



POSSIBILIDADES EM GRAFOS HAMILTONIANOS

Michel Guerra de Souza

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

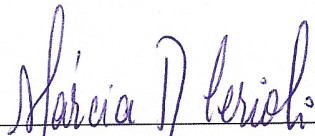
Rio de Janeiro
Abril de 2014

POSSIBILIDADES EM GRAFOS HAMILTONIANOS

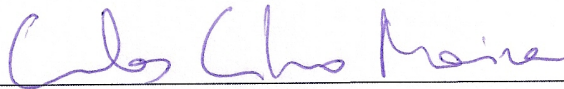
Michel Guerra de Souza

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

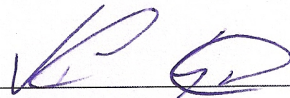
Aprovada por:



Prof.^a Marcia Rosana Cerioli, D.Sc. (presidente)



Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira, D.Sc.



Prof. Victor Augusto Giraldo, D.Sc.

Rio de Janeiro
Abril de 2014

S729p Souza, Michel Guerra de
Possibilidades em grafos Hamiltonianos / Michel Guerra de
Souza. -- Rio de Janeiro, 2014.
viii, 67 f. : il.; 30 cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática,
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional (PROFMAT), 2014.

Referências: f. 66-67

1. Teoria dos Grafos - Tese. 2. Ciclos Hamiltonianos
3. Matemática - Estudo e Ensino (Ensino médio) . I. Cerioli, Márcia
Rosana (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Instituto de Matemática, Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional (PROFMAT). III. Título.

CDD 511.5

Agradecimentos

À Deus, fonte de toda a vida, que me deu a oportunidade de finalizar mais um projeto com êxito.

Aos meus pais Carlos Roberto Batista de Souza e Carmen Motta Guerra que, consciente e inconscientemente, me presentearam amorosamente, com os elementos mais ternos e sublimes que permeiam a essência do meu caráter, da minha personalidade, e da minha vocação para conhecer e ensinar.

À minha esposa, Michelly Cavaliere Muller, pelo amor, compreensão e apoio incondicional neste período de conquista e abnegação, sem ela não teria sido possível realizar este projeto. Além disso, agradeço também pela paciência nas revisões, correções e sugestões.

À minha avó Nilda Motta Guerra e a minha irmã Michele Guerra de Souza, amigas verdadeiras, pelo amor, apoio e confiança na minha capacidade de chegar ao fim deste trabalho.

À professora Dra. Márcia Rosana Cerioli do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pela inspiração, orientação, participação, diálogo, incentivo, sugestões, carinho e respeito dispensados durante todo o percurso deste trabalho. A sua amizade certamente é um dos legados mais importantes de todo esse período de aprendizagem.

Aos professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, em especial ao corpo docente do PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: Dr. Nilson da Costa Bernardes Júnior, Dra. Walcy Santos, Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha, Dr. Victor Augusto Giraldo e Dra. Maria Aguiéiras Alvarez de Freitas que se empenharam e se doaram o máximo para que eu pudesse chegar aqui.

A todos os professores do Departamento de Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo que, generosamente, adequaram seus horários, para que minhas atividades acadêmicas fossem possíveis.

Aos meus amigos em formação que sempre me deram forças e me motivaram nessa jornada de dois anos, especialmente aos professores Bruno Ramos Gonzaga, Cláudio Melo da Cruz, Gabriel Teixeira Soares das Neves e Jadir de Oliveira Balthar.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa durante todo o período de realização deste mestrado.

“Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade suscetível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.”

George Pólya

RESUMO

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao PROFMAT/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

POSSIBILIDADES EM GRAFOS HAMILTONIANOS

Michel Guerra de Souza

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Um grafo é Hamiltoniano se contém um passeio fechado que passa por cada um de seus vértices exatamente uma vez. Formam um dos temas clássicos da Teoria dos Grafos e envolvem desde problemas de fácil compreensão e resolução, até aqueles desafiadores tanto do ponto de vista matemático quanto computacional. Modelarem várias situações lúdicas e problemas do mundo real cuja investigação revela propriedades matemáticas interessantes e profundas, oferecendo a possibilidade de desenvolvimento de uma série de habilidades importantes, tais como explorar, analisar, conjecturar, modelar e generalizar.

Neste trabalho damos exemplos da versatilidade do tema grafos Hamiltonianos mostrando algumas possibilidades de seu uso na investigação e no ensino de matemática. Apresentamos alguns aspectos históricos relacionados aos grafos Hamiltonianos; a modelagem de dois passatempos clássicos: o Icosian Game e o Passeio do Cavalo no tabuleiro de xadrez; e um estudo sistemático de condições suficientes para um grafo ser Hamiltoniano baseadas nos graus e no tamanho do caminho mais curto entre pares de vértices não adjacentes. Apresentamos também uma atividade realizada com alunos do ensino médio realizando estas possibilidades no ensino de matemática.

Palavras chave: Teoria dos Grafos, Ciclos Hamiltonianos, Ensino de Matemática.

Rio de Janeiro
Abril de 2014

ABSTRACT

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao PROFMAT/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Matemática por ter completado o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

POSSIBILITIES IN HAMILTONIAN CYCLES

Michel Guerra de Souza

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

A graph is Hamiltonian if contains a closed walk that passes through each one of its vertices exactly once. Hamiltonian graphs are one of the classical topics of Graph Theory and involve problems which are easy to understand and solve as well as problems which are challengers both in a mathematical and computational point of view. They model many ludic situations and problems of the real world whose investigation reveal interesting and profound mathematical properties, opening the possibility to the development of a series of important skills as explore, analyse, deduce, model and generalise.

In this work, we give examples of the versatility of the topic hamiltonian graphs showing some possibilities of their use both in mathematical research and in the teaching of mathematics. We present some historical aspects connected to Hamiltonian Graphs; the modelling of two classic puzzles: The Icosian Game and the Knight's Tour on the chessboard; a systematic study on the sufficient conditions for a graph to be Hamiltonian which are based on the degrees and in the size of the shortest path between pairs of non-adjacent vertices. We also present one activity put into practice with High School students fulfilling these possibilities for mathematical teaching.

Keywords: Graph Theory, Hamiltonian Cycles, Mathematics Teaching.

Rio de Janeiro

Abril de 2014

Sumário

Introdução	1
1 Grafos	5
1.1 Conceitos iniciais	5
1.2 Caminhos e grafos conexos	7
1.3 Algumas famílias de grafos	9
2 Grafos Hamiltonianos	12
2.1 Ciclo Hamiltoniano	12
2.2 Condição necessária	17
2.3 Condição suficiente (Teorema de Dirac)	18
3 Condições suficientes baseadas no grau dos vértices e no comprimento do caminho mínimo	22
3.1 Teorema de Ore	22
3.2 Teoremas de Rahman e Kaykobad	24
3.3 Teorema de Li	28
3.4 Teoremas de Mehedy, Hasan e Kaykobad	32
3.5 Teorema de Li, Li e Feng	35
3.6 Teorema de Hasan, Kaykobad, Lee e Lee	38
4 Problema do passeio do cavalo	41
4.1 <i>Knight's tour</i>	41
4.2 Modelagem em grafos	42
4.3 Ciclos e caminhos no tabuleiro 8×8	44
4.4 Existência de passeios abertos	48
5 Uma experiência com alunos do ensino médio	51
5.1 Motivação	51
5.2 Grafos nos documentos oficiais	52
5.3 Os objetivos e as metodologias de ensino	54
5.4 A atividade realizada	56

<i>SUMÁRIO</i>	viii
5.5 Conclusões	62
Considerações Finais	64
Referências Bibliográficas	66

Introdução

Grande parte do desenvolvimento inicial da Teoria de Grafos se deu através de problemas originados a partir de passatempos e quebra-cabeças. Além de atraírem, por seus aspectos lúdicos, a atenção do homem comum, muitos destes problemas também despertaram o interesse de grandes matemáticos que não só buscavam resolver um problema específico proposto mas também elaborar métodos para a resolução de toda uma gama de problemas que generalizavam os originais. Podemos dizer que foram estas possibilidades de generalização que levaram um conjunto de técnicas incipientes, elaboradas a princípio para a resolução de passatempos, a se tornar um conjunto de resultados teóricos de uma surpreendente variedade e profundidade.

O marco inicial da Teoria dos Grafos se deu em 1736, justamente com a solução geral de um problema advindo do conhecido passatempo *As Sete Pontes de Königsberg*, por L. Euler. Desde a sua criação, esta teoria vem ganhando destaque e assumindo um papel preponderante no mundo atual pois, usualmente, os problemas tratados possuem várias características atraentes: modelam problemas do mundo real; são fáceis de serem formulados e compreendidos; são passíveis de uma formulação matemática precisa; podem ser transformados em manerias concretos para manipulação e experimentação; admitem soluções particulares de razoável simplicidade; e, em muitos dos casos, suas soluções gerais desfiam a engenhosidade e o conhecimento. Estas possibilidades são notórias na sugestão da inclusão de conceitos e técnicas da Teoria dos Grafos nos currículos do Ensino Fundamental e Médio.

Grafos são constituídos por pontos (vértices) e linhas ligando estes pontos (arestas) e a modelagem do problema das Pontes de Königsberg em teoria dos grafos consiste em decidir, dado um grafo, se é possível percorrer sequencialmente todas as suas arestas, sem repeti-las, e voltar ao ponto de partida. Ao tomar contato com a resolução deste problema, a pergunta natural a ser feita é a de decidir se tal percurso é possível quando os vértices, ao invés das arestas, são considerados. Este problema também tem sua origem um problema lúdico, o Problema do Passeio do Cavalo no tabuleiro de xadrez, que será tratado neste trabalho.

O problema geral em grafos é conhecido como o Problema do Ciclo Hamiltoniano. Esta nomenclatura se originou com a apresentação do *The Icosian Game*, em 1857, por Sir W. Hamilton. O jogo consiste de um tabuleiro em forma de dodecaedro, onde cada um

dos 20 vértices é nomeado com o nome de uma cidade importante do mundo. O objetivo do jogo é, percorrer o dodecaedro, utilizando suas arestas, passando por cada uma das cidades apenas uma vez, começando e terminando na mesma cidade.

Na verdade, dois anos antes de Hamilton apresentar o *The Icosian Game*, T. P. Kirkman levantou uma versão do problema de forma explícita em um artigo que ele apresentou para a *Royal Society* em Londres: Dado um grafo de um poliedro, pode-se sempre encontrar um circuito que passe por cada vértice apenas uma única vez?

A origem do *The Icosian Game* está fortemente relacionada a descoberta, por Hamilton, das álgebras não-comutativas. Um dos sistemas que ele descobriu, chamado de *The Icosian Calculus*, pode ser interpretado em termos de caminhos sobre o grafo do dodecaedro regular. Posteriormente, ele utilizou a representação como uma base para a construção do jogo.

Em 1859, o *The Icosian Game* foi comercializado por um fabricante de brinquedos de Londres, inclusive com instruções feitas pelo próprio Hamilton. Foram comercializadas duas versões do mesmo, sob o nome *A Voyage Round the World*: uma versão foi construída sobre uma placa plana, como mostra a figura¹ 1 e a outra, consistia do sólido dodecaedro. Neste caso, hastes em cada vértice representavam uma grande cidade do mundo e o jogador envolvia um pedaço de barbante em torno dessas hastes simbolizando que já havia visitado aquela determinada cidade. O jogo foi um fracasso completo de vendas, principalmente porque era muito fácil, mesmo para as crianças.



Figura 1: *Icosian Game*

Atualmente, grafos que contém ciclos Hamiltonianos são chamados de grafos *Hamiltonianos* e seu estudo é um dos principais tópicos da teoria dos grafos. Diferente do que acontece com o percurso nas arestas, resolvido por Euler, o problema de decidir se um

¹Disponível em: www.daviddarling.info/encyclopedia/I/IcosianGame.html. Acesso em abril, 2014.

dado grafo é Hamiltoniano é um dos seis problemas mais conhecidos que constituem a classe dos problemas NP-completos [9], e até o momento, mesmo as ideias mais engenhosas de exibir uma caracterização geral, são exponenciais. Sob este ponto de vista, a prova da NP-Completeness do Problema do Ciclo Hamiltoniano é um resultado negativo que evidencia a dificuldade de resolvê-lo utilizando as ferramentas até então disponíveis.

Em Matemática, sempre que um resultado é estabelecido, uma nova gama de questões é levantada sobre os detalhes cada vez mais específicos relacionados a possibilidade ou a impossibilidade de se alcançar uma solução para o problema original. Assim, usualmente, a partir do estabelecimento de um resultado negativo, se abrem dois novos caminhos de investigação: se a tarefa não pode ser executada com os mecanismos disponíveis, que novos mecanismos podem ser acrescentados de modo que ainda possamos resolver a tarefa de maneira satisfatória? Ou, ainda, como podemos simplificar a tarefa de modo que a nova questão possa ser respondida com os mecanismos disponíveis originalmente?

Assim, diante de resultados negativos, novos caminhos se abrem para a investigação das circunstâncias sob as quais a execução da tarefa é possível.

Este trabalho trata das diferentes possibilidades de abordagem do tema *grafos Hamiltonianos*: história, pesquisa e ensino; e está estruturado da seguinte forma:

No próximo capítulo descrevemos os conceitos e as notações da Teoria dos Grafos que serão amplamente usados ao longo do texto. Descrevemos também as classes de grafos que ocorrem nos enunciados dos teoremas apresentados nos dois capítulos seguintes.

No capítulo 2 apresentamos os Grafos Hamiltonianos e revisamos os principais resultados clássicos de possibilidades e impossibilidades da existência de ciclos Hamiltonianos. Em particular, descrevemos a solução dada por Hamilton para o *Icosian Game* e alguns exemplos de Grafos Hamiltonianos.

No capítulo 3 realizamos um estudo, baseado em referências recentes, da evolução do estabelecimento de condições suficientes para um grafo ser Hamiltoniano, baseadas nos graus e no comprimento do menor caminho entre dois vértices não adjacentes. Em seguida, mostramos um diagrama que consolida as relações entre as várias condições suficientes apresentadas.

No capítulo 4 abordamos um desafio proposto há vários séculos, conhecido como o problema do passeio do cavalo, que consiste em: seguindo as regras de movimento do cavalo do jogo de xadrez, decidir se é possível que um cavalo partindo de uma casa qualquer, percorra todo o tabuleiro visitando cada casa exatamente uma vez retornando à casa inicial. E, no caso positivo, encontrar tal sequência de movimentos. Apresentamos uma solução construtiva para este problema, no tabuleiro de xadrez 8×8 , elaborada muito antes da Teoria dos Grafos ter sido estabelecida. Apresentamos também alguns resultados recentes sobre uma variante deste problema.

No capítulo 5 descrevemos algumas atividades envolvendo a modelagem de um problema por Grafos Hamiltonianos que foram apresentadas a um grupo de alunos do ensino

médio de duas escolas públicas do Rio de Janeiro, durante o *I Seminário do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Dialogando sobre vocações*, em dezembro de 2013. Em seguida, relatamos e analisamos as estratégias elaboradas pelos alunos ao longo do trabalho e descrevemos como eles reagiram frente à proposta apresentada.

Finalmente, encerramos com algumas perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Grafos

1.1 Conceitos iniciais

Nesta seção apresentamos conceitos e propriedades básicas da teoria dos grafos, através de definições, notações, exemplos e resultados. Tais conteúdos serão amplamente utilizados nos capítulos seguintes. As principais referências utilizadas para a elaboração deste capítulo são [6] e [7].

Um *grafo* $G = (V, E)$ é um par $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio e $E(G)$ é um conjunto de pares não ordenados de elementos distintos de $V(G)$.

Os elementos de $V(G)$ são chamados *vértices* e os elementos de $E(G)$, *arestas*. Quando não houver risco de confusão, denotamos $V(G)$ e $E(G)$ apenas por V e E .

Uma aresta $\{a, b\} \in E$ será denotada simplesmente por ab , além disso, diremos que a aresta $e = ab$ *incide* nos vértices a e b , ou que a e b são os *extremos* da aresta e . Se ab é uma aresta, diremos que os vértices a e b são *vizinhos* ou *adjacentes*. Se $ab \notin E$ dizemos que a e b são *não adjacentes*. Diremos que as arestas $ab, ac \in E$ são *adjacentes* pois possuem o vértice a em comum.

O *grau* de um vértice v é o número de arestas incidentes em v , isto é, o número de vértices vizinhos a v em G , denotado por $g_G(v)$ ou por $g(v)$ quando o grafo está subentendido. Enquanto que a *vizinhança* de v , denotada por $Adj(v)$, é o conjunto formado por todos os vértices adjacentes a v em G , isto é, $Adj(v) = \{w \in V \mid vw \in E\}$.

A *ordem* de um grafo G é a cardinalidade do conjunto V , denotada por $|V|$.

Dizemos que um vértice que não é extremo de nenhuma aresta, isto é, um vértice com grau zero é um vértice *isolado*.

Grafos são usualmente representados graficamente por diagramas, onde os vértices são pontos e as arestas são linhas ligando seus extremos, não passando por outros vértices.

Como exemplo, considere um grafo G com $V = \{a, b, c, d\}$ e $E = \{ab, ac, ad, bd, cd\}$, conforme ilustrado na figura 1.1. Observe que G é um grafo de ordem quatro, as arestas incidentes no vértice a são ab, ac e ad , logo $g(a) = 3$. Analisando da mesma forma temos

$g(b) = 2 = g(c)$ e $g(d) = 3$. O vértice c é adjacente aos vértices a e d mas é não adjacente ao vértice b , portanto $Adj(c) = \{a, d\}$.

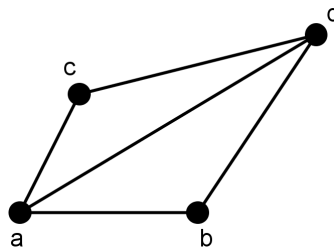


Figura 1.1: Grafo G .

Sejam dois grafos $G = (V(G), E(G))$ e $H = (V(H), E(H))$. Dizemos que H é um *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. As figuras 1.2 e 1.3 ilustram um grafo G e um subgrafo H de G , respectivamente.

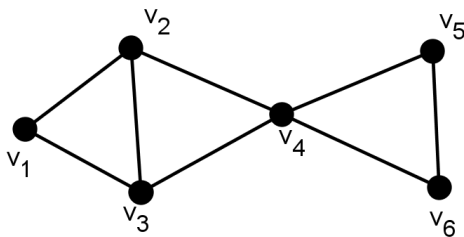


Figura 1.2: Grafo G .

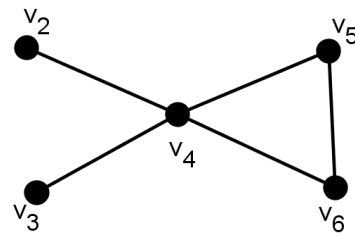


Figura 1.3: Subgrafo H de G .

O subgrafo de G *induzido* por um subconjunto S de $V(G)$ é o grafo $H(S, E')$ em que E' é o conjunto de todas as arestas de G que têm ambos seus extremos em S . Esse subgrafo é denotado por $G[S]$.

Dado um grafo $G = (V, E)$, o subgrafo de G obtido por *excisão da aresta e* de G é o grafo $H = (V, E \setminus \{e\})$. Doravante, denotaremos tal subgrafo de G por $G - e$. Em palavras, o subgrafo $G - e$ é obtido de G *removendo* a aresta e .

Já o subgrafo de G obtido por *excisão do vértice v* de G é o grafo $H = (V \setminus \{v\}, E')$ onde

$$E' = E \setminus \{e \in E \mid e \text{ incide em } v\}.$$

Doravante, denotaremos tal subgrafo de G simplesmente por $G - v$. Em palavras, o subgrafo $G - v$ é obtido de G removendo o vértice v e todas as arestas nele incidentes. Observe ainda que $G - v$ tem um vértice a menos e $d_G(v)$ arestas a menos que G .

Seja S um subconjunto qualquer não vazio de $V(G)$. Assim, $G - S$ representa o subgrafo $H = (V \setminus S, E'')$ de G , onde

$$E'' = E \setminus \{e \in E \mid e \text{ incide em } v \in S\}.$$

Em palavras, o subgrafo $G - S$ é obtido de G removendo todos os vértices $v \in S$ e todas as arestas neles incidentes. Obviamente $G - S = G[V(G) \setminus S]$.

Na figura 1.4 tem-se em (a) o grafo G , em (b) o grafo obtido por excisão da aresta uv do grafo G , isto é, o grafo $G - uv$ e em (c) o grafo obtido por excisão do vértice v do grafo G , isto é, o grafo $G - v$.

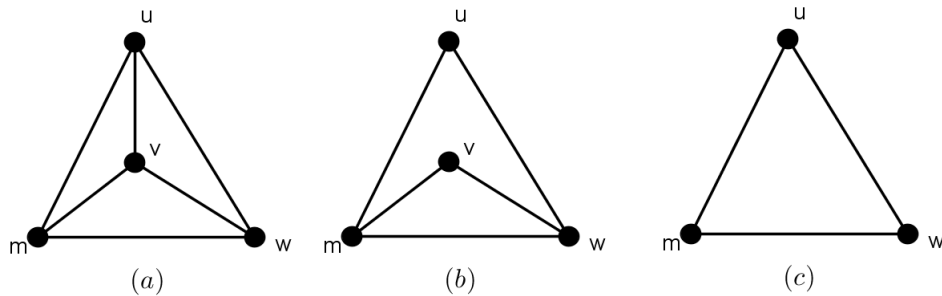


Figura 1.4: grafo G , grafo $G - uv$ e grafo $G - v$.

Por fim, se $u, v \in V(G)$ e $uv \notin E(G)$, denota-se por $G + uv$ o grafo $(V(G), E(G) \cup \{uv\})$.

A *junção* de grafos G e H , denotada por $G \vee H$ é o grafo obtido da união disjunta de G e H adicionado arestas entre cada vértice de G a cada vértice de H , isto é, $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$ e $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{uv \mid u \in V(G) \text{ e } v \in V(H)\}$.

Um subconjunto $S \subseteq V(G)$ é denominado *conjunto independente* de G se dois vértices quaisquer de S são não adjacentes em G . Um conjunto independente S em G é *máximo* se para todo conjunto independente T em G temos $|T| \leq |S|$. O número de vértices no conjunto independente máximo no grafo G , denotado por $\alpha(G)$, é chamado de *número de independência* de G . Considerando o grafo G da figura 1.2 temos: $\alpha(G) = 2$.

1.2 Caminhos e grafos conexos

Um $v_0 - v_k$ *caminho* em um grafo G , é uma sequência

$$P = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$$

de vértices distintos de G tal que v_{i-1} é adjacente a v_i para $1 \leq i \leq k$. Os vértices v_0 e v_k são os *extremos* do caminho.

Se $P = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k$ é um caminho, então o *comprimento* de P é k e o número de vértices de P é $k + 1$.

Uma sequência de vértices v_1, \dots, v_k , $k > 2$, é um *ciclo* se v_1, \dots, v_k for um caminho e v_1 é adjacente a v_k . Neste caso, escrevemos $C = v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$.

É importante ressaltar também que considerando os vértices e as arestas entre vértices consecutivos do caminho P temos um subgrafo de G .

No grafo da figura 1.5 tem-se que $P = a, c, b, f, e$ é um caminho e $C = f, b, c, a, d, e, f$ é um ciclo.

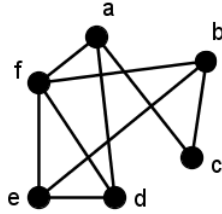


Figura 1.5: Caminho e ciclo em G .

Dados dois vértices u e v de $V(G)$, o comprimento do menor caminho de u a v é a *distância* de u a v , sendo denotado por $\delta(u, v)$.

O *diâmetro* de um grafo G , denotado por $diam(G)$, é a maior distância entre dois vértices quaisquer de G , isto é, $diam(G) = \max\{\delta(u, v) \mid u, v \in V\}$.

Observe na figura 1.5 que $\delta(a, e) = 2$, $\delta(a, f) = 1$ e que $\delta(u, v) \leq 2$ para todo par de vértices deste grafo, logo $diam(G) = 2$.

Dizemos que um grafo G é *conexo* se existe um $u - v$ caminho para todo par u, v de vértices de G . Caso contrário, G é *desconexo*.

O grafo da figura 1.6 é desconexo pois, por exemplo, não existe um $v_1 - v_4$ caminho, já o grafo da figura 1.7 é conexo.

Um subgrafo H de um grafo G é um *componente conexo* de G se H é conexo e não é subgrafo de nenhum outro subgrafo conexo de G .

Desta forma, o grafo G na figura 1.6 tem dois componentes conexos, a saber: $G_1 = (V_1, E_1)$, com $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $E_1 = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3\}$, e $G_2 = (V_2, E_2)$, com $V_2 = \{v_4, v_5\}$ e $E_2 = \{v_4v_5\}$, onde $G = G_1 \cup G_2$.

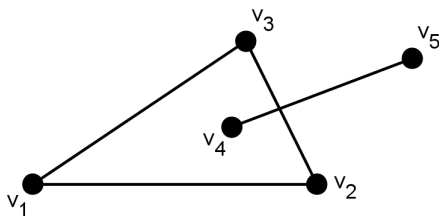


Figura 1.6: Grafo desconexo.

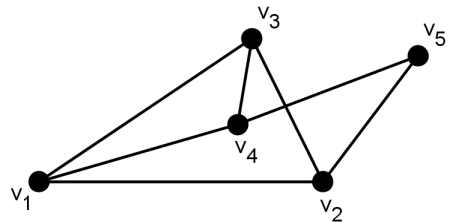


Figura 1.7: Grafo conexo.

Um grafo G é denominado *2-conexo*, se $G - u$ é conexo para todo vértice $u \in V$. Observe que o grafo G da figura 1.7 é 2-conexo. Por outro lado, o grafo G da figura 1.2 é conexo mas não é 2-conexo, $G - v_4$ tem dois componentes conexos.

1.3 Algumas famílias de grafos

Nesta seção abordaremos algumas famílias importantes de grafos que serão utilizadas mais adiante.

Um grafo $G = (V, E)$, tal que quaisquer dois de seus vértices são adjacentes, é um grafo *completo*. Tal grafo de ordem n é denotado por K_n .

Um grafo $G = (V, E)$ é *k-regular* se todos os vértices de G têm grau igual a k . Se o grafo for *k-regular* para algum k , dizemos que ele é *regular*.

Dado um grafo $G = (V, E)$ em que V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 , isto é, $V_1 \cup V_2 = V$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, de modo que V_1 e V_2 sejam conjuntos independentes, então dizemos que G é *bipartido*.

Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido particionado em V_1 e V_2 em que todo vértice de V_1 é adjacente a todo vértice de V_2 . Se $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$, tal grafo bipartido completo é denotado por $K_{r,s}$.

Nas figuras 1.8, 1.9, 1.10 e 1.11 temos o grafo K_4 , um grafo 3-regular, um grafo bipartido com $V_1 = \{v_1, v_2\}$ e $V_2 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e o grafo $K_{4,3}$ ou $K_{3,4}$, respectivamente. O grafo representado na figura 1.9 é conhecido como *grafo de Petersen*.

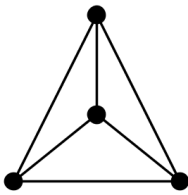


Figura 1.8: K_4 .

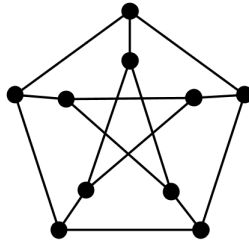


Figura 1.9: 3-regular.

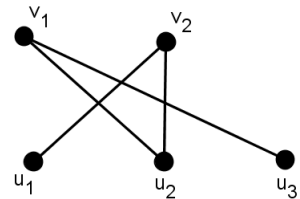


Figura 1.10: grafo bipartido.

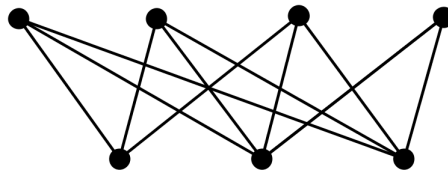


Figura 1.11: $K_{4,3}$.

Abaixo segue um resultado básico sobre grafos bipartidos, cuja demonstração pode ser encontrada em [22].

Teorema 1. *Um grafo G é bipartido se, e somente se, não tem ciclos com um número ímpar de vértices.*

A seguir descrevemos cinco famílias de grafos de ordem n : \mathcal{A}_n , descrita por Benhocine e Wojda [1], \mathcal{C}_n e \mathcal{D}_n , descritas por Li [14], \mathcal{C}'_n e \mathcal{C}''_n , descritas por Hasan et al. [13] que serão de fundamental importância para o enunciado de alguns resultados mais adiante.

Um grafo G é da família \mathcal{A}_n se, e somente se, $|V(G)| = n$, onde $n \geq 7$ é um número ímpar e o conjunto de vértices de G está particionado em A_1, A_2, B_1, B_2 e $\{a_1, a_2, b\}$ de modo que: $Adj_G(b) = \{a_1, a_2\}$ e os vértices a_1 e a_2 podem ser adjacentes ou não; $|A_i \cup B_i| = \frac{(n-3)}{2}$, $|A_i| \geq 2$, $i = 1, 2$; $|A_1 \cup A_2| \geq \frac{(n-3)}{2}$ se $a_1 a_2 \notin E(G)$ e $|A_1 \cup A_2| \geq \frac{(n-3)}{2} - 1$ se $a_1 a_2 \in E(G)$; $G[A_i \cup B_i]$ e $G[A_i \cup \{a_j\}]$ são subgrafos completos de G para $i = 1, 2$ e $j = 1, 2$. Além disso, estas são as únicas arestas de G . A figura 1.12 ilustra um grafo da família \mathcal{A}_n .

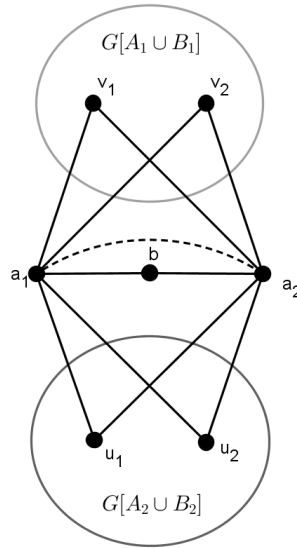


Figura 1.12: Família \mathcal{A}_n .

Um grafo G é da família \mathcal{C}_n se, e somente se, $|V(G)| = n = p + q + 1$ e o conjunto de vértices de G está particionado em A, B e $\{w\}$ de modo que $G[A] = K_p$, $G[B] = K_q$, $Adj(w) \cap A \neq \emptyset$ e $Adj(w) \cap B \neq \emptyset$. Além disso, não existem arestas com um extremo em A e outro em B . A figura 1.13 ilustra um grafo da família \mathcal{C}_n .

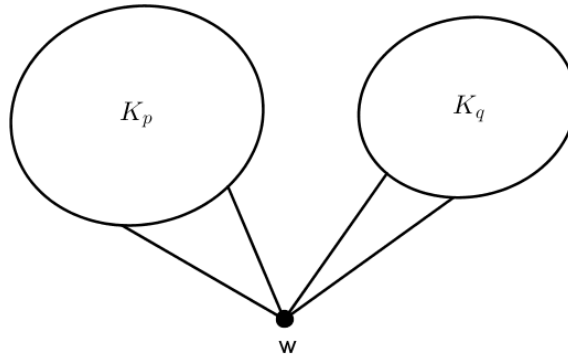


Figura 1.13: Família \mathcal{C}_n .

Um grafo G de \mathcal{C}_n está em \mathcal{C}'_n quando $Adj(w) \cap A = A$. Além disso, um grafo em \mathcal{C}'_n está em \mathcal{C}''_n quando $Adj(w) \cap B = B$.

Finalmente, um grafo G é da família \mathcal{D}_n se, e somente se, $|V(G)| = n = 2p + 1$ e o conjunto de vértices de G está particionado em A, B de modo que $|A| = p, |B| = p + 1$, $G[A]$ é um grafo qualquer, $G[B] = (p + 1)K_1$ e, além disso, todos os vértices de A são adjacentes a todos os vértices de B , como ilustrado na figura 1.14.

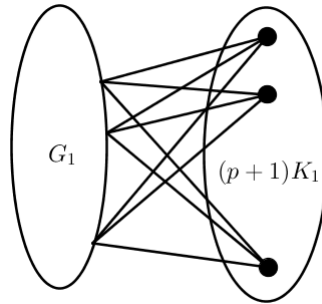


Figura 1.14: Família \mathcal{D}_n .

Observe que todos os grafos de \mathcal{A}_n e de \mathcal{D}_n são 2-conexos. Porém os de \mathcal{C}_n não são.

Note ainda, que o diâmetro de um grafo G em \mathcal{C}_n é no máximo 4. De fato, se w for adjacente a todos os vértices de A e de B , então $G \in \mathcal{C}_n''$ e $diam(G) = 2$. Se w for adjacente a todos os vértices de A mas não for adjacente a pelo menos um vértice de B , então $G \in \mathcal{C}_n'$ e $diam(G) = 3$. Porém, se w não for adjacente a pelo menos um vértice de A e a pelo menos um vértice de B , então $diam(G) = 4$.

Já os grafos da família \mathcal{A}_n possuem diâmetro igual a 4, pois os vértices de B_i não são adjacentes aos vértices a_i , com $i = 1, 2$. Por fim, o diâmetro de um grafo em \mathcal{D}_n é 2.

Capítulo 2

Grafos Hamiltonianos

2.1 Ciclo Hamiltoniano

Definição 1. Um caminho que contém todos os vértices de um grafo G é dito *caminho Hamiltoniano* de G . Do mesmo modo, um ciclo que contém todos os vértices de G , dizemos ser um *ciclo Hamiltoniano*. Se G contém um ciclo Hamiltoniano, dizemos que G é um *grafo Hamiltoniano*.

The Icosian Game proposto por Sir W. Hamilton apresenta um desafio envolvendo um dodecaedro, em que cada um dos 20 vértices foram nomeados com nomes de cidades importantes do mundo. O objetivo do jogo era, utilizando as 30 arestas do dodecaedro, passar por cada uma das cidades apenas uma vez, começando e terminando na mesma cidade.

Observe que podemos representar este “puzzle” por um grafo G cujos vértices correspondem às cidades, e cujas arestas correspondem às ligações entre as cidades, como na figura 2.1.

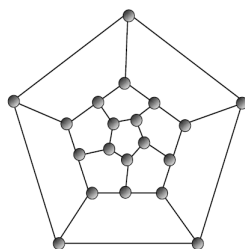


Figura 2.1: Grafo representando o *The Icosian Game*.

A associação do nome de Hamilton a estes grafos deve-se ao fato de ter sido ele a propor este jogo e, na época, ele já era um matemático amplamente reconhecido [3]. O *The Icosian Game* está fortemente relacionado a descoberta, por Hamilton, das álgebras não-comutativas. Um dos sistemas que ele descobriu, chamado de *The Icosian Calculus* deu

origem ao jogo. Hamilton [2] resolveu este problema observando que quando o viajante chega a um dado vértice, percorrendo uma certa aresta, tem três opções: ou (L) continua pela aresta da esquerda, ou (R) continua pela aresta da direita, ou (1) fica no vértice (o que acontece quando percorre um ciclo).

A partir desta observação definiu estes procedimentos à custa de operações com L e R , representando, por exemplo, por L^2R o procedimento de virar duas vezes seguidas à esquerda e posteriormente à direita. Adicionalmente, considerou que duas sequências de operações têm o mesmo resultado se, a partir de um mesmo vértice, ambas conduzem a esse vértice. Esta operação, embora não seja comutativa (uma vez que $LR \neq RL$), é claramente associativa (por exemplo, $(LL)R = L(LR)$). Devido ao fato das faces serem pentagonais é claro que $R^5 = L^5 = 1$ e, por outro lado, com facilidade se verifica que $LR^3L = R^2$. Com base nestas conclusões temos que:

$$1 = R^5 = R^2R^3 = (LR^3L)R^3 = (LR^3)^2 = (L(LR^3L)R)^2 = (L^2R^3LR)^2 \Rightarrow$$

$$1 = (L^2(LR^3L)RLLR)^2 = (L^3R^3LRLR)^2 = LLLRRRLRLRLLLLRRRLRLR.$$

A sequência obtida contém 20 operações, e nenhuma subsequência dá resultado 1, logo representa um ciclo Hamiltoniano. Observe ainda que este ciclo pode iniciar em qualquer um dos 20 vértices do dodecaedro. Portanto o dodecaedro é um grafo Hamiltoniano.

A solução para este tipo de problema depende se G tem um ciclo que contém todos os vértices de G .

Exemplo 1. O grafo K_n , $n \geq 3$, é Hamiltoniano. De fato, como quaisquer dois de seus vértices são adjacentes, $C = v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ é um ciclo que contém todos os vértices de K_n e, portanto, K_n é Hamiltoniano.

Exemplo 2. O grafo G , na figura 2.2, é Hamiltoniano porque contém o ciclo Hamiltoniano $C = v_1, v_6, v_3, v_4, v_5, v_2, v_1$.

Exemplo 3. O grafo H , na figura 2.3, não é Hamiltoniano pois o vértice v_4 de grau 1 e, portanto, não pertence a nenhum ciclo. Portanto o grafo H não é Hamiltoniano, mas tem um caminho Hamiltoniano, a saber $P = v_1, v_2, v_3, v_4$.

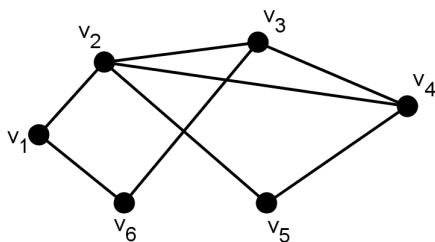


Figura 2.2: Grafo G .

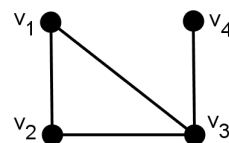


Figura 2.3: Grafo H .

Naturalmente, podemos deduzir da definição que todo grafo Hamiltoniano contém um caminho Hamiltoniano, mas um grafo contendo um caminho Hamiltoniano pode não conter um ciclo Hamiltoniano.

Exemplo 4. O grafo M , na figura 2.4, não é Hamiltoniano. De fato, se começarmos o ciclo em v_1, v_2, v_3 ou v_4 , passa-se necessariamente no vértice v_5 duas vezes. Se começarmos em v_5 passaríamos por este mesmo vértice, no mínimo, mais uma vez.

Exemplo 5. O grafo N , na figura 2.5, também não é Hamiltoniano. De fato, suponha que N contém um ciclo Hamiltoniano C . Logo, C contém todos os vértices do grafo. Por outro lado, N é um grafo de ordem ímpar, e portanto C tem comprimento ímpar, mas N é bipartido. Absurdo, contradiz o teorema 1.

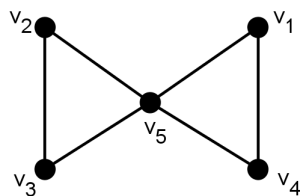


Figura 2.4: Grafo M .

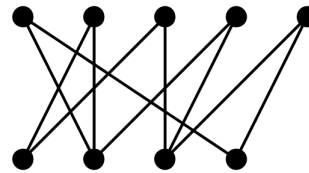


Figura 2.5: Grafo N .

Observação 1. Encontrar um ciclo Hamiltoniano num grafo de ordem pequena que o admita, é relativamente fácil. Porém, quando a ordem cresce, provar que não existe um ciclo Hamiltoniano pode tornar-se muito difícil. Observando os últimos dois exemplos, podemos concluir, na tentativa de se obter um ciclo Hamiltoniano, que:

1. Nenhum vértice pode ter grau menor do que dois;
2. Se um vértice tem grau 2, então ambas as arestas incidentes neste vértice devem fazer parte do ciclo. Isto porque, ao construir um ciclo, para “chegar” a um vértice qualquer, precisamos apenas “passar” por uma aresta e depois podemos “sair” por outra para unir este vértice a outro qualquer;
3. Se o grafo for bipartido de ordem ímpar, o mesmo não é Hamiltoniano;
4. Na tentativa de se obter um ciclo Hamiltoniano, uma vez que se visite um dado vértice, todas as arestas incidentes nesse vértice que não foram utilizadas devem ser desprezadas, haja vista que não poderemos retornar a este vértice novamente.

Baseando-se nestas observações, mostraremos no próximo exemplo que o grafo de Petersen não possui um ciclo Hamiltoniano.

Exemplo 6. O grafo de Petersen não é Hamiltoniano.

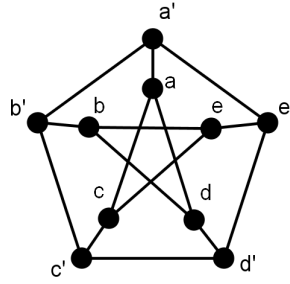


Figura 2.6: Grafo de Petersen.

Demonstração. Primeiramente observe que o grafo de Petersen (figura 2.6) é composto por dois ciclos $C' = a', b', c', d', e', a'$ e $C'' = a, d, b, e, c, a$ e pelas arestas $\{a'a, b'b, c'c, d'd, e'e\}$ entre eles.

Suponha por absurdo que C é um ciclo Hamiltoniano no grafo de Petersen. Como o ciclo C contém todos os vértices do grafo, C deverá ter duas ou quatro das arestas em $\{a'a, b'b, c'c, d'd, e'e\}$. Assim há dois casos a considerar:

Caso I: C contém quatro das arestas $\{a'a, b'b, c'c, d'd, e'e\}$.

Suponha, sem perda de generalidade, que o ciclo C não contém a aresta $b'b$. Observe que o resultado é análogo caso tivéssemos escolhido, dentre as cinco, qualquer outra aresta. Como a aresta $b'b$ não está no ciclo C então, pela *observação 1 item 2*, para C conter os vértices b' e b terá que conter as arestas $a'b', b'c'$ e be, bd , respectivamente.

Como C contém as arestas $a'a, c'c, d'd, e'e, a'b', b'c', be$ e bd , então, pela *observação 1 item 4*, o ciclo C não conterá as arestas $b'b, ad, a'e', c'd'$ e ec . Consequentemente, o ciclo C contém ac e $e'd'$. Absurdo, pois o ciclo C contém dois ciclos de comprimento 5, $C_1 = a', b', c', c, a, a'$ e $C_2 = e', e, b, d, d', e'$, que não contém nenhum vértice em comum, logo C não é um ciclo Hamiltoniano.

Caso II: C tem apenas duas das arestas $\{a'a, b'b, c'c, d'd, e'e\}$.

Se apenas duas das arestas $\{a'a, b'b, c'c, d'd, e'e\}$ estão em C , suponha, sem perda de generalidade, que $a'a$ seja uma delas e que o vértice inicial seja a' . Logo, C contém a aresta ac ou a aresta ad , digamos ac . Como C contém apenas duas arestas ligando o ciclo C'' ao ciclo C' , então C percorrerá todos os vértices a, c, e, b, d , nesta ordem, antes de retornar novamente para o ciclo C' . Assim, o ciclo C conterá a aresta dd' e, consequentemente, pela *observação 1 item 4*, as arestas $c'c, b'b, e'e, ad$ não estarão no ciclo C .

Desta forma, para retornarmos ao vértice a' temos duas opções para o ciclo C : percorrer os vértices d', e', a' nesta ordem ou percorrer os vértices d', c', b', a' nesta ordem. Porém, se escolhermos a primeira opção, os vértices c', b' não estarão no ciclo C e, se escolhermos a segunda, o vértice e' não estará no ciclo C . Mas ambas opções são absurdas, pois estamos supondo que C é um ciclo Hamiltoniano.

Observe que se iniciarmos o ciclo C no vértice a , ao invés do vértice a' , ou tivéssemos escolhido a aresta ad , ao invés da aresta ac , o raciocínio empregado seria análogo e,

portanto, o grafo de Petersen não é Hamiltoniano. □

Definição 2. O grafo k -cubo, denotado por Q_k , é o grafo cujos vértices correspondem às sequências binárias de k elementos e existe uma aresta entre dois vértices se, e somente se, as sequências diferem em exatamente uma posição.

Observe que o grafo k -cubo contém 2^k vértices, cada um dos quais associado a um número, entre 0 e $2^k - 1$, representado numa base binária e $\frac{k2^k}{2} = k2^{k-1}$ arestas. Na figura 2.7 apresentam-se os k -cubos, com $k = 0, 1, 2$ e 3.

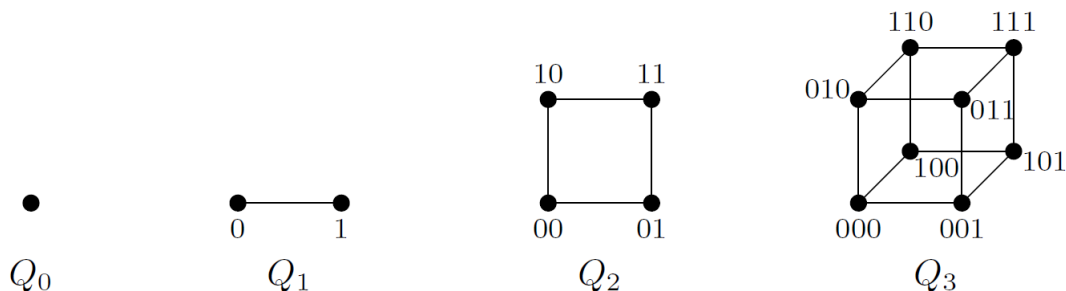


Figura 2.7: Representação dos k -cubos, com $k = 0, 1, 2, 3$.

Exemplo 7. O grafo Q_k é hamiltoniano para todo $k \geq 2$.

Demonstração. A demonstração será por indução sobre k .

Para $k = 2$, Q_2 possui um ciclo Hamiltoniano, a saber: 00, 01, 11, 10, 00.

Suponha que exista o ciclo Hamiltoniano em Q_k , digamos

$$v_0, v_1, \dots, v_{2^k-2}, v_{2^k-1}, v_0,$$

vamos mostrar que Q_{k+1} possui um ciclo Hamiltoniano.

Note que os vértices de Q_{k+1} são os vértices de Q_k precedidos do algarismo 0 ou 1, isto é, Q_{k+1} possui o dobro de vértices de Q_k . Assim

$$0v_0, 0v_1, \dots, 0v_{2^k-2}, 0v_{2^k-1}, 1v_{2^k-1}, 1v_{2^k-2}, \dots, 1v_1, 1v_0, 0v_0$$

é um ciclo Hamiltoniano em Q_{k+1} . □

Nos exemplos anteriores podemos observar que mostrar a existência ou não de um ciclo Hamiltoniano num grafo não é uma tarefa fácil. De fato, para mostrar que um determinado grafo contém um ciclo Hamiltoniano podemos simplesmente exibi-los. Porém, dependendo da ordem do grafo ou do número de arestas, esta tarefa torna-se bastante complicada, devido ao grande número de casos que teremos que analisar. De maneira equivalente provar que um grafo não é Hamiltoniano também requer uma análise de vários casos e,

novamente, dependendo da ordem do grafo ou do número de arestas, esta tarefa torna-se exaustiva e praticamente impossível.

Infelizmente, ainda não foi encontrado um método conveniente para determinar quais grafos são Hamiltonianos. No entanto, existem algumas condições necessárias e algumas condições suficientes para a existência de ciclos Hamiltonianos num grafo.

2.2 Condição necessária

A seguir enunciaremos uma condição necessária para um grafo ser Hamiltoniano. Nela o termo $ncc(G - S)$ denota o número de componentes conexos do grafo $G - S$, onde S é um subconjunto qualquer não vazio de V .

Teorema 2. *Se G é Hamiltoniano, então $ncc(G - S) \leq |S|, \forall S \subseteq V$.*

Demonstração. Sejam $C = v_0, v_1, \dots, v_n$, com $n = |V|$ um ciclo Hamiltoniano em G e S um subconjunto não vazio de V . É claro que

$$ncc(C - S) \leq |S|,$$

mas e

$$ncc(G - S) \leq ncc(C - S),$$

portanto

$$ncc(G - S) \leq |S|, \forall S \subseteq V$$

□

Apesar do teorema estar descrito desta forma, usamos mais a sua forma contrapositiva, a saber:

Se num grafo G , $ncc(G - S) > |S|$ para algum $S \subseteq V$, então G não é Hamiltoniano.

Exemplo 8. O grafo G ilustrado na figura 2.8 não é Hamiltoniano. De fato, escolha $S = \{m, n\}$, agora observe que o número de componentes conexos de $G - S$ é igual a 3, maior do que a cardinalidade do subconjunto S , isto é, $ncc(C - S) > |S|$.

Note que a condição indicada no teorema anterior não é suficiente para garantir a existência de um ciclo Hamiltoniano num grafo, como mostra o exemplo abaixo:

Exemplo 9. O grafo da figura 2.9 satisfaz a condição necessária, pois qualquer subconjunto S de vértices de G é sempre maior do que ou igual ao número de componentes conexos do grafo $G - S$. Porém, isto não é suficiente, pois G não possui um ciclo Hamiltoniano. De fato, suponha que G contém um ciclo Hamiltoniano C . Logo, C contém todos os vértices do grafo e, conseqüentemente, contém v_4, v_5, v_6 e v_7 . Como cada um dos

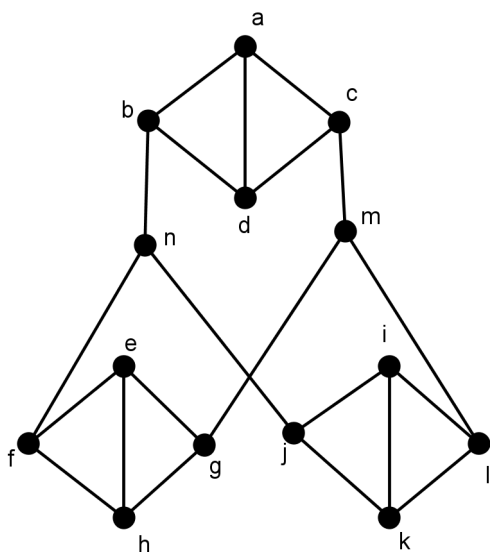


Figura 2.8: Grafo não Hamiltoniano.

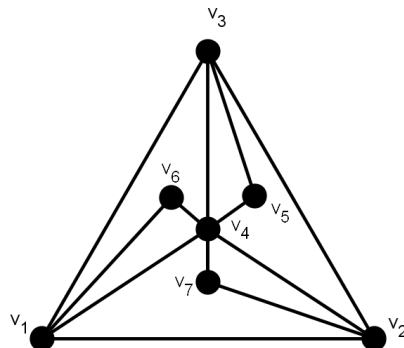


Figura 2.9: Grafo não Hamiltoniano que satisfaz a condição necessária.

vértices v_5, v_6 e v_7 tem grau dois, então C contém as duas arestas incidentes em cada um destes vértices (v_5, v_6 e v_7). Assim, o ciclo C tem que conter as arestas v_4v_5, v_4v_6 e v_4v_7 (devido ao fato dos vértices v_5, v_6 e v_7 terem grau dois e serem todos adjacentes ao vértice v_4). Absurdo, pois um ciclo só pode conter duas arestas incidentes em cada vértice de um grafo.

Portanto, o grafo da figura 2.9 não pode conter um ciclo Hamiltoniano.

Exemplo 10. Os grafos das famílias \mathcal{C}_n e \mathcal{D}_n não são Hamiltonianos. De fato, considere G e H grafos das famílias \mathcal{C}_n e \mathcal{D}_n , respectivamente. Tomando $S = \{w\}$ em G temos $|S| = 1 < ncc(G - S) = 2$ logo, pelo teorema 2, os grafos da família \mathcal{C}_n não são Hamiltonianos. Já em H , também pela condição necessária, tomando $S = V(G_1)$ temos $|S| = p < ncc(H - S) = p + 1$. Portanto os grafos da família \mathcal{D}_n não são Hamiltonianos.

2.3 Condição suficiente (Teorema de Dirac)

Nesta seção iremos enunciar o teorema de Dirac (1952) [22], uma das condições suficientes para um grafo ser Hamiltoniano. Em seguida, mostraremos como podemos usá-lo para mostrar que alguns grafos específicos são Hamiltonianos.

Para isso, primeiramente, faremos uso da seguinte definição:

Definição 3. Um grafo G denomina-se *grafo não Hamiltoniano maximal* se não é um grafo Hamiltoniano mas a adição de qualquer aresta que incida em dois vértices não adjacentes forma um grafo Hamiltoniano.

Teorema 3 (Dirac). *Seja G um grafo conexo de ordem n , $n \geq 3$. Se $g(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo vértice $v \in V$, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Seja G um grafo conexo de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V$ não Hamiltoniano maximal. Consequentemente existem $u, v \in V$ tal que $uv \notin E$. Considere o grafo $G' = G + uv$ obtido de G através da inclusão de uma aresta entre u e v . Assim, visto que G é um grafo não Hamiltoniano maximal, então G' é Hamiltoniano. Seja C um ciclo Hamiltoniano em G' tal que $C = v_1, v_2, \dots, v_n, v_1$ com $v_1 = u$ e $v_n = v$ (a aresta $v_n v_1$ é a aresta vu). Tomemos

$$S = \{v_i \in C \mid \text{existe uma aresta de } u \text{ para } v_{i+1} \text{ em } G\}$$

e

$$T = \{v_i \in C \mid \text{existe uma aresta de } v \text{ para } v_i \text{ em } G\}.$$

Então $v_n \notin T$, caso contrário haveria uma aresta de v para $v_n = v$. Da mesma forma $v_n \notin S$, caso contrário haveria uma aresta de u para $v_{n+1} = v_1 = u$. Assim, $v_n \notin S \cup T$. Então, tem-se que:

$$|S \cup T| < n, \tag{2.1}$$

$$|S| = g(u), \tag{2.2}$$

$$|T| = g(v). \tag{2.3}$$

Por outro lado, se v_k é um vértice que pertence a S e a T , então existem arestas $e = uv_{k+1}$ e $f = vv_k$. Portanto temos que $C' = v_1, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1$ é um ciclo Hamiltoniano em G , observe o ciclo C' na figura 2.10, o que contradiz o fato de G ser um grafo não Hamiltoniano.

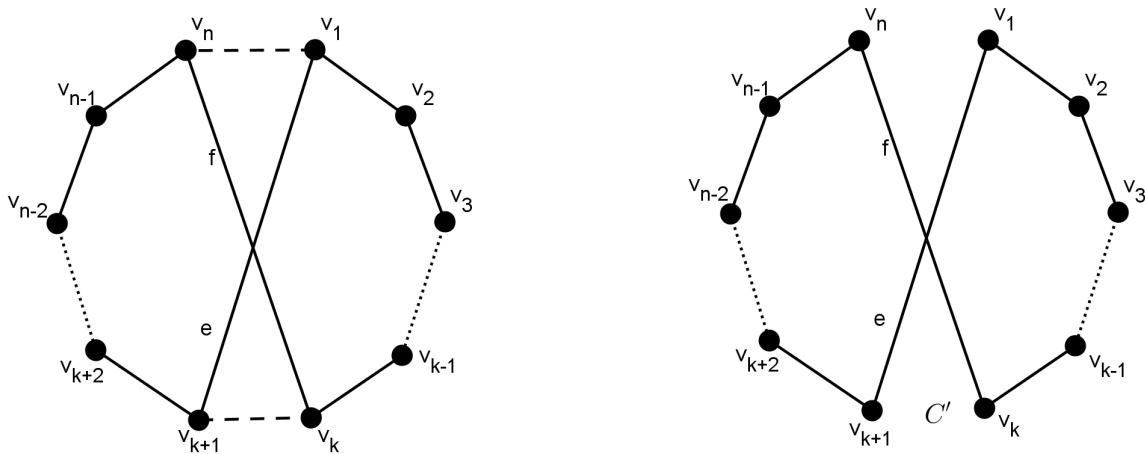


Figura 2.10: Ciclo Hamiltoniano $C' = v_1, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1$.

Mas então, não existe nenhum vértice v_k em $S \cap T$, isto é, $S \cap T = \emptyset$.

Logo $|SUT| = |S| + |T|$ e de (2.1), (2.2) e (2.3), temos;

$$g(u) + g(v) = |S| + |T| = |SUT| < n.$$

Mas por hipótese, $g(u) \geq \frac{n}{2}$ e $g(v) \geq \frac{n}{2}$, logo $g(u) + g(v) \geq n$. Absurdo, portanto G é Hamiltoniano. \square

A demonstração deste teorema genial explora a ideia de extremalidade. A ideia envolvida é: se existe um grafo não Hamiltoniano satisfazendo as hipóteses, então adicionando arestas (observe que isto não reduz o grau mínimo) podemos restringir nossa atenção para o grafo não Hamiltoniano maximal com o grau no mínimo $n/2$ para todo vértice.

Observe também que o teorema de Dirac garante a existência de ciclos Hamiltonianos em um grafo que satisfaz certas hipóteses, porém a prova não oferece um algoritmo que nos mostra como construir o ciclo, caso o grafo tenha um, isto é, sabemos que um determinado grafo possui um ciclo Hamiltoniano mas não sabemos exibi-lo.

Com o auxílio do teorema de Dirac vamos mostrar que alguns grafos definidos anteriormente são Hamiltonianos.

Exemplo 11. Já mostramos, *no exemplo 1*, que o grafo K_n é Hamiltoniano para todo $n \geq 3$. Porém, também podemos demonstrar esta propriedade de K_n ser Hamiltoniano, utilizando o teorema de Dirac. De fato,

$$g(v) = n - 1 \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V(K_n).$$

Portanto, pelo teorema de Dirac, K_n é Hamiltoniano.

Exemplo 12. Seja $K_{n,m}$ o grafo bipartido completo, tal que $n, m \geq 2$. O grafo $K_{n,m}$ é Hamiltoniano se, e somente se, $m = n$.

Demonstração. Considere o grafo bipartido completo $K_{n,m} = (V, E)$, onde $V = V_1 \cup V_2$, $|V_1| = n$ e $|V_2| = m$, com $n \geq m \geq 2$. Suponha, inicialmente $m = n$, então $|V(K_{n,m})| = n + m = 2n$. Por outro lado, nos grafos bipartidos completos, em cada vértice de V_1 incidem $m = n$ arestas. Consequentemente, $g(v) = n, \forall v \in V(K_{n,m})$ e, então:

$$g(v) \geq \frac{2n}{2}, \forall v \in V(K_{n,m}).$$

Portanto, pelo teorema de Dirac, $K_{n,m}$ com $m = n$ é Hamiltoniano.

Reciprocamente, temos que $m < n$ e, como $K_{n,m}$ é bipartido, então qualquer caminho em $K_{n,m}$ alterna vértices de V_1 e V_2 e, conseqüentemente não pode conter todos os vértices de V_1 , a menos que $n = m + 1$, neste caso existirá um caminho Hamiltoniano em que ambos os extremos estão em V_1 e, portanto, não adjacentes. Assim $K_{n,m}$ não é Hamiltoniano se $n \neq m$. \square

Não é tarefa fácil determinar uma caracterização de grafos Hamiltonianos, porém pesquisadores tem se esforçado para encontrar condições necessárias e suficientes para um grafo ser Hamiltoniano. Entretanto, as condições que foram provadas não tem sido úteis no contexto de algoritmos eficientes, o que não é de se estranhar pois o problema é NP-completo [9]. Por exemplo, de acordo com [17], Plotnikov mostrou, em 1998, uma condição necessária e suficiente para um grafo ser Hamiltoniano, que deve ser verificada para todo conjunto independente do grafo. Como o número de conjuntos independentes de um grafo pode ser da ordem de 2^n não existe um algoritmo de tempo polinomial para testar a condição.

Em contrapartida, é enorme o número de pesquisas que tem sido feitas tentando encontrar condições suficientes para a existência de ciclos ou caminhos Hamiltonianos baseando-se em propriedades estruturais de grafos tais como: conjunto independente, 2-trilhas, subgrafos proibidos, grafos panciclícos, entre outras [12].

No próximo capítulo serão apresentadas em detalhes condições suficientes para um grafo ser Hamiltoniano baseadas em propriedades estruturais do grafo, mais especificamente, nos graus e no comprimento do caminho mais curto, entre dois vértices não adjacentes. Culminando com a definição de uma classe de grafos para a qual os grafos não Hamiltonianos desta classe são bem determinados ou, equivalentemente, o problema está bem resolvido. Mostraremos também como as condições impostas sobre os grafos, se relacionam, estabelecendo uma hierarquia de resultados que generalizam o teorema de Dirac.

Capítulo 3

Condições suficientes baseadas no grau dos vértices e no comprimento do caminho mínimo

No capítulo anterior enunciamos e demonstramos o teorema de Dirac. Publicado em 1952, este foi o primeiro teorema que fornecia uma condição suficiente para afirmar se um determinado grafo é Hamiltoniano. Neste capítulo iremos nos concentrar em demonstrar condições suficientes baseadas em propriedades estruturais do grafo, mais especificamente, no grau dos vértices e no comprimento do caminho mais curto entre vértices não adjacentes, generalizando assim, a condição de Dirac. A primeira delas, publicada em 1960, apresenta uma condição que, assim como Dirac, utiliza apenas o grau dos vértices. Este resultado é o clássico teorema de Ore [18].

Observe que a condição de Ore (teorema 4) é inspirada na demonstração do teorema de Dirac (teorema 3). Note que a hipótese $g(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo $v \in V$ é usada na prova do teorema de Dirac somente para mostrar que $g(u) + g(v) \geq n$, onde $G' = G + uv$. Portanto esta hipótese pode ser substituída por $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes u, v , obtendo:

3.1 Teorema de Ore

Teorema 4 (Ore). *Seja G um grafo conexo de ordem n , $n \geq 3$. Se $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, então o grafo G é Hamiltoniano.*

Exemplo 13. A figura 3.1 mostra um grafo de ordem 5, que satisfaz a condição de Ore, isto é, para quaisquer vértices não adjacentes u e v , $g(u) + g(v) \geq 5$. Logo, pelo teorema de Ore, o tal grafo é Hamiltoniano. No entanto, $g(v_4) = 2 < \frac{5}{2}$, logo o grafo não satisfaz a condição de Dirac.

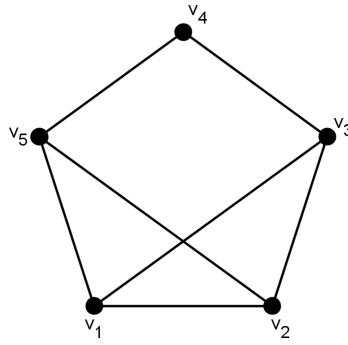


Figura 3.1: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz a condição de Dirac.

No entanto, é imediato concluir que todo grafo que satisfaz a condição de Dirac também satisfaz a condição de Ore, isto é, o teorema de Dirac é um corolário do teorema de Ore.

De fato, considere um grafo G de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V$. Tome dois vértices não adjacentes quaisquer, digamos $u, v \in V$, logo

$$g(u) + g(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n,$$

e portanto, pelo teorema de Ore, G é Hamiltoniano.

No entanto, vê-se claramente que nem todo grafo Hamiltoniano satisfaz a condição de Ore, como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 14. O grafo da figura 3.2 é um grafo de ordem 5. Os vértices v_1 e v_3 são distintos e não adjacentes e $g(v_1) + g(v_3) = 2 + 2 < 5$, logo o grafo não satisfaz a condição de Ore. No entanto, tem ciclos Hamiltonianos, por exemplo, $C = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1$.

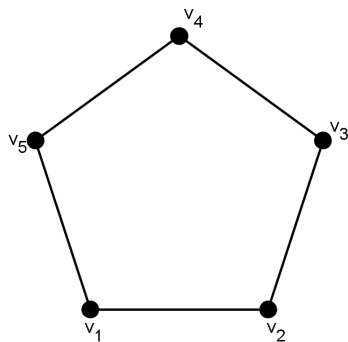


Figura 3.2: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz a condição de Ore.

Este exemplo ilustra como a condição de Ore não é necessária para um grafo conter um ciclo Hamiltoniano. Consequentemente, a condição de Dirac também não é necessária.

3.2 Teoremas de Rahman e Kaykobad

Em 2005, Rahman e Kaykobad [20], propuseram dois novos teoremas que fornecem condições suficientes para um grafo ter um caminho ou um ciclo Hamiltoniano. Estes novos resultados baseiam-se nas propriedades estruturais não só dos graus dos vértices mas também no comprimento do caminho mínimo entre dois vértices não adjacentes. Sendo assim, estas novas condições suficientes são generalizações da condição de Ore, como veremos mais a frente.

Abaixo, enunciamos os dois teoremas propostos por Rahman e Kaykobad.

Teorema 5 (Rahman e Kaykobad). *Seja G um grafo conexo de ordem n e P um caminho máximo em G de comprimento k com extremos u e v . Então as seguintes afirmações podem ser feitas:*

- (i) *Se $\delta(u, v) = 1$, então P é um caminho Hamiltoniano contido num ciclo Hamiltoniano;*
- (ii) *Se $\delta(u, v) \geq 3$, então $g_P(u) + g_P(v) \leq k - \delta(u, v) + 2$;*
- (iii) *Se $\delta(u, v) = 2$, então $g_P(u) + g_P(v) \leq k$ ou P é um caminho Hamiltoniano e existe um ciclo Hamiltoniano em G .*

Teorema 6 (Rahman e Kaykobad). *Seja G um grafo conexo de ordem n . Se $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, então G tem um caminho Hamiltoniano.*

Antes de demonstrá-los iremos provar um lema que será necessário para a demonstração dos mesmos. Neste lema diremos que um caminho P está contido num ciclo C se P for um subgrafo de C .

Lema 7. *Seja G um grafo conexo de ordem n e P um caminho máximo em G . Se P está contido num ciclo, então P é um caminho Hamiltoniano.*

Demonstração. Suponha que o caminho máximo $P = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ esteja contido num ciclo $C = v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, v_0$, onde $u = v_0$ e $v = v_k$. Observe que $V(C) = V(P)$, caso contrário, existiria um caminho P' de comprimento $k + 1$, contrariando a hipótese de P ser um caminho máximo.

Suponha por absurdo que P não é um caminho Hamiltoniano, isto é, $k < n - 1$. Como G é conexo, deve existir alguma aresta xy tal que $x \in V(C) = V(P)$ e $y \in V(G) \setminus V(C)$. Seja $x = v_i$. Então existe um caminho $P' = y, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k, v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ de comprimento $k + 1$, mas isto contradiz o fato de P ser um caminho máximo em G . \square

Observe que na demonstração do lema acima P é um caminho Hamiltoniano contido num ciclo. Assim, conclui-se que o grafo G , que contém o caminho P , é Hamiltoniano.

Abaixo segue a demonstração do teorema 5.

Observe que a ideia, utilizada na demonstração do item (iii) do resultado anterior, de encontrar pelo menos um par de arestas se cruzando é análoga a usada na demonstração do teorema de Dirac.

Como consequência imediata, temos:

Corolário 8. *Seja G um grafo conexo de ordem n e P um caminho máximo em G de comprimento $k < n - 1$ com extremos u e v . Então $g_P(u) + g_P(v) \leq k - \delta(u, v) + 2$.*

Demonstração. Se $k < n - 1$, então P não é um caminho Hamiltoniano. Consequentemente, pelo item (i) do teorema 5, tem-se que $\delta(u, v) > 1$.

Se $\delta(u, v) = 2$, então pelo item (iii) do teorema 5 temos que $g_P(u) + g_P(v) \leq k$, mas $k = k - 2 + 2 = k - \delta(u, v) + 2$, portanto $g_P(u) + g_P(v) \leq k - \delta(u, v) + 2$

Se $\delta(u, v) \geq 3$, então do item (ii) temos $g_P(u) + g_P(v) \leq k - \delta(u, v) + 2$. □

Abaixo segue a demonstração do teorema 6.

Demonstração. Suponha que G é um grafo conexo de ordem n tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$.

Suponha por absurdo que G não contém um caminho Hamiltoniano.

Seja $P = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k$, onde $u = u_0$ e $v = u_k$ um caminho máximo em G . Assim, $k \leq n - 2$ e $\delta(u, v) \leq k$.

Observe que:

$$\begin{aligned} g(u) + g(v) + \delta(u, v) &= g_P(u) + g_{\overline{P}}(u) + g_P(v) + g_{\overline{P}}(v) + \delta(u, v). \\ &= g_P(u) + g_P(v) + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) + \delta(u, v). \end{aligned}$$

Do corolário 8, temos:

$$\begin{aligned} &\leq (k - \delta(u, v) + 2) + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) + \delta(u, v) \\ &\leq k + 2 + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) \\ &\leq n - 2 + 2 + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) \\ &\leq n + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) \end{aligned}$$

Mas, por hipótese, $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$, logo

$$n + 1 \leq n + g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v) \Rightarrow 1 \leq g_{\overline{P}}(u) + g_{\overline{P}}(v).$$

Então existe uma aresta xy tal que $x \in \{u, v\}$ e $y \in V(G) \setminus V(P)$, mas isto significa que existe um caminho P' tal que $|P'| > |P|$, onde $P' = P + xy$. Absurdo, pois P é um caminho máximo. □

Exemplo 15. Como já vimos no exemplo 14, o grafo apresentado na figura 3.2 não satisfaz a condição de Ore. Porém, observe que $g(v) = 2$ para todo vértice do grafo e que

$\delta(u, v) = 2$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$. Assim, $g(u) + g(v) + \delta(u, v) = 2 + 2 + 2 \geq 5 + 1$, para todo par de vértices não adjacentes. E, pelo teorema 6, o grafo tem um caminho Hamiltoniano. De fato, $P = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ é um tal caminho. Como $\delta(v_5, v_1) = 1$, temos, pelo item (i) do teorema 5, que o caminho P está contido num ciclo Hamiltoniano e, portanto, o grafo é Hamiltoniano.

A partir deste exemplo pode-se pensar na seguinte questão: será que todo grafo que satisfaz a condição de Ore também satisfaz a condição de Rahman e Kaykobad, isto é, o teorema de Ore pode ser demonstrado a partir do teorema de Rahman e Kaykobad? A resposta para esta pergunta é sim, como veremos abaixo. Porém, para demonstrarmos este fato precisaremos do seguinte lema:

Lema 9. *Seja G um grafo conexo de ordem n . Se $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, então $\delta(u, v) = 2$*

Demonstração. Seja G um grafo conexo de ordem n . Como $g(u) + g(v) \geq n$ e $\delta(u, v) \geq 1$ para todo par de vértices $u, v \in V$, então $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ logo, pelo teorema 6, G possui um caminho Hamiltoniano P . Considere $V(G) = \{w_1, w_2, \dots, w_{|V(P)|-1}, w_{|V(P)|}\}$, onde $v = w_1$ e $u = w_{|V(P)|}$. Considere também $S = \{j \mid vw_j \in E(G)\}$ e $T = \{j \mid w_ju \in E(G)\}$. Como $S \cup T \subset \{2, \dots, |V(P)| - 1\}$, então $|S \cup T| \leq |V(P)| - 2$. Por outro lado, $|S| = g_P(v)$, $|T| = g_P(u)$ e, por hipótese, $g_P(u) + g_P(v) \geq |V(P)|$.

Assim,

$$\begin{aligned} |S \cap T| &= |S| + |T| - |S \cup T| \\ &= g_P(u) + g_P(v) - |S \cup T| \\ &\geq g_P(u) + g_P(v) - (|V(P)| - 2) \\ &\geq |V(P)| - |V(P)| + 2 \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

Consequentemente S e T possuem índices em comum de forma a existir arestas ux e xv , onde $x \in V(G)$. A existência destas arestas implicam um $u - v$ caminho de comprimento 2. Como u e v são não adjacentes o resultado segue. \square

Teorema 10. *Seja G um grafo. Se G satisfaz a condição de Ore, então satisfaz a condição de Rahman e Kaykobad.*

Demonstração. Seja G um grafo de ordem n tal que $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$. Pelo lema 9, temos que $\delta(u, v) = 2$. Assim,

$$g(u) + g(v) \geq n > n + 1 - \delta(u, v), \text{ então } g(u) + g(v) + \delta(u, v) > n + 1.$$

Logo, pelo teorema 6, existe um caminho Hamiltoniano P em G . Sejam x e y os extremos de P . Se $\delta(x, y) = 1$ então pelo item (i) do teorema 5, P está contido num ciclo

Hamiltoniano e portanto G é Hamiltoniano. Por outro lado, se $\delta(x, y) = 2$, como $g(u) + g(v) \geq n > n - 1$, pelo item (iii) do teorema 5, P está contido num ciclo Hamiltoniano e, portanto, G é Hamiltoniano. \square

Sabemos que o teorema 5 de Rahman e Kaykobad, não garante a existência de ciclos Hamiltonianos em um grafo, garante apenas, a existência de um caminho Hamiltoniano. Porém, será que um grafo que satisfaz as hipóteses do teorema 5 realmente não é Hamiltoniano? A resposta para esta pergunta é realmente não, como pode ser visto no exemplo abaixo.

Exemplo 16. Observe os dois grafos ilustrados na figura 3.4. É fácil verificar que ambos satisfazem as hipóteses do teorema 5, pois $\delta(u, v) = 2$ para todo par de vértices não adjacentes em cada um dos grafos. Logo, possuem um caminho Hamiltoniano. Porém, pelo teorema 2 (condição necessária para um grafo ser Hamiltoniano) sabemos que ambos os grafos não são Hamiltonianos.

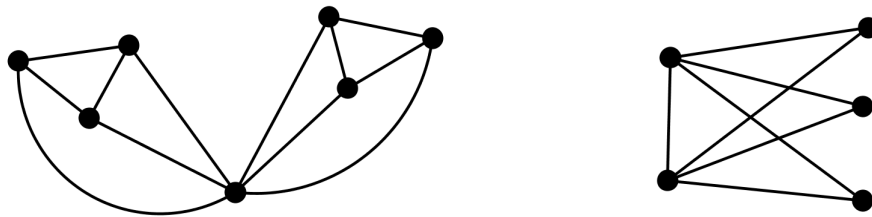


Figura 3.4: Grafos que satisfazem a condição de Rahman e Kaykobad.

3.3 Teorema de Li

O teorema 6 apresentado por Rahman e Kaykobad nos mostra apenas uma condição suficiente para dizer se um grafo admite um caminho Hamiltoniano. Assim, é natural pesquisas serem feitas tentando enfraquecer as hipóteses do teorema e garantindo os mesmos resultados, como por exemplo: não ser necessária a verificação da condição estipulada no teorema para todos os vértices não adjacentes de um grafo, ou até mesmo, a busca por condições similares de forma a garantir a propriedade de um mesmo grafo ser Hamiltoniano.

Baseando-se nos teoremas desenvolvidos por Rahman e Kaykobad [20] e no artigo de Benhocine e Wojda [1], Li publicou um artigo em 2006 onde enuncia um teorema similar que garante a existência de um ciclo Hamiltoniano num grafo a menos que pertença a uma das famílias de grafos \mathcal{C}_n ou \mathcal{D}_n , definidas anteriormente.

Para a demonstração do teorema de Li precisamos do seguinte resultado:

Teorema 11. *Seja G um grafo 2-conexo de ordem n , com $n \geq 3$ e $\alpha(G) \leq \frac{n}{2}$. Se $\max\{g(u), g(v)\} \geq \frac{(n-1)}{2}$ para todo par de vértices $u, v \in V$ com $\delta(u, v) = 2$, então G é Hamiltoniano ou $G \in \mathcal{A}_n \cup B$.*

O grafo $B = (V, E)$ enunciado no teorema acima é um grafo definido da seguinte forma:

$V(B) = \{u_1, u_2, \dots, u_8, u_9\}$ e $E(B) = \{u_1u_2, u_1u_3, u_2u_3, u_2u_4, u_2u_7, u_3u_6, u_3u_8, u_4u_5, u_4u_6, u_4u_7, u_5u_6, u_6u_8, u_7u_8, u_7u_9, u_8u_9\}$.

A figura 3.5 ilustra o grafo B .

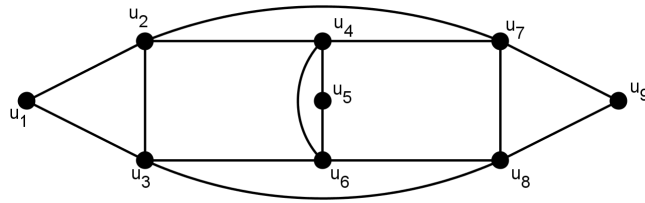


Figura 3.5: Grafo B .

Este teorema foi proposto por Benhocine e Wojda em 1987 [1]. Optamos por omitir a demonstração deste teorema, pois a mesma foge do escopo deste trabalho.

Teorema 12 (Li). *Seja G um grafo conexo de ordem n . Se $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes u e v , então G é Hamiltoniano ou $G \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$.*

Demonstração. Primeiramente observe que as hipóteses do teorema de Li são análogas ao do teorema de Rahman e Kaykobad. Seja G um grafo conexo de ordem n tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para cada par de vértices não adjacentes u e v . Observe que $G \notin \mathcal{A}_n \cup B$. De fato, pois existe pelo menos um par de vértices não adjacentes u e v em \mathcal{A}_n e em B tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) < n + 1$, contrariando a hipótese.

Se todo par de vértices de G são adjacentes, então G é completo e portanto é Hamiltoniano. Assim podemos assumir que existe um par de vértices não adjacentes em G , digamos r e t . Como r e t são não adjacentes então $\delta(r, t) \geq 2$. Seja $P = r, s_1, s_2, \dots, s_k, t$ o menor caminho entre r e t . Então $k \geq 1$ e $\delta(r, s_2) = 2$. Logo existe um par de vértices não adjacentes em G tal que a distância entre eles é 2. Observe que a mesma conclusão poderia ser feita caso $\delta(r, t) = 2$.

Entretanto, para cada par de vértices u e v em G com $\delta(u, v) = 2$ temos $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$, logo $g(u) + g(v) \geq n - 1$ e, então, $\max\{g(u), g(v)\} \geq \frac{n-1}{2}$.

Assim, pelo teorema 11 basta mostrar que se G não for 2-conexo, então $G \in \mathcal{C}_n$ e se $\alpha(G) > \frac{n}{2}$ então $G \in \mathcal{D}_n$. De fato, um grafo que satisfaz as hipóteses do teorema 11 será Hamiltoniano ou da família \mathcal{A}_n ou será o grafo B , porém mostramos que o grafo G , que satisfaz as hipóteses do teorema de Li, não é um grafo da família \mathcal{A}_n e também não é o

grafo B . Logo, se o grafo G não satisfizer qualquer uma das duas outras hipóteses do teorema 11, a saber: 2-conexo e $\alpha(G) > \frac{n}{2}$ então mostraremos que G será um grafo da família \mathcal{C}_n ou da \mathcal{D}_n .

Primeiramente, provaremos que se G não é 2-conexo então $G \in \mathcal{C}_n$. Como G é conexo, existe um vértice, digamos x em G tal que o grafo $G[V(G) \setminus \{x\}]$ é desconexo. Sejam G_i as componentes conexas em $G[V(G) \setminus \{x\}]$ e n_i o número de vértices em G_i $1 \leq i \leq l$ e $l \geq 2$.

Obviamente, existe um vértice, digamos u_i em $V(G_i)$ tal que $u_i x \in E(G)$ onde $i = 1, 2$. De fato, caso contrário o grafo G seria desconexo, contrariando nossa suposição. Então $\delta(u_1, u_2) = 2$ e, conseqüentemente:

$$\begin{aligned} n + 1 &\leq g(u_1) + g(u_2) + 2 \\ &\leq n_1 + n_2 + 2 \\ &\leq n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_l + 2 = n + 1 \end{aligned}$$

Então $g(u_1) = n_1$, $g(u_2) = n_2$ e $n_3 = n_4 = \dots = n_l = 0$. Portanto u_i é adjacente a todos os vértices em $V(G_i) \cup \{x\}$, com $i = 1, 2$ e $n = n_1 + n_2 + 1$.

Considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u \in V(G_1) \mid ux \in E\} \\ V_1 &= \{u \in V(G_1) \mid ux \notin E\} \\ U_2 &= \{u \in V(G_2) \mid ux \in E\} \\ V_2 &= \{u \in V(G_2) \mid ux \notin E\} \end{aligned}$$

É claro que $U_i \neq \emptyset$, pois $u_i \in U_i$, $i = 1, 2$.

Seja u' um vértice em $U_1 \setminus \{u_1\}$, se $U_1 \setminus \{u_1\} \neq \emptyset$. Assim $\delta(u', u_2) = 2$ e, conseqüentemente:

$$n + 1 \leq g(u') + g(u_2) + 2 \leq n_1 + n_2 + 2 = n + 1.$$

Então $g(u') = n_1$ e u' é exatamente adjacente a todos os vértices em $V(G_1) \cup \{x\}$.

Simetricamente, se $U_2 \setminus \{u_2\} \neq \emptyset$ e u'' é um vértice em $U_2 \setminus \{u_2\}$, temos $g(u'') = n_2$ e u'' é exatamente adjacente a todos os vértices em $V(G_2) \cup \{x\}$.

Seja v' um vértice qualquer em V_1 se $V_1 \neq \emptyset$. Assim $\delta(v', u_2) = 3$ e, conseqüentemente:

$$n + 1 \leq g(v') + g(u_2) + 3 \leq n_1 - 1 + n_2 + 3 = n + 1.$$

Então $g(v') = n_1 - 1$ e v' é exatamente adjacente a todos os vértices em $V(G_1)$.

Simetricamente, se $V_2 \neq \emptyset$ e v'' é um vértice em V_2 , temos $g(v'') = n_2 - 1$ e v'' é exatamente adjacente a todos os vértices em $V(G_2)$.

Conseqüentemente $G \in \mathcal{C}_n$.

Em seguida, provaremos que se $\alpha(G) > \frac{n}{2}$ então $G \in \mathcal{D}_n$. Observe inicialmente que $\alpha(G) > \frac{n}{2}$ implica $2\alpha(G) > n$. Assim $2\alpha(G) \geq n + 1$. Seja $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{\alpha(G)}\}$ o

conjunto independente máximo em G . Como G é conexo, $g(w_i) \geq 1$, onde $1 \leq i \leq \alpha(G)$. Além disto, existe um par de vértices, w_i e w_j tal que $\delta(w_i, w_j) = 2$, onde $1 \leq i \neq j \leq \alpha(G)$. De fato, caso contrário, $Adj(w_i) \cap Adj(w_j) = \emptyset$ para todo $1 \leq i \neq j \leq \alpha(G)$ e teríamos a seguinte contradição:

$$n < 2\alpha(G) = 2|W| \leq |W| + g(w_1) + g(w_2) + \dots + g(w_{\alpha(G)}) \leq n$$

Como $\delta(w_i, w_j) = 2$, temos:

$$\begin{aligned} n + 1 &\leq g(w_i) + g(w_j) + 2 \leq 2(n - \alpha(G)) + 2 \\ &\leq 2n - 2\alpha(G) + 2 \leq 2n - (n + 1) + 2 = n + 1 \end{aligned}$$

Logo $g(w_i) = g(w_j) = n - \alpha(G)$ e $2\alpha(G) = n + 1$ e, conseqüentemente, ambos w_i e w_j são adjacentes a cada vértice em $V(G) \setminus W$. Seja w_k um vértice em $W \setminus \{w_i, w_j\}$. Como $g(w_k) \geq 1$ então $\delta(w_i, w_k) = 2$. Assim

$$n + 1 \leq g(w_i) + g(w_k) + 2 \leq 2(n - \alpha(G)) + 2 \leq n + 1.$$

Então $g(w_k) = n - \alpha(G)$ e w_k é adjacente a cada vértice em $V(G) \setminus W$. Conseqüentemente $G \in \mathcal{D}_n$. □

Obviamente, o teorema proposto por Li é uma generalização do teorema 6, proposto por Rahman e Kaykobad, já que o mesmo, usando as mesmas hipóteses, afirma que todo grafo satisfazendo estas hipóteses é Hamiltoniano exceto para duas famílias de grafos, as quais são muito bem caracterizadas.

Desta forma, é claro que o teorema de Ore também pode ser demonstrado a partir do teorema de Li. Como já sabemos que o teorema 6 implica no teorema de Ore, basta demonstrar que o teorema de Li implica no teorema 6. Para isso, suponha um grafo G satisfazendo as hipóteses do teorema 6, assim pelo teorema de Li, G é Hamiltoniano ou G pertence a uma das famílias de grafos \mathcal{C}_n ou \mathcal{D}_n . Em qualquer um dos casos, temos que G contém um caminho Hamiltoniano, como queríamos demonstrar.

Exemplo 17. O grafo da figura 3.6 é um grafo de ordem 8. Os vértices u e v são não-adjacentes e $g(u) + g(v) + \delta(u, v) = 2 + 2 + 2 < 8 + 1$. Assim, o grafo não satisfaz a condição indicada no teorema de Li. No entanto é Hamiltoniano.

Este exemplo ilustra como a condição de Li também não é necessária para que o grafo tenha um ciclo Hamiltoniano. Conseqüentemente, a condição de Rahman e Kaykobad também não é necessária.

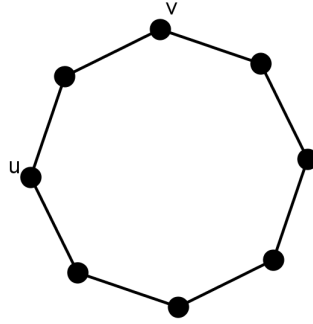


Figura 3.6: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz a condição de Li.

3.4 Teoremas de Mehedy, Hasan e Kaykobad

No teorema 6, Rahman e Kaykobad consideraram o caminho de menor comprimento entre um par de vértices não adjacentes com a soma dos graus destes vértices para estabelecer uma condição suficiente para um grafo ter um caminho Hamiltoniano. Após a publicação deste teorema, Kaykobad, em conjunto com Hasan e Mehedy, desenvolveram pesquisas na busca por condições similares de modo a garantir que um grafo admitisse um ciclo Hamiltoniano. Assim, logo em seguida ao trabalho apresentado por Li, mais precisamente em 2007, os autores publicaram um artigo onde estenderam os resultados obtidos por Rahman e Kaykobad para grafos 2-conexos garantindo ciclos Hamiltonianos quando os extremos de um caminho Hamiltoniano distam de 3, isto é, o comprimento do menor caminho entre os extremos do caminho Hamiltoniano é igual a 3. Este e outro resultado auxiliar será mostrado em seguida.

Teorema 13 (Mehedy, Hasan e Kaykobad). *Seja G um grafo 2-conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$. Então os extremos de qualquer caminho Hamiltoniano em G distam no máximo 3.*

Demonstração. A existência de um caminho Hamiltoniano P em G é garantida pelo teorema 6. Seja $P = u_1, u_1, \dots, u_{n-1}, u_n$, onde $u_1 = u$ e $u_n = v$. Suponha por absurdo que $\delta(u, v) \geq 4$.

Temos 2 casos a considerar, dependendo da existência de arestas que se cruzam $uu_r, vv_s \in E$ com $r > s$.

Caso I: Considere que G não possua arestas se cruzando $uu_r, vv_s \in E$ com $r > s$.

Observe que no mínimo $(\delta(u, v) - 3)$ vértices dentre os $(n - 2)$ vértices do grafo não são adjacentes a u ou a v . Assim,

$$g(u) + g(v) \leq (n - 2) - (\delta(u, v) - 3) \tag{3.1}$$

Por outro lado, por hipótese, temos:

$$g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1, \quad \forall uv \notin E.$$

$$g(u) + g(v) \geq n + 1 - \delta(u, v) = n - 2 - (\delta(u, v) - 3) \quad (3.2)$$

De (3.1) e (3.2), temos:

$$g(u) + g(v) = n - 2 - (\delta(u, v) - 3)$$

Conseqüentemente, todos os vértices excetuando-se $(\delta(u, v) - 3)$ são adjacentes a u ou a v . Por outro lado, como G é 2-conexo, existe uma aresta do tipo $u_j u_k$ onde $1 < j < r$ e $s < k < n$, como mostra a figura 3.7. Assim existe um caminho $P' = u, u_j, u_k, v$ com $\delta(u, v) = 3$. Absurdo!

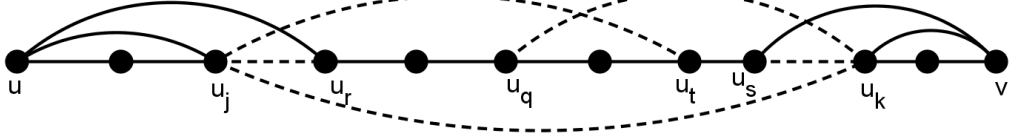


Figura 3.7: Grafo G que não possui arestas se cruzando uu_r, vu_s com $r > s$.

Também podemos ter arestas do tipo $u_j u_t$ e $u_k u_q$ tal que $1 < j < r < q < t < s < k < n$.

Seja z o número de vértices u_r e u_s que não são adjacentes nem a u e nem a v . Então $z = \delta(u, v) - 3$, isto é, $\delta(u, v) = z + 3$

Considere

$$P_1 = u, u_j, u_t, u_{t+1}, \dots, u_{s-1}, u_s, v,$$

$$P_2 = u, u_j, u_t, u_{t+1}, \dots, u_{q-1}, u_q, u_k, v \text{ e}$$

$$P_3 = u, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{q-1}, u_q, u_k, v$$

três caminhos distintos com extremos u e v .

Observe que $uu_j, u_j u_t, uu_r, u_s v, u_q u_k, u_k v \in E$. Então $\delta(u, u_j) = \delta(u_j, u_t) = \delta(u, u_r) = \delta(u_s, v) = \delta(u_q, u_k) = \delta(u_k, v) = 1$ e, portanto,

$$\delta(u, v) \leq 1 + 1 + 1 + 1 + \min\{|s - t|, |q - t|, |q - r|\},$$

mas $\min\{|s - t|, |q - t|, |q - r|\} \leq \lfloor \frac{z}{3} \rfloor$, logo $\delta(u, v) \leq 4 + \lfloor \frac{z}{3} \rfloor$. Mas isto contradiz $\delta(u, v) = z + 3$, absurdo.

Caso II: Agora consideraremos o caso que G possua arestas se cruzando $ur, vs \in E$ com

$r > s$.

Assumiremos que $g(u) = 2$ e $uj, ur \in E$, onde u_r é o vértice mais próximo de v conectado a u , tal que $\delta(u, v) \geq 4$, como mostra a figura 3.8.

Note que esta é a única maneira pela qual u e v podem ter graus máximos no total pois, caso contrário, para cada par de arestas que se cruzam $uu_r, vv_s \in E$ com $r > s$, teremos $(\delta(u, v) - 3)$ vértices não adjacentes a ambos u e v .

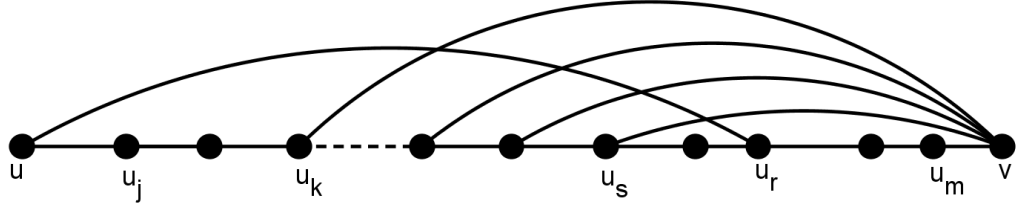


Figura 3.8: Grafo G que possui arestas se cruzando uu_r, vv_s com $r > s$.

Observe na figura 3.8 que entre os vértices j e k , s e r , r e m existem vértices não conectados nem a u e nem a v , logo $|k - j| - 1 = |r - s| - 1 = |m - r| - 1 = \delta(u, v) - 3$.

Então, teremos:

$$\begin{aligned} g(u) + g(v) &= n - 2 - 3(\delta(u, v) - 3) \\ g(u) + g(v) + \delta(u, v) &= n + 7 - 2\delta(u, v), \quad \text{como } \delta(u, v) \geq 4 \\ g(u) + g(v) + \delta(u, v) &= n + 7 - 2\delta(u, v) \leq n + 7 - 8 = n - 1 < n \end{aligned}$$

Mas isto contradiz a hipótese sobre G de $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$. \square

Note do teorema acima, que qualquer grafo G satisfazendo estas hipóteses, possui um caminho Hamiltoniano P tal que $\delta(u_0, u_k) \leq 3$, onde u_0 e u_k são os extremos deste caminho. É óbvio que se $\delta(u_0, u_k) = 1$, então G é Hamiltoniano. Se $\delta(u_0, u_k) = 2$, não podemos garantir a existência de ciclos Hamiltonianos pois G pode ser um grafo da família \mathcal{C}_n ou \mathcal{D}_n . Por fim, será mostrado no teorema abaixo, a existência de ciclos Hamiltonianos se $\delta(u_0, u_k) = 3$.

Teorema 14 (Mehedy, Hasan e Kaykobad). *Seja G um grafo 2-conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices u, v não adjacentes. Se G contém um caminho Hamiltoniano P tal que $\delta(u_0, u_k) = 3$, onde u_0 e u_k são os extremos deste caminho, então G é Hamiltoniano.*

Demonstração. Seja G um grafo 2-conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes u e v . Pelo teorema 12, G é Hamiltoniano ou $G \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$. Suponha então que G não é Hamiltoniano, logo $G \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$. Mas \mathcal{C}_n não é 2-conexo e para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in \mathcal{D}_n$ temos $\delta(u, v) = 2$. Absurdo, portanto G é Hamiltoniano. \square

Exemplo 18. O grafo apresentado na figura 3.9 não satisfaz a condição de Ore, pois $g(u_1) + g(u_6) < 8$. Porém, observe que $g(u_1) = g(u_6) = 3$ e $g(v) \geq 4$ para todo vértice $v \neq u_i$ com $i = 1, 6$ e que $\delta(u, v) \geq 2$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$. Assim, $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq 8 + 1$, para todo par de vértices não adjacentes. Além disso, o grafo é 2-conexo e contém o caminho Hamiltoniano $P = u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_8, u_7, u_6$, com $\delta(u_1, u_6) = 3$.

Logo, pelo teorema 14, o grafo é Hamiltoniano.

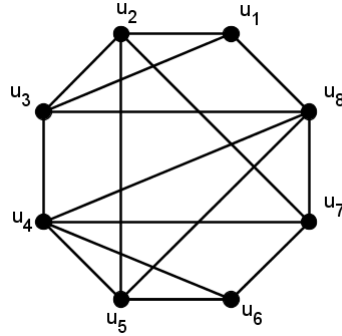


Figura 3.9: Grafo Hamiltoniano que não satisfaz a condição de Ore.

A condição derivada destes dois teoremas é obviamente mais forte que as condições de Li e de Rahman e Kaykobad já que necessita do grafo ser 2 conexo, ou seja, a condição de Hasan, Mehedy e Kaykobad é um caso particular das condições de Li e de Rahman e Kaykobad.

3.5 Teorema de Li, Li e Feng

Em paralelo aos trabalhos desenvolvidos por Li [14], Rahman e outros [17] e [20], Shengjia Li, Ruijuan Li e Jinfeng Feng [15] trabalharam sobre a condição de Ore e desenvolveram uma condição mais fraca para grafos 2-conexos. Descobriram que a redução no número de arestas necessárias pela condição proposta por Ore, não garantiria a existência de ciclos Hamiltonianos em todo grafo. Porém, os caracterizados como não Hamiltonianos pertenciam a uma das famílias de grafos descritas por Li [14].

Antes de apresentar este resultado iremos enunciar uma definição, um teorema que não demonstraremos (para a demonstração veja [11]) e também um lema que serão importantes na demonstração do teorema de Li, Li e Feng.

Definição 4. Seja C um ciclo em G . Um caminho P com extremos x e y é denominado de C -bypass se $|V(P)| \geq 3$ e $V(P) \cap V(C) = \{x, y\}$.

Teorema 15. *Seja G um grafo 2-conexo de ordem n e $c \in \mathbb{N}$, $3 \leq c \leq n$.*

Se $\max\{g(u), g(v)\} \geq \frac{c}{2}$, para todo par de vértices $u, v \in V$ com $\delta(u, v) = 2$, então G contém um ciclo de comprimento pelo menos c .

Lema 16. *Sejam $P = v_1, v_2, \dots, v_s$, com $s \geq 2$ e $Q = w_1, w_2, \dots, w_t$, com $t \geq 1$ dois caminhos disjuntos no grafo G . Se $g_P(w_1) + g_P(w_t) \geq |V(P)| + 2$, então Q pode ser inserido em P , isto é, $v_1, v_2, \dots, v_k, Q, v_{k+1}, \dots, v_s$ é um caminho em G , para algum $1 \leq k < s$.*

Demonstração. Sejam $P = v_1, v_2, \dots, v_s$, com $s \geq 2$ e $Q = w_1, w_2, \dots, w_t$, com $t \geq 1$ dois caminhos disjuntos no grafo G . Como $g_P(w_1) + g_P(w_t) \geq s + 2$, com $s \geq 2$, podemos observar que w_1 é adjacente a pelo menos dois vértices de P . Seja $Adj_P(w_1) = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_\alpha}\}$, com $i_1 < i_2 < \dots < i_\alpha$. Suponha por contradição que Q não pode ser inserido em P . Então w_t não é adjacente a $v_{i_1+1}, v_{i_2+1}, \dots, v_{i_{\alpha-1}+1}$. Mas isto implica $g_P(w_t) = s - (\alpha - 1) = s - \alpha + 1$. Logo, $g_P(w_1) + g_P(w_t) \leq s + 1$. \square

Observe que se $t = 1$, o lema acima, afirma que se $g_P(w_1) \geq \left\lceil \frac{|V(P)|}{2} \right\rceil + 1$, então w_1 pode ser inserido em P .

Agora iremos enunciar e demonstrar o teorema de Li, Li e Feng

Teorema 17 (Li, Li e Feng). *Seja G um grafo 2-conexo de ordem n , com $n \geq 3$. Se $g(u) + g(v) \geq n - 1$ para todo par de vértices $u, v \in V$ com $\delta(u, v) = 2$, então G é Hamiltoniano ou $G \in \mathcal{D}_n$.*

Demonstração. Seja G um grafo satisfazendo as hipóteses do teorema. É óbvio que se $n = 3$ ou $n = 4$, então G é Hamiltoniano. Sendo assim, suponha $n \geq 5$. Mostraremos que se G não é Hamiltoniano, então n é ímpar e $G \in \mathcal{D}_n$.

Tome $c = n - 1$. Como $g(u) + g(v) \geq n - 1 = c$ para todo par de vértices não adjacentes u e v com $\delta(u, v) = 2$, então $\max\{g(u), g(v)\} \geq \frac{n-1}{2} = \frac{c}{2}$. Logo, pelo teorema 15, G contém um ciclo de comprimento $n - 1$, denotado por $C = u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1$. seja $\{v\} = V - V(C)$. Como G é 2-conexo, existe um C -bypass. Seja $P = v_1, v, v_2$ o menor C -bypass entre todos os C -bypasses em G . Sem perda de generalidade assuma que $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_\gamma$

Suponha G não Hamiltoniano. Então temos $\gamma \geq 3$. De fato, caso contrário, se $\gamma = 2$ teríamos o ciclo Hamiltoniano $C' = u_1, v, u_2, \dots, u_{n-1}, u_1$. Da escolha de P , veja que $v \notin Adj(u_i)$ para $2 \leq i \leq \gamma - 1$. Seja $P' = u_2, u_3, \dots, u_{\gamma-1}$ e $P'' = u_\gamma, u_{\gamma+1}, \dots, u_{n-1}, u_1$. Consideraremos dois casos.

Caso I: $\gamma \geq 4$.

De $\delta(u_2, v) = \delta(u_{\gamma-1}, v) = 2$, temos:

$$\min\{g(u_2) + g(v), g(u_{\gamma-1}) + g(v)\} \geq n - 1 \quad (3.3)$$

Como P é o menor entre todos os C -bypasses temos $|V(P'')| \geq \gamma \geq 4$ e a cada vértice adjacente a v existem pelo menos $\gamma - 2$ vértices não adjacentes a v , logo

$$g(v) \leq (n - 1) - (\gamma - 2)g(v) \Rightarrow (\gamma - 1)g(v) \leq (n - 1) \Rightarrow g(v) \leq \frac{n - 1}{\gamma - 1}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g(v) &= g_{P''}(v) = g_P(v) \leq \frac{n - 1}{\gamma - 1} = \frac{|V(P'')| + (\gamma - 2)}{\gamma - 1} \\ &\leq \frac{|V(P'')|}{2} - \frac{(\gamma - 3)(|V(P'')| - 2) - 2}{2(\gamma - 1)} \\ &\leq \frac{|V(P'')|}{2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Entretanto,

$$g(u_j) = g_{P'}(u_j) + g_{P''}(u_j) \leq (|V(P')| - 1) + g_{P''}(u_j) \text{ para } j = 2, \gamma - 1 \quad (3.5)$$

De (3.3), (3.4) e (3.5), temos:

$$\begin{aligned} 2(n - 1) &\leq g(u_2) + g(v) + g(u_{\gamma-1}) + g(v) \\ &\leq 2(|V(P')| - 1) + g_{P''}(u_2) + g_{P''}(u_{\gamma-1}) + 2 \left(\frac{|V(P'')|}{2} \right) \\ &\leq 2n - 4 - |V(P'')| + g_{P''}(u_2) + g_{P''}(u_{\gamma-1}) \end{aligned}$$

Logo, $g_{P''}(u_2) + g_{P''}(u_{\gamma-1}) \geq |V(P'')| + 2$. Assim, pelo lema 16 o caminho $P' = u_2, u_3, \dots, u_{\gamma-1}$ pode ser inserido em P'' . Então obtemos um ciclo Hamiltoniano em G , uma contradição.

Caso II: $\gamma = 3$.

Como u_2 não pode ser inserido no ciclo $u_1, v, u_3, \dots, u_{n-1}, u_1$ e v também não pode ser inserido no ciclo C , teremos $\max\{g(u_2), g(v)\} \leq \frac{n-1}{2}$. De fato, caso contrário, u_2 ou v poderiam ser inseridos nos respectivos ciclos e, portanto, teríamos um ciclo Hamiltoniano.

Por outro lado, $g(u_2) + g(v) \geq n - 1$, logo $g(u_2) = g(v) = \frac{n-1}{2}$ e, então, n é ímpar. Observe que $Adj_G(u_2) = \{u_1, u_3, u_5, \dots, u_{n-2}\} = Adj_G(v)$. Da mesma forma $Adj_G(u_{2k}) = Adj_G(u_2)$, para todo $k = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$.

Considere $G'(V', E')$ onde $V' = \{u_1, u_3, u_5, \dots, u_{n-2}\}$ e $E' = \{u_i u_j \mid i, j = 1, 3, 5, \dots, n-2, \text{ com } i \neq j\}$, observe que G' é um grafo completo com $\frac{n-1}{2}$ vértices.

Portanto, $G = G' \vee (K_{\frac{n-1}{2}}^c + \{v\}) \in \mathcal{D}_n$. □

Observe que o teorema de Li, Li e Feng fecha uma lacuna nas observações que havíamos

feito no teorema de Mehedy, Hasan e Kaykobad, pois através da demonstração dos teoremas 13 e 14 não tínhamos como garantir a existência de ciclos Hamiltonianos em um grafo que satisfaz a condição de Mehedy, Hasan e Kaykobad quando $\delta(u, v) = 2$.

É fácil ver que a condição de Li, Li e Feng é mais fraca que a condição de Ore, pois diferentemente da condição de Ore, onde temos que verificar a soma dos graus de todos os pares de vértices não adjacentes, a condição de Li, Li e Feng permite verificar apenas a soma dos graus dos pares de vértices que distam de 2. O próximo exemplo mostra que existem grafos que são Hamiltonianos pelo teorema de Li, Li e Feng, porém não é possível afirmar a existência de ciclos Hamiltonianos neste grafo pelo teorema de Ore.

Exemplo 19. O grafo da figura 3.10 é 2-conexo e é um grafo de ordem 7. Não é difícil checar que $g(u) + g(v) \geq 6$ para todo par de vértices $u, v \in V$ com $\delta(u, v) = 2$ e $G \notin \mathcal{D}_n$. Assim, pelo teorema de Li, Li e Feng, o grafo é Hamiltoniano. Por outro lado observe que os vértices v_3 e v_5 são não adjacentes e $g(v_3) + g(v_5) < 7$, logo não satisfaz a condição de Ore.

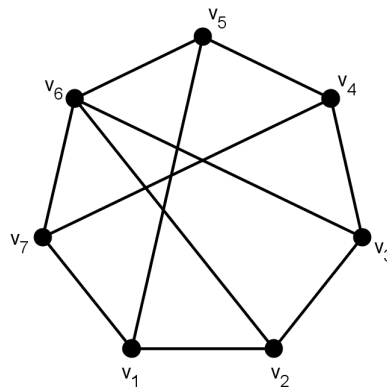


Figura 3.10: Grafo que satisfaz a condição de Li, Li e Feng mas não satisfaz a de Ore.

3.6 Teorema de Hasan, Kaykobad, Lee e Lee

Em 2009, Hasan, Kaykobad, Lee e Lee, motivados pelos trabalhos, de Rahman e Kaykobad [20], Li [14], Mehedy et al. [17], Feng et al. [15], propuseram um teorema que unificasse todos os resultados obtidos anteriormente. Este teorema analisa a existência de ciclos Hamiltonianos num grafo G apenas acrescentando, as hipóteses já estabelecidas por Rahman e Kaykobad no teorema 6, um conceito já bastante conhecido em Teoria dos Grafos, o *diâmetro* de um grafo G .

Assim, baseando-se nas hipóteses estabelecidas no teorema 6, por Rahman e Kaykobad, e no diâmetro de um grafo, Hasan, Kaykobad, Lee e Lee propuseram um teorema que garante a existência de ciclos Hamiltonianos num grafo qualquer a menos que pertença a uma de quatro famílias de grafos definidas anteriormente: \mathcal{C}_n , \mathcal{C}'_n , \mathcal{C}''_n e \mathcal{D}_n .

Teorema 18 (Hasan, Kaykobad, Lee e Lee). *Seja G um grafo conexo de ordem n . Se $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$, então:*

(i) $diam(G) \leq 4$;

(ii) Se $diam(G) = 4$, então $G \in \mathcal{C}_n$;

(iii) Se $diam(G) = 3$ então $\begin{cases} G \text{ é Hamiltoniano, caso } G \text{ seja 2-conexo;} \\ G \in \mathcal{C}'_n, \text{ caso } G \text{ não seja 2-conexo;} \end{cases}$

(iv) Se $diam(G) = 2$, então $\begin{cases} G \text{ é Hamiltoniano, caso } G \text{ seja 2-conexo e } n \text{ par;} \\ G \in \mathcal{D}_n, \text{ caso } G \text{ seja 2-conexo e } n \text{ ímpar;} \\ G \in \mathcal{C}''_n, \text{ caso } G \text{ não seja 2-conexo;} \end{cases}$

(v) Se $diam(G) = 1$, então G é completo e, portanto, Hamiltoniano.

Demonstração. Seja G um grafo conexo com n vértices tal que para todo par de vértices não-adjacentes $u, v \in V$ temos $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$. Então, pelo teorema 12, G é Hamiltoniano ou $G \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{D}_n$. Assim, pelo teorema 13 e do diâmetro dos grafos da família \mathcal{C}_n seguem os itens (i), (ii) e (v).

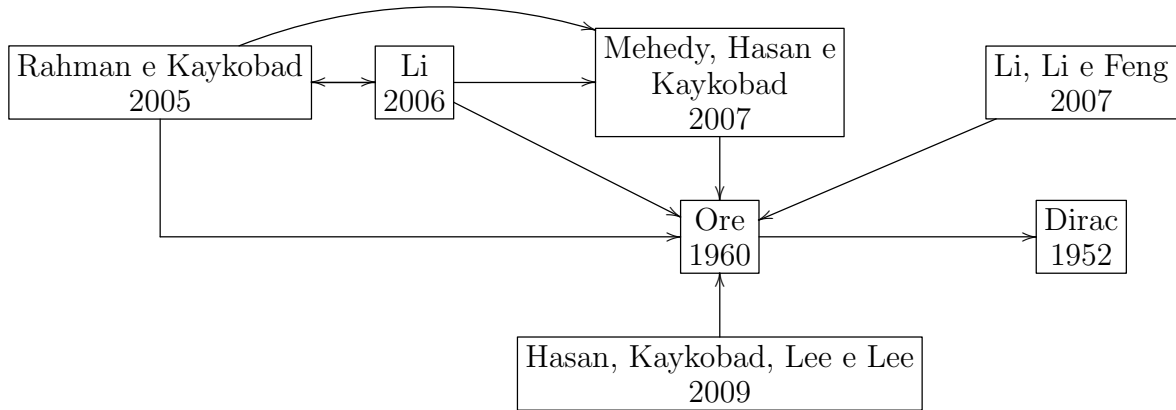
(iii) Se $diam(G) = 3$, o grafo é Hamiltoniano ou da classe \mathcal{C}_n . Se o grafo for 2-conexo, ele não pertence a família \mathcal{C}_n , logo é Hamiltoniano. Se o grafo não for 2-conexo, como $diam(G) = 3$, então algum vértice de um dos grafos completos de \mathcal{C}_n não será adjacente ao vértice w de \mathcal{C}_n , caso contrário, $diam(G) = 2$. Por outro lado se existir algum vértice $u \in K_p$ e $v \in K_q$ tal que as arestas $uw, vw \notin E(\mathcal{C}_n)$, então $diam(G) = 4$, contrariando a hipótese, logo $G \in \mathcal{C}'_n$.

(iv) Segue imediatamente dos teoremas 12 e 17. □

Podemos perceber, dos teoremas 6, 12, 14, 17 e 18, que seus autores, na busca para elaborar condições suficientes para verificar se um grafo admite um ciclo Hamiltoniano, consideraram como hipóteses, o comprimento do caminho mínimo entre dois vértices não adjacentes. Podemos ver nos exemplos ao longo deste capítulo que a introdução desta propriedade estrutural implica num maior tempo de processamento de um algoritmo para testar as hipóteses destes teoremas. De fato, para testar se um determinado grafo é Hamiltoniano, usando o Teorema de Ore, é necessário verificar apenas o grau dos vértices não adjacentes deste grafo, já para verificar se um grafo admite um caminho Hamiltoniano, usando o teoremas 6, 12, 14, 17 ou 18, precisamos, além de calcular o grau dos vértices não adjacentes, calcular também o comprimento do menor caminho entre dois vértices não adjacentes. Para checar o comprimento do caminho mais curto entre dois vértices quaisquer de um grafo de ordem n é usado o algoritmo de Floyd-Warshall. Para mais detalhes sobre este algoritmo veja [9].

Por outro lado, é possível ver também que a condição de Rahman e Kaykobad requer um menor número de arestas que as condições de Ore e de Dirac. Maiores detalhes sobre esta afirmação podem ser encontrados em [17].

O diagrama a seguir resume como se relacionam as condições suficientes demonstradas anteriormente.



Condição de Dirac: G conexo tal que $g(v) \geq \frac{n}{2}$ para todo vértice $v \in V$.

Condição de Ore: G conexo tal que $g(u) + g(v) \geq n$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$.

Condição de Rahman e Kaykobad: G conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$.

Condição de Li: G conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes u e v .

Condição de Mehedy, Hasan e Kaykobad: G 2-conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices u, v não adjacentes e P um caminho Hamiltoniano em G tal que $\delta(u_0, u_k) = 3$, onde u_0 e u_k são os extremos deste caminho.

Condição de Li, Li e Feng: G 2-conexo tal que $g(u) + g(v) \geq n - 1$ para todo par de vértices $u, v \in V$ com $\delta(u, v) = 2$.

Condição de Hasan, Kaykobad, Lee e Lee: G conexo tal que $g(u) + g(v) + \delta(u, v) \geq n + 1$ para todo par de vértices não adjacentes $u, v \in V$.

Capítulo 4

Problema do passeio do cavalo

4.1 *Knight's tour*

Além do *Icosian Game*, outro quebra-cabeças que está relacionado a ciclos Hamiltonianos é o problema do passeio do cavalo em um tabuleiro de xadrez, ou *Knight's tour*. Não se sabe quando e nem quem propôs este desafio pela primeira vez, porém este problema despertou o interesse de vários matemáticos durante os séculos, inclusive Euler (1759) e Vandermonde (1771).

No jogo de xadrez o movimento do cavalo é em forma de L, ou seja, duas casas numa direção (vertical ou horizontal) e uma casa na outra direção (horizontal ou vertical). Na figura 4.1, estão representadas todas as possíveis casas, marcadas com um \circ , que um cavalo na casa marcada por um \bullet pode alcançar, após um movimento.

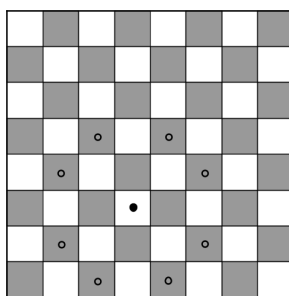


Figura 4.1: Movimento do cavalo.

O problema do passeio do cavalo consiste em, seguindo as regras de movimento do cavalo, decidir se é possível que um cavalo partindo de uma casa qualquer do tabuleiro de xadrez, percorra todo o tabuleiro visitando cada casa exatamente uma vez retornando à casa inicial. E, no caso positivo, encontrar tal sequência de movimentos.

De acordo com Biggs et al. [3], Euler dedicou-se a elaborar uma solução para o problema. Vandermonde, quando desenvolvia seus estudos em geometria de posição, usou

este problema para ilustrar suas ideias. Ambos exibiram um tal passeio, por métodos diferentes.

Ao longo dos séculos algumas variantes do problema do passeio do cavalo foram consideradas, tais como: percorrer todas as 64 casas do tabuleiro, partindo de uma casa qualquer, sem retornar necessariamente para a casa de origem (problema conhecido como *passeio aberto do cavalo*); percorrer todas as 64 casas partindo de uma determinada casa e chegando em outra determinada casa. Questões análogas também foram consideradas em tabuleiros de xadrez $n \times n$.

A seguir, apresentamos a modelagem do problema em grafos. Na seção seguinte, apresentamos um método, proposto em 1840 por Roget [21], para a construção de caminhos e ciclos Hamiltonianos no tabuleiro 8×8 . Finalmente, na última seção apresentamos a demonstração, publicada em 1994, de Conrad, Hindrichs, Morsy e Wegener [8], de que existem passeios abertos do cavalo num tabuleiro de xadrez $n \times n$ se, e somente se, $n \geq 5$.

4.2 Modelagem em grafos

Podemos modelar o problema do passeio do cavalo associando a cada uma das n^2 casas do tabuleiro de xadrez um vértice de um grafo cujas arestas ligam os vértices associados a casas entre as quais é possível efetuar um movimento do cavalo. Agora, observe que resolver o problema do passeio do cavalo se resume a verificar se este grafo admite um ciclo Hamiltoniano e, o problema do passeio aberto do cavalo com início e fim previamente dados, a verificar se este grafo admite um caminho Hamiltoniano com vértices extremos dados.

Considere C_n o tabuleiro de xadrez $n \times n$, onde a casa $(1, 1)$ é a casa superior mais à esquerda do tabuleiro e as demais casas $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, n)$ estão dispostas ao longo da primeira linha. De maneira análoga, temos na k -ésima linha as casas $(k, 1), (k, 2), \dots, (k, n)$. Assim, (n, n) é a casa mais inferior à direita do tabuleiro.

O grafo $G_n = (V_n, E_n)$, com $n \geq 2$, do tabuleiro de xadrez C_n , tem

$$V_n = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$$

como conjunto de vértices e E_n , seu conjunto de arestas é dado por:

$$(i, j) \text{ e } (i', j') \text{ são adjacentes} \Leftrightarrow |i - i'| = 1 \text{ e } |j - j'| = 2 \text{ ou } |i - i'| = 2 \text{ e } |j - j'| = 1.$$

Na figura 4.2 temos os grafos dos tabuleiros C_2, \dots, C_5 . Observe que os vértices (i, j) de G_n podem ser particionados em dois conjuntos dependendo da paridade da soma $i + j$. Os vértices de casas brancas possuem soma par enquanto que os de casas pretas possuem soma ímpar. Além disso, pelas regras de adjacência temos que as arestas de G_n têm

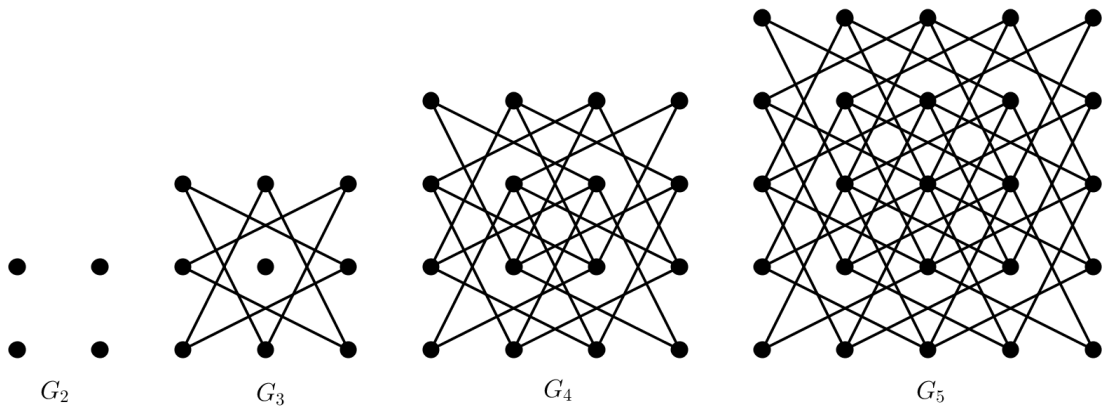


Figura 4.2: Grafos G_i , com $2 \leq i \leq 5$.

sempre um extremo de cada cor (ou paridade). Portanto, G_n é um grafo bipartido.

Obviamente, G_2 e G_3 não têm caminhos Hamiltonianos, uma vez que eles contêm vértices isolados. O grafo G_4 também não contém um caminho Hamiltoniano, pois os quatro vértices do canto $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ e $(4, 4)$ têm grau 2 e os vértices de cantos opostos têm os mesmos vizinhos. Desta forma, se tentássemos construir um caminho Hamiltoniano em G_4 ele deveria conter os subcaminhos $(2, 3)$, $(1, 1)$, $(3, 2)$ e $(3, 2)$, $(4, 4)$, $(2, 3)$, mas estes formam um ciclo de tamanho 4, o que impossibilitaria a construção do resto do caminho.

Consequentemente, G_2 , G_3 e G_4 também não contêm ciclos Hamiltonianos.

Na figura 4.11 apresentamos um caminho Hamiltoniano em G_5 . Porém, podemos provar facilmente a não existência de um ciclo Hamiltoniano em G_5 . Para isto basta observar que G_5 tem 25 vértices, e grafos bipartidos com um número ímpar de vértices não são Hamiltonianos (teorema 1). Desta forma, os grafos G_n , com n ímpar não são Hamiltonianos.

Em 1994, Conrad, Hindrichs, Morsy e Wegener [8] mostraram a existência de ciclos Hamiltonianos num tabuleiro $n \times n$ se, e somente se, $n \geq 6$, com n par, porém a demonstração deste fato, foge do escopo deste trabalho. Na figura 4.3 temos um ciclo Hamiltoniano em C_6 .

<u>1</u>	22	19	<u>8</u>	31	34
18	<u>7</u>	36	33	20	<u>9</u>
23	<u>2</u>	21	30	35	32
<u>6</u>	17	<u>4</u>	27	10	13
<u>3</u>	24	15	12	29	26
16	<u>5</u>	28	25	14	11

Figura 4.3: Ciclo Hamiltoniano em C_6 .

4.3 Ciclos e caminhos no tabuleiro 8×8

O trabalho de Roget [21], de 1840, também propõe um método para a construção de caminhos e ciclos Hamiltonianos num tabuleiro de xadrez 8×8 . Sua contribuição consiste em apresentar uma técnica para a construção do caminho ou ciclo, que pode ser feita “de cabeça”, isto é, sem que seja copiada de uma solução já pronta, como as apresentadas por Euler e Vandermonde. Outra característica importante do método de Roget é que ele resolve o problema para quaisquer duas casas dadas previamente como início e fim do passeio do cavalo.

Abaixo descrevemos, em linhas gerais, o método de Roget.

Considere o C_8 dividido em quatro quadrantes por uma linha vertical e outra horizontal, ambas através do seu centro, formando assim quatro tabuleiros 4×4 .

As casas de cada um dos C_4 são rotuladas com as letras B, e, a, C , como mostra a figura 4.4. No artigo de Roget, as casas do tabuleiro são rotuladas com as letras L, e, a, P . Lidas nesta ordem, elas formam a palavra *leap* que neste contexto pode ser traduzida para o português como *saltar*.

B	e	a	C
a	C	B	e
e	B	C	a
C	a	e	B

Figura 4.4: Rotulação do tabuleiro C_4 .

Observe que os rótulos no tabuleiro C_4 mostrado na figura 4.4, não só estão dispostos nas linhas de uma maneira fácil de memorizar como também constituem, se olharmos apenas as casas rotuladas com a mesma letra, um ciclo de movimentos possíveis do cavalo. Por exemplo, considere a casa $(1, 1)$, que está rotulada com a letra B , ocupada pelo cavalo. A partir desta casa, considerando os movimentos possíveis do cavalo, deslocamos a peça, sequencialmente, para as casas $(2, 3)$, $(4, 4)$, $(3, 2)$ e $(1, 1)$ que são exatamente as quatro casas rotuladas com a letra B . De maneira análoga, temos os ciclos associados às outras letras no tabuleiro C_4 .

O tabuleiro C_8 é rotulado pela justaposição de 4 tabuleiros C_4 já rotulados, como mostra a figura 4.5. O modo como cada um dos tabuleiros C_4 está rotulado e a maneira como eles estão justapostos nos permite saltar, no tabuleiro C_8 , respeitando os movimentos possíveis do cavalo, de um C_4 a outro, percorrendo todas as 16 casas do tabuleiro rotuladas com uma mesma letra.

Todas as casas rotuladas com a mesma letra e as conexões entre elas, associadas a cada movimento possível do cavalo, constituem um *sistema*. A figura 4.6 ilustra os quatro

<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>
<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>
<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>
<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>
<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>
<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>e</i>
<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>
<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>B</i>

Figura 4.5: Rotulação do tabuleiro C_8 .

sistemas, onde as conexões estão marcadas por linhas oblíquas que unem os centros de cada casa. Os sistemas associados às letras B e C são os *sistemas de consoantes*, já os sistemas associados às letras a e e são os *sistemas de vogais*. Note que as casas situadas nos cantos do tabuleiro, a saber: $(1, 1)$, $(8, 1)$, $(1, 8)$ e $(8, 8)$, pertencem a sistemas de consoantes. Além disto, as casas brancas estão marcadas por um círculo não preenchido, as pretas por um círculo preenchido e não existem conexões entre casas de mesma cor. Portanto, qualquer sequência de movimentos do cavalo dentro de um sistema é formada por casas de cores alternadas. Examinando cada sistema é possível concluir que existe um passeio do cavalo por todas as 16 casas de um mesmo sistema, começando em qualquer uma e terminando em qualquer outra de cor diferente.

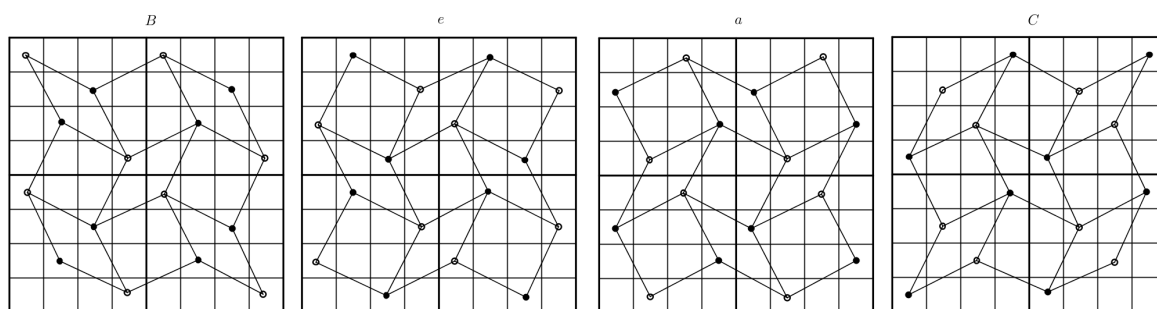


Figura 4.6: Sistemas B, e, a, C .

Em linguagem atual, cada um dos sistemas é um grafo bipartido de ordem 16. Assim não existe um caminho Hamiltoniano em um mesmo sistema se os extremos possuem a mesma cor. A união dos quatro sistemas é um subgrafo de G_8 . As arestas que faltam para completar o G_8 são justamente as associadas aos movimentos entre casas pertencentes a sistemas diferentes. De fato, exceto para as casas situadas nos cantos, o cavalo sempre pode passar de qualquer casa de um sistema de consoante para uma casa de um sistema de vogal (mas às vezes, não para ambos), e vice-versa. Porém, não é possível de vogal para

vogal nem de consoante para consoante. A figura 4.7 contém um diagrama que especifica a ordem em que podemos mover o cavalo de uma casa que pertence a um sistema para uma casa pertencente a outro. O diagrama não é orientado, pois podemos segui-lo em qualquer sentido. Por exemplo, se o cavalo está em uma casa pertencente a um sistema de consoante, podemos escolher em seguida para o sistema de uma das duas vogais, mas não podemos move-lo diretamente para uma casa no sistema da outra consoante.

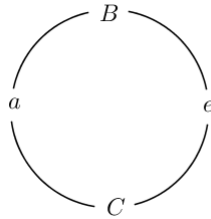


Figura 4.7: Ordem de transição entre os sistemas.

A solução do problema do passeio do cavalo se desdobra em três casos, baseados na localização nos sistemas, da casa inicial e da casa final designadas para o passeio.

Caso 1 : As casas inicial e final pertencem, uma a um sistema de consoante e a outra a um sistema de vogal. Neste caso, percorremos todas as casas do sistema da letra da casa inicial e, em seguida, utilizamos o diagrama da figura 4.7 para escolher o novo sistema do qual todas as casas serão percorridas e seguir assim, até chegar no quarto sistema que é o que contém a casa final. O único cuidado que deve ser tomado é, quando passar por sistemas intermediários, não escolher como última casa a ser percorrida uma do canto ou da borda do tabuleiro pois nem sempre elas tem conexão com o próximo sistema.

Caso as casas inicial e final escolhidas estejam separadas apenas por um movimento possível, poderemos retornar a casa inicial assim que chegarmos a última casa com um único movimento, fechando assim um ciclo Hamiltoniano.

Caso 2 : As casas inicial e final pertencem ao mesmo sistema. Neste caso, reservamos as quatro últimas casas do tabuleiro referentes ao sistema escolhido para terminar o ciclo. Também pode ser útil observar algumas casas de outro sistema que poderá ser conectada a estas quatro últimas casas. Assim, percorrendo cada sistema como no caso anterior e ficando atento para terminar nestas últimas casas deste outro sistema de modo a alcançar as quatro últimas casas reservadas, teremos o ciclo Hamiltoniano desejado.

Para exemplificar este procedimento suponha que a casa inicial e final pertençam, ambas, ao sistema denotado pela letra B . Assim, devemos reservar as quatro casas deste sistema no tabuleiro C_4 que contém a casa final. Devemos observar também algumas casas

dos sistemas a ou e , que poderão conectar-se com as quatro últimas casas reservadas. Obviamente a escolha entre os sistemas a ou e depende da escolha do segundo sistema a ser percorrido de acordo com o diagrama da figura 4.7. Suponha que o segundo sistema seja o da letra a . Assim, ao percorrermos os três tabuleiros C_4 do sistema B , saltaremos para o sistema da letra a , percorrendo-o completamente e, em seguida, percorreremos o da letra C e, por fim, percorreremos o sistema da letra e tomando o cuidado de conectá-lo as quatro casas do sistema B reservadas inicialmente.

Novamente é útil observar que somente será possível obter um ciclo Hamiltoniano se as casas escolhidas, inicial e final, estiverem separadas por um movimento possível apenas.

Caso 3 : As casas inicial e final pertencem ambas a sistemas de consoantes ou a sistemas de vogais, porém a sistemas distintos. Neste caso a mesma sequência de movimentos que descrevemos no segundo caso deve ser feita. É óbvio que neste caso não conseguiremos encontrar um ciclo Hamiltoniano, devido ao fato de não ser possível fazer movimentos de sistemas indicado por vogal para vogal nem de consoante para consoante.

Exemplos de cada um desses casos são ilustrados nas figuras 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente. Em todos eles a casa inicial é $(2, 4)$, que pertence ao sistema e .

27	<u>2</u>	43	50	29	14	47	62
42	51	28	<u>1</u>	48	63	30	15
<u>3</u>	26	49	44	13	32	61	46
52	41	<u>4</u>	25	64	45	16	31
23	<u>6</u>	37	56	17	12	33	60
40	53	24	<u>5</u>	36	57	18	11
<u>7</u>	22	55	38	<u>9</u>	20	59	34
54	39	<u>8</u>	21	58	35	10	19

Figura 4.8: Caso 1.

47	<u>2</u>	39	24	59	64	43	26
38	23	46	<u>1</u>	44	25	60	63
<u>3</u>	48	21	40	61	58	27	42
22	37	<u>4</u>	45	28	41	62	57
49	<u>6</u>	33	20	53	12	29	14
36	19	52	<u>5</u>	32	15	56	11
<u>7</u>	50	17	34	<u>9</u>	54	13	30
18	35	<u>8</u>	51	16	31	10	55

Figura 4.9: Caso 2.

19	<u>2</u>	55	50	21	<u>6</u>	39	48
56	53	20	<u>1</u>	40	49	22	<u>7</u>
<u>3</u>	18	51	54	<u>5</u>	24	47	38
52	57	<u>4</u>	17	46	41	<u>8</u>	23
31	16	33	58	25	12	37	42
62	59	30	13	34	45	26	<u>9</u>
15	32	61	64	11	28	43	36
60	63	14	29	44	35	10	27

Figura 4.10: Caso 3.

No caso 1, ilustrado na figura 4.8, a casa final pertence ao sistema C . Aqui, passamos primeiramente por todas as dezesseis casas do sistema e ; em seguida, percorremos todas as casas do sistema B . A seguir, passamos para o sistema a , percorrendo, sucessivamente todas as casas pertencentes a ele e, por fim, chegamos ao sistema C , e o percorremos até alcançar a casa final, exibindo assim o ciclo Hamiltoniano do primeiro caso.

Na figura 4.9, onde a casa final pertence ao sistema e , assim como a inicial, devemos, ao percorrer este sistema, reservar esta casa e também as três conexões sucessivas, isto é, reservamos as casas numeradas por 64, 63, 62 e 61. Com esta exceção, devemos continuar como antes, percorrendo sucessivamente os sistemas e, C, a e B , ficando atento de modo a concluir o sistema B numa casa ligada, por um movimento válido do cavalo, com as outras quatro casas reservadas inicialmente do sistema e , exibindo assim o ciclo Hamiltoniano descrito no segundo caso.

Na figura 4.10, onde a casa final pertence ao sistema a , a mesma série de movimentos descrita acima deve ser feita, com exceção de que as casas reservadas pertencem a este sistema.

4.4 Existência de passeios abertos

Em 1994, Conrad, Hindrichs, Morsy e Wegener publicaram [8] onde demonstraram a existência de caminhos Hamiltonianos no grafo G_n se, e somente se, $n \geq 5$. A seguir, descreveremos a demonstração dada pelos autores para a existência de tais caminhos Hamiltonianos. A construção do caminho é recursiva, sendo os casos $n \leq 9$ os casos da base da recursão.

A figura 4.11 apresenta exemplos de caminhos Hamiltonianos no tabuleiro para $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Obviamente, é possível começar em qualquer canto, para isto, basta girar os tabuleiros.

<u>1</u>	18	13	22	<u>7</u>
12	23	<u>8</u>	19	14
17	<u>2</u>	21	<u>6</u>	<u>9</u>
24	11	<u>4</u>	15	20
<u>3</u>	16	25	10	<u>5</u>

<u>1</u>	22	19	<u>8</u>	33	28
18	<u>7</u>	34	29	20	<u>9</u>
23	<u>2</u>	21	32	27	30
<u>6</u>	17	<u>4</u>	35	10	13
<u>3</u>	24	15	12	31	26
16	<u>5</u>	36	25	14	11

<u>1</u>	<u>4</u>	23	40	11	<u>6</u>	<u>9</u>
24	41	<u>2</u>	<u>5</u>	<u>8</u>	45	12
<u>3</u>	22	47	44	39	10	<u>7</u>
42	25	34	21	46	13	38
31	28	43	48	15	20	17
26	35	30	33	18	37	14
29	32	27	36	49	16	19

<u>1</u>	34	<u>3</u>	18	37	32	12	16
<u>4</u>	19	36	33	14	17	38	31
35	<u>2</u>	49	52	47	40	15	12
20	<u>5</u>	64	41	50	53	30	39
57	42	51	48	59	46	11	26
<u>6</u>	21	58	63	54	27	60	29
43	56	23	<u>8</u>	45	62	25	10
22	<u>7</u>	44	55	24	<u>9</u>	28	61

<u>1</u>	36	<u>3</u>	22	49	38	65	20	17
<u>4</u>	23	48	37	78	21	18	39	66
35	<u>2</u>	53	50	47	64	77	16	19
24	<u>5</u>	34	81	52	79	46	67	40
33	58	51	54	69	74	63	76	15
<u>6</u>	25	70	59	80	45	68	41	62
57	32	55	28	73	60	75	14	11
26	<u>7</u>	30	71	44	<u>9</u>	12	61	42
31	56	27	<u>8</u>	29	72	43	10	13

Figura 4.11: Caminhos Hamiltonianos em C_n , para $5 \leq n \leq 9$.

Para mostrar que existem passeios abertos do cavalo num tabuleiro de xadrez $n \times n$ para todo $n \geq 5$ os autores introduziram um tabuleiro em forma de Γ denotado por Γ_k , $k \geq 6$. A introdução deste tabuleiro é importante para a junção dos vários tabuleiros 5×5 em que o tabuleiro $n \times n$ será dividido.

Para $k \geq 6$, o tabuleiro Γ_k consiste de 5 linhas com k casas e $k - 5$ linhas com 5 casas. Da mesma forma que em C_n , a casa $(1, 1)$ é a casa superior mais à esquerda do tabuleiro

e as demais casas $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, k)$ estão dispostas ao longo da primeira linha. De maneira análoga, temos na p -ésima linha, com $1 \leq p \leq 5$, as casas $(p, 1), (p, 2), \dots, (p, k)$ e, para $6 \leq p \leq k$, as casas $(p, 1), (p, 2), \dots, (p, 5)$. Desta maneira, $(k, 5)$ é a casa mais inferior à direita do tabuleiro.

O grafo correspondente a Γ_k , $G'_k = (V'_k, E'_k)$, tem

$$V'_k = \{(i, j) \mid (1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq k) \text{ e } (6 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq 5)\}.$$

como conjunto de vértices e o conjunto das arestas E'_k é definido pelas mesmas regras que definem E_n .

A figura 4.12 ilustra caminhos Hamiltonianos em Γ_k , para $k \in \{6, 7, 8, 9\}$, iniciando em $(1, k)$ e terminando em $(k, 3)$. Obviamente, também existem caminhos Hamiltonianos de $(k, 1)$ para $(3, k)$ nestes tabuleiros.

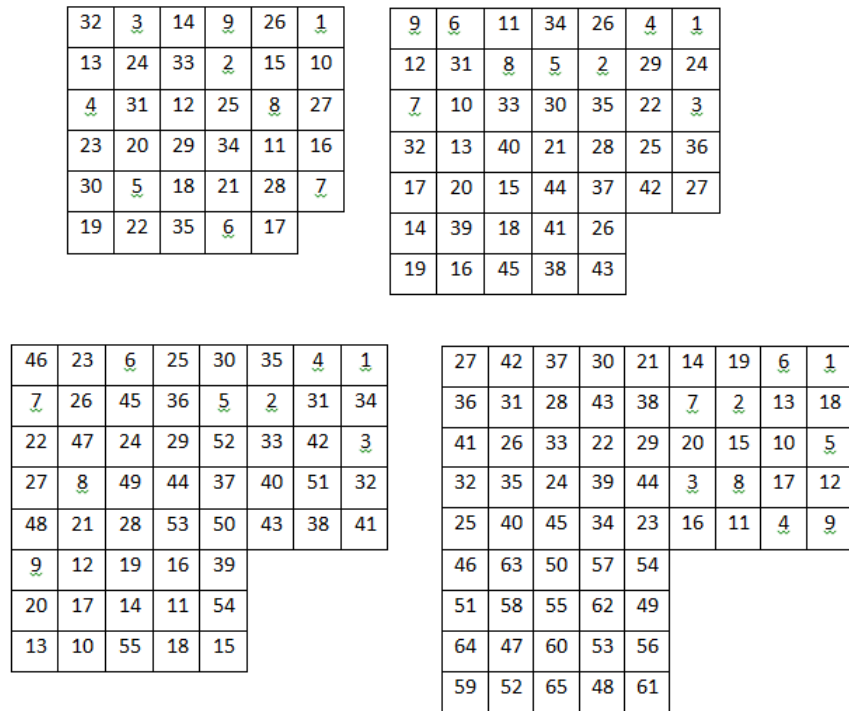


Figura 4.12: Caminhos Hamiltonianos em Γ_k , para $6 \leq k \leq 9$.

Se $n > 9$, considere a faixa formada por todas as posições (i, j) , onde $i \leq 5$ ou $j \leq 5$, isto é, as cinco primeiras linhas e colunas do tabuleiro. Seja $n \equiv k \pmod{5}$, onde $0 \leq k \leq 4$. Colocamos o tabuleiro Γ_{k+5} no canto superior esquerdo e preenchamos o resto da faixa com $2(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1)$ tabuleiros C_5 , como mostra a figura 4.13 com $n = 28$.

O caminho Hamiltoniano no tabuleiro começa em $(1, n)$. Percorremos o caminho Hamiltoniano, ilustrado na figura 4.11, no primeiro tabuleiro C_5 até chegarmos ao vértice $(3, n - 4)$. Em seguida, saltamos, com um movimento possível do cavalo, para o vértice

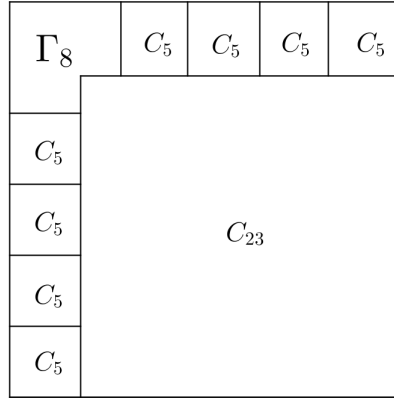


Figura 4.13: Tabuleiro C_{28}

$(1, n-5)$, ou seja, a posição de início do próximo tabuleiro C_5 . Desta forma, percorreremos, através de todas os tabuleiros C_5 , as cinco primeiras linhas de C_n . Se $n \equiv 0 \pmod{5}$, usamos um caminho Hamiltoniano ligeiramente modificado para o tabuleiro C_5 do canto superior esquerdo. Este caminho Hamiltoniano vai de $(1, 5)$ para $(5, 3)$ para que seja possível saltar para $(6, 1)$. Se $n \not\equiv 0 \pmod{5}$, chegaremos a posição $(1, k+5)$ e, usando a solução ilustrada na figura 4.12, para Γ_{k+5} , alcançaremos o vértice $(k+5, 3)$. Em seguida, com um movimento possível, saltamos para o vértice $(k+6, 1)$, chegando assim, ao canto superior esquerdo do primeiro tabuleiro C_5 , localizado abaixo do tabuleiro Γ_{k+5} . Logo após, percorremos um caminho Hamiltoniano neste tabuleiro, começando no vértice $(1, 1)$, para o particular C_5 , chegando em $(5, 3)$. De $(5, 3)$ saltamos para o vértice $(1, 1)$ do próximo tabuleiro C_5 . Procedendo de maneira análoga para os demais C_5 , chegaremos ao último tabuleiro C_5 , onde percorreremos um caminho Hamiltoniano modificado, partindo do vértice $(1, 1)$ para o $(3, 5)$ que é correspondente ao vértice $(n-2, 5)$ de C_n . A partir deste vértice, podemos saltar para a posição $(n, 6)$, no canto inferior esquerdo do tabuleiro restante C_{n-5} .

O tabuleiro C_{n-5} é tratado de maneira análoga, recursivamente, até que se obtenha um tabuleiro C_l com $l \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Para este tabuleiro um caminho Hamiltoniano é dado na figura 4.11.

Desta maneira, está provada a existência de caminhos Hamiltonianos para tabuleiros $n \times n$, para $n \geq 5$.

Capítulo 5

Uma experiência com alunos do ensino médio

5.1 Motivação

Apresentamos neste capítulo uma atividade sobre ciclos Hamiltonianos que realizamos com um grupo de alunos do ensino médio na Universidade Federal do Rio de Janeiro - (UFRJ) durante um evento em dezembro de 2013.

Os alunos eram do primeiro ao terceiro ano do ensino médio de duas escolas públicas do Rio de Janeiro. Esta atividade ocorreu durante o *I Seminário do Instituto de Matemática da UFRJ - Dialogando sobre vocações* nos dias 10 a 13 de dezembro de 2013. Este seminário é uma iniciativa do Instituto de Matemática da UFRJ, visando aproximar os alunos da Escola Básica à comunidade científica. Com isso, busca-se promover a interação entre professores e alunos da universidade com os alunos do ensino médio, na tentativa de ampliar a visão do aluno quanto a profissão de um pesquisador em Matemática. Assim, vários matemáticos durante estes dias ofertaram oficinas onde, de maneira didática, mostravam a importância dos assuntos pesquisados para o desenvolvimento de novas tecnologias, de avanços no conhecimento, entre outros. Aceitando um convite da comissão organizadora, pensamos em elaborar uma oficina para este grupo de alunos sobre Grafos Hamiltonianos. A escolha deste tema não foi aleatória, pois foi uma ótima oportunidade para elaborar atividades para alunos do ensino médio envolvendo grafos, tema da minha dissertação.

Ao elaborar as atividades, decidimos abordar situações-problema onde estávamos interessados em investigar até qual nível de complexidade de um grafo um aluno conseguiria argumentar sobre a possibilidade ou impossibilidade deste grafo admitir ou não um ciclo Hamiltoniano. Estávamos interessados em saber também se seriam capazes de realizar conjecturas, mesmo que em casos particulares, como por exemplo: conjecturar que grafos bipartidos de ordem ímpar ou grafos com vértices de grau 1 não admitem ciclos Hamilto-

nianos. E talvez num grau de abstração maior, visualizar a condição necessária para um grafo admitir um ciclo Hamiltoniano.

5.2 Grafos nos documentos oficiais

Na última edição de 2006 das Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) [5], matemática discreta em geral, e grafos em particular, tem aparecido como sugestões de temas a serem inseridos no ensino médio de modo a tentar movimentar a escola básica, restrita muita das vezes ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica.

Segundo as OCEM [5]: “A maior parte dos conteúdos de Matemática do ensino médio está vinculada a modelos matemáticos de natureza contínua: os números reais e os espaços geométricos (reta, plano e espaço tridimensional). Os estudos da geometria e das funções de variável real inserem-se nesse contexto, refletindo o papel fundamental do Cálculo no desenvolvimento das aplicações da Matemática nas Ciências. Entretanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos. Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a Matemática dos conjuntos finitos.” Este texto nos leva a refletir sobre o desafio de trabalhar a matemática discreta, sendo que a escola básica não conseguiu acompanhar o desenvolvimento significativo dessa área.

Este documento incentiva, mas não como tema principal, o estudo de temas de Matemática Discreta nas salas de aula da educação básica, como pode ser visto no trecho abaixo retirado do vol. 2, pág. 94.

“No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas¹ interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo – no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de uma

¹Na verdade o problema refere-se a sete pontes que cruzam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.

tal solução (ainda no exemplo, o caso em que cada ilha tem um número par de pontes). Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar a rota mais curta em uma rede de transportes ou determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo em uma cidade.”

Também é importante ter em mente o que os Parâmetros Curriculares Nacionais PCNs de 2000 [4] trazem como objetivo do ensino médio, um deles encontra-se abaixo:

“Os objetivos do ensino médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico.”

O texto acima nos remete a formação do cidadão como um todo e não apenas na consolidação e no aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental da escola básica. Assim, devemos analisar os arredores dos conceitos tradicionalmente trabalhados, buscando eleger outros que com certeza contribuiriam para a formação de alunos, capacitando-os a entender a complexidade do mundo atual. A escolha destes conceitos deve ser pautada em assuntos e abordagens que levem o aluno a aprender a aprender.

Novamente, grafos e suas aplicações na solução de problemas de otimização relacionados à vida contemporânea permeiam este objetivo, pois: permitem a apresentação de problemas interessantes do mundo contemporâneo, propiciam a discussão e a implementação de abordagens computacionais, e possibilitam o desenvolvimento de estratégias variadas de solução. Observe que, o simples fato de um aluno investigar a existência ou não de ciclos Hamiltonianos num grafo propicia a possibilidade de desenvolver uma série de habilidades importantes, tais como explorar, analisar, modelar, generalizar, conjecturar e argumentar.

Além disso, o Novo Currículo Base da Escola Estadual da Secretaria de Estado da Educação do Espírito Santo [10] traz, dentre todos os assuntos tradicionais já propostos, a inserção dos temas “Introdução à Teoria dos Grafos” e “Resolução de problemas utilizando grafos” para as turmas do segundo e terceiro anos do ensino médio. Esta alteração curricular nas escolas de ensino médio do Espírito Santo não é inovadora, acompanha um movimento já defendido por Malta [16].

Começamos a elaborar a oficina com o intuito de mostrar situações-problema que apresentassem grafos dos mais diferentes tipos, de modo a fazer com que os alunos pudessem investigar a possibilidade ou impossibilidade deste grafo admitir ou não um ciclo Hamiltoniano. Para isso, pensamos na ideia de apresentar problemas simples de enunciar e compreender, mas não necessariamente fáceis de resolver, abordando também que alguns destes problemas ainda não possuem solução, aproveitando a oportunidade para mostrar qual o trabalho dos matemáticos, e também falar da falsa impressão que a sociedade em geral possui que só existe a possibilidade de ser professor de Matemática ao se estudar Matemática no ensino superior.

5.3 Os objetivos e as metodologias de ensino

Assim, ao decidir sobre o tema da oficina, tínhamos como objetivo principal propor situações-problema onde o aluno deveria dizer se um determinado grafo admite ou não um ciclo Hamiltoniano e, obviamente, estávamos interessados em investigar até em que nível de complexidade do grafo apresentado o aluno seria capaz de encontrar o ciclo, caso existisse, ou argumentar o porquê da não existência.

Baseando-se neste objetivo principal, traçamos para os alunos os seguintes objetivos específicos da atividade:

- Investigar a existência de ciclos Hamiltonianos num grafo;
- Formular e expressar argumentos sobre a possibilidade e impossibilidade de encontrar ciclos Hamiltonianos.

Na tentativa de alcançar os objetivos acima, optamos por escolher como uma das metodologias de ensino a resolução de problemas, tanto defendida por Polya [19] em seu livro *A Arte de Resolver Problemas*. Seu livro é resultado do seu trabalho de experimentação docente quando necessitava desenvolver ferramentas necessárias em seus alunos, sistematizando assim uma lista de procedimentos que organizasse o pensamento dos seus alunos a frente de situações-problema.

Sabemos que a resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência raramente se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas. Tanto isso é verdade que sabemos do fracasso dos alunos quando propomos a análise de situações onde devem ser relacionados dados ou fatos diversos, ou

quando é necessária a tomada de decisão entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possuem informações e conceitos, os alunos não os mobilizam, não os combinam eficientemente, desanimam, esperam a explicação do professor, não se permitem tentar, errar, não confiam em suas próprias formas de pensar. Na resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução. E, para isso, os desafios devem ser reais e fazer sentido.

Convém precisar que um problema matemático é uma situação em que a solução não está disponível de imediato, e que demanda a realização de uma sequência de ações. Resolver um problema não se resume em compreendê-lo e dar uma resposta correta aplicando procedimentos adequados. É necessário que o aluno se aproprie do conhecimento envolvido, desenvolvendo habilidades que lhe permitam por a prova os resultados, testar seus efeitos, comparar diversos caminhos para obter a solução, o que exige que saiba argumentar sobre os procedimentos desenvolvidos. Isso desenvolve no aluno a criatividade, a reflexão, a argumentação, enfim, o pensar sobre o próprio conhecimento (metacognição). Nessa forma de trabalho, o valor da resposta correta cede lugar ao valor do processo de resolução e a investigação.

Além de usar a resolução de problemas fizemos uso também de outra importante metodologia de ensino - a História da Matemática. Acreditamos que a Matemática está entrelaçada com a história e com o desenvolvimento das civilizações, é nessa linha de pensamento que vários pesquisadores apontam a História da Matemática como uma ferramenta capaz de contribuir no processo de ensino aprendizagem da Matemática, pois ela pode ser relacionada com várias situações dentro da construção do conhecimento, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais [4].

“A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma condição humana, ao mostrar as necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A história da matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural.”

Portanto, a oficina foi desenvolvida levando em consideração o desenvolvimento histórico da Teoria dos Grafos e baseando-se na resolução de problemas. Cada atividade

foi planejada e refletida quanto aos objetivos que tínhamos com a mesma. Na próxima seção apresentaremos a atividade, relataremos e analisaremos as estratégias apresentadas pelos alunos ao longo do trabalho e como os alunos reagiram frente a proposta de trabalho. Observamos que os alunos não precisavam de qualquer conhecimento prévio para compreender os problemas que propusemos.

5.4 A atividade realizada

Os colégios estaduais enviaram um grupo de vinte alunos do primeiro ao terceiro ano do ensino médio para participar das oficinas. É importante ressaltar que a oficina ocorreu fora do ambiente escolar destes alunos, sem seus professores usuais e sem o compromisso de aprender para fazer uma avaliação posteriormente, ou seja, tudo era novidade para estes alunos e isto faz diferença, já que estávamos de frente a um grupo de alunos motivado e disposto para o trabalho.

A oficina tinha um tempo previsto de 90 minutos e contava com o apoio de três monitores, alunos da Licenciatura em Matemática da UFRJ, atuando como tutores no encontro, além do Gabriel Neves, colega de mestrado, todos já com conhecimentos introdutórios da Teoria dos Grafos. Inicialmente, apresentamos as atividades através de fichas previamente elaboradas, que consistiam em situações-problema ou exercícios que tinham um caráter investigativo, fomentando a elaboração de conjecturas. Cada atividade era explicada cuidadosamente, de modo que cada aluno tivesse a oportunidade de entender o sentido da tarefa proposta e o que dele se esperava no decorrer da atividade.

Os alunos foram se agrupando de modo que a troca de informações entre eles estivesse sempre presente. O mesmo ocorreu com a interação entre professor e aluno e, apesar de não estar previsto, os tutores também rapidamente se integraram nas discussões.

A medida que as atividades eram realizadas, os alunos eram convidados a exporem seus resultados, que apareceram de diferentes formas, tais como soluções para os problemas apresentados, e suas respectivas justificativas.

Durante a realização da oficina e ao final dela, sempre estivemos atentos e preocupados em organizar os conhecimentos à medida que os alunos apresentavam suas respostas. A ação de intervir, sem retirar o prazer da descoberta foi sempre realizada para garantir a organização das ideias. Cabe ressaltar que tal organização não significou a antecipação das conclusões por parte dos alunos, mas sim a coordenação do conhecimento apresentado na direção das conclusões as quais esperava-se que chegassem. Desta maneira, ao final das atividades I e III, encontra-se um quadro que solidifica a linguagem adquirida ao final das mesmas.

A seguir, apresentaremos as três atividades desenvolvidas, com a descrição detalhada do desenvolvimento de cada uma delas, incluindo relatos e análises de construções, explicações, argumentos e conjecturas realizadas pelos alunos no decorrer da oficina.

Na atividade I modelamos, através da resolução de problemas, o jogo proposto por Hamilton de forma que se adequasse realidade dos alunos. A situação descrita nesta atividade utiliza um mapa rodoviário da cidade do Rio de Janeiro, onde os alunos deveriam encontrar uma rota partindo de uma determinada cidade que percorresse algumas cidades selecionadas inicialmente e retornassem para a cidade de partida sem passar duas vezes pela mesma cidade, isto é, dizer se o grafo formado pelas cidades e rodovias admite ou não um ciclo Hamiltoniano (obviamente não usamos esta linguagem de grafos no início).

No início os alunos encontraram certas dificuldades para modelar o problema porém, após algumas intervenções, conseguiram visualizar um diagrama (grafo) que modelasse a situação-problema.

É importante ressaltar que cada uma das perguntas das três atividades foram entregues separadamente, permitindo assim uma maior interação professor-aluno a cada uma das perguntas.

Atividade I

Observe o mapa metropolitano com as principais rodovias do estado do Rio de Janeiro.



Figura 5.1: Mapa rodoviário da Região Metropolitana do Rio de Janeiro.

Considerando cada região geográfica de uma cidade como um único ponto e todas as estradas destacadas no mapa como linhas interligando duas cidades. Responda as questões abaixo:

Observação: Desconsidere as ferrovias que estão identificadas no mapa por uma linha preta tracejada.

1. Saindo da cidade de Nova Iguaçu, é possível encontrar uma rota que passe uma única vez pelas cidades de Queimados, Paracambi, Seropédica, Japeri (em qualquer ordem) retornando para Nova Iguaçu? Justifique sua resposta.
2. Saindo da cidade do Rio de Janeiro, é possível encontrar uma rota que passe uma única vez pelas cidades de Nova Iguaçu, Belford Roxo, Duque de Caxias, São João de Meriti, Mesquita, Nilópolis (em qualquer ordem) retornando para Rio de Janeiro? Justifique sua resposta.
3. Partindo da cidade do Rio de Janeiro, é possível encontrar uma rota que passe uma única vez pelas cidades listadas nos dois itens acima e retorne para o Rio de Janeiro? Justifique sua resposta.

A estrutura utilizada para resolver o problema acima é um grafo. Podemos representá-la de várias formas:

- Por uma lista, dizendo quem se relaciona com quem.
- Por um desenho, isto é, uma representação gráfica.

O conjunto V , dos vértices, no nosso exemplo, representa o conjunto das cidades. E o conjunto E , das arestas, representa as rodovias que interligam as cidades.

O texto ao final da atividade I tem como objetivo introduzir os conceitos iniciais e a notação básica de grafos para facilitar a comunicação. Obviamente, como prevíamos, esta notação foi sendo utilizada e, portanto, assimilada no decorrer das atividades.

Observamos que, apesar de registrarem ideias interessantes nas suas respostas, que traduziam a essência do tema abordado, existiu uma considerável dificuldade dos alunos na organização das suas ideias e de transporem seu raciocínio, muitas vezes corretos e bem elaborados, para o papel.

Para ilustrar a realidade descrita acima, optamos por apresentar abaixo algumas respostas que foram dadas pelos alunos na terceira pergunta da atividade I. Em seguida, ilustramos nas figuras 5.2 e 5.3 os grafos construídos por dois alunos na tentativa de responder a questão.

X_1 : “Como a proposta ressalta que a passagem por determinado município seja feita uma única vez, e os dois trajetos projetados acima possuem um único ponto de ligação, não seria possível realizar tal proposta, pois seria necessário passar por um mesmo município duas vezes”.

X_2 : “Não dá para passar nas cidades todas sem passar pela mesma, porque Nova Iguaçu é o único ponto de encontro para eles, sendo assim não podendo repetir o caminho para RJ”.

X_3 : “Não tem como passar uma única vez por todas as cidades sendo que você irá passar por Nova Iguaçu mais de uma vez”.

X_4 : “Não pode retornar ao Rio de Janeiro, pois Nova Iguaçu será um ponto de encontro e passará duas vezes nele o que não é o objetivo”.

X_5 : “Não. Porquê você passará duas vezes por NI e não teria como fazer uma rota que passasse uma única vez por todas as cidades”.

X_6 : “Impossível passar uma única vez por Nova Iguaçu pois é o único ponto de ligação entre as duas áreas. Tornando impossível a volta por um único ponto”.

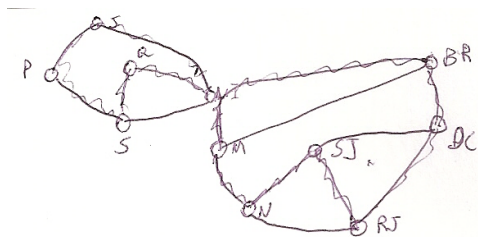


Figura 5.2: Grafo do aluno X_5 .

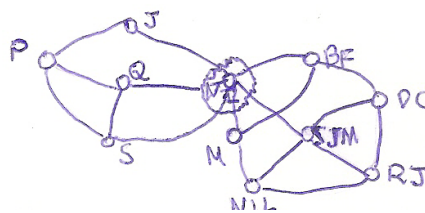


Figura 5.3: Grafo do aluno X_4 .

Na atividade II os alunos investigaram sete grafos distintos com o mesmo objetivo da atividade I: encontrar uma rota que passe por todos os vértices uma única vez e retorne para o ponto de partida. Porém, o nível de dificuldade para responder a esta pergunta foi crescendo a medida que os alunos foram avançando, como ilustra a figura 5.4.

Atividade II

Verifique se é possível em cada grafo abaixo, começando por algum vértice, encontrar uma rota que passe por todos os vértices uma única vez e retorne para o ponto de partida? Se for possível exiba a rota e caso não seja, justifique sua resposta.

Durante a realização desta atividade percebemos que eles aproveitaram a oportunidade e, conjecturaram ideias e resultados interessantes em cada um destes grafos, como por exemplo: perceber que não é possível encontrar uma rota que passe por todos os vértices uma única vez e retorne para o ponto de partida num grafo que possui um vértice em que incide apenas uma aresta, isto é, um vértice de grau 1, como no grafo do item (a) ilustrado na figura 5.4. No item (b), também perceberam que não seria possível pois ao começarmos por algum dos vértices v_1 ou v_4 , obrigatoriamente passaríamos pelo vértice v_5 duas vezes. De maneira análoga, se começássemos dos vértices v_2 ou v_3 , obteríamos o mesmo resultado. Nos grafos presentes nos itens (c) e (d), não tiveram grandes dificuldades para exibir a rota, isto é, o ciclo Hamiltoniano $v_5, v_4, v_2, v_1, v_6, v_3, v_5$ e $a, b, d, c, e, g, h, f, a$ respectivamente. Já nos grafos presentes nos itens (e), (f) e (g) alguns alunos “juravam” que era possível, mas não conseguiam encontrar a rota, enquanto outros perceberam que não seria possível encontrar a rota, mas novamente não conseguiram responder de maneira satisfatória o porquê da negativa. Apresentamos abaixo algumas respostas que

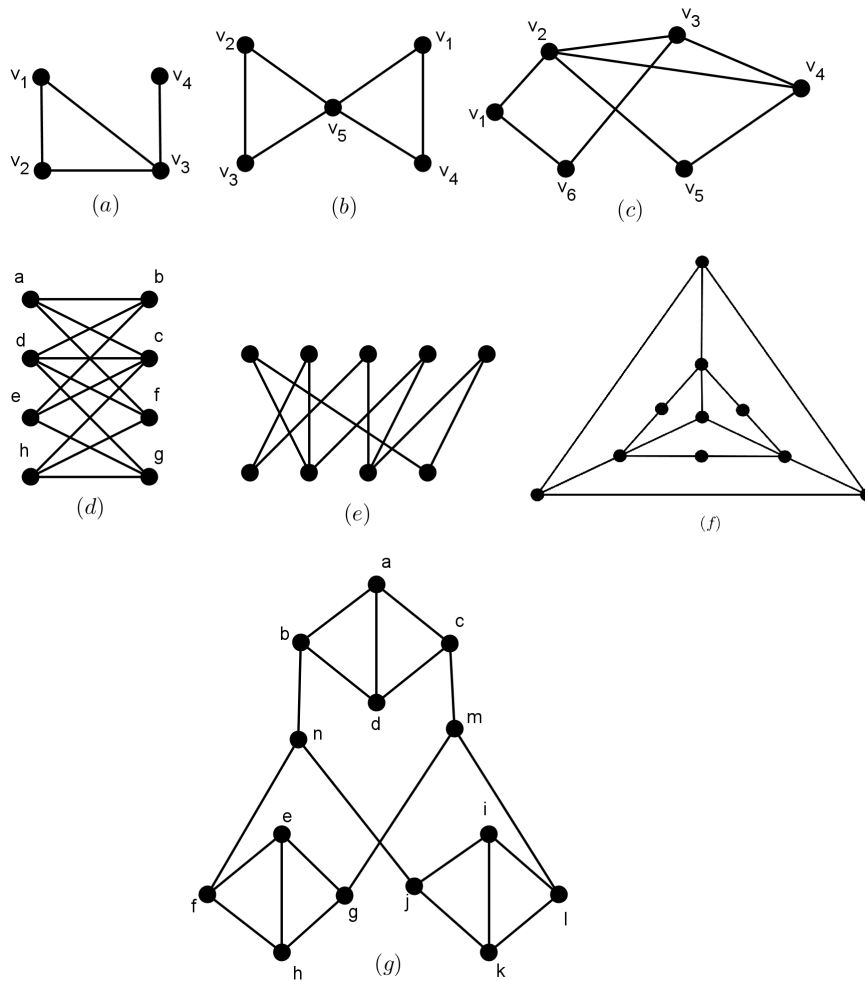


Figura 5.4: Grafos da atividade II.

foram dadas pelos alunos no item (e) desta atividade.

X_7 : “Não, pois tenho que passar pela mesma rua”.

X_3 : “Não é possível, pois passará 2 vezes pelo mesmo vértice”.

X_2 : “Não, porque uma aresta passa entre todas”.

X_8 : “Não é possível pois todas as linhas acabam se encontrando mais de uma vez”.

X_5 : “Não, pois no ponto de partida A não tem retorno se não passar duas vezes ou mais no mesmo ponto.” O aluno nomeou por A o vértice superior mais a esquerda do grafo.

Na atividade III, os alunos investigaram uma das variantes do próprio jogo proposto por Hamilton. Após algumas tentativas alguns alunos alcançaram, sem grandes dificuldades, o objetivo proposto. A solução obtida pelo aluno X_7 pode ser vista na figura 5.6.

Atividade III

Em 1857, o matemático irlandês Sir William Hamilton inventou um jogo chamado *The Icosian Game*, o jogo apresenta um pequeno desafio envolvendo um dodecaedro, em que

cada um dos 20 vértices foram nomeados com nomes de cidades importantes do mundo. O objetivo do jogo era, utilizando as 30 arestas do dodecaedro, passar por cada uma das cidades apenas uma vez, começando e terminando na mesma cidade, como na figura a seguir:



Figura 5.5: *The Icosian Game*.

Você consegue, dando continuidade a rota iniciada em London – Paris – Bagdad – Delhi – Madrid, percorrer todas as cidades uma única vez e retornar para Londres?

Observe que no problema anterior buscamos um roteiro que respeita a existência das estradas, para passar em todas as cidades, sem repetição, e voltar para a cidade inicial. Este roteiro é chamado de ciclo **Hamiltoniano**.

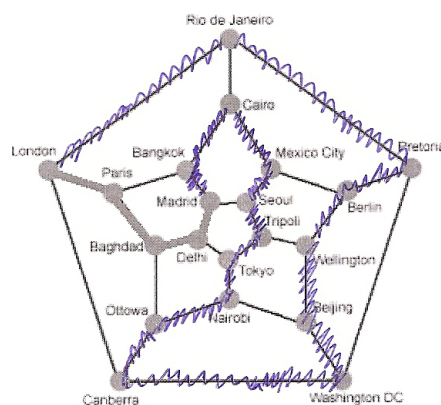


Figura 5.6: Solução do aluno X_7 .

Novamente, o texto após a atividade III, tem como objetivo introduzir os conceitos iniciais e a notação básica para facilitar a comunicação. Nele introduzimos a noção de ciclo Hamiltoniano, evitando assim a longa frase: rota que passa por todas as cidades e retorna para a cidade de origem.

Finalizamos a oficina abordando que a Teoria de Grafos é uma área bastante recente da Matemática que possui vários problemas ainda em aberto, alguns de simples entendimento, como o que foi apresentado para os alunos: o de dizer se um grafo é ou não Hamiltoniano. Abordamos ainda que vários matemáticos do mundo todo realizam pesquisas na tentativa de solucioná-los permitindo avanços no pensamento humano, na teoria matemática e na tecnologia.

5.5 Conclusões

Infelizmente, tivemos pouco tempo para tirar grandes conclusões precisas sobre a experiência realizada, também não tivemos a oportunidade de realizar novamente esta atividade para um grupo de alunos de outra escola, pois neste semestre não estava lecionando em nenhuma turma do ensino médio na instituição a qual leciono.

Após fazer uma análise da oficina e das atividades desenvolvidas pelos alunos, percebemos que os alunos foram capazes de encontrar o ciclo Hamiltoniano na maioria das vezes que o grafo o admitia, e que dependendo da complexidade do grafo os alunos também conseguiram argumentar satisfatoriamente a não existência do ciclo. Como foi o caso dos grafos do item (3) da atividade I e dos itens (a) e (b) na atividade II, onde observaram rapidamente a impossibilidade do grafo do item (a) admitir um ciclo Hamiltoniano, devido a existência de um vértice de grau 1 e também, após passar algum tempo analisando, perceberam a não existência do ciclo Hamiltoniano nos grafos dos itens (3) e (b), devido ao vértice que separa o grafo em duas componentes conexas, Nova Iguaçu no caso do grafo do item (3) e v_5 no grafo do item (b). Penso que a partir das ideias e argumentações, oral e escrita, apresentadas os alunos começaram a perceber a versão de um vértice da condição necessária para um grafo ser Hamiltoniano. Já nos grafos mais complexos da atividade II, (e), (f) e (g), os alunos não conseguiram formular e argumentar satisfatoriamente o porquê da não existência.

Assim, ao cumprir o nosso papel de educadores críticos e voltar o nosso olhar para as atividades elaboradas percebemos que deveríamos ter elaborado, na atividade II, exemplos mais simples inicialmente, para os grafos presentes nos itens (e), (f) e (g), de maneira que os alunos tivessem a oportunidade de ir avançando gradativamente no desenvolvimento de suas habilidades, já que estes exemplos envolviam conceitos mais elaborados. Desta maneira, acreditamos que possivelmente alguns alunos conseguiriam conjecturar a não existência de ciclos Hamiltonianos em grafos bipartidos de ordem ímpar, como era o caso do grafo do item (e) ou talvez conjecturar a versão de dois vértices da condição necessária para um grafo ser Hamiltoniano, como era o caso do grafo do item (g). Obviamente precisaríamos de um tempo maior para que eles pudessem analisar cada um destes grafos com mais atenção.

Podemos então sintetizar os resultados presentes na análise da oficina quer sejam

habilidades desenvolvidas, quer peculiaridades do processo de aprendizagem, através das seguintes características observadas:

- Desenvolvimento gradual da habilidade de modelar os problemas propostos construindo grafos;
- Conhecimento do conceito de grafos Hamiltonianos, respondendo satisfatoriamente a maioria das questões propostas;
- Aparecimento de algumas conjecturas, a partir das ideias apresentadas;
- Utilização gradual da linguagem de grafos para discutirem as questões, empregando ao final, termos como vértices, arestas, ciclo Hamiltoniano, etc;
- Utilização da estrutura do grafo para facilitar a visualização e investigação do problema, bem como na simulação de possibilidades.

É importante ressaltar que ao iniciar o trabalho de elaborar esta atividade os objetivos e desdobramentos ainda não eram claros. Por isso, em seu desenvolvimento muitos pontos foram sendo esclarecidos e outras questões foram surgindo. Alguns fatores importantes como adequação da proposta ao currículo do ensino médio, a carga horária escolar, tempo de aplicação dessa atividade, avaliação dos resultados na aprendizagem e a formação do professor necessitam de uma investigação mais aprofundada. Nesse sentido, sugerimos como continuação desse trabalho:

- Experimentalmente, aplicar a atividade proposta em diferentes séries do ensino médio, com o objetivo de avaliar os resultados obtidos, para verificar em qual faixa etária é possível otimizar o aprendizado dos alunos em grafos.
- A elaboração de um material introdutório sobre Teoria dos Grafos compatível com o ensino médio, podendo ser utilizado tanto pelo professor quanto pelo aluno.
- Estudo sistemático da estrutura curricular de Matemática no ensino médio de outros países, apontando similaridades e diferenças, além de analisar as possíveis influências existentes sobre o currículo de Matemática do ensino médio do nosso país, buscando com isso a compreensão da estrutura curricular atual do Brasil.

Considerações Finais

Apresentamos no decorrer deste trabalho diferentes possibilidades de abordagem do tema Grafos Hamiltonianos no estudo e no ensino da matemática. Abordamos tanto aspectos históricos quanto técnicos, e descrevemos uma atividade para ser realizada com alunos do ensino fundamental e médio que engloba estas possibilidades.

O *The Icosian Game* propõem para os alunos um pequeno desafio envolvendo um dodecaedro, cuja abordagem pode levar a experimentação, formulação de conceitos, testes de ideias, elaboração de conjecturas, até a generalização, considerando outros poliedros, e problemas sobre eles.

Diferentemente do método de tentativa e erro que a grande maioria das pessoas utilizava para resolver o problema, Hamilton o resolvia utilizando um tipo especial de álgebra, associativa mas não comutativa. A solução dada por Hamilton para este problema foi apresentada no capítulo dois e pode ser considerada como uma possibilidade para o estudo das relações entre dois ramos diferentes da matemática.

Em homenagem a Hamilton, percursos como este que passam por todos os vértices uma única vez retornando ao vértice de origem foram denominados ciclos Hamiltonianos e os grafos que os contêm de Hamiltonianos. Quanto a questão de decidir sobre a possibilidade ou impossibilidade de um grafo admitir um ciclo Hamiltoniano, fizemos um estudo sistemático das condições suficientes, apresentando e demonstrando alguns teoremas clássicos, como os de Dirac [22] e Ore [18] e outros mais recentes, como os de Rahman e Kaykobad [20], Li [14], Mehedy et al. [17], Feng et al. [15] e Hasan et al. [13], baseados em propriedades estruturais dos grafos, mais especificamente, nos graus dos vértices e no comprimento do caminho mais curto. Muitas outras possibilidades de propriedades estruturais existem e seu estudo mais sistemático formam um bom tema para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Também abordamos outro quebra-cabeça que está relacionado a ciclos Hamiltonianos, o problema do passeio do cavalo em um tabuleiro de xadrez, ou *Knight's tour*. Apresentamos o método de resolução deste problema proposto em 1840 por Roget [21], e também apresentamos a demonstração dada em 1994 por Conrad [8] para a existência de caminhos Hamiltonianos no tabuleiro de xadrez $n \times n$ se, e somente se, $n \geq 5$. Este é outro tema que pode ser desenvolvido em uma atividade de ensino, que deixamos como sugestão de continuação deste trabalho.

Acreditando que o ensino da Teoria dos Grafos oferece uma ótima oportunidade de contribuir para a articulação da Matemática estudada no ensino médio com os temas atuais da ciência e da tecnologia, apresentamos uma atividade sobre ciclos Hamiltonianos que foi realizada com um grupo de alunos do ensino médio na Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ durante um evento em dezembro de 2013.

Ao elaborar a atividade, abordamos situações-problema onde estávamos interessados em investigar até qual nível de complexidade de um grafo o aluno conseguiria argumentar sobre a possibilidade ou impossibilidade deste grafo admitir ou não um ciclo Hamiltoniano. Estávamos interessados em saber também se seriam capazes de realizar conjecturas, mesmo que em casos particulares. Acreditamos que a escolha de resolução de problemas como metodologia de ensino foi acertada, pois permitiu ao aluno o desenvolvimento de habilidades, tais como explorar, analisar, modelar, generalizar, conjecturar e argumentar.

Acreditamos que os resultados da atividade nos mostram um caminho favorável para a possibilidade, importância e potencialidade deste assunto ser abordado no ensino médio. Para isso é necessário voltar nossa atenção para a formação de professores de Matemática, pois a inserção de tais temas no ensino médio, seja por meio de uma oficina, de uma mostra cultural, ou até mesmo de uma proposta pedagógica, tem necessariamente impacto nos programas dos cursos de licenciatura.

Referências Bibliográficas

- [1] BENHOCINE, A. e WOJDA, A. P., The Geng-Hua Fan conditions for pancyclic or Hamilton-connected graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 42 (1987) 167-180.
- [2] BERGE, C., *Graphs*. 3^a. ed., North-Holland, 1991.
- [3] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K. e WILSON, R. J., *Graph Theory - 1736-1936*. Clarendon Press, 1986.
- [4] BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*, vol. 3. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMT), Brasília, 2000.
- [5] BRASIL, *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, vol. 2. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB), Departamento de Políticas de Ensino Médio, Brasília, 2006.
- [6] CAMINHA, A., *Tópicos de Matemática Elementar, Vol. 4. Combinatória*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [7] CERIOLI, M. R., *Introdução à Teoria dos Grafos*. Notas de Aula de MAW123 - Matemática Finita, UFRJ, 2007.
- [8] CONRAD, A., HINDRICHS, T., MORSY, H. e WEGENER, I., Solutions of the knight's Hamiltonian path problem on chessboards. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 50 (1994) 125-134.
- [9] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E. e RIVEST, R. L., *Introduction to Algorithms*. MIT Press, 1990.
- [10] ESPÍRITO SANTO (ESTADO), Secretaria da Educação (SEDU); *Currículo Básico Escola Estadual - Ensino médio: Ciências da Natureza*. Vitória, 2009.
- [11] FAN, G., New sufficient conditions for cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, vol. 37 (1984) 221-227.

- [12] GOULD, R.J., Advances on the Hamiltonian problem - a survey. *Graphs and Combinatorics*, vol. 19 (2003) 7-52.
- [13] HASAN, M. K., KAYKOBAD, M., LEE, Y. K. e LEE, S., A comprehensive analysis of degree based condition for Hamiltonian cycles, *Theoretical Computer Science*, vol. 411 (2010) 285-287.
- [14] LI, R., A new sufficient condition for Hamiltonicity of graphs. *Information Processing Letters*, vol. 98 (2006) 159-161.
- [15] LI, S., LI, R. e FENG, J., An efficient condition for a graph to be Hamiltonian. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 155 (2007) 1842-1845.
- [16] MALTA, G. H. S., *Grafos no Ensino Médio - uma inserção possível*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.
- [17] MEHEDY, L., HASAN, M. K. e KAYKOBAD, M., An improved degree based condition for Hamiltonian cycles, *Information Processing Letters*, vol. 102 (2007) 108-112.
- [18] ORE, O., Note on Hamiltonian circuits. *The American Mathematical Monthly*, vol. 67 (1960) 55.
- [19] POLYA, G., *A Arte de Resolver Problemas - um novo aspecto do método matemático*. Interciência, 1995.
- [20] RAHMAN, M. S. e KAYKOBAD, M., On Hamiltonian cycles and Hamiltonian paths. *Information Processing Letters*, vol. 94 (2005) 37-41.
- [21] ROGET, P. M., Problem of the knight's move at chess. *Philosophical Magazine*, S. 3, vol. 16 (1840) 305-310.
- [22] WEST, D. B., *Introduction to Graph Theory*. 2ª. ed., Prentice Hall, 2002.