exemplo 8 do L.G.$_2$).

Resolução:

1º passo:

Conduzir por **O** uma reta **s** perpendicular a **t**.

2º passo:

Identificar em **t** o ponto de tangência **T** da perpendicular construída.

3º passo:

Centro **O** e raio $\overline{OT}$, construir a circunferência procurada.

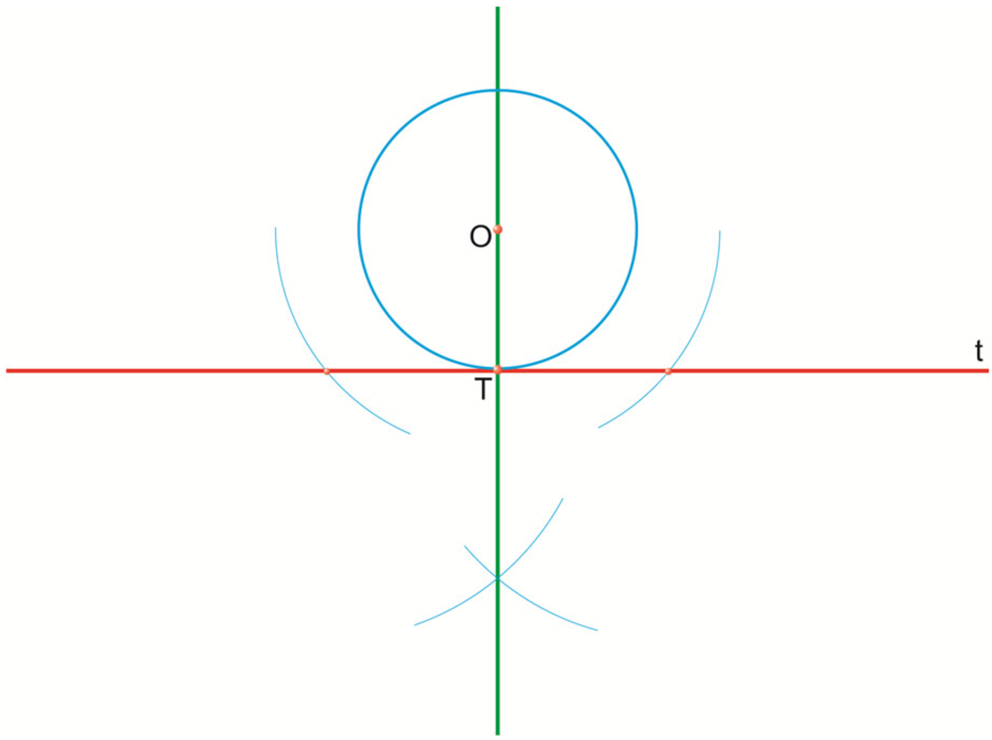


Figura 93: Problema resolvido (Exemplo 8 do L.G.$_2$).

A justificativa é que o raio que passa pelo ponto de tangência **T** é perpendicular à reta tangente (**t**).

Exemplo 9: Construir a bissetriz de um ângulo

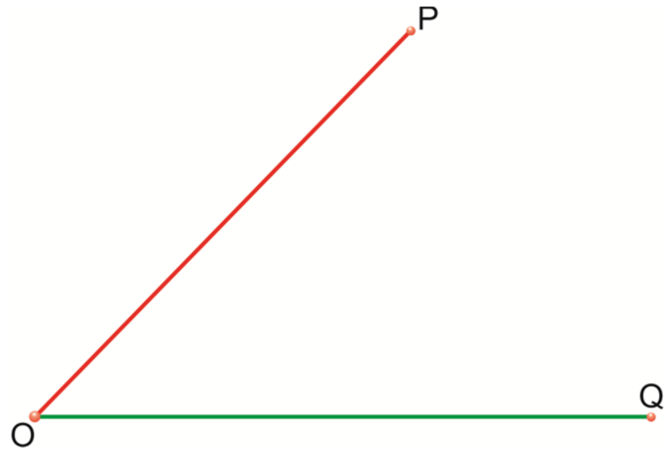


Figura 94: Dado do problema (Exemplo 9 do L.G.$_2$).

1º passo:

Com centro no vértice **O** e raio arbitrário **a**, construir um L.G.$_1$ determinando em $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OQ}$ os pontos **A** e **B**, respectivamente.

2º passo:

Construir a mediatriz de $\overline{AB}$ (sendo que **O** pertence a ela, pois $\overline{OA} = \overline{OB}$).

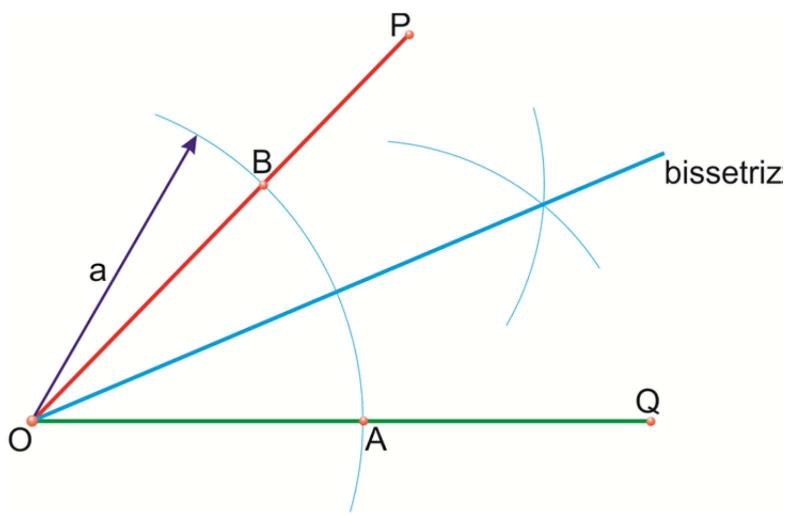


Figura 95: Problema resolvido (Exemplo 9 do L.G.$_2$).

A justificativa é que, como vimos nas Noções Preliminares, a mediatriz da base $\overline{AB}$ de um triângulo isósceles OAB contém a bissetriz do ângulo do vértice **O** oposto a ela.

6.3 L.G.$_3$: Par de retas paralelas

– Definição:

É o Lugar Geométrico dos pontos **P** de um plano que está a uma dada distância, **d**, de uma dada reta **r** desse plano.

– Construção intuitiva:

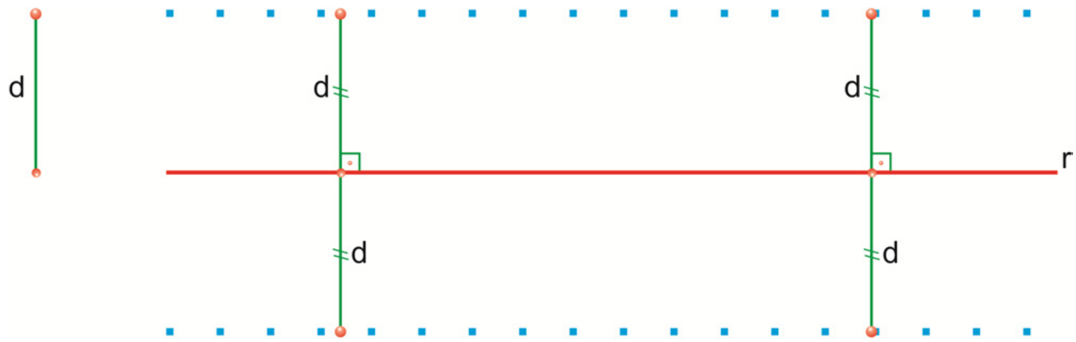


Figura 96: Esboço do L.G.$_3$.

– Conjectura:

A disposição dos pontos do L.G.$_3$ na construção intuitiva sugere que ele seja composto por um par de retas paralelas, distantes **d** de **r**.

– Demonstração:

1ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: P pertence ao L.G.}_3 \text{ (Par de retas paralelas)} \\ \text{Tese: Então, } d(P, r) = d \end{cases}$

Tomemos os pontos $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ do L.G.$_3$, situados, ambos, num mesmo semiplano dos determinados por **r**. Pela definição, $d(P_1, r) = d(P_2, r) = d$.

Figura 97: $P_1 \in$ L.G.$_3$ e $P_2 \in$ L.G.$_3$

Nessas condições, notemos que o quadrilátero ABP_2P_1 é retângulo, pois **A** é a projeção ortogonal de $\mathbf{P_1}$ sobre **r**, e **B** é a projeção ortogonal de $\mathbf{P_2}$ sobre **r**, e a reta suporte de $\overline{P_1P_2}$ é paralela a **r**. Como $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ são arbitrários, todos os pontos da reta suporte de $\overline{P_1P_2}$ distam **d** de **r**.

2ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: } d(P, r) = d \\ \text{Tese: } \mathbf{P} \text{ pertence ao L.G.}_3 \end{cases}$

Sejam $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ pontos distantes **d** de **r**, ambos situados num mesmo semiplano dos determinados por **r**.

Figura 98: $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ distam **d** de **r**.

Nessas condições, o quadrilátero ABQP é um retângulo (**A** é a projeção ortogonal de $\mathbf{P_1}$ sobre **r**, e **B** é a projeção ortogonal de $\mathbf{P_2}$ sobre **r**), pois $\overline{P_1A} \equiv \overline{P_2B}$, $\overline{P_1A} \,//\, \overline{P_2B}$ e $\overline{P_1A} \perp r$. Isso mostra que $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ pertencem a uma reta paralela a **r**.

Uma outra forma de comprovarmos essa segunda parte é a seguinte:

Se tomarmos um ponto **Q** fora das retas paralelas, das duas uma: $d(Q, r) > d$ ou $d(Q, r) < d$.

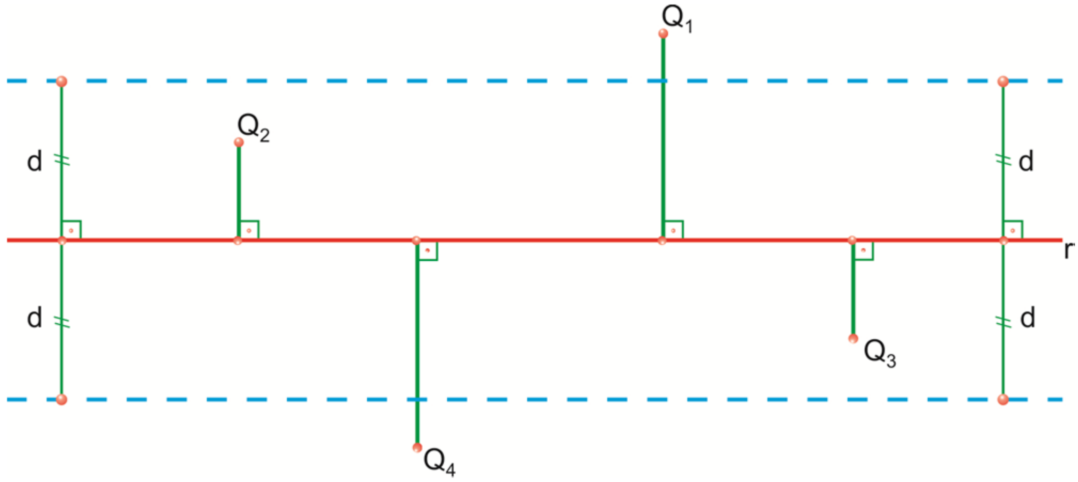


Figura 99: $d(Q_1, r) > d$, $d(Q_4, r) > d$, $d(Q_2, r) < d$ e $d(Q_3, r) < d$.

Portanto, o $L.G._3$ é o par de retas paralelas a **r**, distantes **d** de **r**.

– Construção com régua e compasso:

1º passo:

Por dois pontos arbitrários **A** e **B**, em **r**, traçar retas perpendiculares a **r**.

2º passo:

Marcar nessas perpendiculares os pontos $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$ e $\mathbf{P_4}$, distantes **d** de **r**.

3º passo:

Construir as retas determinadas por $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_3}$ e por $\mathbf{P_2}$ e $\mathbf{P_4}$.

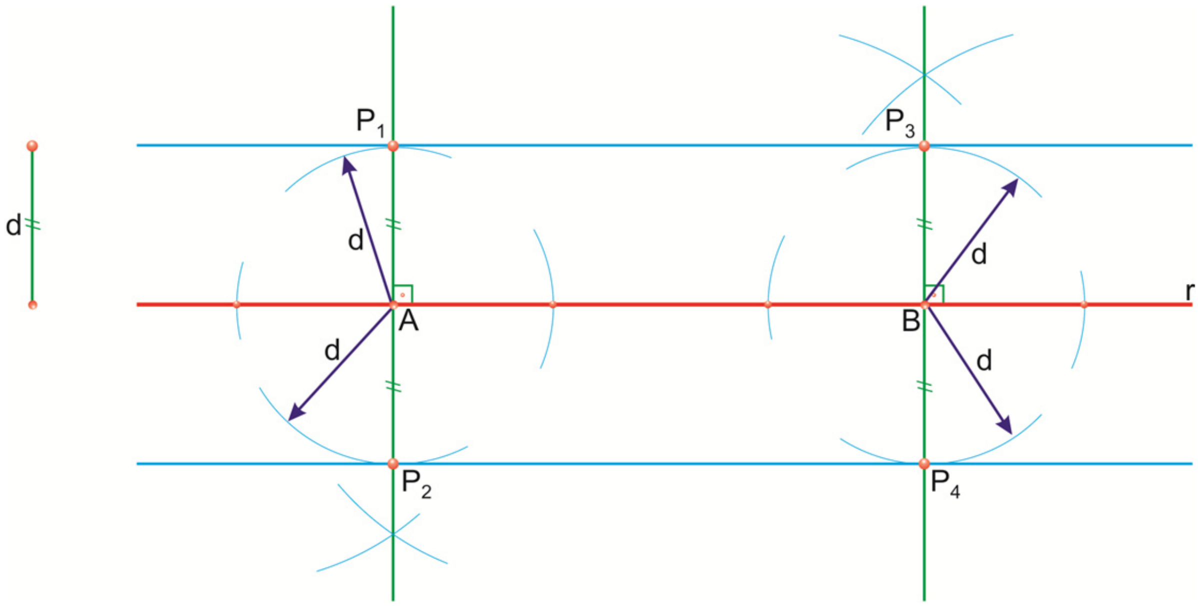
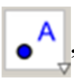


Figura 100: L.G.$_3$ Construído.

– Construção com GeoGebra:

Dada a reta **r** e a medida da amplitude do L.G.$_3$.

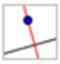
1º passo:

Selecionar o ícone , o qual permite criar um ponto.

2º passo:

Marcar um ponto **A** em **r**.

3º passo:

Selecionar o ícone  .

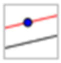
4º passo:

Selecionar **A** e, em seguida, **r**. Isso feito, surgirá uma reta **s** perpendicular a **r** conduzida por **A**.

5º passo:

Construir o L.G.$_1$ de centro **A** e raio **d**, determinando os ponto **P$_1$** e **P$_2$** em **s**.

6º passo:

Selecionar o ícone , o qual permite traçar uma reta que permite traçar uma reta que passa por um ponto dado e é paralela a uma reta dada.

7º passo:

Conduzir por **P$_1$** uma reta paralela a **r**.

8º passo:

Conduzir por **P$_2$** uma reta paralela a **r**, finalizando a construção (ocultar o L.G.$_1$ construído, bem como a reta **s** e os ponto **P$_1$** e **P$_2$**).

É importante ressaltar que, ao construir o L.G. dos pontos que distam **d** de **r**, estamos determinando outros dois Lugares Geométricos: o L.G. dos pontos cuja distância até **r** é menor que **d** (Fig. 101a) e, também, o L.G. dos pontos cuja distância até **r** é maior que **d** (Fig. 101b).

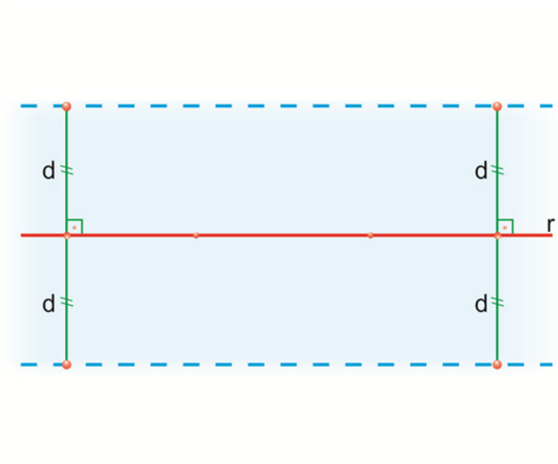


Figura 101a: Pontos cuja distância até **r** é menor do que **d**.

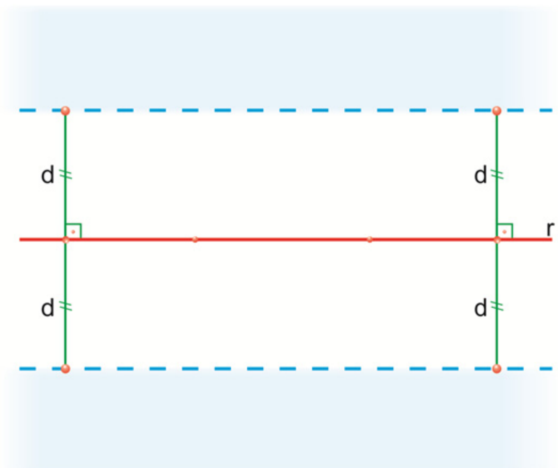


Figura 101b: Pontos cuja distância até **r** é maior do que **d**.

– Aplicação Genérica:

O L.G.$_3$ deve ser construído sempre que se procurar um ponto (**P**), de um plano, que esteja a uma distância (**d**) de uma reta (**r**) desse plano.

Apresentemos, agora, alguns exemplos de aplicações:

Exemplo 1: São dados os pontos **A** e **B**, a reta **t** e uma distância **d**, da figura a seguir:

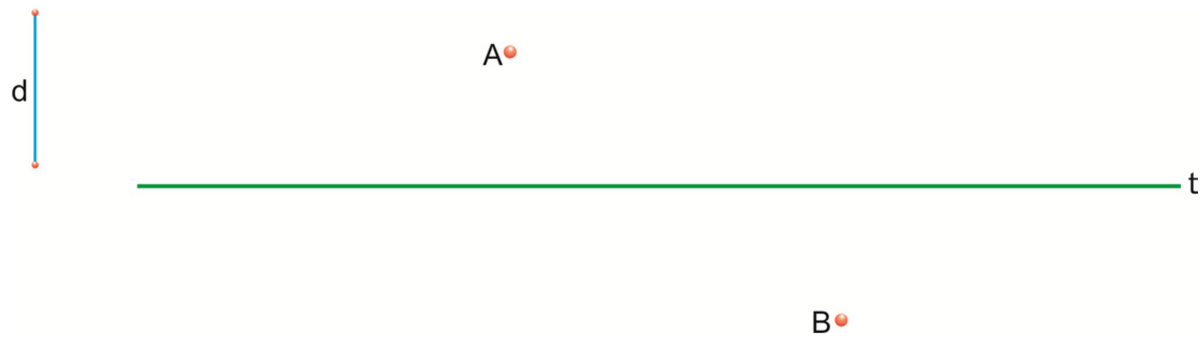


Figura 102: Dados do problema (Exemplo 1 do L.G.$_3$).

Obtenha o centro **O** de uma circunferência de raio **d** e tangente a **t**, equidistante de **A** e **B**.

Resolução:

– Solução intuitiva:

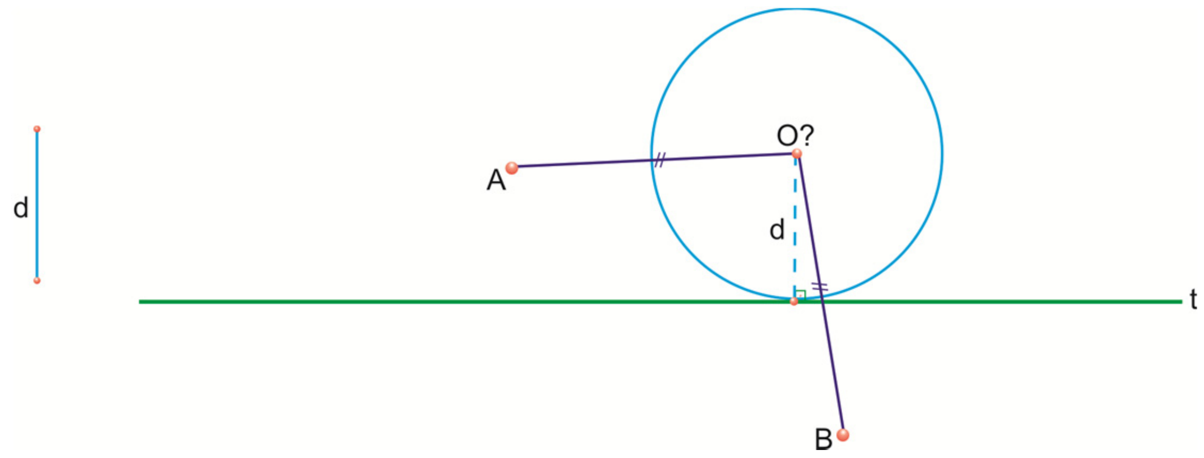


Figura 103: Suposto resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_3$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro equidista de **A** e **B** ($\overline{OA} \equiv \overline{OB}$) e dista **d** de **t** ($d(0, t) = d$). Devemos, então, construir o L.G.$_2$ para **A** e **B** e o L.G.$_3$ de medida **d** para **r**.

1º passo:

Construir o L.G.$_2$ para **A** e **B**.

2º passo:

Construir o L.G.$_3$ para **t**, com medida **d**.

3º passo:

Identificar o centro **O** na intersecção dos L.Gs construídos.

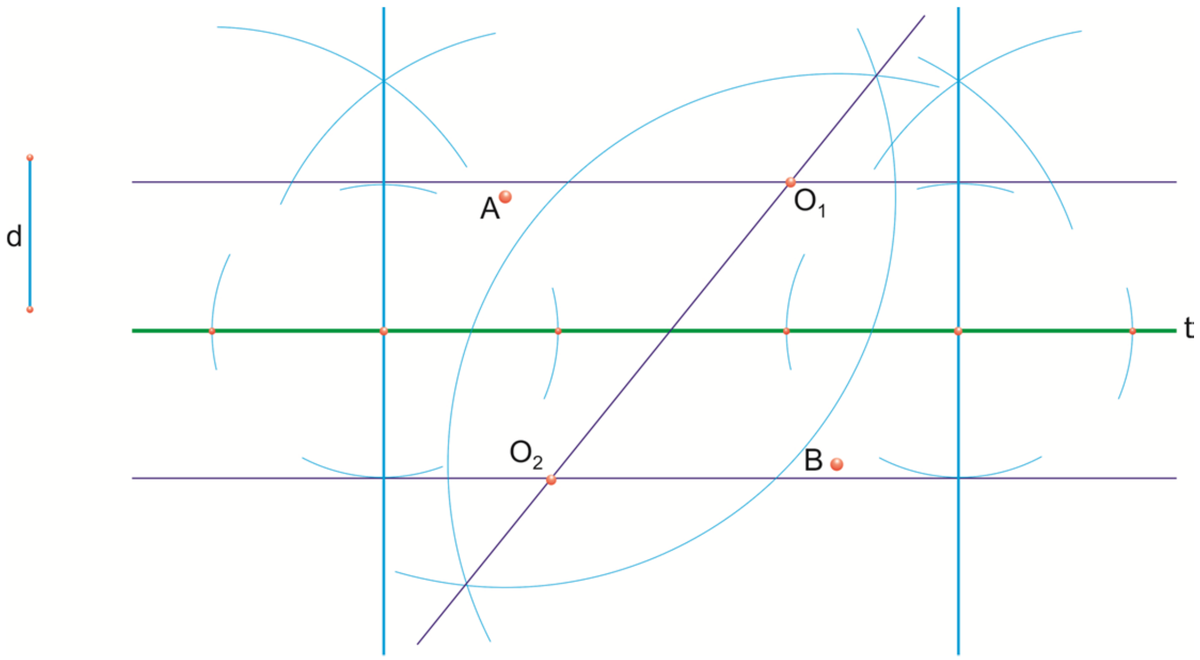


Figura 104: Problema resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_3$).

O problema admitiu duas soluções, $\mathbf{O_1}$ e $\mathbf{O_2}$.

Exemplo 2: De um triângulo ABC, são dados o lado $\overline{AB}$ (fixo), a medida **b** do lado $\overline{AC}$ e a altura **h** relativa ao vértice **C**.

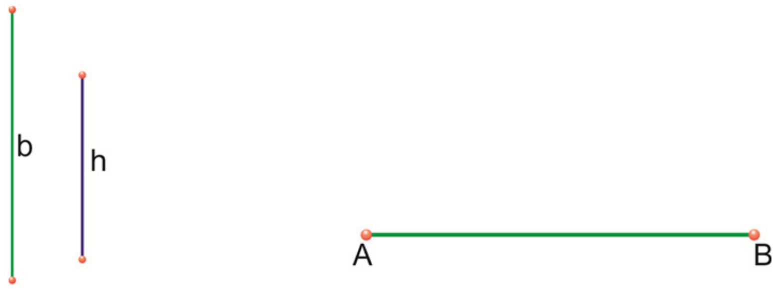


Figura 105: Dados do problema (Exemplo 2 do L.G.$_3$).

Construa esse triângulo.

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do vértice **C**, visto que **A** e **B** são conhecidos.

– Solução intuitiva:

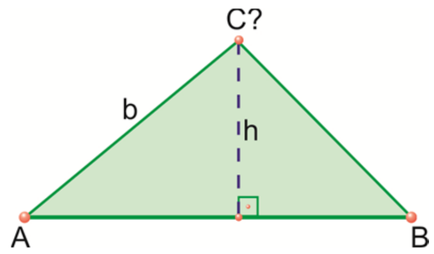


Figura 106: Suposto resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_3$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto **C** dista **b** de **A** (AC = b) e dista **h** da reta suporte de $\overline{AB}$ (a altura relativa a **C** mede **h**). Então, devemos construir o L.G.$_1$ de medida **b** para **A** e o L.G.$_3$ de medida **h** para a reta **r**, suporte de $\overline{AB}$.

1º passo:

Construir a reta **r**, suporte de $\overline{AB}$.

2º passo:

Construir o L.G.$_1$, de raio **b**, para **A**.

3º passo:

Construir o L.G.$_3$, usando a medida **h**, para **r**.

4º passo:

Identificar, nas intersecções dos L.Gs construídos, o ponto **C**.

5º passo:

Construir os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

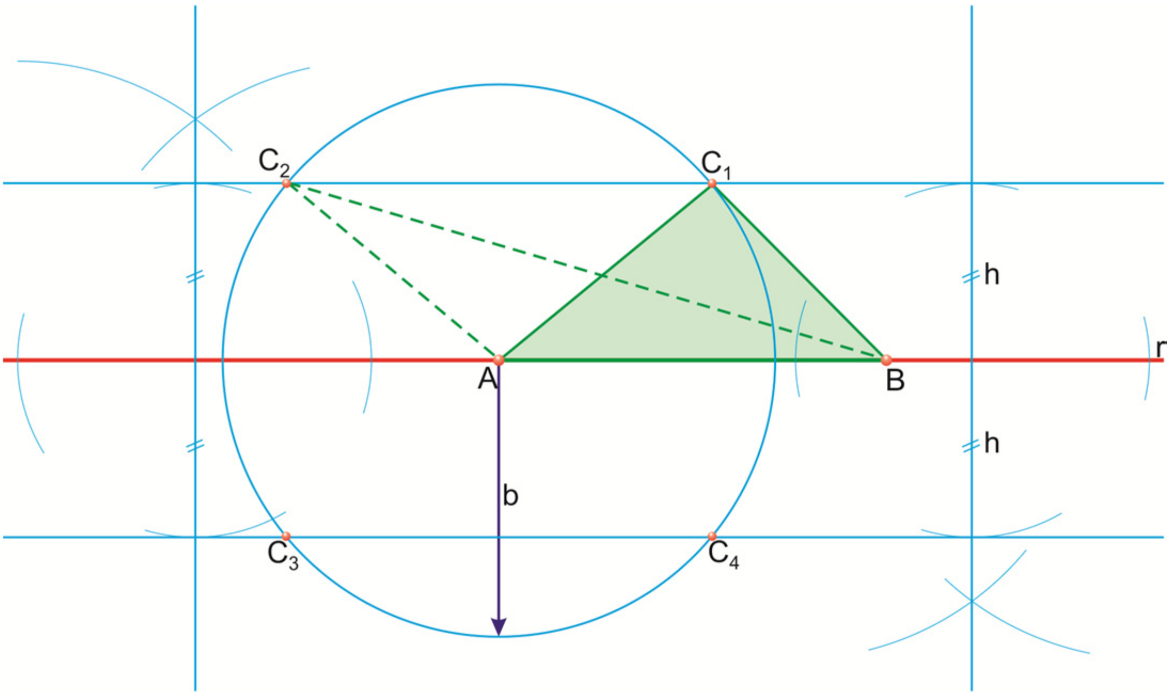


Figura 107: Problema resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_3$).

Existem duas soluções métricas, que são os triângulos ABC_1 e ABC_2. Se considerássemos as posições, teríamos quatro soluções (ABC_1, ABC_2, ABC_3 e ABC_4).

Exemplo 3: Considere a reta **t**, o ponto **P** e a distância **r** desta figura:

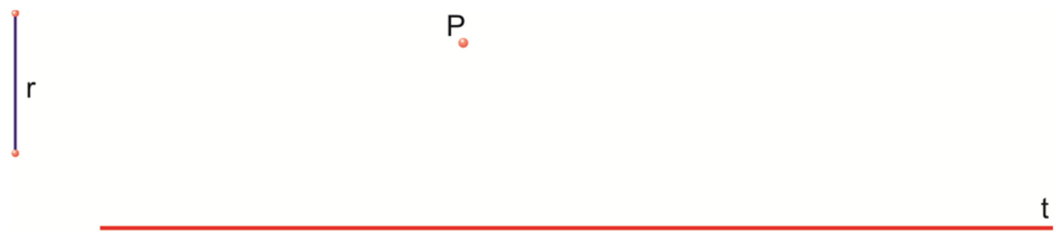


Figura 108: Dados do problema (Exemplo 3 do L.G.$_3$).

Conduzir por **P** uma circunferência de raio **r** tangente a **t**.

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do centro **O** da circunferência.

– Solução intuitiva:

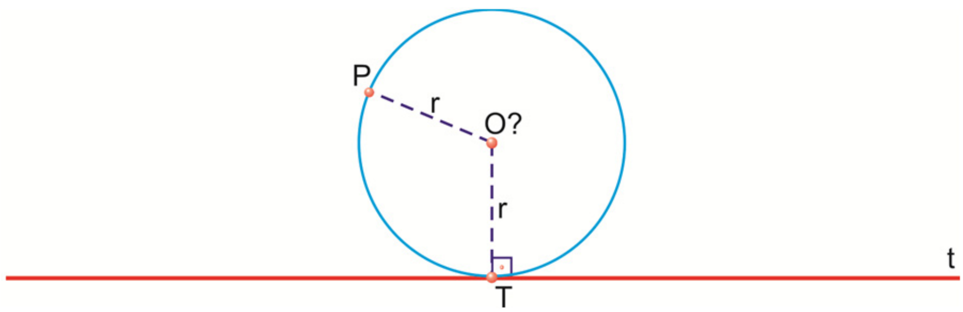


Figura 109: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_3$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro **O** dista **r** de **P** e, também, de **t**. Então, devemos construir o L.G.$_1$ de medida **r** para **P** e o L.G.$_3$ de medida **r** para **t**.

1º passo:

Construir o L.G.$_1$, de raio **r**, para **P**.

2º passo:

Construir o L.G.₃, usando a medida **r**, para **t**.

3º passo:

Identificar o centro **O** na intersecção dos L.Gs construídos.

4º passo:

Construir a circunferência procurada. (O ponto **T** de tangência, não é necessário, pois o centro e o raio são conhecidos).

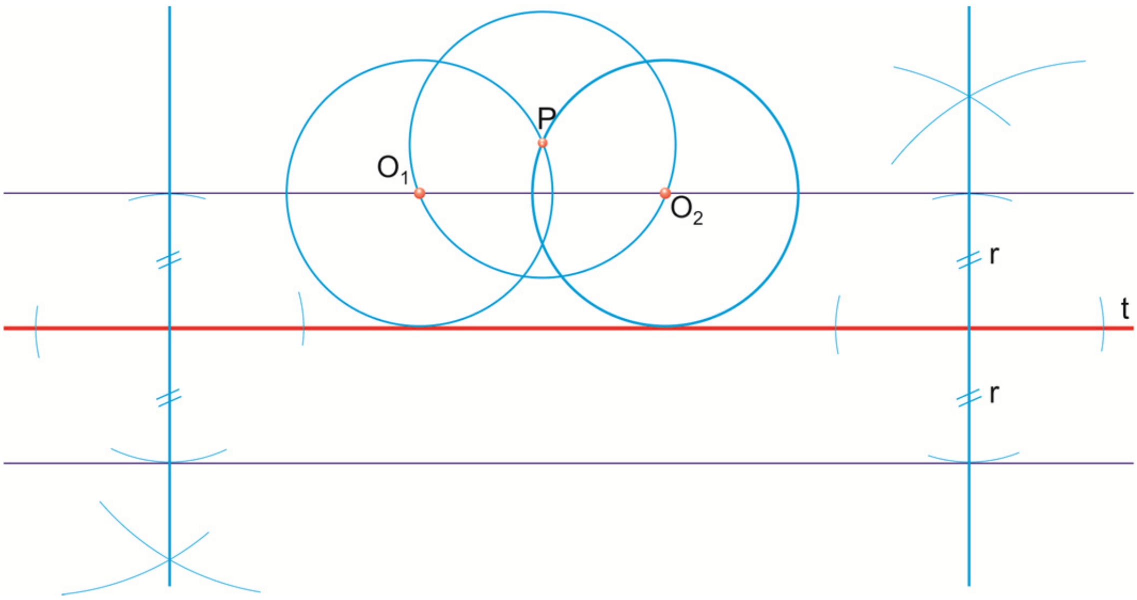


Figura 110: Problema resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_3$).

O problema admitiu duas soluções λ_1 e λ_2.

Exemplo 4: Considere as retas **r** e **s** da figura a seguir, bem como a distância **d**.

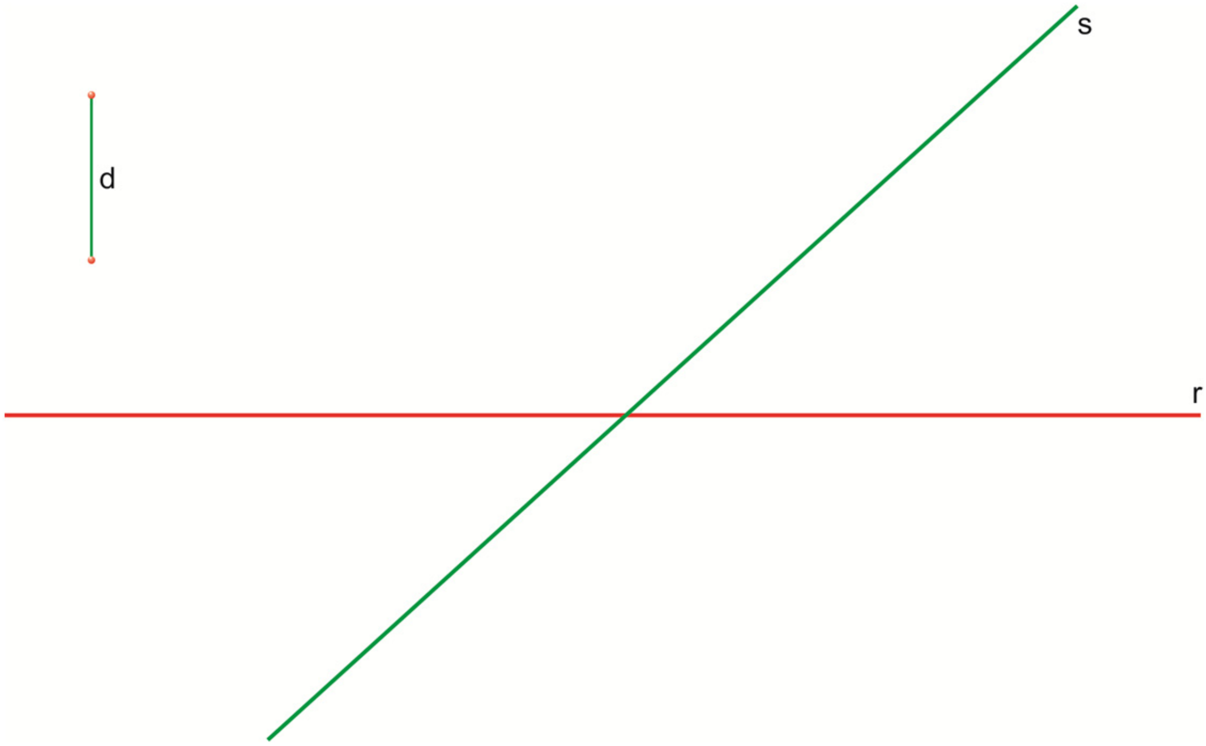


Figura 111: Dados do problema (Exemplo 4 do L.G.$_3$).

Construa um quadrado PQRS de lados medindo **d**, com **S** pertencente a **s** e $\overline{QR}$ contido em **r**.

Resolução:

O problema se resolve obtendo-se o vértice **S**, pois já conhecemos a medida do lado do quadrado.

– Solução intuitiva:

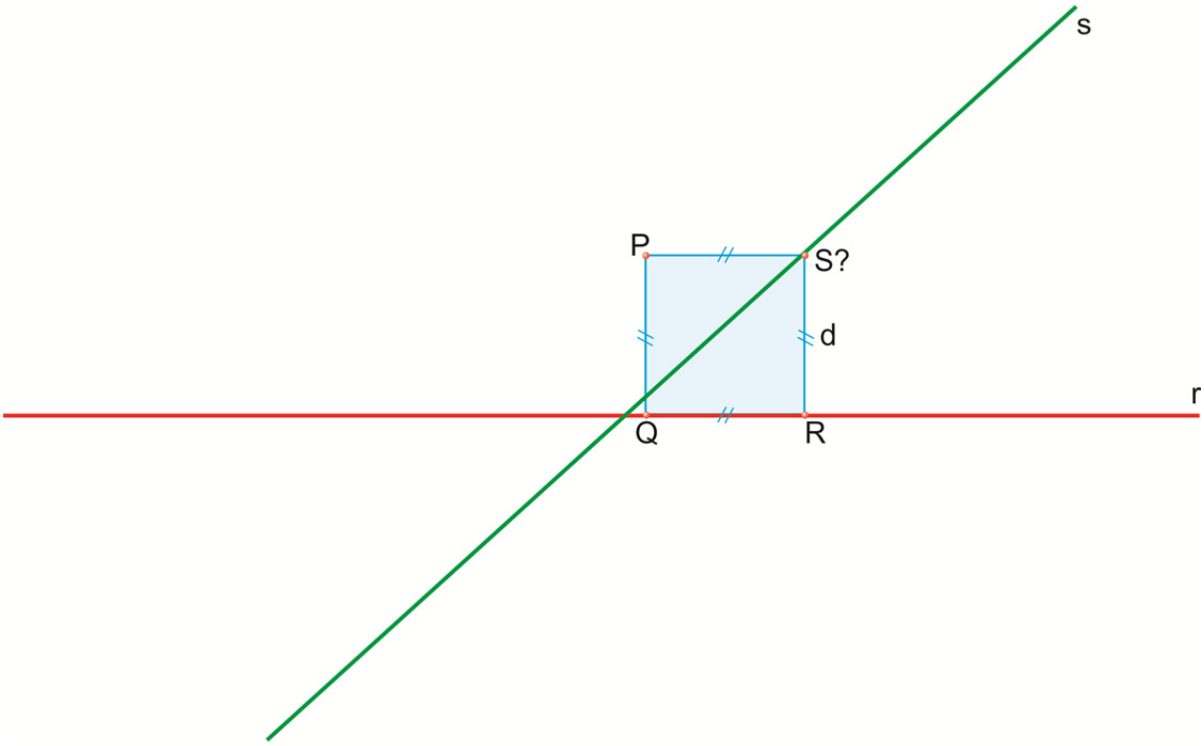


Figura 112: Suposto resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_3$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que **S** dista **d** de **r**. Então, devemos construir o L.G.$_3$ de medida **d** para **r**.

1º passo:

Construir o L.G.$_3$, usando a medida **d**, para **r**.

2º passo:

Identificar o vértice **S** na reta **s**.

3º passo:

Obter **R** na perpendicular baixada de **S** sobre **r**.

4º passo:

Construir o L.G.$_1$ de raio **d** para **R**, obtendo **Q** em **r**.

5º passo:

Construir o L.G.$_1$ de raio **d** para **S**, obtendo **P** no L.G.$_3$ construído.

6º passo:

Completar a construção dos lados restantes.

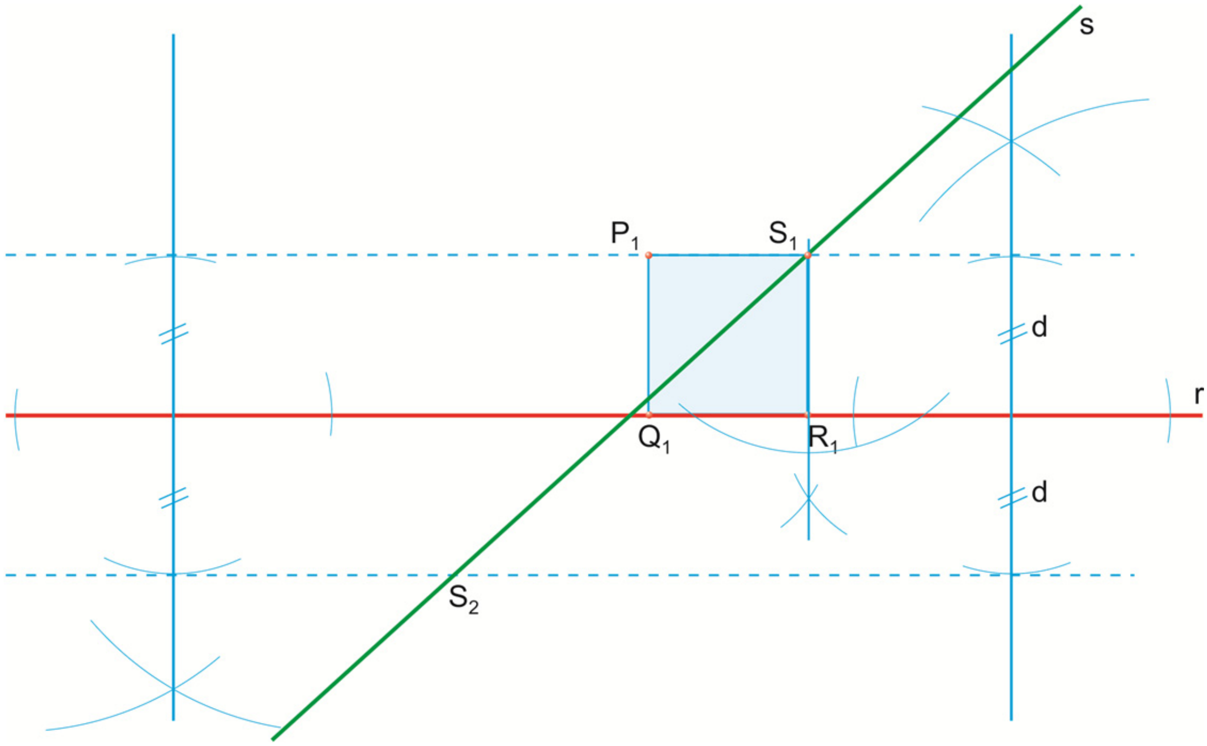


Figura 113: Problema resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_3$).

A solução obtida com $\mathbf{S_2}$ é congruente à mostrada com $\mathbf{S_1}$. Então, a solução métrica do problema é única.

Exemplo 5: As retas desta figura, indicadas por $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, representam dois canais de irrigação de uma fazenda.

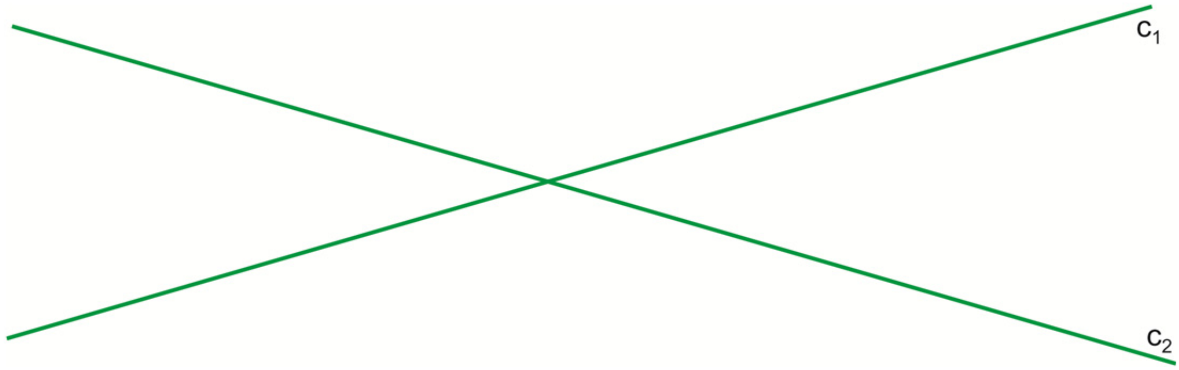


Figura 114: Dados do problema (Exemplo 5 do L.G.3).

O proprietário dessa fazenda deseja instalar uma bomba para captação de água, de modo que sua localização diste 15 m de cada um desses canais. Usando uma escala de 1:1000, indique, graficamente, um possível local para a instalação dessa bomba.

Resolução:

Primeiramente, vamos obter a medida **d**, em centímetros, do segmento que representará os 15 m.

$$E = \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{1000} = \frac{d}{15\text{ m}}$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{1500} \Rightarrow d = 1{,}5\text{ cm}$$

– Solução intuitiva:

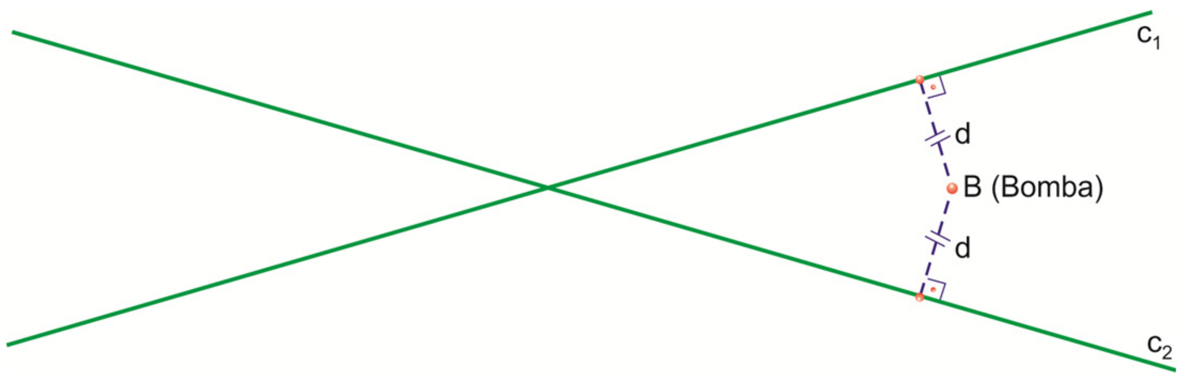


Figura 115: Suposto resolvido (Exemplo 5 do L.G.3).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto **B**, representativo da bomba, dista **d** de $\mathbf{c_1}$, bem como de $\mathbf{c_2}$. Então, deve-se construir para $\mathbf{C_1}$ um L.G.$_3$ de medida **d** e, para $\mathbf{c_2}$, também.

1º passo:

Construir o L.G.$_3$, usando a medida **d**, para $\mathbf{c_1}$.

2º passo:

Construir o L.G.$_3$, usando a medida **d,** para $\mathbf{c_2}$.

3º passo:

Identificar o possível ponto **B** na intersecção do L.G.$_3$ construído.

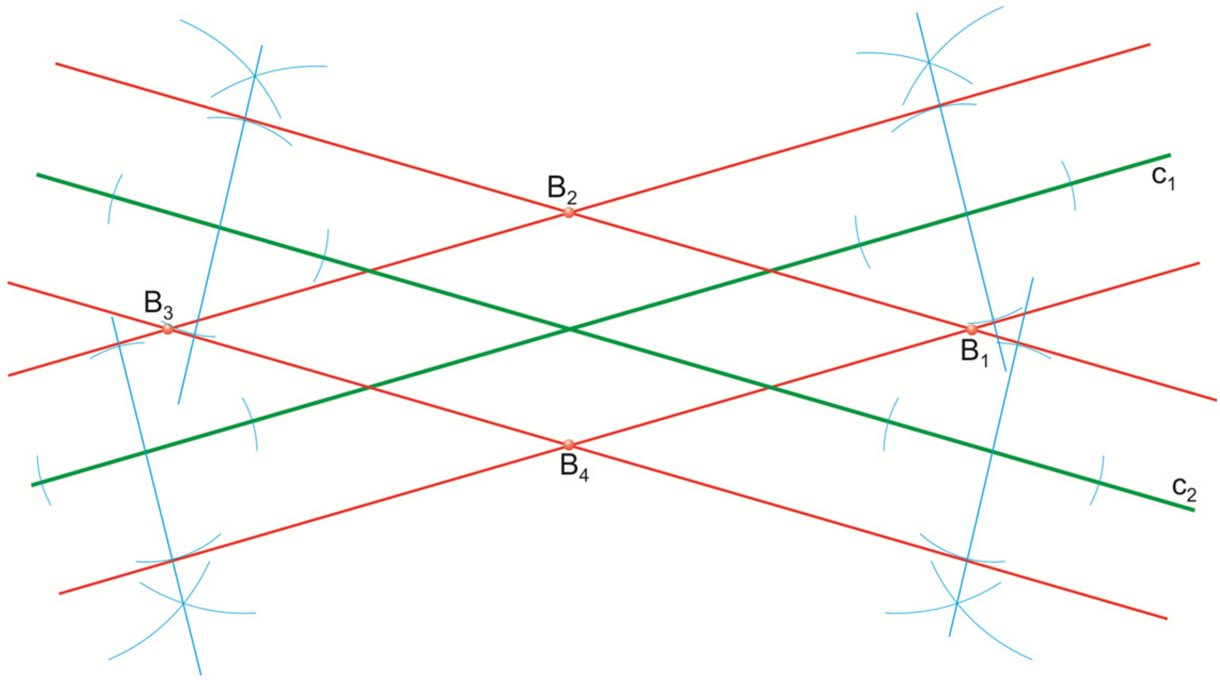


Figura 116: Problema resolvido (Exemplo 5 do L.G.$_3$).

O problema admitiu 4 soluções.

6.4 L.G.$_4$: Bissetrizes

– Definição:

É o Lugar Geométrico dos pontos **P**, de um plano, equidistantes de duas retas concorrentes **r** e **s** desse plano.

– Construção intuitiva:

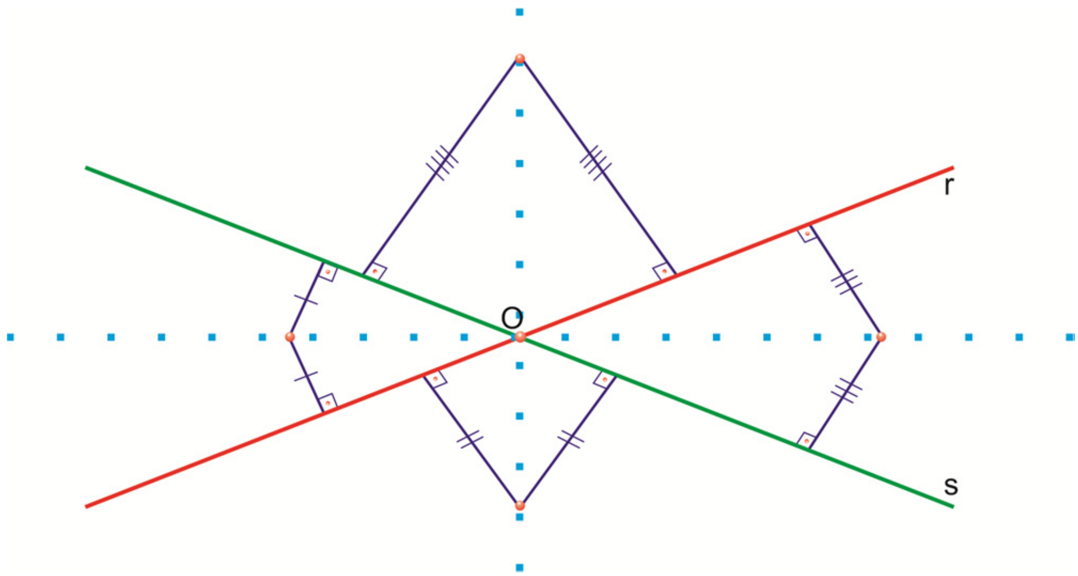


Figura 117: Esboço do L.G.$_4$.

– Conjectura:

A disposição dos pontos na construção intuitiva (equidistantes de **r** e **s**) sugere que eles pertencem às bissetrizes dos ângulos determinados por **r** e **s**.

Demonstração:

Faremos a demonstração para um dos quatro ângulos, sem perda da generalidade

1ª Parte: Hipótese: Se **P** pertence ao L.G.$_3$ (bissetriz).
Tese: Então **P** equidista de **r** e **s**.

Seja **P** um ponto da bissetriz de um dos ângulos determinados por **r** e **s**.

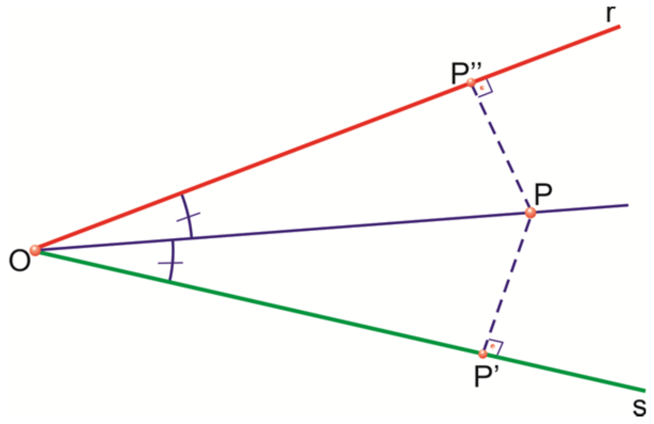


Figura 118: P’ÔP ≡ P”ÔP.

Notemos que os triângulos OPP’ e OPP” são congruentes pelo caso Lado, Ângulo, Ângulo-oposto (L, A, Ao). Portanto, $\overline{PP}$’ ≡ $\overline{PP}$”, indicando que d(P, r) = d(P, s).

2ª Parte:
- Hipótese: Se **P** equidista de **r** e **s**.
- Tese: Então **P** pertence à bissetriz do ângulo determinados por **r** e **s**.

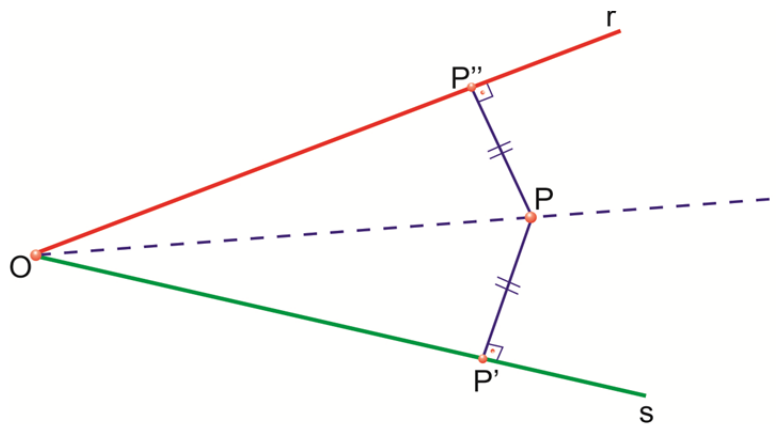


Figura 119: d(P, r) = d(P, s).

Notemos que os triângulos OPP’ e OPP” são congruentes pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos. Então, os ângulos PÔP’ e POP” são congruentes, indicando que **P** pertence à bissetriz do ângulo entre **r** e **s**.

Uma outra forma de se comprovar essa segunda parte é a seguinte:

Se tomarmos um ponto **Q** fora da bissetriz, das duas uma: ou d(Q, r) > d(Q, s) ou d(Q, r) < d(Q, s).

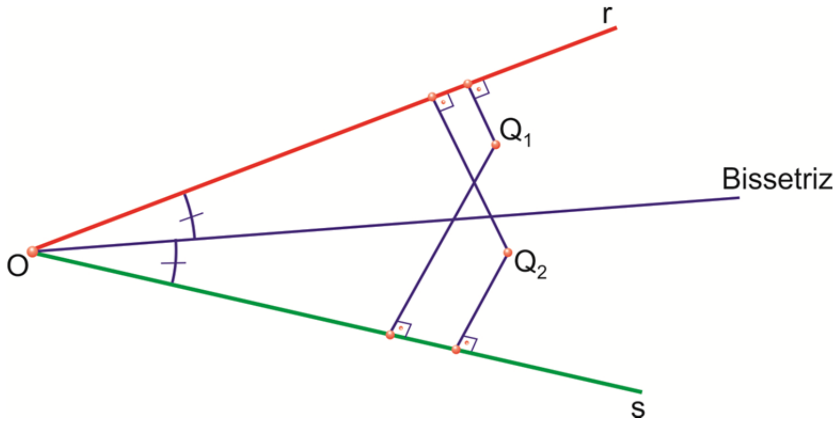


Figura 120: d(Q_1, r) < d(Q_1, s) e d(Q_2, r) > d(Q_2, s).

Considerando os quatro ângulos determinados por **r** e **s**, as bissetrizes daqueles que são opostos pelo vértice serão semirretas opostas.

Portanto, o $L.G._4$ é o par de retas que contêm as bissetrizes dos ângulos determinados por **r** e **s**, ou seja, são as retas suportes das bissetrizes desses ângulos.

– Construção com régua e compasso:

Passo único:

Construir as retas suportes das bissetrizes dos ângulos determinados por **r** e **s**.

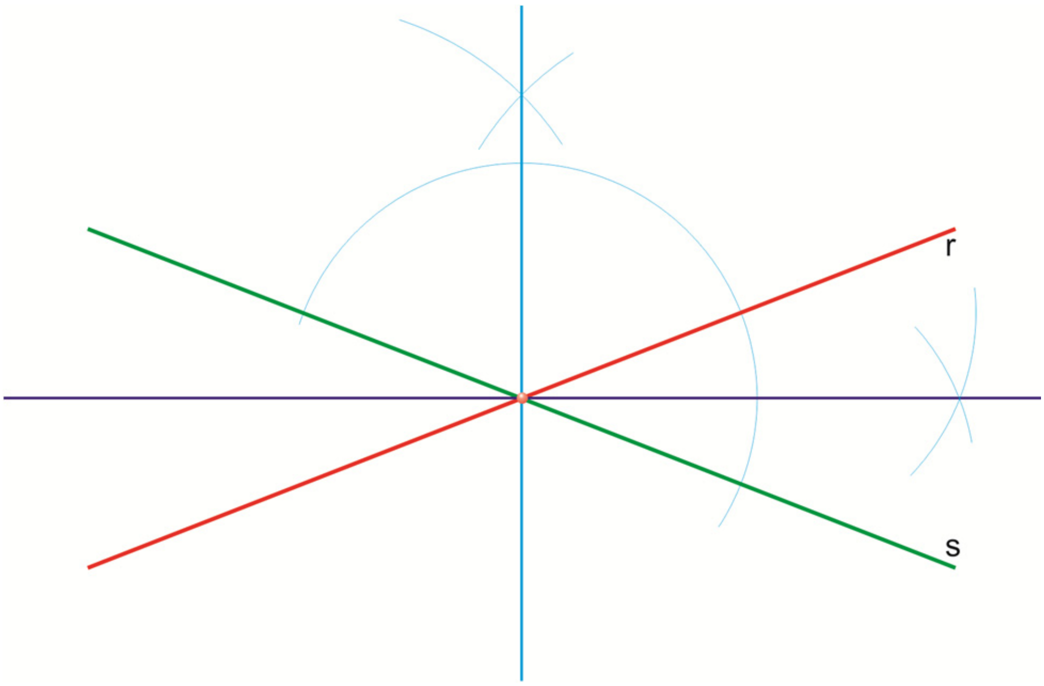


Figura 121: $L.G._4$ construído.

– Construção com o uso do GeoGebra:

São dadas as retas concorrentes **r** e **s**.

1º passo:

Selecionar o ícone .

2º passo:

Selecionar a reta **r** e, em seguida, a reta **s**. Isso feito, aparecerão às bissetrizes dos ângulos entre **r** e **s**.

É importante ressaltar que, ao construir o L.G. dos pontos equidistantes de **r** e **s**, estamos determinando outros dois Lugares Geométricos: o L.G. dos pontos cuja distância até **r** é menor que a distância até **s** (Fig. 122a) e, também, o L.G. dos pontos cuja distância até **r** é maior que distância até **s** (Fig. 122b).

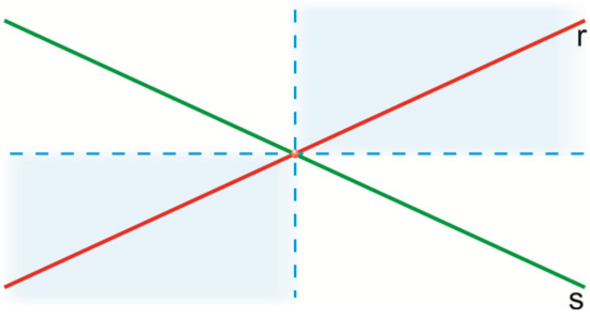


Figura 122a: Pontos mais próximos de **r** do que de **s**.

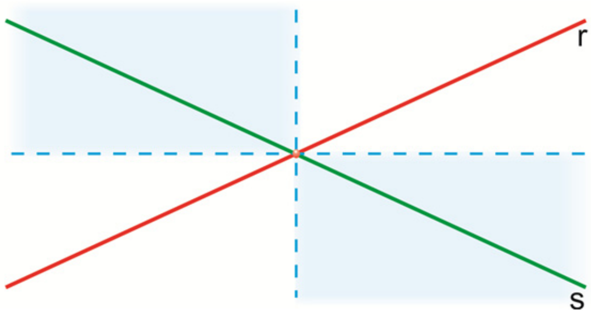


Figura 122b: Pontos mais próximos de **s** do que de **r**.

– Aplicação genérica:

Esse L.G. deverá ser construído sempre que procurarmos um ponto **P**, de um plano, equidistante de duas retas concorrentes (**r** e **s**) desse plano.

Apresentemos, agora, alguns exemplos de aplicação:

Exemplo 1: Sejam **s** e **t** duas retas concorrentes e seja **T** um ponto de **t**.

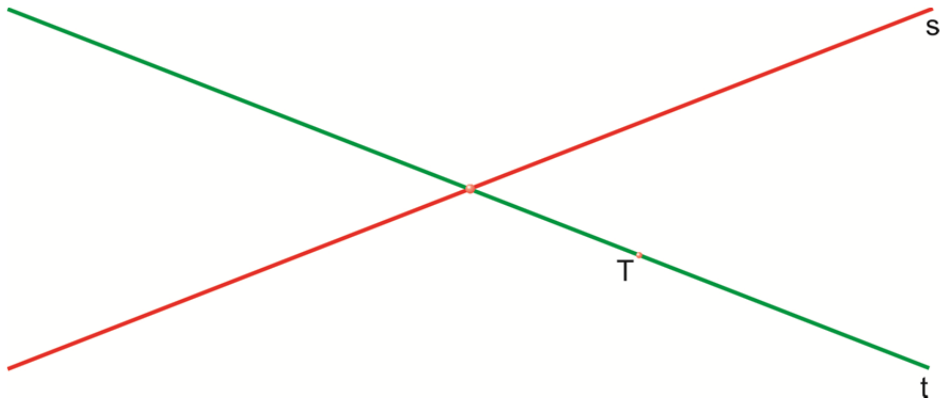


Figura 123: Dados do problema (Exemplo 1 do L.G.$_4$).

Construir uma circunferência, tangente a **s** e **t**, passando pelo ponto de tangência **T**.

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do centro **O** da circunferência procurada.

– Solução intuitiva:

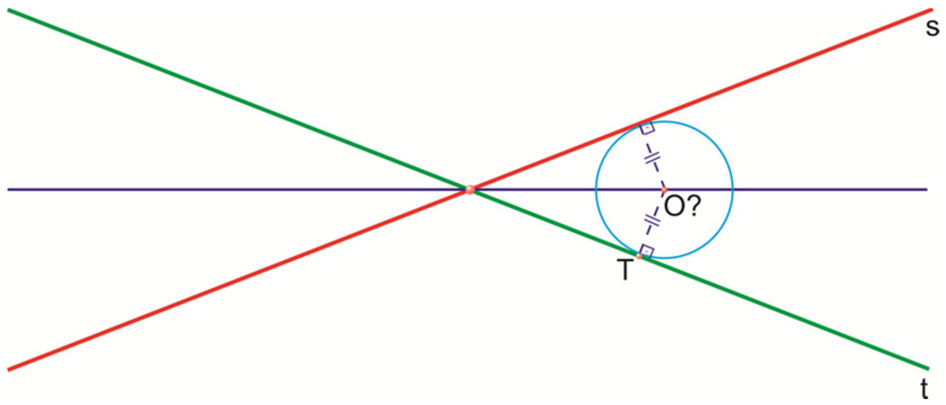


Figura 124: Suposto resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_4$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro **O** da circunferência procurada equidista das retas **s** e **t** $(d(O, s) = d(O, t))$ e, também, pertence à reta **r**, perpendicular à reta **t**, traçada por **T** ($\overline{OT} \perp t$). Então, devemos construir o L.G.$_4$ para **r** e **s** e a perpendicular **t** por **T**.

1º passo:

Traçar as bissetrizes dos ângulos entre **s** e **t**.

2º passo:

Construir a reta **r** perpendicular a **t** conduzida por **T**.

3º passo:

Identificar o centro **O** na intersecção das construções anteriores.

4º passo:

Construir a circunferência de centro **O** e raio $\overline{OT}$.

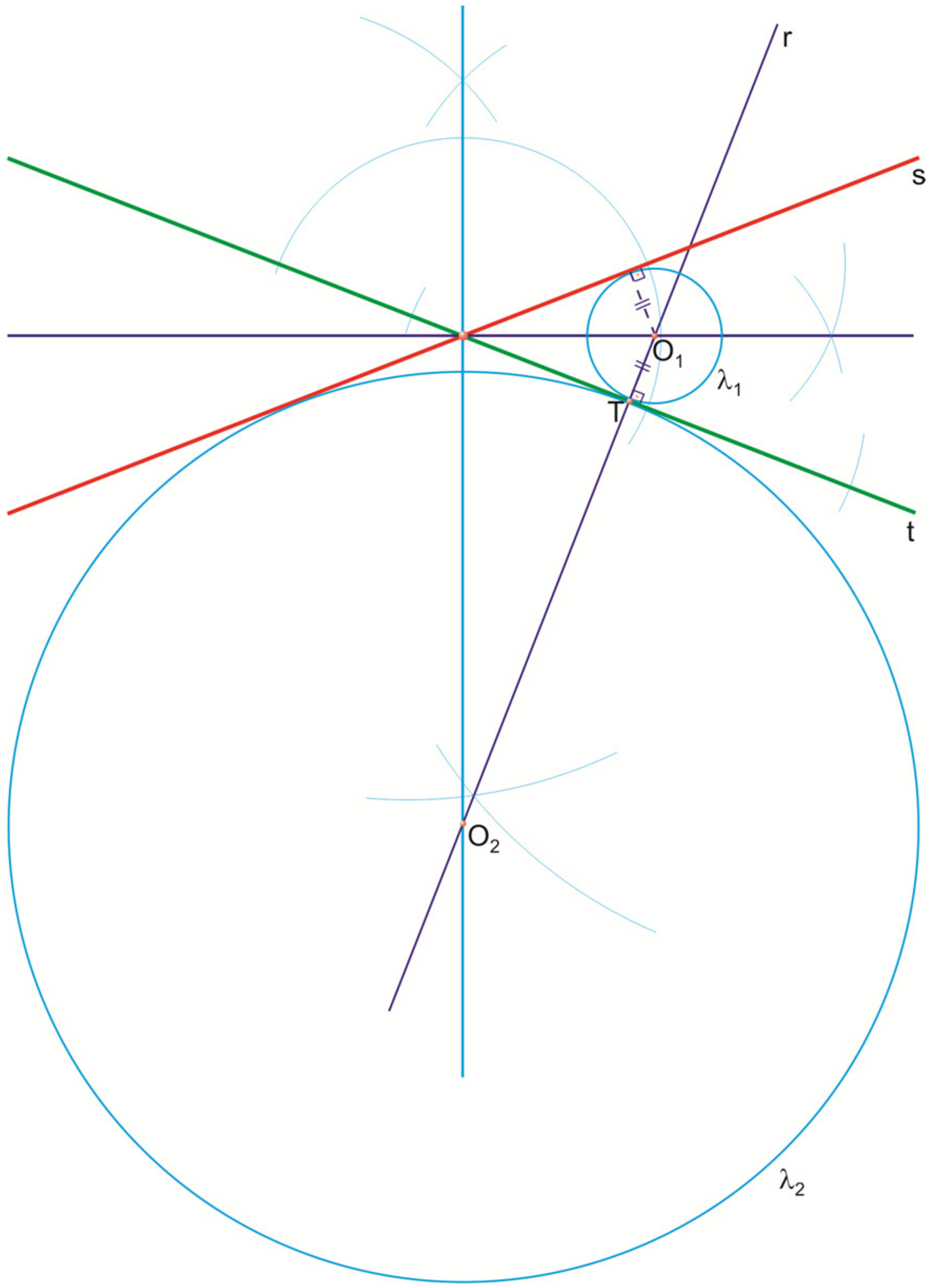


Figura 125: Problema resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_4$).

Exemplo 2: Considere o triângulo ABC da figura a seguir:

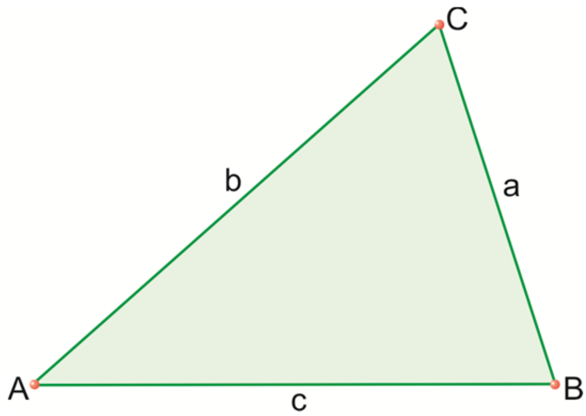


Figura 126: Dados do problema (Exemplo 2 do L.G.$_4$).

Construa a circunferência inscrita nesse triângulo:

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do centro **I** da circunferência e do ponto de tangência **T** a um dos lados do triângulo.

– Solução intuitiva:

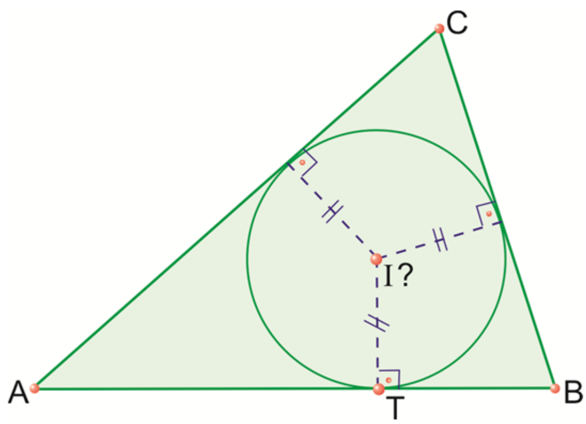


Figura 127: Suposto resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_4$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o centro **I** equidista dos lados do triângulo ABC, ou seja, $(d(I, a) = d(I, b) = d(I, c))$. Então, devemos traçar o $L.G._4$ para dois dos ângulos internos desse triângulo $\hat{A}$ e $\hat{B}$, por exemplo.

1º passo:

Traçar a bissetriz interna de $\hat{A}$.

2º passo:

Traçar a bissetriz interna de $\hat{B}$.

3º passo:

Identificar o centro **I** (Incentro) da circunferência procurada, na intersecção dos L.Gs. construídos.

4º passo: Construir por **I** a perpendicular a um dos lados ($\overline{AB}$ por exemplo), obtendo o ponto de tangência **T**.

5º passo:

Construir, passando por **T**, a circunferência de centro **I**.

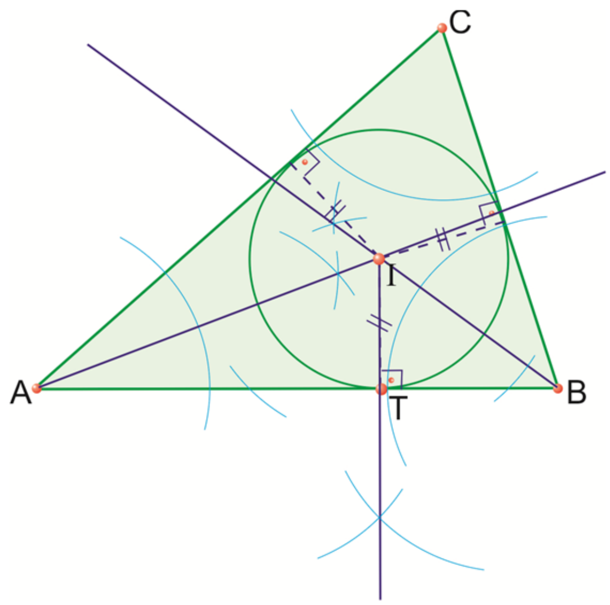


Figura 128: Problema resolvido (Exemplo 2 do $L.G._4$).

O problema admite solução única λ.

Exemplo 3: A linha irregular **r** da figura a seguir representa parte de um rio situada numa região relativamente plana. As semirretas pontilhadas $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$ representam canais de irrigação retilíneos e subterrâneos que captam água desse rio. A reta **f** representa uma ferrovia "cortada" pelos citados canais.

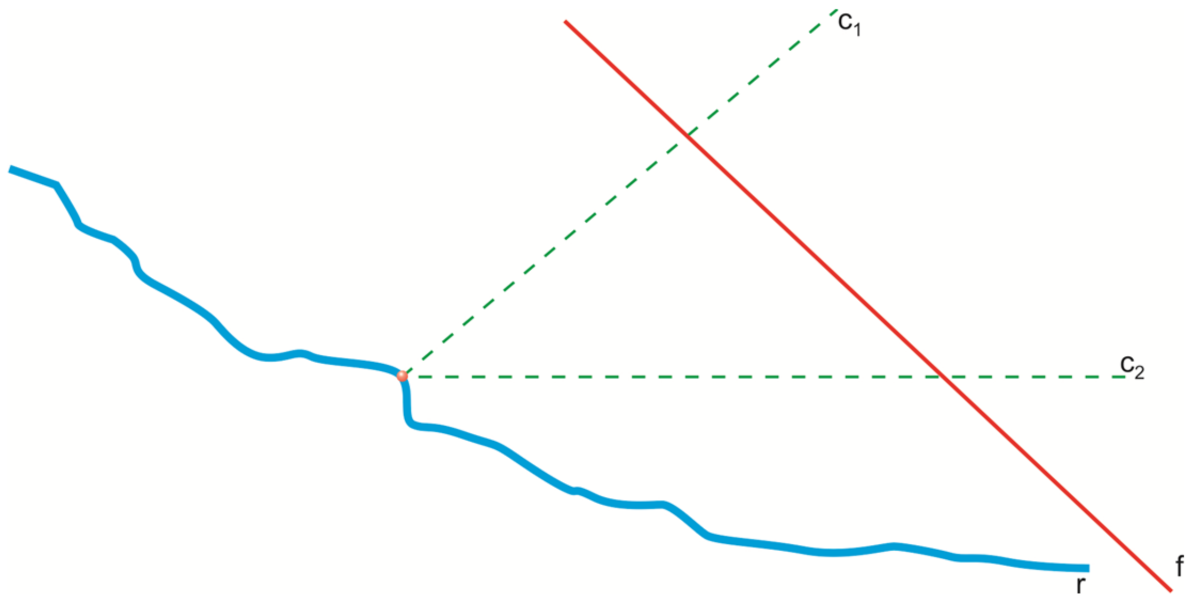


Figura 129: Dados do problema (Exemplo 3 do L.G.$_4$).

A empresa administradora da ferrovia deseja instalar às margens dessa via um reservatório de água que deve ser abastecido pelos dois canais. O local escolhido deve ser tal que os gastos com tubulações de captação sejam os mesmos para ambos os canais. Nessas condições, indique graficamente o local **I**, de instalação do reservatório.

Resolução:

O problema se resolve obtendo o ponto **I**.

– Solução intuitiva:

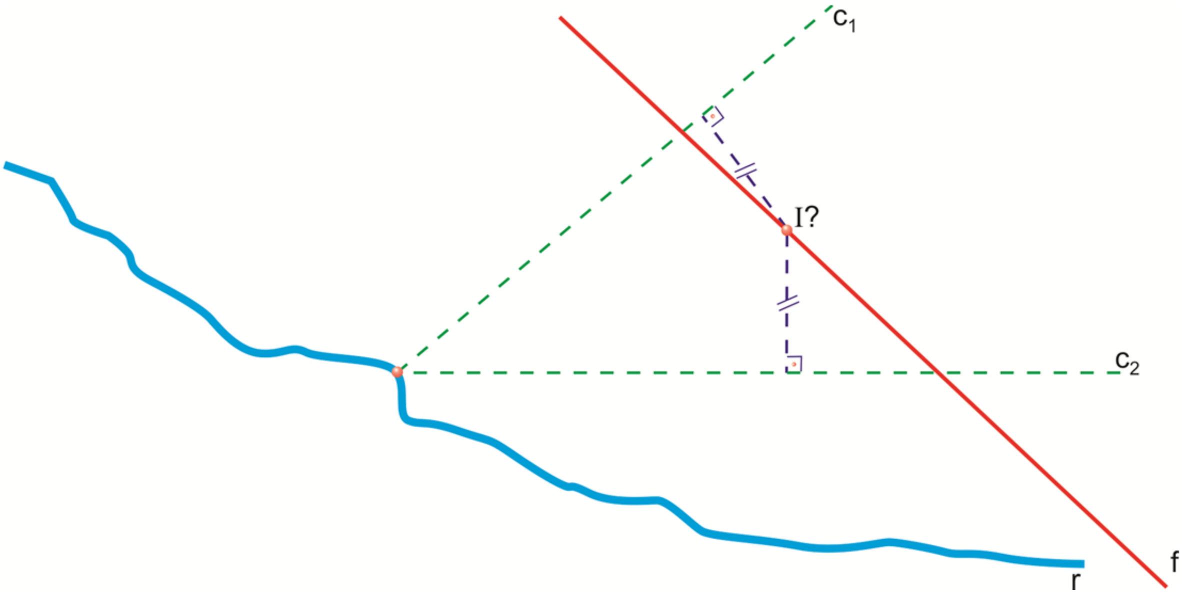


Figura 130: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_4$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que a distância de **I** até $\mathbf{c_1}$ é igual à distância de **I** até $\mathbf{c_2}$ $(d(I, c_1) = d(I, c_2))$. Isso indica que devemos construir o L.G.$_4$ para $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$.

1º passo:

Construir a bissetriz do ângulo entre $\mathbf{c_1}$ e $\mathbf{c_2}$, obtendo **I** em **f**.

2º passo:

Identificar o ponto **I** na intersecção de **f** com o L.G. construído:

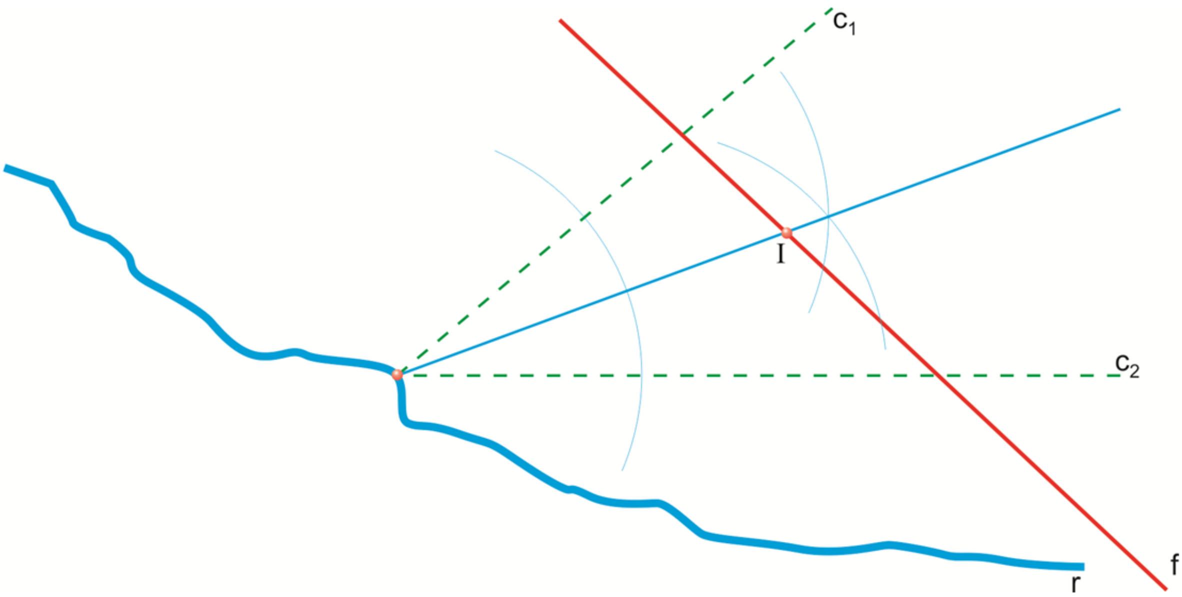


Figura 131: Problema resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_4$).

6.5 L.G.$_5$: Arcos capazes

– Definição:

É o Lugar Geométrico dos pontos **P**, de um plano, que "enxergam" um segmento $\overline{AB}$, dado nesse plano, sob um ângulo de medida α dado.

Nota: Dizermos que um ponto **P** enxerga um segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida α, quando $A\hat{P}B = \alpha$.

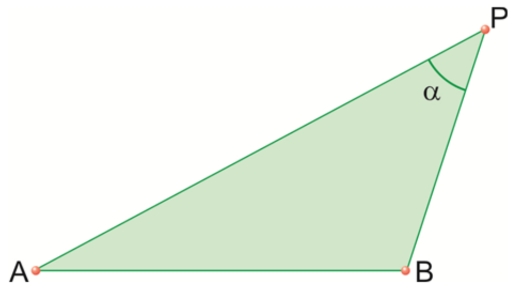


Figura 132: $\hat{P}$ enxerga $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida α.

– Construção intuitiva:

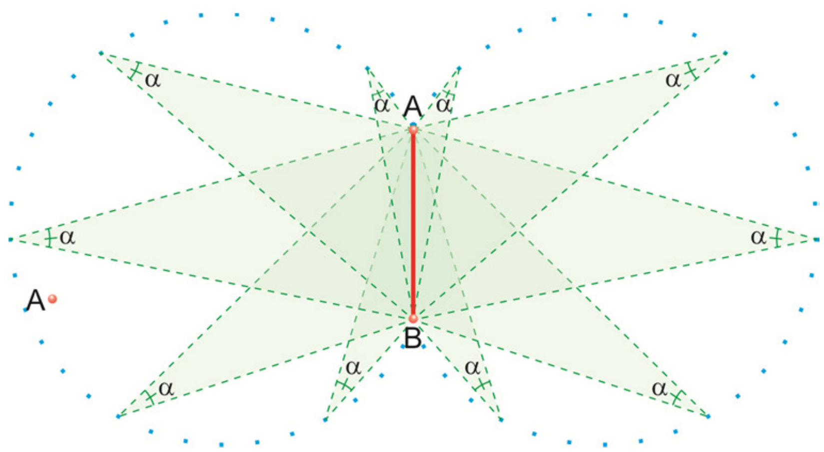


Figura 133: Esboço do L.G.$_5$.

– Conjectura:

A disposição dos pontos na construção intuitiva sugere que eles pertencem a dois arcos de circunferência que apresentam a corda $\overline{AB}$ em comum (esses arcos recebem o nome de arcos capazes do ângulo α).

Demonstração:

1ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: Se } \mathbf{P} \text{ pertence ao L.G.}_5 \text{ (arco capaz)} \\ \text{Tese: Então } A\hat{P}B = \alpha \end{cases}$

Como vimos nas Noções Preliminares, qualquer ângulo inscrito em uma circunferência tem medida igual à metade do arco subtendido. Estas figuras representam essa situação.

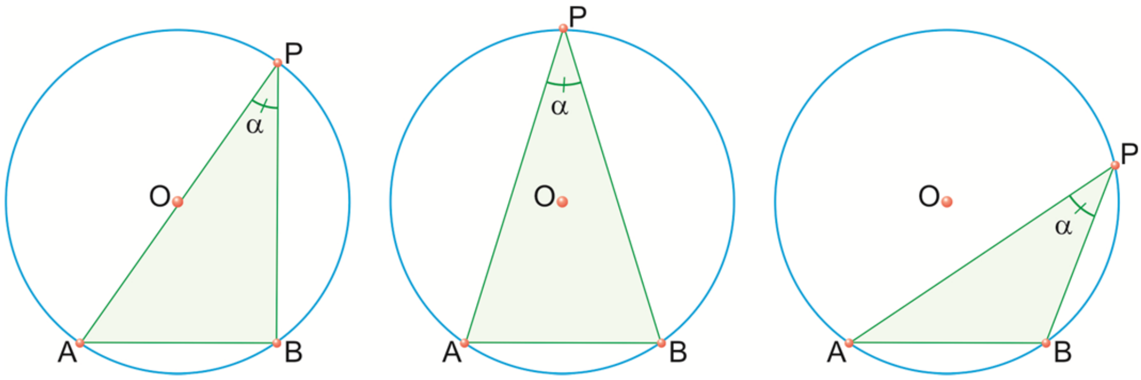


Figura 134: $A\hat{P}B = \dfrac{\overset{\frown}{AMB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{APB}$ é o arco capaz de α.

2ª Parte: $\begin{cases} \text{Hipótese: Se } A\hat{P}B = \alpha. \\ \text{Tese: } \mathbf{P} \text{ pertence a um dos arcos capazes a } \alpha. \end{cases}$

Provaremos para um dos arcos, como segue:

De acordo com o teorema do ângulo externo de um triângulo, ao tomar um ponto **Q** fora do arco capaz, tem-se $A\hat{Q}B > \alpha$ (Fig. 135a) ou $A\hat{Q}B < a$ (Fig. 135b).

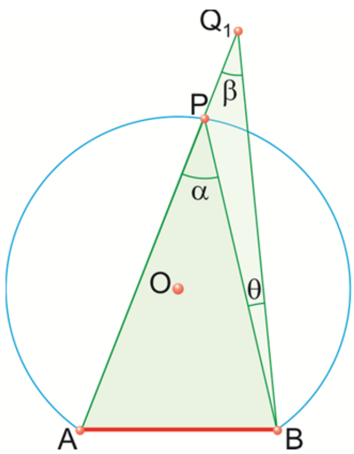


Figura 135a: $\beta < \alpha$.

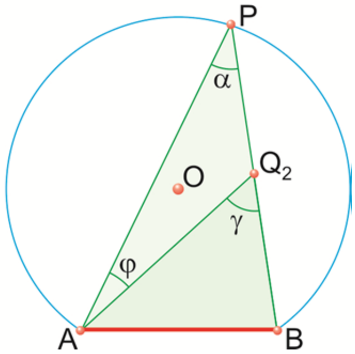


Figura 135b: $\gamma > \alpha$.

Nota: Um caso particular muito importante e muito útil é aquele em que $\alpha = 90°$. Nesse caso, o par de arcos capazes são as semicircunferências de diâmetro $\overline{AB}$.

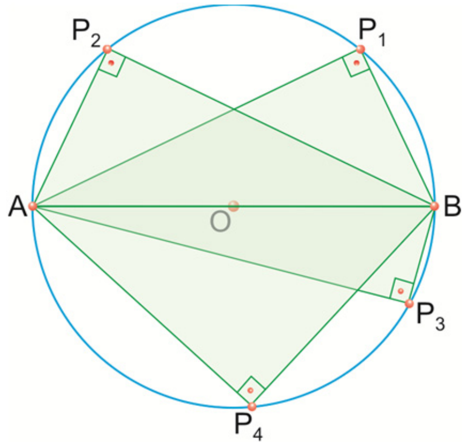


Figura 136: Arco capaz de 90°.

– Construção com régua e compasso:

Antes da construção, consideremos estas figuras, em que a reta **t** tangencia a circunferência **λ** em **B**.

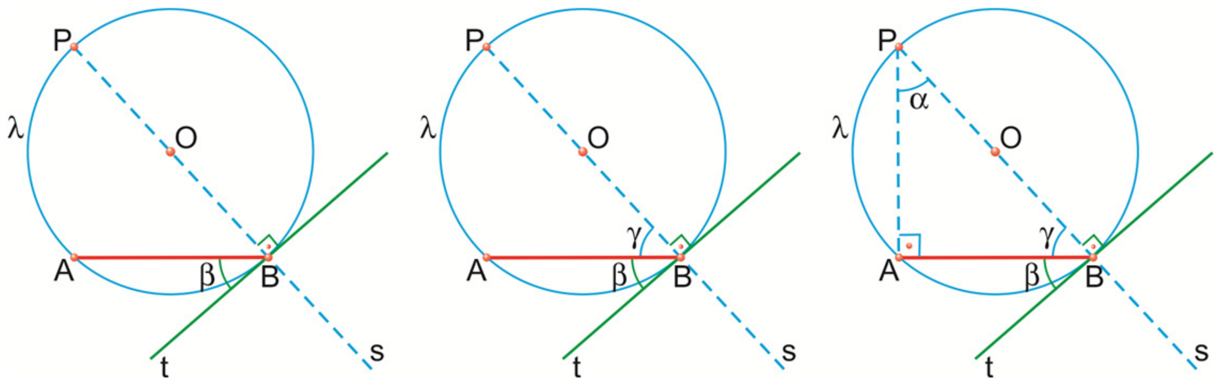


Figura 137a: $s \perp t$ Figura 137b: $\beta + (\gamma + 90°) = 180°$ Figura 137c: $\alpha + \gamma + 90° = 180°$

Nessas figuras, temos:

$\overline{PB}$ é um diâmetro, indicando que $P\hat{A}B = 90°$

$$\left.\begin{array}{l}\beta + (\gamma + 90°) = 180° \text{ (ângulos suplementares adjacentes)} \\ \alpha + \gamma + 90° = 180° \text{ (Soma dos ângulos internos do } \Delta ABP\text{)}\end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \alpha$$

Então, para a construção do arco capaz pode-se proceder como se vê a seguir:

1º passo:

Construir o ângulo $A\hat{B}C = \alpha$ (um dos lados desse ângulo estará contido em **t**).

2º passo:

Construir por **B** a reta **s** perpendicular a **t**.

3º passo:

Construir a mediatriz de $\overline{AB}$.

4º passo:

Identificar em **s**, e na mediatriz de $\overline{AB}$, o centro **O** da circunferência que contém o arco.

5º passo:

Construir o arco de centro **O** passando por **A** e **B**.

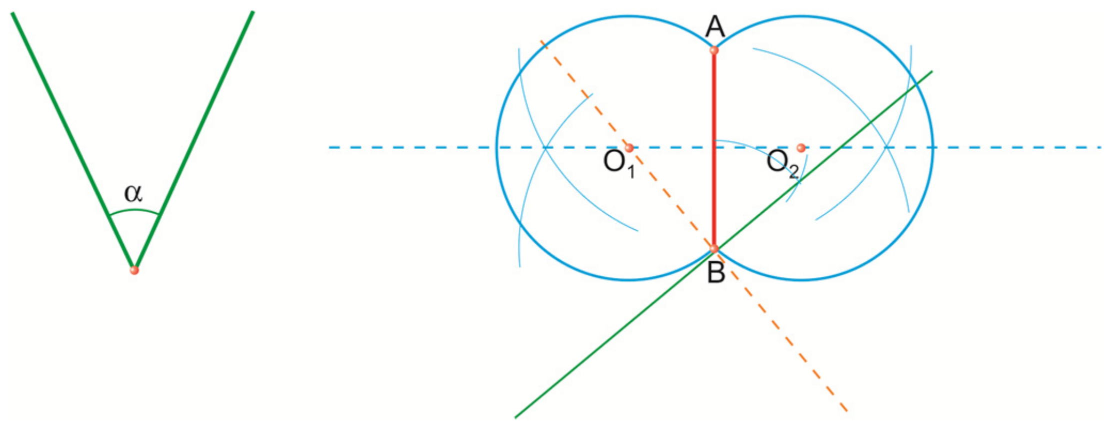
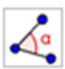


Figura 138: L.G.$_5$: Construído.

– Construção com uso do GeoGebra:

Dado o segmento $\overline{AB}$ e o ângulo α.

1º passo:

Selecionar a ferramenta .

2º passo:

Selecionar os lados do ângulo.

3º passo:

Selecionar a ferramenta .

4º passo:

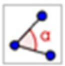
Selecionar o ângulo.

5º passo:

Selecionar $\overline{AB}$.

<u>Nota:</u> A ferramenta  (arco capaz) foi criada pelo professor Wagner Donizetti da Silva (professor de informática do colégio Cenecista Dr. José Ferreira) em conjunto com o autor deste texto e não faz parte do conjunto de ferramentas do *software* GeoGebra. Essa ferramenta encontra-se no ambiente do GeoGebra Tube (19 December 2013 – 13:41). Por esse motivo, será mostrado a seguir, um segundo procedimento usando as ferramentas originais do GeoGebra:

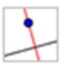
1º passo:

Selecionar a ferramenta  e, em seguida, selecionar os lados do ângulo obtendo a medida α desse ângulo.

2º passo:

Selecionar a ferramenta  para construir o ângulo $A\hat{B}C$ de medida α.

3º passo:

Selecionar a ferramenta  para traçar por **B** a reta **s** perpendicular ao lado $\overline{BC}$ do ângulo construído.

4º passo:

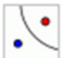
Selecionar a ferramenta  para traçar mediatriz $\overline{AB}$, a qual intercecta **s** no centro **O** do arco.

5º passo:

Selecionar a ferramenta  e construir o arco de centro **O** passando por **A** e **B** (um dos arcos capazes).

6º passo:

Selecionar a ferramenta . Em seguida, selecionar o arco construído e o segmento $\overline{AB}$, fazendo surgir o outro arco capaz, finalizando a construção.

<u>**Nota:**</u> Os ícones , , , ,  e  fazem parte de um mesmo grupo de ferramentas.

É importante ressaltar que, ao construir o L.G. dos pontos que enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida α, estamos determinando outros dois Lugares Geométricos: o L.G. dos pontos que enxergam $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida menor que α (Fig. 139a), bem como o L.G. dos pontos que enxergam $\overline{AB}$ sob um ângulo maior que α (Fig. 139b)

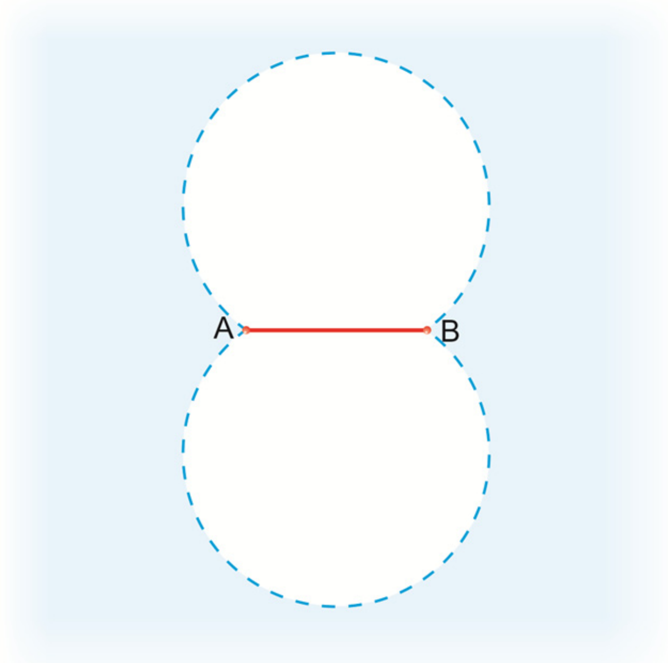


Figura 139a: Pontos que enxergam $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida menor que α.

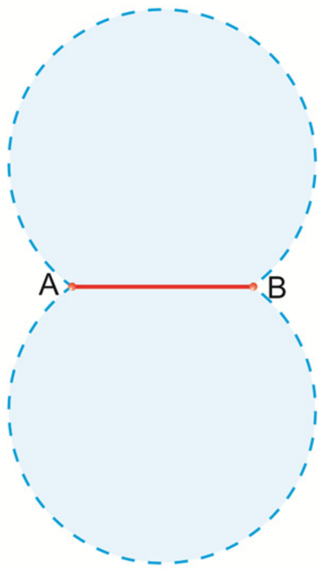


Figura 139b: Pontos que enxergam $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida maior que α.

– Aplicação Genérica:

O L.G.$_5$ deve ser construído sempre que se procurar um ponto **P** de um plano, que enxergue um segmento $\overline{AB}$, nesse plano, sob um ângulo de medida α dado.

A seguir, alguns exemplos de aplicação:

Exemplo 1: De um triângulo ABC, são dados o lado $\overline{AB}$ (fixo), a medida α do ângulo interno $\hat{C}$ e a reta **r** que contém o vértice **C**.

Figura 140: Dados do problema (Exemplo 1 do L.G.$_5$).

Construa esse triângulo.

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do vértice **C**, visto que **A** e **B** são conhecidos.

– Solução intuitiva:

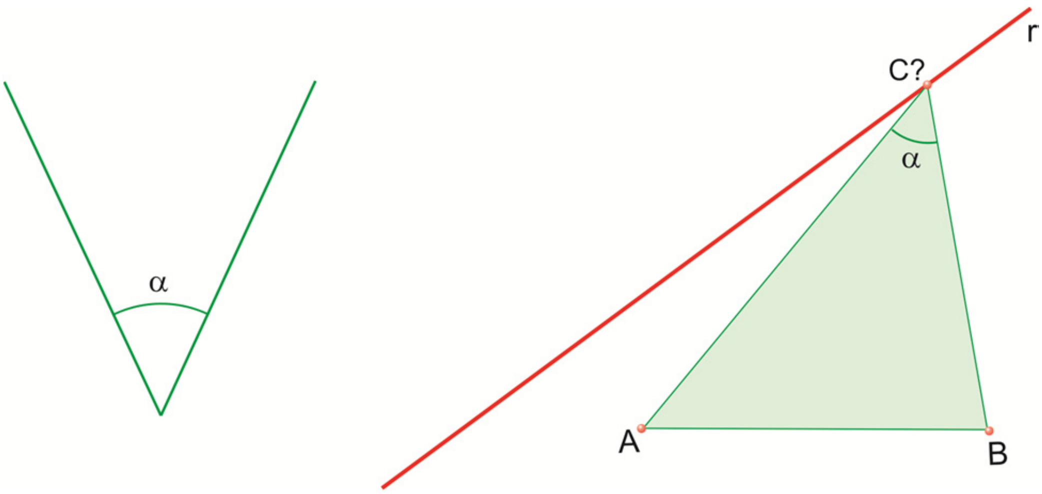


Figura 141: Suposto resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_5$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que $A\hat{C}B = \alpha$ e que $C \in r$. Então, deve-se construir o L.G.$_5$, para o segmento $\overline{AB}$, com medida α.

1º passo:

Construir o L.G.$_5$, de medida α, para $\overline{AB}$.

2º passo:

Identificar o ponto **C**, intersecção da reta **r** com o L.G. construído.

3º passo:

Construir os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

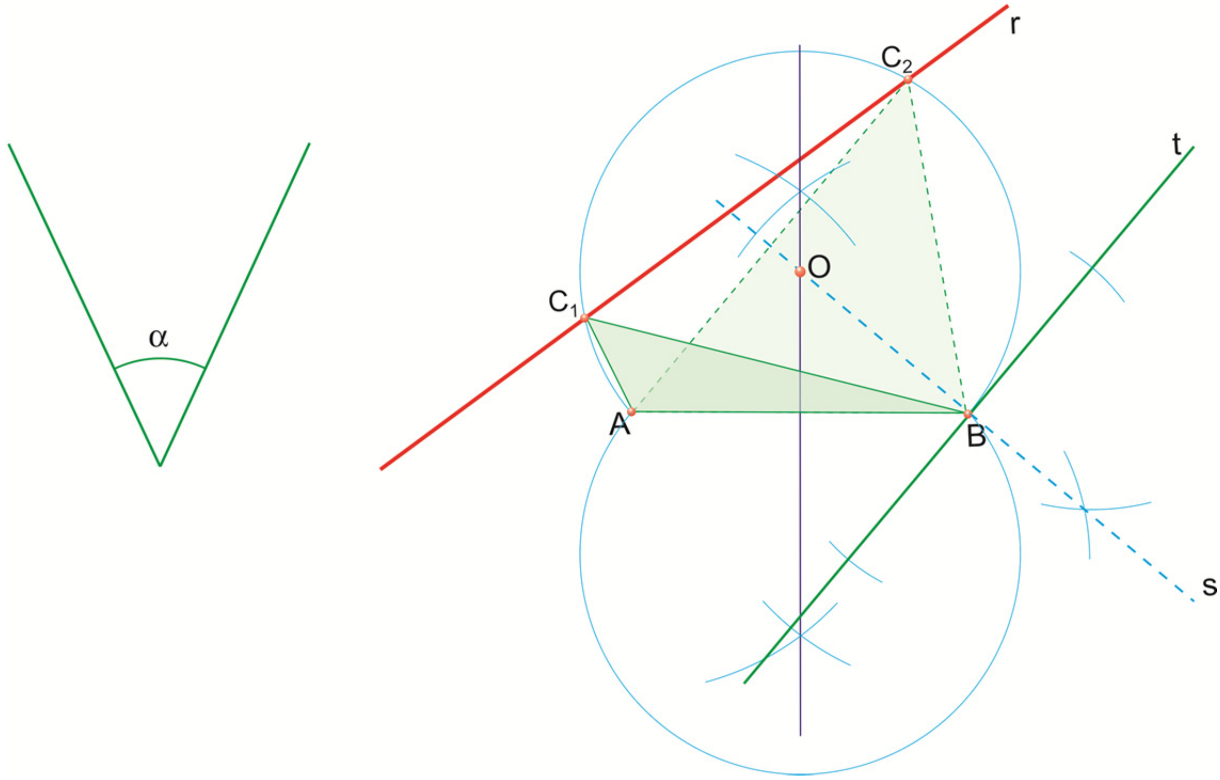


Figura 142: Problema resolvido (Exemplo 1 do L.G.$_5$).

O problema admitiu duas soluções: ΔABC_1 e ΔABC_2. Nesse caso, não foi necessário construir o outro arco capaz.

Exemplo 2: São dados o lado $\overline{AB}$ (fixo), a altura **h**, relativa do lado $\overline{AC}$ e a medida **b** desse lado.

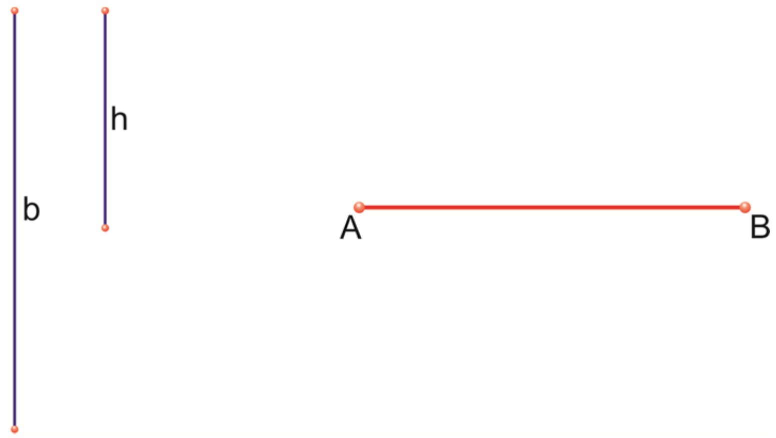


Figura 143: Dados do problema (Exemplo 2 do L.G.$_5$).

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do vértice **C**, visto que **A** e **B** são conhecidos.

– Solução intuitiva:

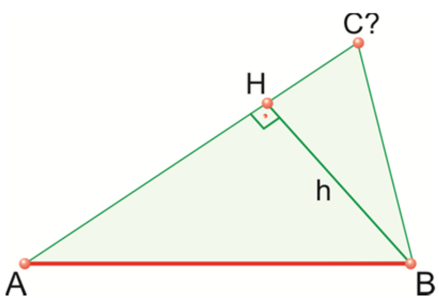


Figura 144: Suposto resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_5$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto **C** dista **b** de **A**, o ponto **H** dista **h** de **B** e enxerga $\overline{AB}$ sob um ângulo de 90°. Assim, antes de se obter **C**, obtém-se **H**, pois assim **C** pertencerá à reta suporte de $\overline{AH}$.

1º passo:

Construir o L.G.$_1$, de raio **b**, para **A**.

2º passo:

Construir o L.G.$_5$ de 90° para $\overline{AB}$.

3º passo:

Construir o L.G.$_1$, de medida **h**, para **B**.

4º passo:

Identificar o ponto **H** nos últimos dois L.Gs construídos.

5º passo:

Construir a reta $\overline{AH}$, obtendo-se **C** no primeiro L.G.$_1$ construído.

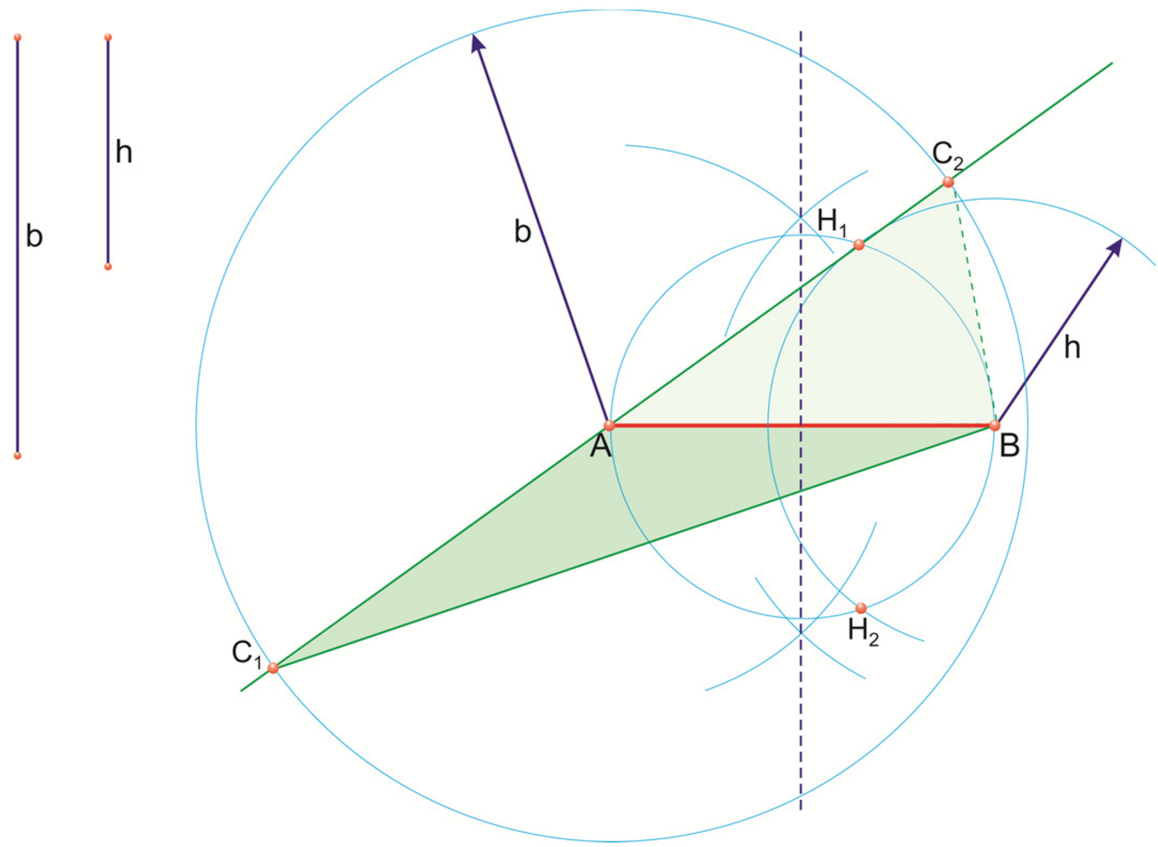


Figura 145: Problema resolvido (Exemplo 2 do L.G.$_5$).

O problema admitiu duas soluções: Triângulos ABC_1 e ABC_2.

Esse problema poderia ser resolvido, considerando o ponto **H_2**, obtendo-se, então, duas soluções, cada uma congruente a uma das soluções obtidas.

Exemplo 3: Conduzir pelo ponto **P** uma reta **t**, tangente à circunferência **λ**, de centro **O**.

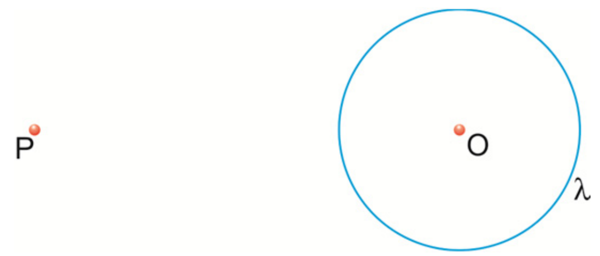


Figura 146: Dados do problema (Exemplo 3 do L.G.$_5$).

Resolução:

O problema se resolve com a obtenção do ponto **T** de tangência.

– Solução intuitiva:

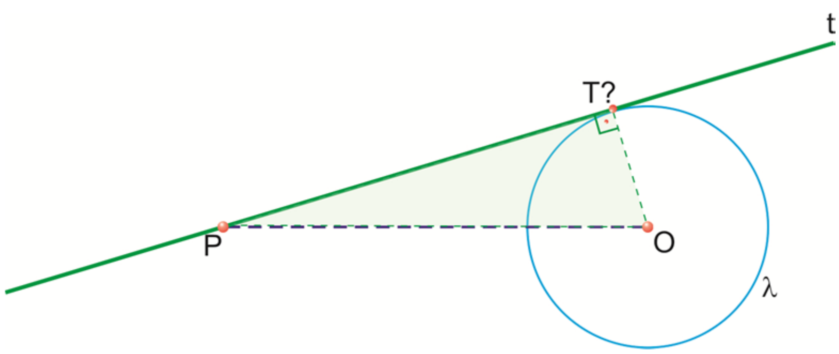


Figura 147: Suposto resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_5$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o ponto de tangência **T** enxerga $\overline{OP}$ sob um ângulo de 90° e pertence a **λ**. Deve-se, então, construir o L.G.$_5$ de 90° para $\overline{OP}$.

1º passo:

Construir o L.G.$_5$ de 90° para $\overline{OP}$.

2º passo:

Identificar o ponto de tangência **T**, na intersecção de **λ** com o L.G construído.

3º passo:

Traçar a reta tangente $\overline{PT}$.

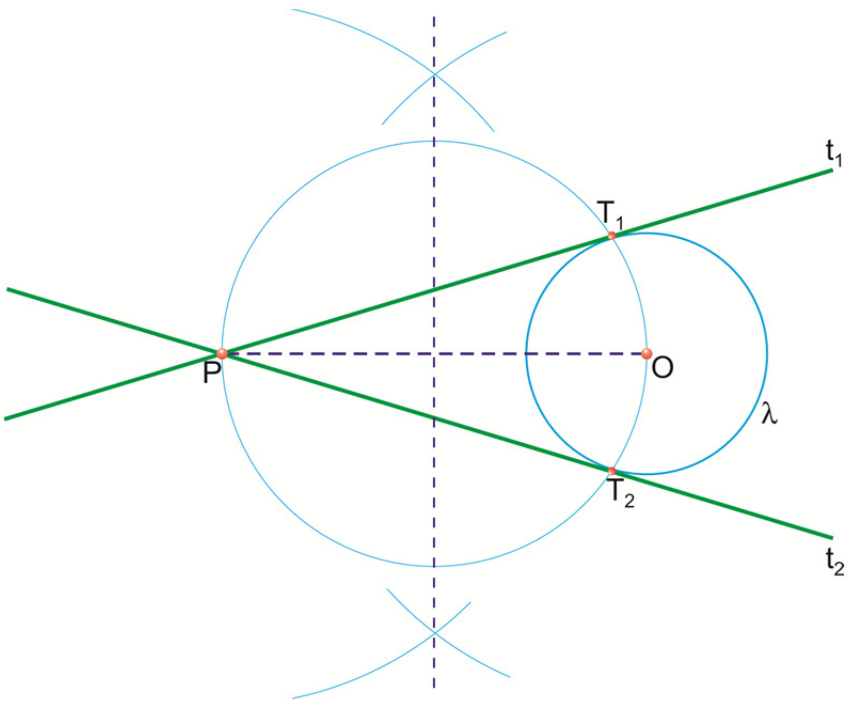


Figura 148: Problema resolvido (Exemplo 3 do L.G.$_5$).

O problema admitiu duas soluções, $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$.

Exemplo 4: Uma empresa de vigilância trabalha com um tipo de câmera de segurança cujo campo visual é de 60°, como se vê nesta figura.

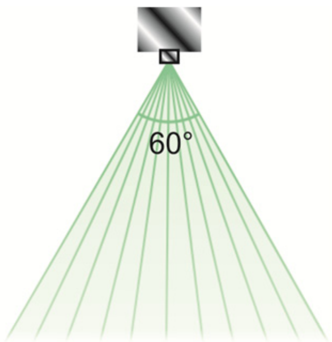


Figura 149: Campo visual.

Um comerciante quer instalar, numa das paredes laterais de seu estabelecimento, uma dessas câmeras. Esse equipamento deve ser instalado de modo que a porta frontal do prédio, bem como o interruptor de luz possam a ser inteiramente vigiados. A figura a seguir mostra um esboço matemático das paredes do estabelecimento numa escala 1 : 500. Nesse esboço, o ponto **P** indica o interruptor de luz.

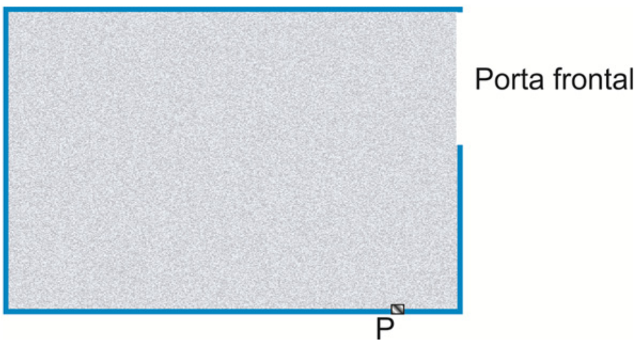


Figura 150: Esboço das paredes.

Indique, graficamente, o ponto **I** que indica o local a ser instalada a câmera.

Resolução:

– Solução intuitiva:

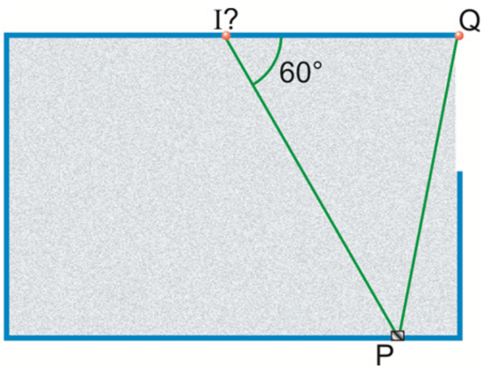


Figura 151: Suposto resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_5$).

– Solução gráfica:

A solução intuitiva sugere que o segmento $\overline{PQ}$ é visto, pelo ponto **I** de instalação, sob um ângulo de 60°.

1º passo:

Construir o L.G.$_5$ para $\overline{PQ}$ de medida 60°.

2º passo:

Identificar sobre as laterais, o ponto **I** de instalação.

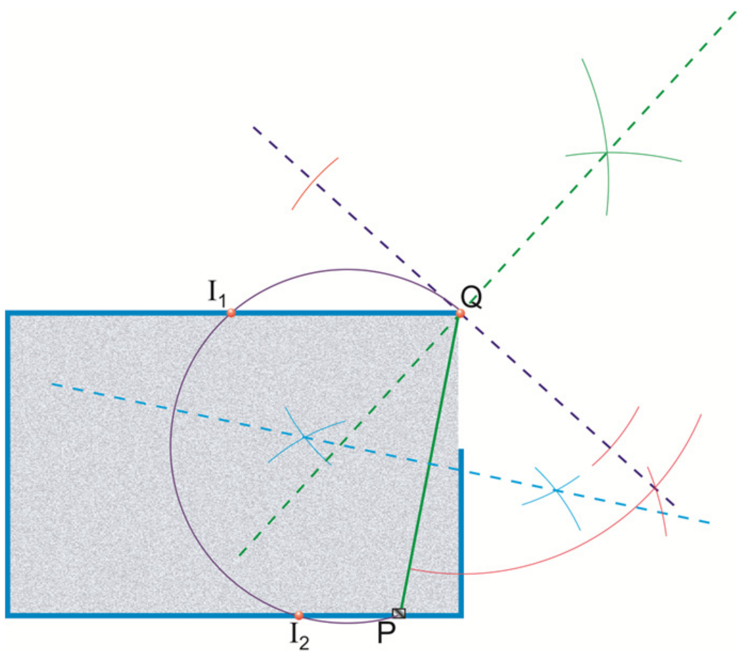


Figura 152: Problema resolvido (Exemplo 4 do L.G.$_5$).

7 ATIVIDADE DINÂMICA

Considere-se o seguinte problema:

São dados uma reta **s** e um ponto **O** fora dela. Considere uma medida variável **r**. Nessas condições, obtenha em **s** um ponto **P** distante **r** de **O** e estabeleça uma discussão acerca da quantidade de soluções possíveis.

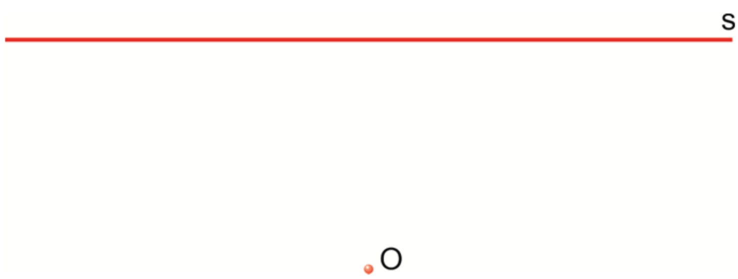


Figura 153: Dados da atividade dinâmica.

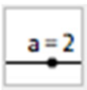
Inicialmente, serão apresentados a os comandos que irão dispor os dados da figura, os quais foram executados pelo autor, juntamente com o orientador:

– No campo "entrada", digita-se a equação de uma reta (por exemplo y = 3) e aperta-se a tecla *enter* para plotar a reta.

– Coloca-se o cursor em cima da reta criada na etapa anterior, clica-se com o botão direito do *mouse*, selecionando a opção "propriedades" e, em seguida, muda-se o nome da reta para **s**.

– No campo "entrada", digitam-se as coordenadas de um ponto ((7,0) por exemplo) e aperta-se a tecla *enter* criando um ponto não pertencente à reta **s**.

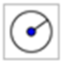
– Renomeia-se este ponto, denotando-o por **O**.

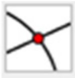
– Seleciona-se o ícone 

(controle deslizante, no penúltimo grupo da barra de ferramentas) e clica-se na área de trabalho, abrindo uma janela para criar um seletor.

– Renomeia-se esse seletor, denotando-o por **r** e estabelece-se**,** para ele, o intervalo de 0.5 a 5, com incremento de 0.1. Em seguida, clica-se em "aplicar".

– Por questões de estética, seleciona-se o ícone  (mover, no primeiro grupo da barra de ferramentas) para mover o seletor, clicando no seletor com o botão direito e arrastando-o para alguma outra região da área de trabalho.

– Seleciona-se o ícone  (circunferência **c** de centro **O** e raio **r**) clicando em **O** e digitando **r** na janela que apareceu. Clica-se em “Ok”.

– Seleciona-se o ícone  (intersecção de dois objetos, no segundo grupo da barra de ferramentas) para a determinação da interseção de duas figuras e, em seguida, clica-se na circunferência **c** e, depois, na reta **s**.

– Clica-se com o botão direito sobre o seletor e seleciona-se a opção “animar” para habilitar a animação. Quando surgirem as intersecções aciona-se a tecla “*PAUSE*” .

– Clica-se com o botão direito em cima dos pontos de interseção e seleciona-se a opção “exibir rótulo” para omitir os nomes dos pontos de intersecção.

– Para melhorar a estética da construção, clica-se com o botão direito em qualquer ponto da área de trabalho e seleciona-se a opção “eixos”, fazendo com que os eixos cartesianos desapareçam.

Agora, seguem os passos para a execução da atividade dinâmica, a qual será feita pelo leitor após clicar no Hiperlink (Clique aqui.):

– Acionar a tecla *PLAY* indicada por .

– Analisar o que acontece em relação ao número de soluções do problema.

Clique aqui.

Finalmente, segue um momento de interatividade entre o leitor e o *software*:

– Para variar o raio **r**, selecione o ícone . Em seguida, clique e arraste o ponto do seletor que se encontra na área de trabalho, variando o raio, e veja o que acontece.

– Para reduzir ou aumentar a velocidade do movimento de dilatação da circunferência **c** clique com o botão direto sobre o seletor e selecione a opção “propriedades”, abrindo a possibilidade da mudança desejada.

– Faça a mudança desejada, clique na tecla *PLAY* e veja o que acontece.

Nota: A execução da atividade dinâmica e o momento interativo deverão fazer parte do Hiperlink.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Método dos Lugares Geométricos é apenas um dos vários métodos usados nas construções geométricas. Dentre esses outros métodos, pode-se citar: A Translação, a Simetria, a Homotetia, a Rotação, a Equivalência Plana o Método da Dilatação e Contração de Circunferências e o Método dos Feixes de Circunferências (esses dois últimos para problemas de tangência).

Além disso, existem outros Lugares Geométricos importantes (Por exemplo: $L.G._6$ – Reta de Apolônio, $L.G._7$ – Eixo Radical, $L.G._8$ – Elipse, $L.G._9$ – Hipérbole, $L.G._{10}$ – Parábola) cuja abordagem fica para uma próxima oportunidade.

Acredita-se que a disciplina Desenho Geométrico seja de fundamental importância para o desenvolvimento de várias habilidades, tais como coordenação motora, organização de ideias, investigação de possíveis soluções de problemas, planejamento de estratégias de resolução, dentre outras. Nesse sentido, espera-se que este trabalho possa colaborar com o Ensino-Aprendizagem não só de Geometria (de forma direta) como de todas as demais disciplinas (de forma indireta). Enfim, considera-se ser interessante, tanto para alunos quanto para professores, que essa disciplina volte a ser obrigatória em todos os níveis de ensino no Brasil, pois são várias as pesquisas que apontam o Desenho Geométrico como sendo uma disciplina a ser resgatada.

9 EXERCÍCIOS PROPOSTOS

De acordo com o que foi citado na apresentação dos principais instrumentos de desenho (**Pág. 20**), as respostas dos exercícios que se seguem tem caráter aproximado.

1) Os pontos **A** e **B** são vértices de um triângulo ABC cujo lado $\overline{AC}$ mede **b** e o vértice **C** equidista dos pontos **D** e **E**.

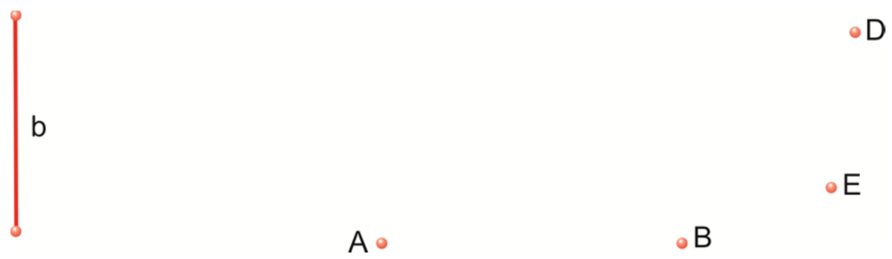


Figura 154: Dados do problema (Exercício proposto 1).

Qual a medida do lado $\overline{BC}$?

2) De um triângulo ABC, são conhecidos o lado $\overline{AB}$, (fixo), a medida do ângulo $\hat{C}$ ($\hat{C}$ = 60°) e a medida $\mathbf{h_C}$ da altura relativa ao vértice **C**.

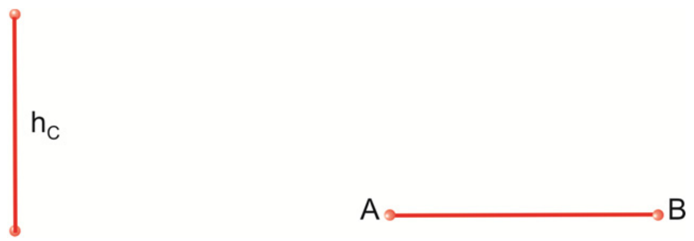


Figura 155: Dados do problema (Exercício proposto 2).

Qual a medida do lado $\overline{AC}$?

3) Construa um triângulo retângulo ABC de catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, medindo **c** e **b**, respectivamente.

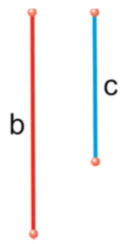


Figura 156: Dados do problema (Exercício proposto 3).

Qual a medida da altura relativa à hipotenusa?

4) Construa os triângulos ABC e CDE, ambos isósceles, cujas bases são, respectivamente, $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$.

Figura 157: Dados do problema (Exercício proposto 4).

Qual a medida de $\overline{AC}$?

5) Conduzir pelos pontos **A** e **B** uma circunferência com centro na circunferência **λ**.

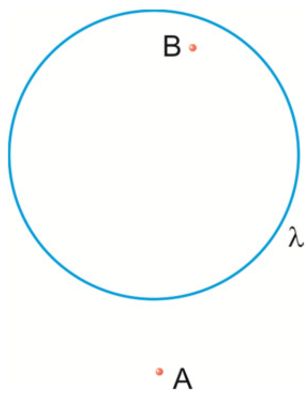


Figura 158: Dados do problema (Exercício proposto 5).

Qual a medida de seu raio?

6) Considere o triângulo ABC da figura a seguir:

Figura 159: Dados do problema (Exercício proposto 6).

a) Quanto mede o raio de sua circunferência inscrita?

b) Quanto mede o raio de sua circunferência circunscrita?

7) Conduzir, pelo ponto **T**, uma circunferência **λ** de raio 3 cm, tangente à reta determinada por **A** e **B**.

Figura 160: Dados do problema (Exercício proposto 7).

Quantas são as soluções? Qual a medida de $\overline{OA}$, sendo **O** o centro de **λ**?

8) São dados os pontos **A** e **T**, bem como a reta **t** que passa por **T**.

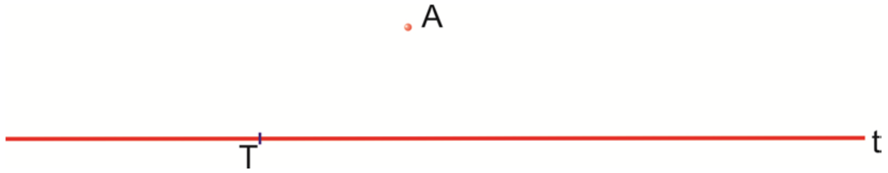


Figura 161: Dados do problema (Exercício proposto 8).

Conduzir por **A** uma circunferência que tangencia **t** em **T**. Qual a medida do raio dessa circunferência?

9) De um losango ABCD, são dados o vértice **A**, a medida ℓ do lado e a reta **r**, suporte do lado $\overline{BC}$.

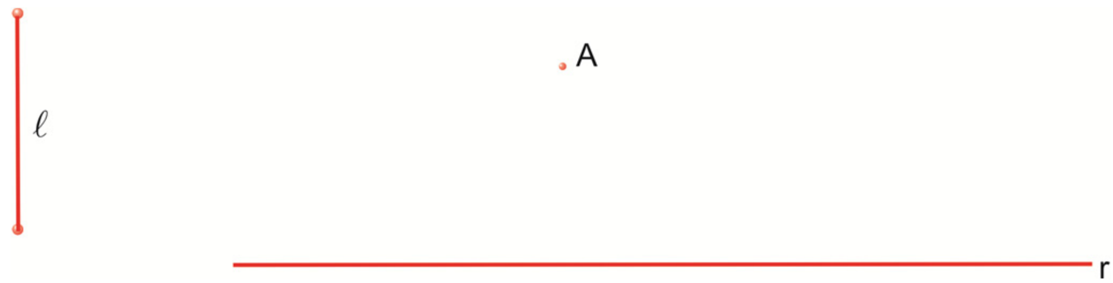


Figura 162: Dados do problema (Exercício proposto 9).

Qual a medida da diagonal $\overline{AC}$?

10) De um losango ABCD, são dadas a diagonal $\overline{AC}$ (fixa) e a medida α do ângulo $\hat{B}$.

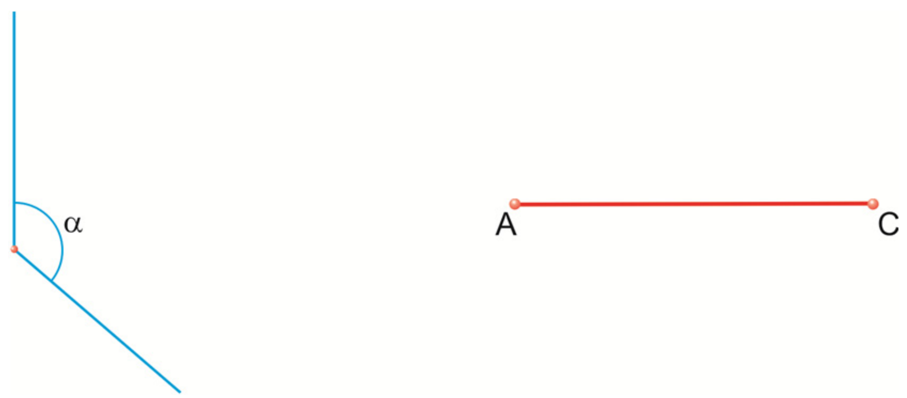


Figura 163: Dados do problema (Exercício proposto 10).

Qual a medida aproximada do lado desse losango?

11) De um quadrado ABCD, são dados o vértice **A** e a reta **r**, suporte do lado $\overline{BC}$.

Figura 164: Dados do problema (Exercício proposto 11).

Qual a medida da diagonal $\overline{AC}$?

12) Construa uma circunferência **λ** de raio **r**, tangente às retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$.

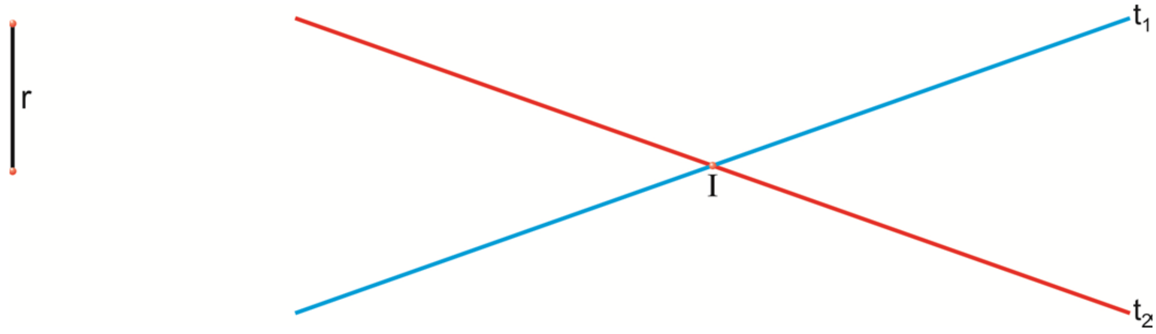


Figura 165: Dados do problema (Exercício proposto 12).

Qual a distância entre o centro de **λ** e o ponto **I**, intersecção e $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$?

13) De um retângulo, são dados os vértices **B** e **C** e a reta **r** que passa por **A**.

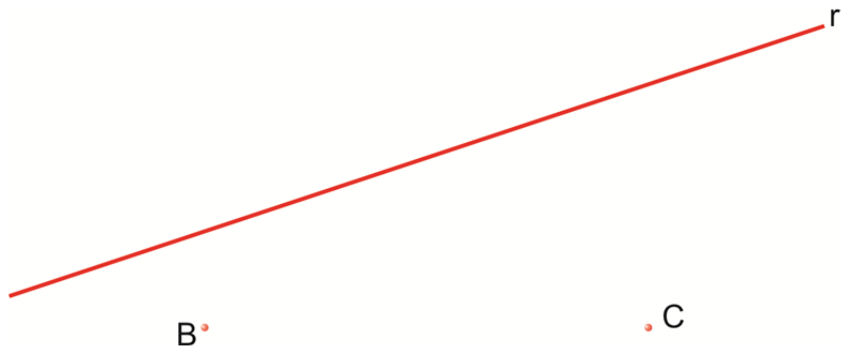


Figura 166: Dados do problema (Exercício proposto 13).

Quais as medidas dos lados desse retângulo?

14) O segmento $\overline{AB}$ (fixo) é um dos lados de um triângulo ABC de altura $\mathbf{h_C}$, relativa ao vértice **C**, o qual pertence à reta **r**.

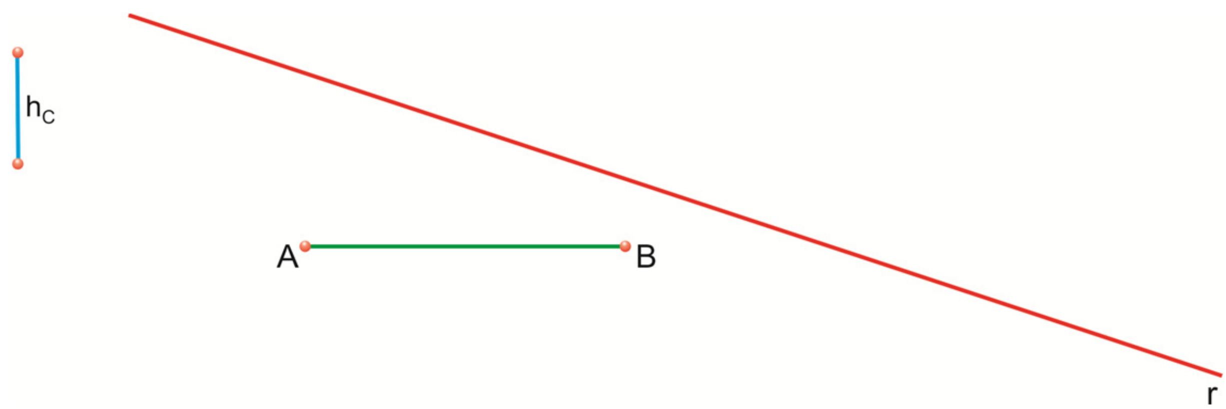


Figura 167: Dados do problema (Exercício proposto 14).

Qual a medida do lado $\overline{BC}$?

15) Construir uma circunferência, de centro **O'** e raio **r**, tangente em **T** à circunferência **λ** de centro **O**.

Figura 168: Dados do problema (Exercício proposto 15).

Qual a distância entre **O** e **O'**?

16) Obtenha o centro da circunferência **λ** dada a seguir:

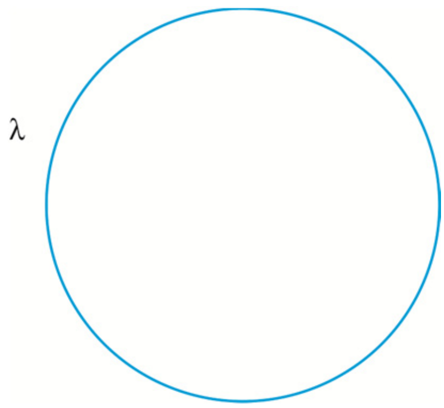


Figura 169: Dados do problema (Exercício proposto 16).

Qual a medida do raio dessa circunferência?

17) Conduzir, pelo ponto **T** da circunferência λ, uma reta tangente a λ. Nessa reta, tome um ponto **A** distante 3 cm de **T**.

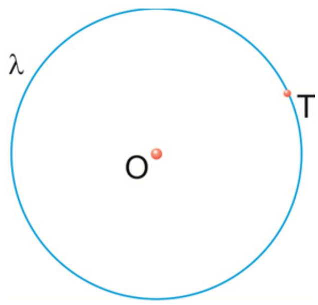


Figura 170: Dados do problema (Exercício proposto 17).

Qual a medida de $\overline{OA}$?

18) De um triângulo ABC, são conhecidas as medidas **a** e **b** dos lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, bem como a medida α do ângulo $\hat{C}$.

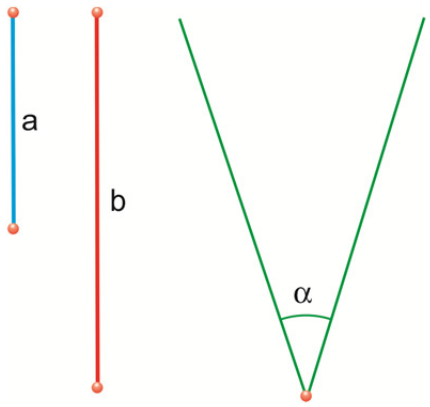


Figura 171: Dados do problema (Exercício proposto 18).

Qual a medida do terceiro lado?

19) De um triângulo ABC, são dadas as medidas **a** do lado $\overline{BC}$, **b** do lado $\overline{AC}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ do ângulo $\hat{C}$.

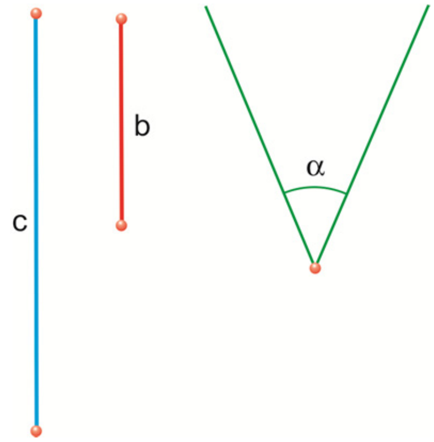


Figura 172: Dados do problema (Exercício proposto 19).

Qual a medida do terceiro lado?

20) De um triângulo ABC, são dados o lado $\overline{BC}$ (fixo), a medida $\boldsymbol{\alpha}$ do ângulo $\hat{A}$ e a reta **r** suporte do lado $\overline{AC}$.

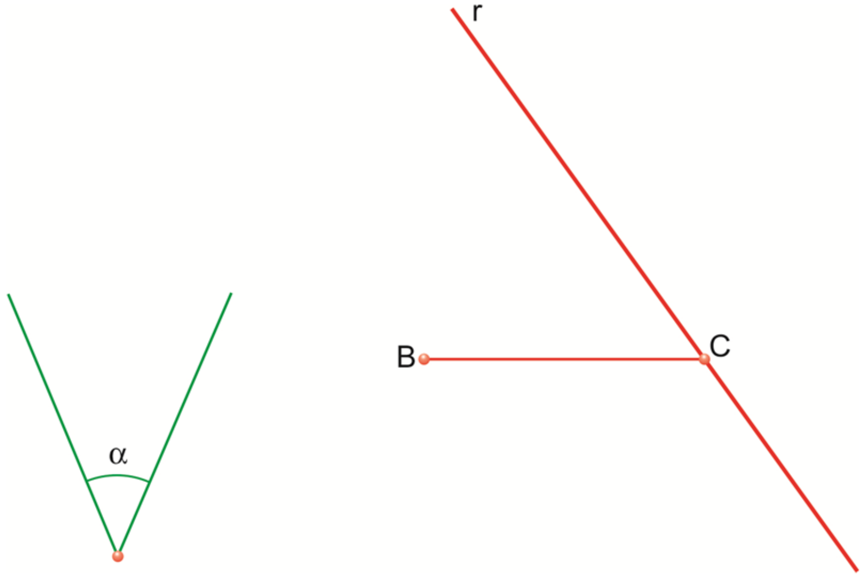


Figura 173: Dados do problema (Exercício proposto 20).

Qual a medida do lado $\overline{AB}$?

21) Construir um triângulo ABC, dadas as medidas **a** do lado $\overline{BC}$, **b** do lado $\overline{AC}$ e α do ângulo $\hat{B}$.

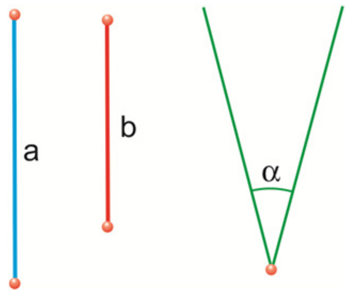


Figura 174: Dados do problema (Exercício proposto 21).

Qual a medida do terceiro lado?

22) Construa um triângulo ABC, conhecendo as medidas $\mathbf{m_a}$ da mediana e $\mathbf{h_a}$ da altura relativa do lado $\overline{BC}$, bem como a medida **a** desse lado.

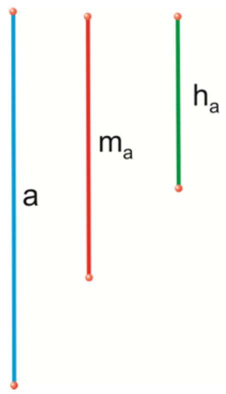


Figura 175: Dados do problema (Exercício proposto 22).

Qual a medida do lado $\overline{AC}$.

23) Construir um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e de lados oblíquos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, medindo, respectivamente, **a**, **b**, **c** e **d**.

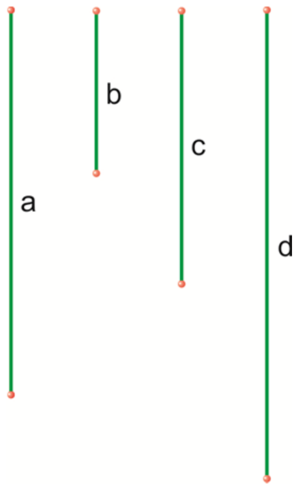


Figura 176: Dados do problema (Exercício proposto 23).

Qual a medida da diagonal $\overline{AC}$?

24) Construa um paralelogramo ABCD, de diagonal $\overline{AC}$ (fixa), ângulo interno $A\hat{B}C$ medindo α e lado $\overline{AB}$ medindo **m**.

Figura 177: Dados do problema (Exercício proposto 24).

Qual a medida do lado $\overline{BC}$?

25) O segmento $\overline{AB}$ (fixo) é a base maior de um trapézio isósceles de altura **h** e diagonal $\overline{AC}$ medindo **d**. A medida do ângulo de vértice **A** é 60°.

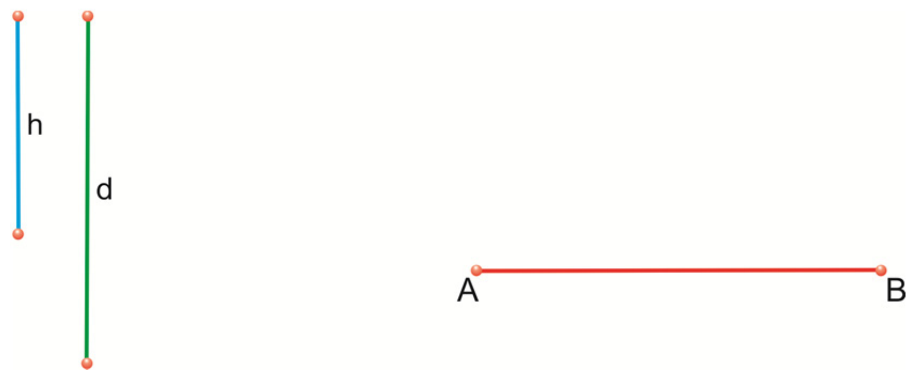


Figura 178: Dados do problema (Exercício proposto 25).

Qual a medida da base $\overline{CD}$?

26) ABCD é um quadrilátero inscritível numa circunferência de centro **O**. Se **O**, **C** e **D** pertencem a **r**, construa esse quadrilátero.

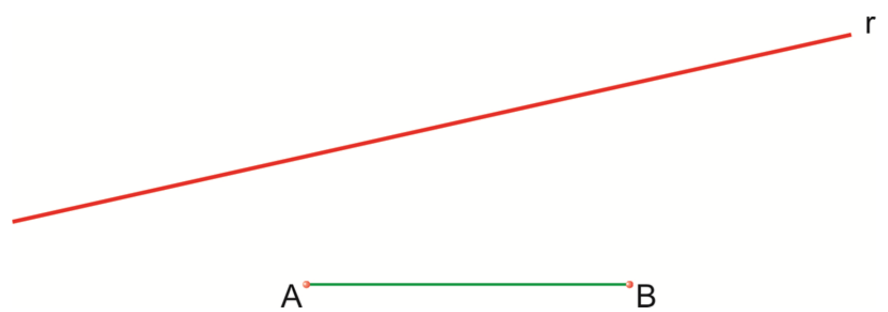


Figura 179: Dados do problema (Exercício proposto 26).

Qual é o perímetro de ABCD?

27) Obtenha um ponto **P** que dista **a** da circunferência **λ** (De centro **O** e raio **r**) e que pertença à reta **s**.

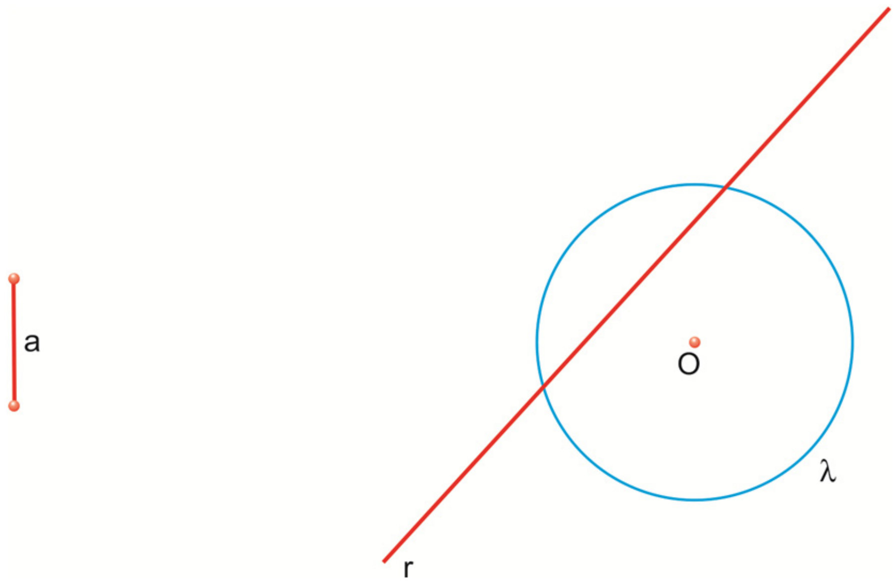


Figura 180: Dados do problema (Exercício proposto 27).

Qual a distância entre **O** e **P**?

28) É dada uma circunferência **λ** de centro **O** e raio **r**. Construa o L.G. dos pontos **P** dos quais se podem traçar segmentos, medindo **d**, tangentes a **λ**.

Figura 181: Dados do problema (Exercício proposto 28).

Defina esse L.G.

29) Construa o L.G. dos pontos médios das cordas de λ_1 que passam por **P** e de λ_2 que passam por **Q**.

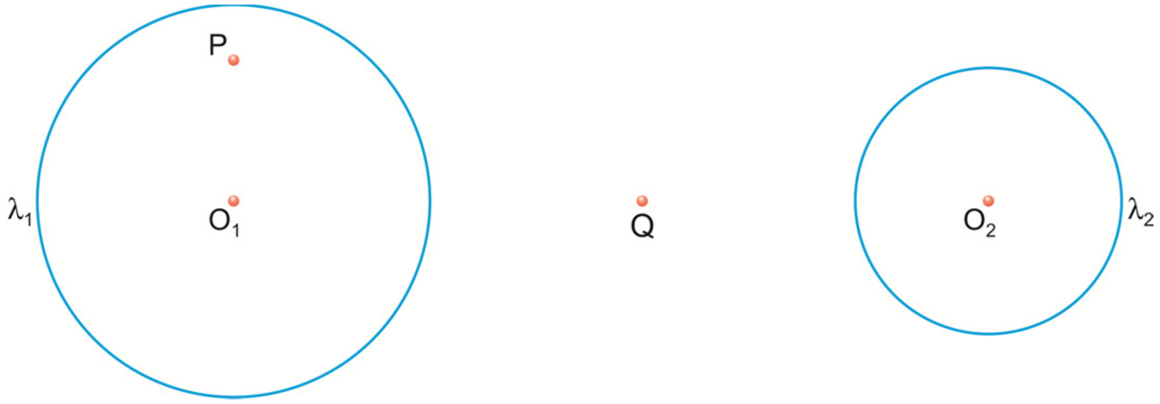


Figura 182a e 182b: Dados do problema (Exercício proposto 29).

Defina esses L.Gs.

30) São dados um ponto **P** e a reta **r**.

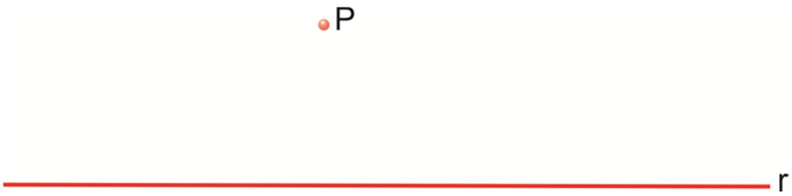


Figura 183: Dados do problema (Exercício proposto 30).

Construa o ponto **P'** simétrico de **P** em relação a **r**. Qual a distância entre **P** e **P'**?

31) De um ângulo de vértice **V**, são dados os pontos **P** de um dos lados, **Q** do outro lado e a reta **s** suporte da bissetriz.

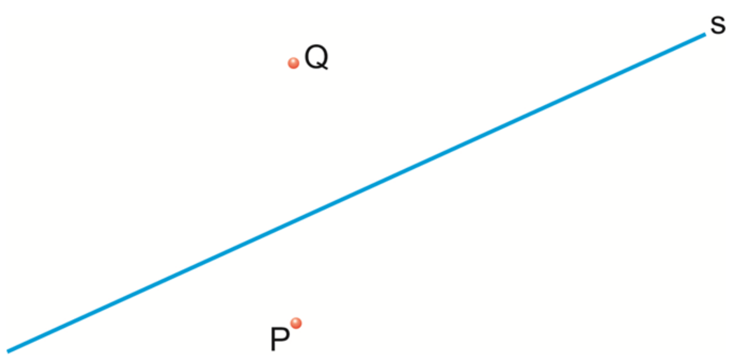


Figura 184: Dados do problema (Exercício proposto 31).

Qual a distância entre **V** e **Q**?

32) De um triângulo ABC, são dadas as três bissetrizes **a**, **b** e **c** de seus ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Além disso, é dado um ponto **P** do lado $\overline{AB}$.

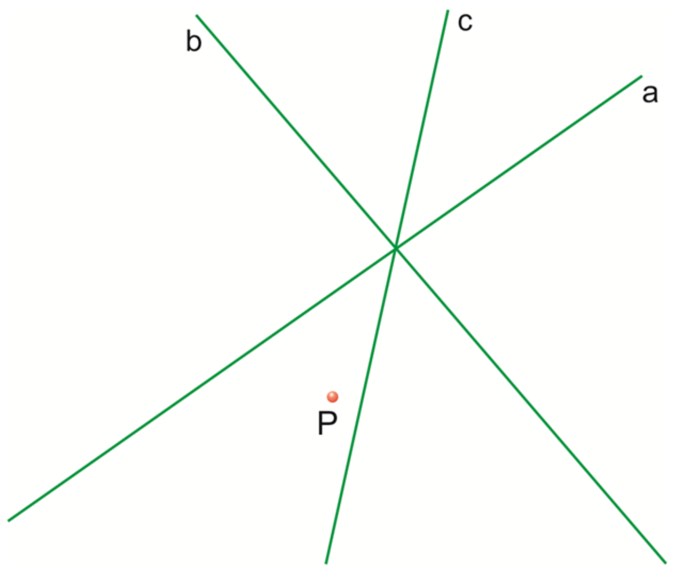


Figura 185: Dados do problema (Exercício proposto 32).

Construa esse triângulo e responda:

Qual a medida de $\overline{AB}$?

Enunciado para as questões **33** e **34**.

A figura a seguir representa o mapa de um estado de um determinado país. Os pontos **A**, **B** e **C** representam três cidades interligadas por estradas retilíneas. O relevo desse estado é predominantemente planície.

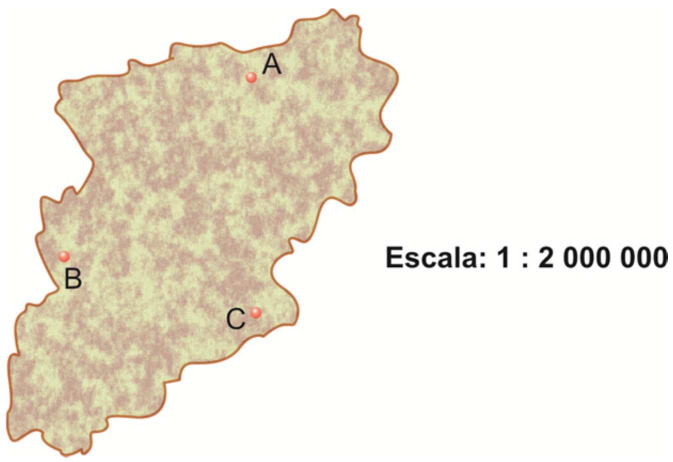


Figura 186: Dados do problema (Exercício proposto 33 e 34).

33) O governo estadual deseja construir uma subcapital que esteja igualmente distanciada dessas cidades. Se **S** é o ponto que representa essa subcapital, qual a distância (aproximada), em quilômetros, entre **A** e **S**?

34) Seja **P** o ponto onde se deseja instalar uma antena de telefonia celular. Estrategicamente, é conveniente que essa antena esteja numa posição equidistante das rodovias retilíneas que ligam as cidades indicadas. Qual a medida de $\overline{AP}$?

35) Este retângulo ABCD, representa um campo de pastagem cercado e relativamente plano.

Figura 187: Dados do problema (Exercício proposto 35).

Na cerca $\overline{AD}$ e a 20 m de **A** está amarrada uma corda de 20 m que prende um cavalo. Já na cerca $\overline{CD}$ e a 80 m de **C** está amarrada uma corda de 35 m que prende uma vaca. As cordas permitem que os animais pastem, cada um, por uma certa região do cercado.

O proprietário desse campo deseja instalar um bebedouro num ponto que seja limite comum de pastagem desses animais.

Figura 188: Dados do problema (Exercício proposto 35).

Sendo **P** o ponto citado, qual a medida $\overline{AP}$?

36) Suponha que o ponto de instalação do bebedouro tivesse que equidistar das cercas $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$.

Figura 189: Dados do problema (Exercício proposto 36).

Algum desses animais ficaria sem acesso à água? Qual?

37) Suponha que o ponto de instalação do bebedouro tenha que ser equidistante das cercas $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ e, também, dos pontos onde estão amarrados os animais.

Figura 190: Dados do problema (Exercício proposto 37).

Algum desses animais teria acesso à água? Qual?

38) A figura a seguir representa, na escala 1 : 1000, parte retilínea de uma pista de corridas mostrando a região dos "boxes". De frente e às margens do outro lado da pista, deseja-se instalar uma câmera que possa filmar, exatamente, toda movimentação desses boxes.

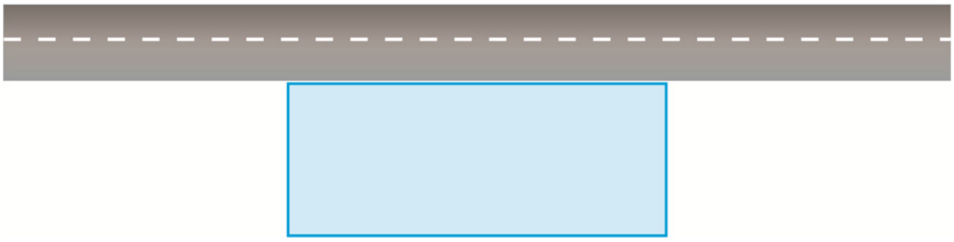


Figura 191: Dados do problema (Exercício proposto 38).

Se o campo visual da câmera for de 120°, e a altura da câmera for desprezível, qual a distância do centro Geométrico do piso dos boxes ao ponto de instalação da câmera?

39) As retas **r** e **s** e os pontos **A** e **B** a seguir representam as margens de parte de um rio e as chácaras do senhor Anísio (**A**) e Benísio (**B**), respectivamente.

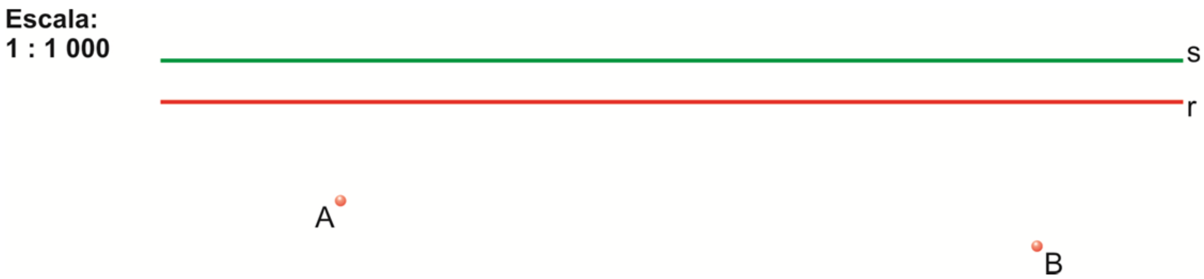


Figura 192: Dados do problema (Exercício proposto 39).

Todos os dias, o senhor Anísio sai de sua chácara, vai até o rio e, depois, segue até a chácara do seu irmão Benísio. Com a prática, o senhor Anísio já descobriu o menor caminho a ser percorrido. Qual é a distância percorrida pelo senhor Anísio? Essa distância seria a mesma se o senhor Benísio fizesse o trajeto?

40) Num jogo de bilhar eletrônico (vídeogame), as bolas, ao incidirem nas tabelas, sofrem reflexões perfeitas (ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão). Desse modo, uma bola **P** incidirá na tabela e acertará uma bola **Q**, percorrendo o menor caminho possível.

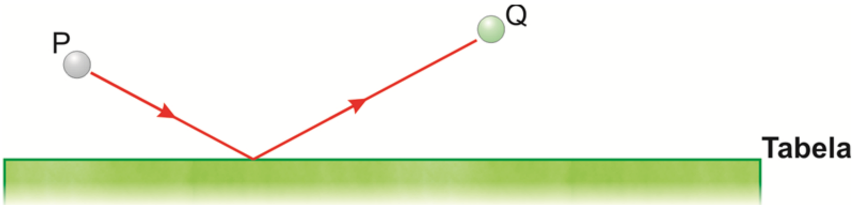


Figura 193: Incidência e reflexão de raio (Exercício proposto 40).

Considere, então, a situação a seguir:

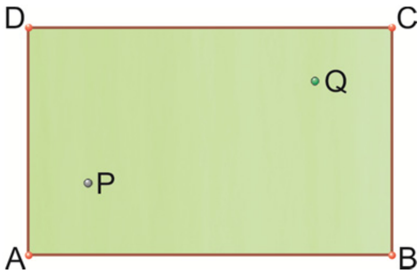


Figura 194: Dados do problema (Exercício proposto 40).

Construa a trajetória da bola **P** que, após incidir uma vez na tabela $\overline{AD}$ e uma vez na tabela $\overline{CD}$, acerta a bola **Q**. Qual a distância percorrida pela bola **P**?

41) Na figura a seguir, $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$ são os perfis de dois espelhos planos. O ponto **F** é uma fonte de luz puntiforme e o ponto **O** é um objeto também puntiforme.

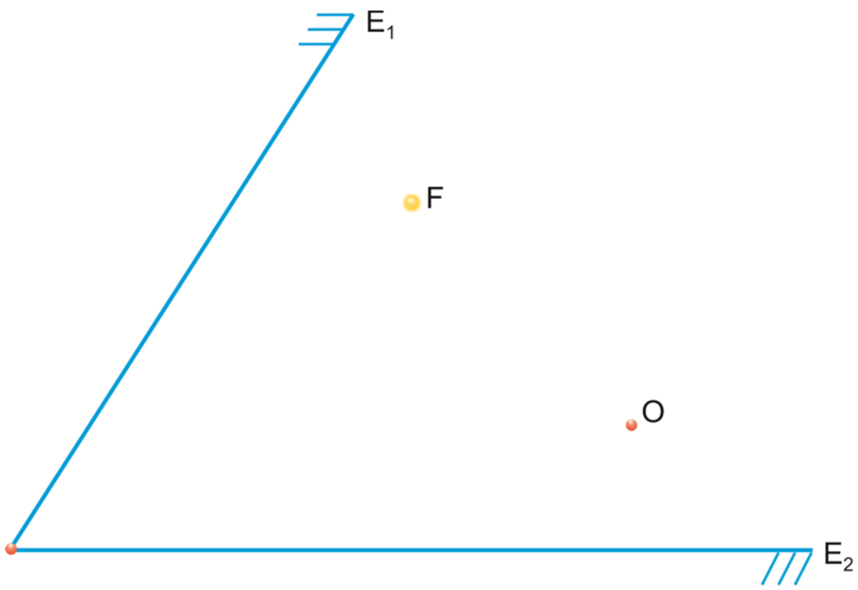


Figura 195: Dados do problema (Exercício proposto 41).

Construa o raio luminoso que, partindo de **F**, ilumina **O** após incidir em $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{E_2}$. Qual a distância percorrida pelo raio luminoso?

42) As chácaras dos irmãos Alírio e Belírio (representadas na figura a seguir, respectivamente, por **A** e **B**) situam-se numa região plana e estão separadas por um rio de margens paralelas (representadas pelas retas **r** e **s**).

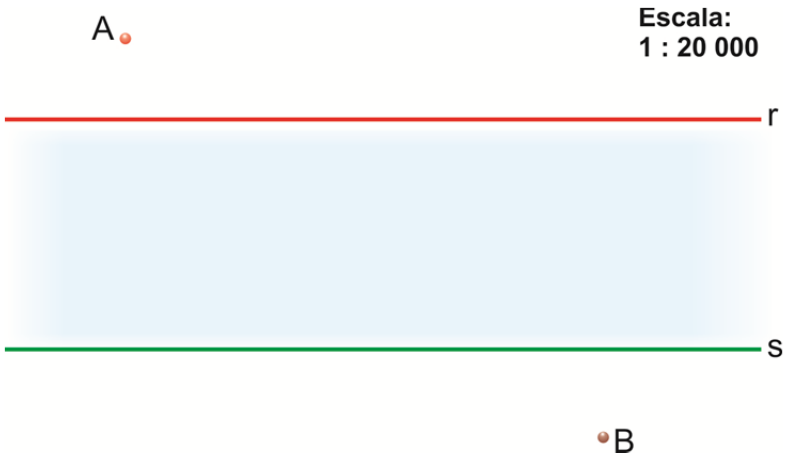


Figura 196: Dados do problema (Exercício proposto 42).

Qual o comprimento do menor caminho de uma chácara à outra, incluindo uma ponte perpendicular às margens do rio?

43) Os pontos **M**, **E** e **F** da figura a seguir representam, respectivamente, a escola municipal, a escola estadual e a escola federal de uma determinada cidade de relevo plano.

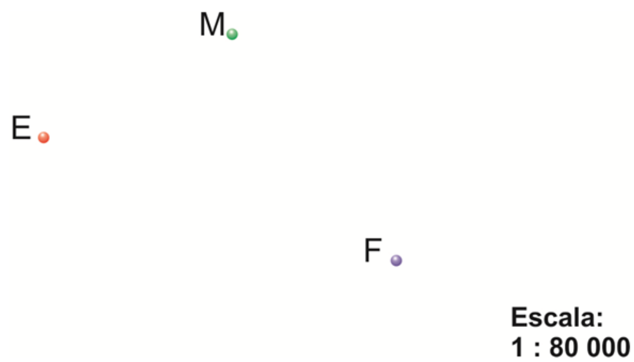


Figura 197: Dados do problema (Exercício proposto 43).

O prefeito deseja instalar uma biblioteca na região dessas escolas de modo que:

• Não haja privilégio, em termos de distância, para as escolas **M** e **F** em relação ao ponto de instalação.

• A distância do ponto de instalação até a escola **E** seja a menor possível.

Nessas condições, qual a distância entre a biblioteca e a escola **E**?

44) Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** da figura a seguir representam as casas dos irmãos Amir, Bemir, Cemir e Demir e a curva irregular representa um rio sem travessia.

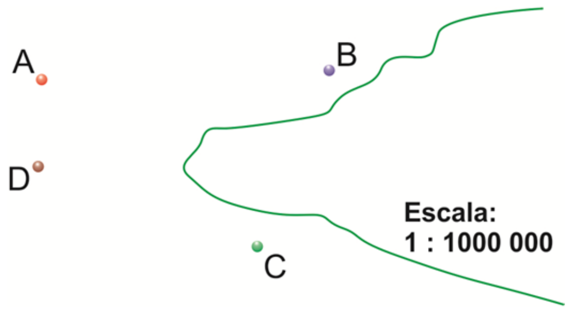


Figura 198: Dados do problema (Exercício proposto 44).

Quatro trechos retilíneos de estrada deverão ser construídos, todos passando por um cruzamento situado no ponto **E**, de modo que $\overline{AE} \perp \overline{EB}$ e $\overline{CE} \perp \overline{ED}$. Qual a distância entre o ponto de cruzamento dos trechos de estrada e a casa mais próxima?

Enunciado para as questões **45**, **46** e **47**.

Na figura a seguir a reta **r** representa uma margem de um rio retilíneo e os pontos **A** e **B** representam as casas dos irmãos Alírio e Belírio, respectivamente.

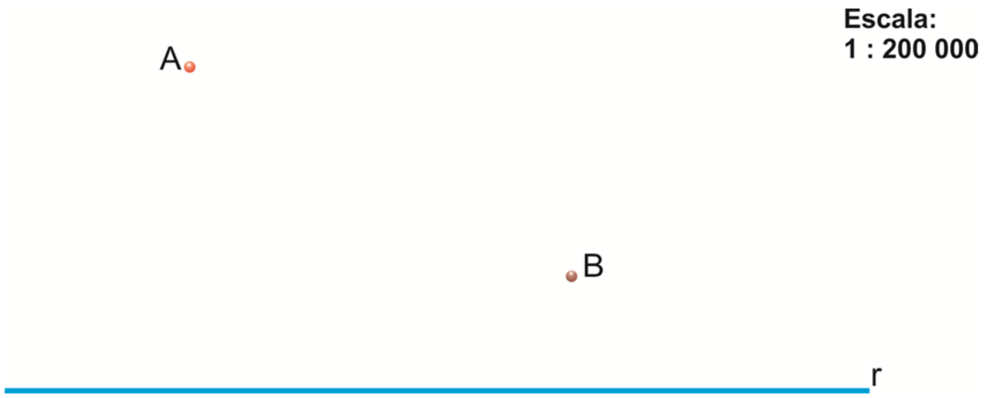


Figura 199: Representação

A região é relativamente plana e existe uma estrada retilínea que margeia as casas indicadas por **A** e **B**, chegando até o rio, sem atravessá-lo.

O senhor Celírio, irmão dos outros dois senhores citados, deseja construir sua casa nas proximidades.

45) Seria possível construir essa casa a 4 km do rio e a 4 km das casas de cada um dos seus irmãos?

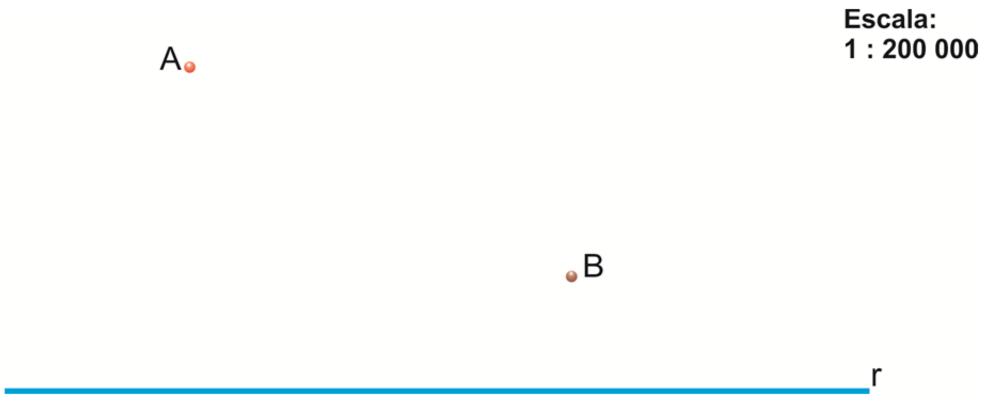


Figura 200: Dados do problema (Exercício proposto 45).

46) Suponha que se construa a casa à margem da estrada que liga as outras duas casas e a 4 km do rio. Qual das casas **A** ou **B** estará mais próxima da construção?

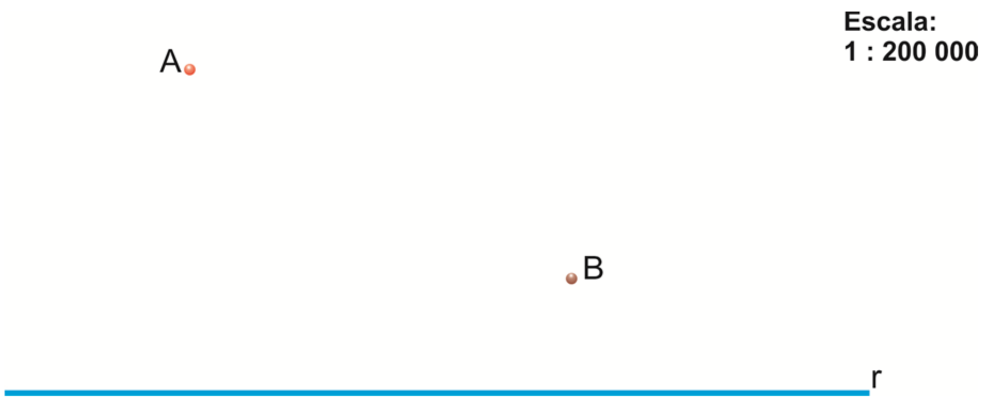


Figura 201: Dados do problema (Exercício proposto 46).

47) Suponha que se construa a casa num local equidistante das casas dos irmãos e, também, equidistante do rio e da estrada citada. Qual a distância da construção até o rio?

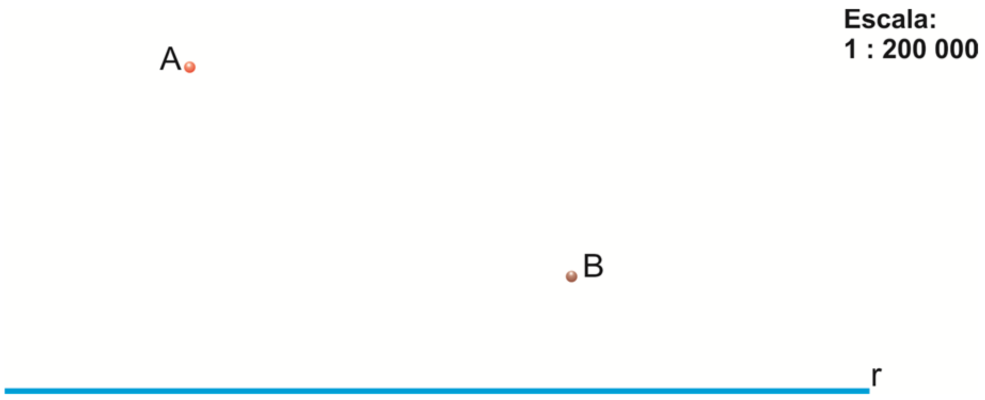


Figura 202: Dados do problema (Exercício proposto 47).

48) Dois móveis partem dos pontos **A** e **B** de modo que suas direções incidam inclinadas de 60° entre si.

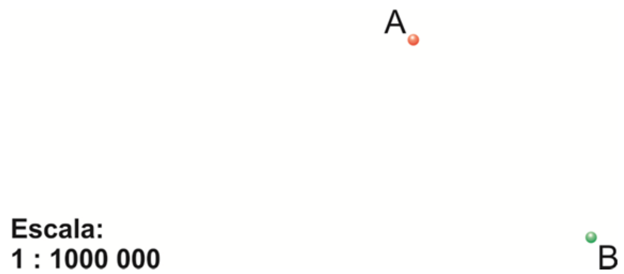


Figura 203: Dados do problema (Exercício proposto 48).

Se, no momento da partida, **A** está a uma distância de 15 km do ponto de cruzamento das direções dos móveis, qual a distância de **B** até esse ponto no momento citado?

49) Os pontos **A**, **B** e **C** representam antenas de telefonia celular situadas nos municípios de Aruá, Baruá e Caruá, respectivamente.

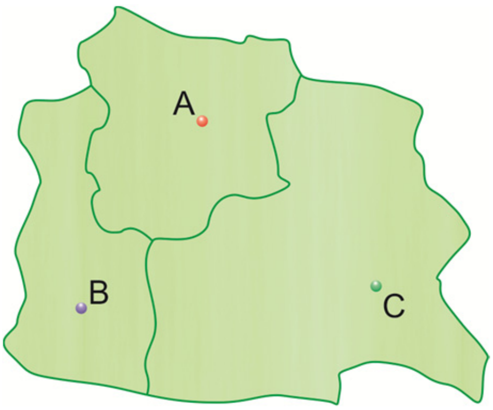


Figura 204: Dados do problema (Exercício proposto 49).

Uma central retransmissora será construída de modo que os sinas de cada antena percorram distâncias iguais até o ponto de construção. Em qual município estará esse ponto?

50) A figura a seguir representa, na escala 1 : 200, uma secção transversal de um túnel. Esse túnel é atravessado por uma rodovia composta por uma pista (indicada por $\overline{AB}$) e dois acostamentos (indicados por $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$).

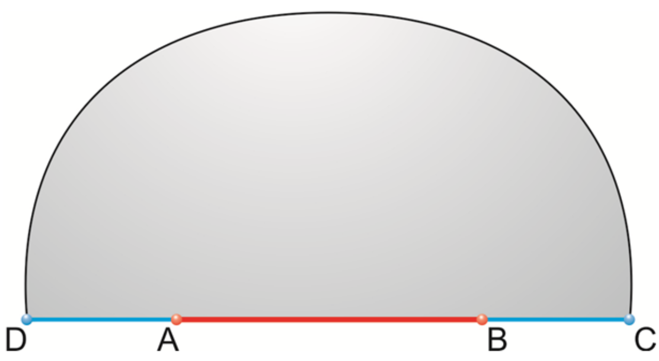


Figura 205: Dados do problema (Exercício proposto 50).

No teto desse túnel, na secção mostrada, serão instalados dois holofotes os quais irão iluminar a pista da rodovia. Cada um dos holofotes produz um campo e iluminação limitado por um ângulo de 30° cada. Qual a distância do centro da pista (nessa secção) até os pontos de instalação dos holofotes?

10 RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS E SUGESTÕES

1) 5,3 cm ou 3,2 cm (**Sugestão:** O vértice **C** dista **b** de **A** e equidista de **D** e **E**).

2) 3,1 cm ou 4,0 cm (**Sugestão:** O vértice **C** dista $\mathbf{h_C}$ da reta suporte de $\overline{AB}$ e enxerga $\overline{AB}$ sob um ângulo de 60°).

3) 1,7 cm (**Sugestão:** $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ estão contidos em retas perpendiculares concorrentes em **A**, **B** dista **c** de **A** e **C** dista **b** de **A**).

4) 3,1 cm (**Sugestão:** O vértice **C** equidista de **A** e **B** e, também, de **E** e **D**).

5) 2,6 cm ou 3,0 cm (**Sugestão:** O centro **O** da circunferência procurada pertence a λ e equidista de **A** e **B**).

6) a) 1,3 cm (**Sugestão:** O centro equidista dos lados).
b) 4,5 cm (**Sugestão:** O centro equidista dos vértices).

7) 2 soluções. 5 cm. (**Sugestão:** O centro dista 3 cm de **T** e pertence à reta, perpendicular a $\overline{AB}$, passando por **T**).

8) 2,0 cm (**Sugestão:** O centro pertence à reta perpendicular a **t** passando por **T** e equidista de **A** e **T**).

9) 3,2 cm (**Sugestão:** O vértice **B** dista ℓ de **A** e pertence à reta **r**. O vértice **C** dista ℓ de **B** e pertence à reta **r**).

10) 2,8 cm (**Sugestão:** Os vértices **D** e **B** equidistam de **A** e **C** e enxergam $\overline{AC}$ sob um ângulo de medida α).

11) 3,2 cm (**Sugestão:** O vértice **B** pertence à reta **r** e à reta **s**, perpendicular a **r**, conduzida por **A**).

12) 2,1 cm ou 6,1 cm (**Sugestão:** O centro da circunferência procurada equidista das retas $\mathbf{t_1}$ e $\mathbf{t_2}$ e dista **r** de qualquer uma dessas retas).

13) AB = 1,4 cm ou AB = 5,0 cm; AC = 5,7 cm ou AC = 3,1 cm. (**Sugestão:** O vértice **A** pertence à reta **r** e enxerga $\overline{AB}$ sob um ângulo de 90°).

14) 2,5 cm ou 7,0 cm (**Sugestão:** O vértice **C** pertence à reta **r** e dista $\mathbf{h_C}$ da reta suporte de $\overline{AB}$).

15) 0,6 cm ou 3,5 cm (**Sugestão:** O centro **O'** pertence à reta $\overleftrightarrow{OT}$ e dista **r** de **T**).

16) 2,6 cm (**Sugestão:** O centro equidista de três pontos quaisquer de λ).

17) 3,5 cm (**Sugestão:** A reta procurada é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{OT}$ no ponto **T**).

18) 3,1 cm (**Sugestão:** Comece pelo ângulo de vértice **C**).

19) 7,0 cm (**Sugestão:** Construa o lado $\overline{AB}$ de medida **C**. O vértice **C** dista **b** de **A** e enxerga $\overline{AB}$ sob um ângulo de medida α).

20) 4,3 cm ou 4,0 cm (**Sugestão:** O vértice **A** pertence à reta **r** e enxerga $\overline{BC}$ sob um ângulo de medida α).

21) 0,9 cm ou 5,3 cm (**Sugestão:** Comece pelo ângulo **B** e obtenha **C** distante **a** de **B**. O vértice **A** dista **b** de **C** e pertence a um dos lados do ângulo **B**).

22) 5,6 cm ou 2,3 cm (**Sugestão:** Comece pelo lado $\overline{BC}$ de medida **a**. O vértice **A** dista $\mathbf{h_a}$ da reta suporte de $\overline{BC}$ e dista $\mathbf{m_a}$ do ponto médio de $\overline{BC}$).

23) 8,1 cm (**Sugestão:** O triângulo AB'D é construtível, sendo BB' $\cong$ CD e AB' = AB – CD).

24) 3,8 cm (**Sugestão:** O vértice **B** enxerga $\overline{AC}$ sob um ângulo de medida α e dista **m** de **A**).

25) 2,0 cm (**Sugestão:** Comece pelo ângulo Â. Os vértices **C** e **D** distam **h** da reta suporte de $\overline{AB}$ e **D** dista **d** de **A**).

26) 15,2 cm (**Sugestão:** O centro **O** equidista de **A** e **B** e pertence a **r**. **A**, **B**, **C** e **D** pertencem à circunferência, de centro **O**, passando por **A** e **B**).

27) 3,9 cm (**Sugestão:** O ponto **P** pertence à reta **r** e dista (a + r) de **O**).

28) É uma circunferência de centro **O** e raio $\sqrt{d^2 + r^2}$. (**Sugestão:** O triângulo OPT é retângulo em **T**, sendo **T** o ponto de tangência).

29) Em λ_1 é a circunferência de diâmetro $\overline{O_1P}$.

Em λ_2 é a circunferência de diâmetro $\overline{O_2Q}$.

(**Sugestão:** Os triângulo O_1MP e O_2MP são retângulos, sendo **M** o ponto médio das cordas em questão).

30) 4,2 cm (**Sugestão:** **r** é a mediatriz de $\overline{PP'}$).

31) 4,5 cm (**Sugestão:** Use simetria).

32) 4,5 cm (**Sugestão:** Use simetria).

33) 1,8 cm ~ 360 km (**Sugestão:** **S** equidista de **A**, **B** e **C**).

34) 0,8 cm ~ 160 km (**Sugestão:** **P** equidista de $\overline{AB}$, de $\overline{AC}$ e de $\overline{BC}$).

35) 2,4 cm ~ 24 m (**Sugestão:** **P** dista 20 m do ponto onde o cavalo está amarrado e dista 35 m do ponto onde a vaca está amarrada).

36) Sim. O cavalo. (**Sugestão:** O ponto equidista de $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e de $\overline{CD}$)

37) Sim. O cavalo. (**Sugestão:** O ponto equidista de $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ e equidista dos pontos de amarração).

38) 2,7 cm ~ 27 m (**Sugestão:** A câmera enxerga a frente dos boxes sob um ângulo de 120°).

39) 9,8 cm; 98 m. (**Sugestão:** Use simetria).

40) 5,3 cm (**Sugestão:** Use simetria).

41) 10,1 cm (**Sugestão:** Use simetria).

42) 1 380 m (**Sugestão:** Use simetria).

43) 1 760 m (**Sugestão:** O ponto **B** de instalação da biblioteca equidista de **M** e **F** e $\overline{EB}$ é mínimo).

44) 5 km (**Sugestão:** O ponto de cruzamento enxerga $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ sob um ângulo de 90°).

45) Não (**Sugestão:** A casa dista 4 km de **r**, 4 km de **A** e 4 km de **B**).

46) B (**Sugestão:** A casa dista 4 km de **r** e pertence à reta $\overline{AB}$).

47) 2,8 km (**Sugestão:** A casa equidista de **A** e **B** e equidista de **r** e $\overline{AB}$).

48) 40 km (**Sugestão:** O ponto de cruzamento dista 5 km de **A** e enxerga $\overline{AB}$ sob 30°).

49) C (**Sugestão:** O ponto equidista dos pontos **A**, **B** e **C**).

50) 8,4 km (**Sugestão:** Os pontos de instalação dos holofotes enxergam $\overline{AB}$ sob um ângulo de 30° e pertence ao arco $\overline{CD}$).

11 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ÁVILA, Geraldo. – *Cálculo: ilustrado, prático e descomplicado*. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[2] GIOVANNI, J.R.; GIOVANNI JR, J.R.; FERNANDES, T.M.; OGASSAWARA, E.L. *Desenho Geométrico*. v.1, ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2010.

[3] HOGBEN, L. *Maravilhas da Matemática*. 3. ed. Porto Alegre: Globo, 1952.

[4] LIMA, E.R. *Problemas de Desenhos Geométricos*. São Paulo: Lisa, 1973.

[5] MLODINOW, L. *A janela de Euclides*. 3. ed. São Paulo: Geração, 2005.

[6] PUTNOKI, J.C. *Desenho Geométrico – Elementos de Geometria*. v.1, 4. ed. São Paulo: Scipione, 1993.

[7] REZENDE, E.Q.; QUEIROZ, M.L. *Geometria Euclidiana Plana – e construções geométricas*. 2. ed. Campinas-SP: Unicamp, 2008.

[8] TOMEI, C. Euclides – *A conquista do espaço*. 2. ed. São Paulo: Odysseus, 2006.