UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

A ESSÊNCIA DOS DETERMINANTES NA SUA ORIGEM

Carlos Danísio Macedo Silva

Juazeiro do Norte – CE

2014

CARLOS DANÍSIO MACEDO SILVA

A ESSÊNCIA DOS DETERMINANTES NA SUA ORIGEM

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Cariri, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção de grau de mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga

Juazeiro do Norte CE

2014

Agradecimentos

Ao Deus Altíssimo que faz tantas maravilhas a ponto de esquecemos de admirar os espetáculos naturais à nossa volta.

Agradeço aos meus pais, Murilo Silva e Maria Aldenir e a minha tia Lucíola Macedo que foi igualmente minha mãe, por terem me proporcionado, como prioridade, as melhores escolas no ensino básico.

Agradeço à minha amada esposa Darilene que durante este curso me acompanhou como colega e incentivadora nas horas penosas de conciliar o estudo e o trabalho.

Agradeço aos meus filhos muito amados, Clarice e Filipe e à minha neta igualmente amada, Flora Ribeiro, pela compreensão à minha necessária ausência de alguns momentos familiares.

Agradeço de modo especial, ao colega Rivelino Duarte pelo apoio com excelentes materiais de estudo que tão gentilmente nos disponibilizou.

Agradeço ao meu professor e amigo César Bandeira de Melo pela inspiração que me proporcionou com sua brilhante inteligência na busca do conhecimento científico.

Agradeço ao meu orientador professor Francisco Valdemiro Braga e de modo especial ao professor Paulo César e a todos os professores do PROFMAT que nos acompanharam neste curso mostrando-se sempre dispostos a nos ajudar.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o conceito de determinantes no nível secundário a fim de mostrar suas origens e algumas demonstrações que são omitidas nos livros didáticos. Desenvolvemos a ideia dos determinantes de ordem 2 auxiliados pelos sistemas lineares de duas equações e duas variáveis, associando matrizes quadradas e mostrando na sua resolução o denominador comum que se apresenta no cálculo de cada variável. Apresentamos a mesma ideia para os determinantes de ordem 3, associando a um sistema linear 3 por 3 para, em seguida demonstrar a regra de Sarrus e compará-la com a definição geral de determinantes dada por Laplace. No último capítulo apresentamos a definição de determinantes usando permutações sobre linhas ou colunas com o intuito de facilitar as demonstrações de algumas propriedades importantes que simplificam o cálculo de determinantes de ordem superior a 3. Ainda neste capítulo finalizamos com exercícios resolvidos de algumas questões consideradas complexas cuja solução fica bastante facilitada com o uso das propriedades.

Palavras-chave: Determinantes, sistemas lineares, regra de Sarrus, Laplace, demonstrações.

Abstract

The goal of this work is to present the concept of determinants in high-school level in order to show its origins and to formulate some demonstrations which are omitted in school books. The concept of second order determinants were developed using two equations and two variables linear systems, associating them to square matrices and exhibiting the common denominator which results from the calculation of each variable. The same idea was applied to develop third order determinants, this time associating with a 3 equations in 3 variables linear system to, then, demonstrate the rule of Sarrus and compare it with the general definition for determinants introduced by Laplace. In the last chapter, it's presented the definition of determinants using permutations in rows or columns in order to favor the demonstration of some important properties which simplify the calculation of determinants of order greater than 3. The chapter ends with the resolution of some complex questions whose calculation is much easier with the use of those properties.

Keywords: Determinants, linear systems, rule of Sarrus, Laplace, demonstrations.

Sumário

Introdução

O ensino básico da matemática tem passado, nos últimos anos, por algumas adequações devidas à implantação do exame nacional do ensino médio (ENEM) como único meio de acesso à maioria das universidades públicas.

Notou-se uma exagerada intenção de cobrar neste exame apenas os conteúdos mais fáceis de serem contextualizados. Os assuntos da matemática que os alunos não veem com facilidade uma aplicação prática, não são exigidos.

Nesse contexto enquadra-se o estudo das matrizes, determinantes, bem como dos números complexos, polinômios, funções trigonométricas e outros.

A cultura em voga, de que a matemática é difícil, que é uma ciência para uma minoria de inteligência privilegiada, provavelmente se sustenta pela forma como é ensinada. Dá-se muita ênfase na maneira de como resolver problemas (como fazer cada caso) sem a preocupação de compreender os conceitos e entender as demonstrações dos teoremas.

Este trabalho procura apresentar as demonstrações da teoria dos determinantes na sua origem com um nível acessível ao ensino médio, deixando um pouco de lado o rigor formal para atingir de maneira mais atraente o interesse por uma investigação mais profunda deste assunto.

Nos últimos vinte anos os livros didáticos mais adotados no Brasil trazem uma definição muita vaga de determinantes. É comum encontrar o seguinte: determinantes são números reais que associamos às matrizes quadradas de acordo com regras previamente estabelecidas.

A falta de uma definição geral mais esclarecedora impossibilita as demonstrações mínimas necessárias ao entendimento básico do conteúdo. Este fato é responsável pela forma com que os alunos do nível médio estudam determinantes apenas decorando propriedades e regras.

No primeiro capítulo deste trabalho veremos alguns aspectos históricos dos sistemas lineares e determinantes, citando alguns matemáticos que foram decisivos em suas contribuições para o desenvolvimento deste importante tema.

No capitulo 2 desenvolvemos algebricamente o conceito de determinantes nos sistemas lineares 2 por 2 e acrescentamos aplicações práticas com exemplos de resoluções. Usando a mesma ideia dos determinantes de ordem 2 inserimos o de ordem 3 mostrando passo a passo a demonstração da regra de Sarrus como uma simplificação da resolução dos sistemas lineares 3 por 3. A dedução desta regra preenche um vazio dos livros didáticos atuais que não a contemplam.

Ainda neste capítulo conceituamos cofator como ente necessário à definição geral de determinantes dada por Laplace.

Por ser bastante trabalhoso o cálculo direto dos determinantes pelo teorema de Laplace, inserimos no capítulo 3 o cálculo de determinantes por meio de permutações sobre linhas ou colunas baseado num trabalho de Cauchy.

A finalidade de apresentar o cálculo de determinantes por permutações não foi para substituir o método de Laplace, mas porque este método facilita consideravelmente o entendimento das propriedades dos determinantes, as quais são usadas para aplicar de modo indireto na obtenção de determinantes de ordem superior a 3.

Para encontrar determinantes de ordem maior que ou igual a 4 recorremos à regra de Chió que apresentamos como alternativa que reduz grandemente as trabalhosas multiplicações envolvidas no teorema de Laplace ou no processo das permutações de Cauchy.

Para finalizar nosso trabalho, apresentamos algumas resoluções de questões mais complexas, a fim de mostrar como o uso das propriedades pode facilitar suas soluções.

Capítulo 1 - Aspectos Históricos dos Sistemas Lineares, Matrizes e Determinantes

Alguns vestígios dos estudos das matrizes e determinantes foram encontrados no século VI antes de Cristo. No entanto, apenas no final do século XVII a ideia foi retomada e se desenvolveu até os nossos dias.

É notório que o uso de matrizes e determinantes está intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. As matrizes são utilizadas para facilitar a representação dos elementos essenciais na resolução dos sistemas lineares que são os coeficientes das variáveis.

Os sistemas lineares foram bastante usados pelos babilônios na resolução de problemas que envolviam duas equações e duas variáveis. Alguns desses problemas foram encontrados preservados em argila.

No segundo século antes de Cristo os chineses utilizaram as notações de matrizes no texto de Chui-Chang Suan-Shu, intitulado "Nove Capítulos da Arte Matemática", ao resolver um problema que recaia num sistema linear. O problema citado nesse texto era:

"Havia três tipos de milho: três pacotes do primeiro tipo, dois do segundo e um do terceiro, totalizando 39 unidades de milho. Dois pacotes do primeiro, três pacotes do segundo e um do terceiro somando 34 unidades e, um pacote do primeiro, dois do segundo e três do terceiro que totalizam 26 unidades. Sabendo que os pacotes de milho do mesmo tipo levam a mesma quantidade de unidades, quantas unidades do milho contém um pacote de cada tipo?"

A solução deste problema dada pelo autor foi, na época, no mínimo, original. Ele colocou em forma de tabela os coeficientes do sistema da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array} \qquad (*)$$

Depois mostrou a maneira de se chegar ao resultado de modo idêntico ao que conhecemos hoje por método de eliminação de Gauss.

Em notação moderna, o que fazemos é representar os tipos de milho por x, y e z e montar uma equação matricial formando as equações lineares com as linhas em vez de colunas. Veja a seguir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Notavelmente o autor chinês descreve passo a passo como chegar à tabela simplificada para encontrar a solução do problema. Veja a seguir as instruções:

1º Na tabela (*) multiplique a coluna do meio por 3 e subtraia duas vezes a terceira coluna resultando na tabela

1	0	3	(**)	2.3 – 3.2 = 0
2	5	2		3.3 – 2.2 = 5
3	1	1		1.3 – 1.2 = 1
26	24	39		34.3 – 39.2 = 102 – 78 = 24

2º Ainda na tabela (*) multiplique a primeira coluna por 3 e subtraia a terceira coluna resultando na tabela

0	0	3	(***)	1.3 – 3.1 = 0
4	5	2		2.3 – 2.1 = 4
8	1	1		3.3 – 1.1 = 8
39	24	39		26.3 – 39.1 = 78 – 39 = 39

3º Agora na tabela (***) multiplique a primeira coluna por 5 e subtraia a segunda coluna multiplicada por 4, resultando na tabela

0	0	3	0.5 – 0.4 = 0
0	5	2	4.5 – 5.4 = 0
36	1	1	8.5 – 1.4 = 36
99	24	39	39.5 – 24.4 = 195 – 96 = 99

Por fim, encontrou quantas unidades do terceiro tipo de milho existem no pacote. As unidades do primeiro e do segundo tipo são obtidas por substituição. É conveniente observar que o processo da eliminação que apareceu no livro citado anteriormente só foi usado em 1809, pelo matemático alemão Gauss (1777-1855), em um estudo feito entre 1803 e 1809 sobre a órbita do asteroide Pallas; nele aparece um sistema linear com 6 equações e 6 incógnitas.

A ideia de determinante surgiu simultaneamente na Alemanha e no Japão. Leibnitz (1649- 1716), em uma carta escrita para L'Hospital (1661-1704), sugeriu usar combinações dos coeficientes para resolver sistemas de equações lineares e, além disso, encontrou uma maneira de indexar tais coeficientes com números. No mesmo ano, no Japão, o matemático Seki Kowa (1642-1708) escreveu um livro apresentando sistemas lineares sob a forma matricial, como já tinha aparecido na matemática chinesa. Seki foi o primeiro matemático a calcular determinantes. Em seu livro ele apresentou vários exemplos, mas não mostrou algo que fosse válido em casos gerais.

O matemático escocês Colin MacLaurin (1698-1746) também comparece na história dos determinantes. Em 1730, MacLaurin escreveu um livro chamado Um Tratado de Álgebra onde apresentava uma regra para resolver sistemas lineares de *n* equações e *n* incógnitas que ficou conhecida pelo nome de regra de Cramer por ter sido desenvolvida independentemente e ao mesmo tempo pelo matemático suíço Gabriel Cramer.

Ainda no século XVIII, dois matemáticos franceses de renome, Étienne Bezout e Alexandre Vandermonde, construíram a teoria dos determinantes dissociada do estudo dos sistemas de equações lineares.

O termo **determinante**, que inicialmente pensava-se ter sido usado pela primeira vez por Gauss, na realidade deve-se a Cauchy que usou em 1812, num trabalhou no qual ele sintetizou o assunto e melhorou bastante a notação empregada até então. Já se sabe que o termo determinante usado por Gauss em 1801 era associado às propriedades que determinavam as formas quádricas. Portanto não é o mesmo determinante como o conhecemos hoje.

A teoria dos determinantes, como a conhecemos hoje, se deve ao matemático alemão Carl Gustav Jacobi (1804 – 1851) cognominado muitas vezes como o Grande Algorista. Deve-se a ele a forma simples como essa teoria se apresenta hoje de forma elementar. Como algorista ele acreditava entusiasticamente nas potencialidades da notação dos determinantes como ferramenta capaz de resolver problemas bastante complexos nas diversas áreas do conhecimento, como a física e a economia e até em outras partes da própria matemática.

Capítulo 2 - Determinantes

2.1 Desenvolvendo a Ideia do Determinante da Matriz 2 x 2.

Alguns problemas de aritmética são facilmente solucionados com o auxílio de sistemas de equações.

Vejamos por exemplo, a seguinte situação:

Numa partida de basquete disputada por dois times, o cestinha do jogo marcou 42 pontos com cestas de 2 ou 3 pontos. Quantas cestas de 3 pontos ele marcou, sabendo que o número das cestas de 2 pontos foi o dobro do número das de 3 ?

Este é um problema bastante simples que pode ser resolvido com o uso de sistemas, ainda com a vantagem de operar apenas com números naturais.

A construção das equações resulta no sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ x = 2y \end{cases}$, onde *x* indica o número de cestas de 2 e *y* o número de cestas de 3.

No ensino fundamental três métodos são apresentados para resolver este tipo de sistema. Adição, comparação e substituição. O método da adição que vamos escolher para este caso é mais indicado por facilitar a generalização das resoluções dos sistemas 2 x 2 que apresentaremos posteriormente.

Vejamos: $\begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 42 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$. Multiplicando a 2ª equação por –2 e somando com a 1ª teremos:

$$-2x + 4y + 2x + 3y = -2.0 + 42 \Leftrightarrow 7y = 42 \Leftrightarrow y = 6.$$

Portanto aconteceram **6 cestas** de 3 pontos.

Há diversos tipos de problemas que geram na resolução sistemas lineares de duas equações e duas variáveis – chamaremos de sistema quadrado dois por dois – e cuja solução pode ser constituída de números reais não necessariamente inteiros.

Vamos apresentar um problema que resolveremos montando um sistema linear 2 por 2 cuja solução não será um número inteiro.

Dois automóveis A e B percorrem uma rodovia, no mesmo sentido, com velocidades constantes de 60km/h e 80km/h respectivamente. Se num determinado instante o automóvel A estava no quilômetro 110 e B estava no quilômetro 27, quantas horas depois desse instante B alcançará A?

<u>SOLUÇÃO</u>:

Seja S_A a posição de A, em quilômetros, no instante t; S_B a posição de B, em quilômetros, no instante t e seja t o tempo em horas.

Para o automóvel A temos: $S_A = 110 + 60.t$ e

Para o automóvel B temos: $S_B = 27 + 80.t$.

O automóvel B alcançará A quando estiverem na mesma posição na rodovia, ou seja, quando a posição de A for a mesma de B. Portanto teremos $S_A = S_B$.

Então, $27 + 80.t = 110 + 60.t$. Resolvendo a equação fica $20.t = 83$. Portanto teremos $t = 4,15$ horas.

Logo B alcançará A em 4,15 horas.

A resolução acima apresentada é conhecida como método da comparação que consiste em comparar os valores da mesma variável obtidos nas duas equações.

Para resolver um sistema 2 x 2 vamos usar um critério de eliminação de variáveis que equivale ao método da adição.

SITUAÇÃO 1: Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 1x + 5y = 12 \end{cases}$.

Utilizando o método da adição vamos multiplicar a primeira equação por 5 e a segunda por (–3) a fim de eliminar a variável *y* quando somarmos as equações. Veja.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \quad .(5) \\ 1x + 5y = 12 \quad .(-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 40 \\ -3x - 15y = -36 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos: $10x + 15y - 3x - 15y = 40 - 36 \Leftrightarrow 7x = 4$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{x = \frac{4}{7}}$

Agora vamos usar um raciocínio análogo para eliminar a variável *x*. Basta multiplicar a primeira equação por (–1) e a segunda por 2.

$\begin{cases} 2x + 3y = 8 & .(-1) \\ 1x + 5y = 12 & .(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 3y = -8 \\ 2x + 10y = 24 \end{cases}$. Somando as duas equações ficamos com:

$-2x - 3y + 2x + 10y = -8 + 24 \Leftrightarrow 7y = 16 \Leftrightarrow y = \frac{16}{7}$.

Daí, podemos dizer que o sistema original $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 1x + 5y = 12 \end{cases}$ equivale a $\begin{cases} 7x + 0y = 4 \\ 0x + 7y = 16 \end{cases}$ cuja solução é $S = \left\{\left(\frac{4}{7}, \frac{16}{7}\right)\right\}$.

A seguir vamos resolver um sistema 2 por 2 com coeficientes literais e variáveis *x* e *y*, com o intuito de generalizar a solução desse tipo de sistema em determinadas condições.

SITUAÇÃO 2: Consideremos o sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$. Levando em consideração que $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ para que as equações não sejam equivalentes.

Usando a mesma ideia da situação 1 vamos multiplicar a primeira equação por (e) e a segunda por (–b). Veja.

$$\begin{cases} ax + by = c & .(e) \\ dx + ey = f & .(-b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae.x + be.y = c.e \\ -bd.x - be.y = -f.b \end{cases}.$$

Somando as duas equações obtemos: $ae.x + be.y - bd.x - be.y = c.e - b.f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a.e - b.d).x = c.e - b.f \Leftrightarrow x = \frac{c.e - b.f}{a.e - b.d}$.

Agora vamos multiplicar a primeira equação por (–d) e a segunda por (a) para eliminar a variável x e encontrar y. Assim, $\begin{cases} ax + by = c & .(-d) \\ dx + ey = f & .(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ad.x - bd.y = -cd \\ ad.x + ae.y = af \end{cases}$

Somando as duas equações ficamos com:

$$-ad.x - bd.y + ad.x + ae.y = af - cd \Leftrightarrow (a.e - b.d).y = a.f - c.d \Leftrightarrow y = \frac{a.f - c.d}{a.e - b.d}$$

$\Rightarrow S = \left\{\left(\frac{ce - bf}{ae - bd}, \frac{af - cd}{ae - bd}\right)\right\}$. Observe nesta situação que os denominadores dos valores de x e y foram iguais a $(ae - bd)$.

No cálculo das variáveis note que foram usados apenas os coeficientes (a, b, d, e) e os termos independentes (c, f).

Então vamos separar os coeficientes e os termos independentes dispondo-os num esquema retangular, de maneira a conservar suas posições, que chamaremos de matriz. Coloquemos os elementos entre colchetes (ou parênteses) e vamos convencionar as seguintes matrizes extraídas do sistema da situação 2.

O sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

As matrizes: $M_S = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ chamada de matriz do sistema ou dos coeficientes;

$M_x = \begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}$ matriz obtida do sistema trocando a coluna dos coeficientes de x pela coluna dos termos independentes e $M_y = \begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}$ matriz obtida do sistema trocando a coluna dos coeficientes de y pela coluna dos termos independentes.

Vamos agora, em cada matriz, multiplicar os elementos em cruz e subtrair os resultados. Assim,

$M_S = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \Rightarrow a.e - b.d$

$M_x = \begin{pmatrix} c & b \\ f & e \end{pmatrix} \Rightarrow c.e - b.f$

$M_y = \begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} \Rightarrow a.f - c.d$

A esta operação damos o nome de **determinante.**

Observando a expressão (a.e – b.d) que aparece no denominador do valor de x e de y, podemos deduzir que em todo sistema 2 por 2 a expressão (a.e – b.d) determina as condições para que exista o valor da variável ou para que ela seja indeterminada. Daí o nome **determinante**.

Convencionou-se que o determinante de uma matriz é expresso, por exemplo, na forma: para M_S, $detM_S = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = a.e - bd$; para M_x, $detM_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = c.e - b.f$ e para M_y, $detM_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = a.f - c.d$.

Então para o cálculo do valor de x vimos $x = \frac{c.e - b.f}{a.e - b.d}$ que equivale a $x = \frac{detM_x}{detM_S}$. E, para $y = \frac{a.f - c.d}{a.e - b.d}$ que equivale a $y = \frac{detM_y}{detM_S}$

Note que os elementos da matriz colocados entre barras paralelas indica o determinante dela. Os elementos $\underline{a}$ e $\underline{e}$ formam o que chamamos de diagonal principal e os elementos $\underline{b}$ e $\underline{d}$ formam a diagonal secundária.

Vamos resolver mais um sistema linear 2 por 2 usando agora a regra dos determinantes.

Consideremos o sistema: $\begin{cases} 5x - y = 2 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$.

Destacando as matrizes do sistema e calculando seus respectivos determinantes,

$M_S = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow detM_S = 5.3 - (-1).4 \Rightarrow detM_S = 19.$

$M_x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow detM_x = 2.3 - (-1).7 \Rightarrow detM_x = 13.$

$M_y = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow detM_y = 5.7 - 2.4 \Rightarrow detM_y = 27.$

Então, $x = \frac{detM_x}{detM_S} = \frac{13}{19}$ e $y = \frac{detM_y}{detM_S} = \frac{27}{19}$.

Para verificar que, de fato, os valores encontrados formam a solução do sistema, basta substituir nas equações para encontrar sentenças verdadeiras. Veja a seguir:

Na primeira equação: $5.\frac{13}{19} - \frac{27}{19} = \frac{65}{19} - \frac{27}{19} = \frac{38}{19} = 2$ (V).

Na segunda equação: $4.\frac{13}{19} + 3.\frac{27}{19} = \frac{52}{19} + \frac{81}{19} = \frac{133}{19} = 7$ (V).

Confirmando o conjunto solução: $S = \left\{\left(\frac{13}{19}, \frac{27}{19}\right)\right\}$.

Este método de resolução de um sistema linear normal[1] é conhecido como Regra de Cramer em homenagem ao matemático suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752) que o demonstrou.

Embora não seja o método mais rápido para resolver um sistema quadrado ele constitui um algoritmo aplicável em sistemas computacionais.

Importante lembrar que esta regra de Cramer não pode ser usada para classificar um sistema linear porque ele só garante a classificação do sistema possível determinado, caso em que se tem $detM_S \neq 0$.

[1]É o sistema linear que apresenta o número de linhas igual ao número de colunas e o determinante da matriz dos coeficientes é diferente de zero.

2.2 Classificação dos sistemas lineares dois por dois

Vejamos a seguir dois exemplos para analisarmos o que acontece quando, em um sistema 2 x 2, tivermos o determinante do sistema igual a zero. Ou seja, $\det M_S = 0$.

<u>Exemplo 1</u>: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow M_S = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M_S = 2.(-6) - (-3).4 \Rightarrow \det M_S = 0.$

Aqui surge um problema que precisa ser investigado. Se $\det M_S = 0$, como vamos encontrar o valor das variáveis, já que o denominador ficará anulado? Lembre que $x = \frac{\det M_x}{\det M_S}$ e $y = \frac{\det M_y}{\det M_S}$. Porém, examinando mais cuidadosamente este sistema, vemos que a segunda equação é equivalente à primeira. Observe: $2x - 3y = 7$, multiplicando por 2 fica: $4x - 6y = 14$. Então, neste caso, as duas equações equivalem a uma só. Portanto o sistema é possível, porém indeterminado, pois podemos encontrar uma infinidade de soluções. Vejamos por exemplo: (5, 1), (2, –1), (–1, –3), ... Ou seja, qualquer par ordenado da forma $\left(k, \frac{2k-7}{3}\right)$ com $k \in \mathbf{R}$.

Observemos o exemplo 2 a seguir.

<u>Exemplo 2</u>: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow M_S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \det M_S = 1.6 - 2.3 \Rightarrow \det M_S = 0.$

Mais uma vez, como $\det M_S = 0$, as variáveis não podem ser calculadas pela Regra de Cramer pois ocorreria zero no denominador. Outra vez, examinando as equações, note que temos uma incoerência, pois se multiplicarmos a primeira equação por 3 obtemos $3x + 6y = 15$. Mas, como os primeiros membros das duas equações são iguais e os resultados, nos segundos membros, são diferentes, estas equações são contraditórias, daí conclui-se que o sistema é impossível ou incompatível e sua solução é o conjunto vazio.

Sintetizando a classificação dos sistemas lineares 2 x 2 podemos escrever:

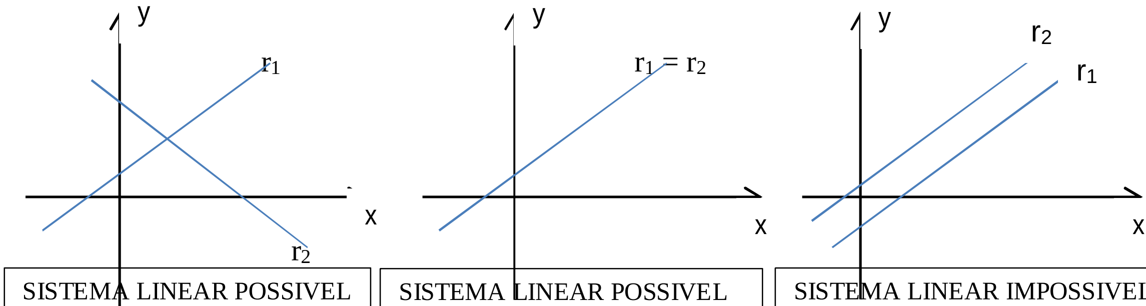
Se $\det M_S \neq 0$ então o sistema é possível e determinado e admite solução única;

Se $\det M_S = 0$ então o sistema será impossível ou será indeterminado. Neste caso precisamos verificar os determinantes de M_x e de M_y. De sorte que se tivermos $\det M_x = \det M_y = 0$ o sistema será indeterminado e se $\det M_x \neq 0$ ou $\det M_y \neq 0$ o sistema será impossível e não admitirá solução alguma.

É bastante relevante mencionar que a classificação descrita acima, quando se tem $\det M_S = 0$, não vale para sistemas lineares com mais de duas variáveis. Este fato será justificado quando fizermos o estudo dos sistemas 3 por 3.

2.3 Análise Gráfica do Sistema 2 x 2

Sabe-se que toda equação linear de duas variáveis representa em $\mathbf{R^2}$ uma reta. Então classificando graficamente um sistema linear 2 x 2, temos para o sistema linear possível e determinado um par de retas concorrentes; para o sistema linear possível e indeterminado duas retas coincidentes e para o sistema linear impossível duas retas paralelas. Veja as figuras abaixo:



SISTEMA LINEAR POSSIVEL DETERMINADO – apenas um ponto pertence às duas retas

SISTEMA LINEAR POSSIVEL INDETERMINADO – todo ponto de r_1 pertence também a r_2

SISTEMA LINEAR IMPOSSIVEL – não há ponto de interseção

2.4 Sistemas Lineares 3 x 3

Consideremos o sistema linear S de três equações e três variáveis do exemplo abaixo que usaremos na resolução um processo conhecido por **método de eliminação de Gauss**. Este processo consiste em eliminar variáveis de algumas equações adequadamente obtendo um sistema equivalente que seja mais simples. Para isso vamos usar algumas operações para alterar as equações sem mudar a solução do sistema. São chamadas operações elementares. Algumas delas são: multiplicar uma equação por algum número real; somar uma equação com outra após multiplicar a outra por algum número real; trocar a posição de algumas equações,

Exemplo: Resolver o sistema S: $\begin{cases} x - 3y + z = 8 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$.

<u>SOLUÇÃO</u>: primeiro vamos eliminar a variável x da segunda equação e também da terceira. Para isso vamos substituir a segunda equação pela soma dela com a primeira multiplicada por (–2). Teremos:

$2x + y - 2z - 2.(x - 3y + z) = 6 - 2.8 \Leftrightarrow 7y - 4z = -10.$

Agora vamos substituir a terceira equação pela soma dela com a primeira multiplicada por (–5). Teremos:

$5x + 4y + 3z - 5.(x - 3y + z) = 4 - 5.8 \Leftrightarrow 19y - 2z = -36.$

Com estas eliminações o sistema transformou-se em S': $\begin{cases} x - 3y + z = 8 \\ 7y - 4z = -10 \\ 19y - 2z = -36 \end{cases}$.

Note que foi muito fácil eliminar o x da segunda e da terceira equação porque na primeira o x tem coeficiente igual a 1.

Agora em S' vamos trabalhar com as duas últimas equações para eliminar uma variável. É conveniente eliminar logo a variável z, pois, 4 é múltiplo de 2, então basta multiplicar a terceira equação por (–2) e somar com a segunda. Daí teremos no lugar da segunda:

$7y - 4z - 2.(19y - 2z) = -10 - 2.(-36) \Leftrightarrow -31y = 62 \Leftrightarrow y = -2.$

Agora vamos organizar o sistema trocando a segunda pela terceira equação obtendo o sistema equivalente S" : $\begin{cases} x - 3y + z = 8 \\ 19y - 2z = -36 \\ y = -2 \end{cases}$. Veja que a terceira equação ficou apenas com uma variável, a segunda com duas e a primeira com três. Então já temos y = –2. Substituindo na segunda equação de S" fica:

$19.(-2) - 2z = -36 \Leftrightarrow -38 - 2z = -36 \Leftrightarrow z = -1$. Já sabendo o valor de y e o de z vamos substituir na primeira equação de S" e encontrar x.

Assim, $x - 3.(-2) + (-1) = 8 \Leftrightarrow x + 6 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = 3.$

Daí a solução do sistema é S = {(3, –2, –1)} que é única.

Inspirado na resolução que acabamos de fazer, vamos resolver algebricamente um sistema 3 x 3. Para isso vamos representá-lo genericamente de uma forma mais conveniente. Como os coeficientes serão letras, representaremos as variáveis por x_1, x_2 e x_3, os coeficientes serão representados da forma a_{ij} em que i representa a equação e j representa o índice da variável. Os termos independentes serão chamados de b_1, b_2 e b_3.

Assim o sistema 3 x 3 fica:

$$\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 = b_3 \end{cases}$$

. Resolvendo este sistema algebricamente:

Para anular os coeficientes de x_1 na segunda e na terceira equação, podemos:

– multiplicar a primeira por $\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right)$ e somar com a segunda;

– multiplicar a primeira por $\left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right)$ e somar com a terceira.

Daí, a segunda equação fica:

$$\cancel{a_{21}.x_1} + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 + \left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right).\left(\cancel{a_{11}.x_1} + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3\right) = b_2 + b_1.\left(\frac{-a_{21}}{a_{11}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{12}\right).x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}.a_{13}\right).x_3 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}.b_1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}}{a_{11}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13}}{a_{11}}\right).x_3 = \frac{a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1}{a_{11}} \Leftrightarrow$$

$(a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}).x_2 + (a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13}).x_3 = a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1$ (2ª equação sem x_1)

Analogamente, eliminando x_1 da terceira equação:

$$\cancel{a_{31}.x_1} + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 + \left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right).\left(\cancel{a_{11}.x_1} + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3\right) = b_3 + b_1.\left(\frac{-a_{31}}{a_{11}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}.a_{12}\right).x_2 + \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}.a_{13}\right).x_3 = \frac{a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1}{a_{11}} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12}}{a_{11}}\right).x_2 + \left(\frac{a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13}}{a_{11}}\right).x_3 = \frac{a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1}{a_{11}} \Leftrightarrow$$

$(a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12}).x_2 + (a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13}).x_3 = a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1$ (3ª equação sem x_1)

Formando um sistema com as variáveis x_2 e x_3 e resolvendo-o pela Regra de Cramer:

$$\begin{cases} (a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}).x_2 + (a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13}).x_3 = a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1 \\ (a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12}).x_2 + (a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13}).x_3 = a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1 & a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13} \\ a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1 & a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} & a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13} \\ a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12} & a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13} \end{vmatrix}} \Leftrightarrow$$

$$x_2 = \frac{(a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1).(a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13}) - (a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13}).(a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1)}{(a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}).(a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13}) - (a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13}).(a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12})} \Leftrightarrow$$

$$x_2 =$$

$$\frac{a_{11}^2 a_{33} b_2 - a_{11} a_{31} a_{13} b_2 - a_{11} a_{21} a_{33} b_1 + \cancel{a_{13} a_{21} a_{31} b_1} - a_{11}^2 a_{23} b_3 + a_{11} a_{23} a_{31} b_1 + a_{11} a_{13} a_{21} b_3 - \cancel{a_{13} a_{21} a_{31} b_1}}{a_{11}^2 a_{22} a_{33} - a_{11} a_{22} a_{31} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{11} a_{33} + \cancel{a_{21} a_{12} a_{31} a_{13}} - a_{11}^2 a_{23} a_{32} + a_{11} a_{23} a_{31} a_{12} + a_{21} a_{13} a_{11} a_{32} - \cancel{a_{21} a_{12} a_{31} a_{13}}}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{a_{11}.(a_{11} a_{33} b_2 - a_{31} a_{13} b_2 - a_{21} a_{33} b_1 - a_{11} a_{23} b_3 + a_{23} a_{31} b_1 + a_{13} a_{21} b_3)}{a_{11}.(a_{11} a_{22} a_{33} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{23} a_{31} a_{12} + a_{21} a_{13} a_{32})}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{a_{11} a_{33} b_2 + a_{23} a_{31} b_1 + a_{13} a_{21} b_3 - a_{31} a_{13} b_2 - a_{21} a_{33} b_1 - a_{11} a_{23} b_3}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} & a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1 \\ a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12} & a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12} & a_{11}.a_{23} - a_{21}.a_{13} \\ a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12} & a_{11}.a_{33} - a_{31}.a_{13} \end{vmatrix}}$$

Já temos o valor do denominador, obtido no cálculo de x_2.

$$x_3 = \frac{(a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}).(a_{11}.b_3 - a_{31}.b_1) - (a_{11}.a_{32} - a_{31}.a_{12}).(a_{11}.b_2 - a_{21}.b_1)}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{23} a_{31} a_{12} + a_{21} a_{13} a_{32} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}} \Leftrightarrow$$

$$x_3 = \frac{a_{11}^2 a_{22} b_3 - a_{11} a_{31} a_{22} b_1 - a_{11} a_{21} a_{12} b_3 + \cancel{a_{12} a_{21} a_{31} b_1} - a_{11}^2 a_{32} b_2 + a_{11} a_{32} a_{21} b_1 + a_{12} a_{31} a_{11} b_2 - \cancel{a_{12} a_{21} a_{31} b_1}}{a_{11}(a_{11} a_{22} a_{33} + a_{23} a_{31} a_{12} + a_{21} a_{13} a_{32} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32})}$$

$$\Leftrightarrow x_3 = \frac{a_{11}(a_{11} a_{22} b_3 - a_{31} a_{22} b_1 - a_{21} a_{12} b_3 - a_{11} a_{32} b_2 + a_{32} a_{21} b_1 + a_{12} a_{31} b_2)}{a_{11}(a_{11} a_{22} a_{33} + a_{23} a_{31} a_{12} + a_{21} a_{13} a_{32} - a_{22} a_{31} a_{13} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32})}$$

$$\Leftrightarrow x_3 = \frac{a_{11} a_{22} b_3 + a_{32} a_{21} b_1 + a_{12} a_{31} b_2 - a_{31} a_{22} b_1 - a_{21} a_{12} b_3 - a_{11} a_{32} b_2}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

Usando um processo totalmente análogo, se eliminarmos no sistema 3 x 3 a variável x_3 da segunda e da terceira equação e formarmos um sistema com as variáveis x_1 e x_2, para o valor de x_1, obtemos:

$$x_1 = \frac{a_{22} a_{33} b_1 + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} a_{32} b_2 - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} a_{33} b_2 - a_{32} a_{23} b_1}{a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}}$$

Voltando ao sistema $\begin{cases} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 = b_2 \\ a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 = b_3 \end{cases}$, vamos escrever as matrizes:

$M_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ que é a matriz dos coeficientes.

A expressão que aparece no denominador das variáveis x_1, x_2 e x_3, será chamada determinante da matriz M_S (lembre que M_S é a matriz dos coeficientes) . Ou seja,

$$\det M_S = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Observe o esquema conhecido por regra de Sarrus organizado pelo matemático francês Pierre Frederic Sarrus, para obter esses seis produtos de uma forma prática:

– repetem-se as duas primeiras colunas à direita da matriz e efetuam-se as multiplicações como se vê abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$-(a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33}) + (a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32})$$

– os produtos obtidos na direção da diagonal principal permanecem com o mesmo sinal, e os produtos obtidos na direção da diagonal secundária mudam de sinal.

Exemplo: Calcular o determinante da matriz A = $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

SOLUÇÃO:

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}$$

$$-18 \quad +20 \quad -2 \qquad -20 \quad +12 \quad +3$$

detA = –20 + 12 + 3 – 18 + 20 + 3 $\Rightarrow$ detA = –5

Assim como fizemos no sistema 2 x 2, vamos destacar, além da matriz M_S já mencionada, as matrizes:

$M_{x_1} = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, obtida do sistema substituindo a coluna dos x_1 pela coluna dos termos independentes, cujo determinante, aplicando a regra de Sarrus é dado por:

$\det M_{x_1} = a_{22}a_{33}b_1 + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}a_{32}b_2 - a_{13}a_{22}b_3 - a_{12}a_{33}b_2 - a_{23}a_{32}b_1$.

Veja que $\det M_{x_1}$ corresponde à expressão que aparece no numerador da variável x_1.

$M_{x_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}$, obtida do sistema substituindo a coluna dos x_2 pela coluna dos termos independentes, cujo determinante, aplicando a regra de Sarrus é dado por: $\det M_{x_2} = a_{11}a_{33}b_2 + a_{23}a_{31}b_1 + a_{13}a_{21}b_3 - a_{13}a_{31}b_2 - a_{21}a_{33}b_1 - a_{11}a_{23}b_3$.

Expressão que aparece no numerador da variável x_2.

$M_{x_3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$, obtida do sistema substituindo a coluna dos x_3 pela coluna

dos termos independentes, cujo determinante é dado por:

$\det M_{x_3} = a_{11}a_{22}b_3 + a_{21}a_{32}b_1 + a_{12}a_{31}b_2 - a_{22}a_{31}b_1 - a_{12}a_{21}b_3 - a_{11}a_{32}b_2$.

Expressão que aparece no numerador da variável x_3.

Podemos agora escrever, de um modo geral, a solução do sistema normal 3 por 3 em função dos determinantes das matrizes extraídas do sistema, assim: $S = \left\{\left(\frac{\det M_{x_1}}{\det M_S}, \frac{\det M_{x_2}}{\det M_S}, \frac{\det M_{x_3}}{\det M_S}\right)\right\}$.

Para os determinantes de ordem maior que 3 o matemático francês Pierre Simon de Laplace demonstrou uma propriedade que generaliza o cálculo de qualquer determinante.

Vejamos para a matriz 3 por 3.

$M_S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det M_S = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Fixando a primeira linha, vamos juntar os dois termos que apresentam a_{11}, os dois que apresentam a_{12} e os dois que apresentam a_{13} . Assim,

$\det M_S = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$\Rightarrow \det M_S = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$

$\Rightarrow \det M_S = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

Note que:

➡ o elemento a_{11} multiplica o determinante da matriz obtida quando se elimina a linha 1 e a coluna 1 (este determinante é chamado de menor complementar referente ao elemento a_{11} e representa-se por D_{11});

➡ o elemento a_{12} multiplica o determinante da matriz obtida quando se elimina a linha 1 e a coluna 2 (este determinante é chamado de menor complementar referente ao elemento a_{12} e representa-se por D_{12});

➡ o elemento a_{13} multiplica o determinante da matriz obtida quando se elimina a linha 1 e a coluna 3 (este determinante é chamado de menor complementar referente ao elemento a_{13} e representa-se por D_{13});

Definição: *chama-se menor complementar referente a um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada M ao determinante da matriz obtida eliminando a linha i e a coluna j de M. Indica-se por D_{ij}.*

Com a definição de menor complementar podemos reescrever o determinante de M_S assim:

$$\det M_S = a_{11}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det M_S = a_{11}.D_{11} - a_{12}.D_{12} + a_{13}.D_{13}\,.$$

Veja que D_{11} ficou precedido de sinal positivo, D_{12} ficou precedido de sinal negativo e D_{13} precedido de sinal positivo. Esta alternância de sinais conduz à definição de cofator.

Definição: *chama-se COFATOR referente a um elemento a_{ij} de uma matriz quadrada M ao produto da expressão $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar referente ao elemento a_{ij}.*

Indica-se por $\mathrm{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}.D_{ij}$.

Assim, podemos colocar: $\det M_S = a_{11}.\,\mathrm{cof}(a_{11}) + a_{12}.\,\mathrm{cof}(a_{12}) + a_{13}.\,\mathrm{cof}(a_{13})$.

Este é o cálculo do determinante de ordem 3 desenvolvido pela primeira linha.

Vamos agora, fixar a segunda linha. Juntando os dois termos que apresentam a_{21}, os dois que apresentam a_{22} e os dois que apresentam a_{23} . Assim,

$$\det M_S = \boxed{a_{11}a_{22}a_{33}} - \boxed{a_{11}a_{23}a_{32}} + \boxed{a_{12}a_{23}a_{31}} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - \boxed{a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$\Rightarrow \det M_S = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$\Rightarrow \det M_S = -a_{21}.\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ daí, em relação aos menores complementares, temos:

$\det M_S = -a_{21}.D_{21} + a_{22}.D_{22} - a_{23}.D_{23}$ e em relação aos cofatores temos:

$\det M_S = a_{21}.\,\mathrm{cof}(a_{21}) + a_{22}.\,\mathrm{cof}(a_{22}) + a_{23}.\,\mathrm{cof}(a_{23})$.

Analogamente, se fixarmos a terceira linha obteremos:

$\det M_S = a_{31}.\,\mathrm{cof}(a_{31}) + a_{32}.\,\mathrm{cof}(a_{32}) + a_{33}.\,\mathrm{cof}(a_{33})$.

Interessante constatar que se fixarmos as colunas encontraremos o mesmo valor para $\det M_S$. Ou seja, fixando a primeira coluna obteremos:

$\det M_S = a_{11}.\,\mathrm{cof}(a_{11}) + a_{21}.\,\mathrm{cof}(a_{21}) + a_{31}.\,\mathrm{cof}(a_{31})$; fixando a segunda coluna obteremos:

detM$_S$ = a_{12}. cof(a_{12}) + a_{22}. cof(a_{22}) + a_{32}. cof(a_{32}); fixando a terceira coluna obteremos:

detM$_S$ = a_{13}. cof(a_{13}) + a_{23}. cof(a_{23}) + a_{33}. cof(a_{33}).

Deste modo, o determinante da matriz 3 por 3 pode ser obtido a partir de uma linha (ou coluna), multiplicando cada um de seus elementos pelos respectivos cofatores e somando os resultados.

Este cálculo do determinante da matriz 3 por 3 foi generalizado pelo matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749-1827) para qualquer tipo de matriz quadrada. Laplace percebeu os padrões nas simplificações equivalentes ao que foi mostrado na matriz 3 por 3 e estabeleceu a definição geral de determinante que ficou conhecida por teorema de Laplace, enunciado a seguir.

Teorema de Laplace – O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer pelos respectivos cofatores. Entenda-se fila como linha ou coluna.

Este teorema de Laplace, como mostramos acima, é apenas uma das apresentadas por este grande matemático. Escolhemos esta que trata do desenvolvimento do determinante em relação a uma fila, por ser a mais acessível ao ensino básico e por atender totalmente aos propósitos desse estudo.

OBS.: Considere nesta definição de Laplace que det[a_{11}] = a_{11}.

Ex.: Se A = [–3] então detA = –3

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule seu determinante usando a definição de Laplace.

Solução: Usando o desenvolvimento na primeira linha, fica: detA = 2.cof(2) + 1.cof(1) $\Rightarrow$ detA = 2.(–1)$^{1+1}$.|5| + 1.(–1)$^{1+2}$.|3| $\Rightarrow$ detA = 10 – 3 $\Rightarrow$ detA = 7.

Note que não há nenhuma vantagem em usar a definição de Laplace na matriz 2 por 2 e nem na matriz 3 por 3.

Vejamos no caso da matriz 4 por 4.

Exemplo: Calcule o determinante de A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

SOLUÇÃO:

Usando o teorema de Laplace podemos escolher a primeira linha e desenvolver:

detA = 2.cof(2) + 0.cof(0) + 1.cof(1) + 3.cof(3).

Vamos calcular os cofatores:

$$cof(2) = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow cof(2) = -9 - 8 - 2 - 24 \Rightarrow cof(2) = -43$$

$$cof(1) = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow cof(1) = -6 + 6 + 20 + 27 \Rightarrow cof(1) = 47$$

$$cof(3) = (-1)^{1+4}.\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow cof(3) = -1.(4 + 15 + 12 + 40 - 18 + 1) \Rightarrow cof(3) = -54$$

Então $detA = 2.(-43) + 1.47 + 3.(-54) \Rightarrow detA = -86 + 47 - 162 \Rightarrow \boxed{detA = -201}$

Capítulo 3 - Cálculo do Determinante e Propriedades

3.1 Cálculo de Determinantes Usando Permutações

A ideia de calcular determinantes usando permutações sobre linhas ou colunas que vamos apresentar baseia-se num trabalho do matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Este método das permutações facilita bastante o entendimento de importantes propriedades que vão auxiliar em modos mais práticos e bem mais rápidos de se encontrar determinantes de ordem superior a 3.

Para entender o cálculo dos determinantes por permutações vamos considerar o que ocorre no determinante da matriz 3 por 3.

Seja A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Já sabemos pela regra de Sarrus que

detA = $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Observação 1: escrevemos os produtos para formar o determinante conservando sempre a ordem crescente dos primeiros índices. Observe também que em cada produto ocorrem sempre três termos sendo um único de cada linha e um único de cada coluna.

A primeira parcela ($a_{11}a_{22}a_{33}$) será chamada de permutação direta ou fundamental, por ter os primeiros índices em ordem e os segundos também. Ou seja, olhando só os primeiros índices vemos (1 2 3) e o mesmo ocorre quando olhamos só os segundos índices.

Na segunda parcela ($a_{12}a_{23}a_{31}$), vemos os segundos índices (2 3 1).

Note que observando a sequência da esquerda para a direita temos o 2 antes do 1 e o 3 antes do 1, ou seja, dizemos que houve duas inversões na ordem. Por isso dizemos que esse produto sofreu uma permutação de classe par.

Na terceira parcela ($a_{13}a_{21}a_{32}$), vemos os segundos índices (3 1 2).

Também, se observarmos a sequência da esquerda para a direita temos o 3 antes do 2 e o 3 antes do 1, ou seja, houve duas inversões na ordem. Então esse produto sofreu uma permutação de classe par.

Na quarta parcela ($a_{13}a_{22}a_{31}$), os segundos índices formam a sequência (3 2 1). Ou seja, com o 3 antes do 1, o 3 antes do 2 e ainda o 2 antes do 1. Portanto, houve 3 inversões. Daí, temos uma permutação de classe ímpar.

Na quinta parcela ($a_{12}a_{21}a_{33}$), vemos nos segundos índices a sequência (2 1 3). Mostrando apenas uma inversão que é o 2 antes do 1. Portanto, há uma permutação de classe ímpar.

Finalmente, na sexta parcela ($a_{11}a_{23}a_{32}$) os segundos índices são (1 3 2), mostrando apenas uma inversão do 3 antes do 2. Logo, uma permutação de classe ímpar.

Notemos que os produtos com permutações de classe par são multiplicados por (+1) e os produtos afetados com permutação de classe ímpar são multiplicados por (–1).

Assim podemos enunciar que o determinante de uma matriz n por n é composto pela soma de n! (n fatorial) parcelas, pois há uma parcela para cada permutação de n elementos a qual será multiplicada por (–1) se for afetada por uma permutação de classe ímpar. Portanto o determinante de quarta ordem tem 24 termos, o de quinta ordem tem 120 termos e, por aí segue**.** Para esses não há uma regra prática que se possa obter rapidamente o seu desenvolvimento.

Então para obter o desenvolvimento de um determinante de ordem n, devemos realizar a soma algébrica dos produtos obtidos permutando-se de todos os modos possíveis os segundos índices da diagonal principal ($a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$) fixados os primeiros índices, e admitindo-se que esses produtos sejam multiplicados por (–1) se os segundos índices de seus fatores formarem uma permutação de classe ímpar.

De acordo com a definição acima, podemos deduzir:

I) O determinante de uma matriz quadrada de ordem n tem n! termos.

II) Nas permutações feitas com os segundos índices, o número das de classe ímpar é igual ao das de classe par.

III) Cada termo do determinante possui um único elemento de cada linha e um único de cada coluna.

IV) O determinante pode ser obtido, também, fixando-se os segundos índices e permutando de todos os modos possíveis os primeiros.

Estudaremos a seguir, propriedades que facilitarão o cálculo de um determinante de ordem maior que 3, reduzindo bastante as contas usadas no cálculo por permutação.

3.2 Propriedades dos Determinantes

P_1: Um determinante não se altera quando, em sua matriz quadrada, trocamos ordenadamente suas linhas por colunas.

PROVA: Considere o determinante de A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

e formemos o determinante de A^t = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

cujos elementos de cada coluna são os elementos da linha de mesma ordem de A.

Seja T = $a_{\alpha 1}.a_{\beta 2}. \ldots\ a_{\omega n}$ um termo qualquer de detA, cujo sinal é dado pela classe de permutação dos índices αβ ... ω das colunas. Como a este termo T existe em correspondência um termo T' = $a_{1\alpha}.a_{2\beta}. \ldots\ a_{n\omega}$ do determinante de A^t constituído pelos mesmos elementos de T e com a mesma classe de permutação de T e portanto afetado pelo mesmo sinal.

Se T foi escolhido arbitrariamente, os desenvolvimentos de detA e detA^t são iguais, o que nos permite concluir a demonstração de P_1.

Obs.: Pela demonstração de P_1 decorre que qualquer propriedade relativa às linhas de um determinante se aplica igualmente às colunas.

Mostraremos como exemplo o caso particular de uma matriz algébrica 3 por 3, para facilitar o entendimento de P_1.

Ex.: Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{bmatrix}$ e A^t = $\begin{bmatrix} a & m & x \\ b & n & y \\ c & p & z \end{bmatrix}$ a matriz obtida de A transformando ordenadamente as linhas em colunas. A matriz A^t será chamada de matriz transposta de A.

Temos detA = anz + bpx + cmy – cnx – bmz – apy e

detA' = anz + cmy + bpx – cnx – bmz – apy . Daí, vemos que detA = detA'.

P_2: Trocando-se duas filas paralelas de uma matriz quadrada, seu determinante muda de sinal.

PROVA: No determinante A de P_1 troquemos duas colunas. Isto acarretará em cada um dos termos do desenvolvimento do determinante de A, supostos ordenados pelos índices das linhas, uma troca de dois elementos na permutação dos índices das colunas. Daí ocorrerá em cada termo uma troca de sinal devido à mudança na classe de permutação, trazendo, em consequência, a troca do sinal do determinante.

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ e A' = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. Vamos mostrar que detA' = – detA.

De fato, detA = $\boxed{2.4.(-4)} + 1.(-2).5 + \boxed{3.(-1).(-3)} - 3.4.5 - \boxed{1.(-1).(-4)} - \boxed{2.(-2).(-3)} = -109$.

e detA' = $3.4.5 + \boxed{1.(-1)(-4)} + \boxed{2.(-2)(-3)} - \boxed{2.4.(-4)} - 1.(-2).5 - \boxed{3.(-1),(-3)} = 109$

P_3: O determinante de uma matriz quadrada é nulo se nela houver duas filas paralelas idênticas.

PROVA: Esta propriedade é um corolário de **P_2**, pois se a matriz apresenta duas filas paralelas idênticas, sua troca acarreta a mudança de sinal do determinante. Mas essa troca não altera o determinante porque as filas são idênticas. Logo, essas duas condições só podem coexistir se o determinante for nulo.

Ex.: Seja A uma matriz quadrada que apresenta duas filas paralelas idênticas tal que detA = x. Se trocarmos a posição dessas duas filas obteremos uma matriz B tal que, por **P$_2$**, detB = –x. No entanto, sabemos que B = A, pois houve apenas uma troca de filas idênticas. Então, teremos x = –x, o que nos remete a x = 0.

P$_4$: Uma matriz quadrada que apresenta uma fila nula terá determinante nulo.

PROVA: vimos na observação 1 do início deste capítulo que cada termo do desenvolvimento de um determinante contém um único elemento de cada fila. Então se cada termo do desenvolvimento de um determinante contém um elemento nulo, o determinante será nulo.

Ex.: Calculemos o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 7 \\ 9 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
detA = 5.0.2 + 0.7.9 + 3.0.8 – 8.0.9 – 3.0.2 – 7.0.5. Note que cada termo apresenta um fator nulo. Portanto, detA = 0
P$_5$: Multiplicando-se ou dividindo-se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada por um mesmo número o determinante fica multiplicado ou dividido por esse número.

PROVA: usando os argumento da observação 1, se cada termo do desenvolvimento de um determinante apresenta um único elemento de cada fila e, se uma certa fila foi multiplicada, suponhamos, por um número real k, então cada termo será multiplicado por k. Logo, o determinante será multiplicado por k.

Ex.: Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{bmatrix}$ e seja B = $\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ m & n & p \\ x & y & z \end{bmatrix}$.
Temos detA = anz + bpx + cmy – cnx – bmz – apy e
detB = k.anz + k.bpx + k.cmy – k.cnx – k.bmz – k.apy ⇔
detB = k.(anz + bpx + cmy – cnx – bmz – apy) ⇔ $\boxed{\text{detB = k.detA}}$

<u>**Observação 2**</u>: A propriedade **P$_5$** garante uma aplicação bastante útil. O fato de podermos colocar em evidência o fator comum a uma fila qualquer.

Ex.: Se A = $\begin{bmatrix} 10 & 40 & 20 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, então detA = 10.detB

<u>Solução:</u> De fato, detA = 10.2.1 + 40.1.6 + 20.3.3 – 20.2.6 – 40.3.1 – 10.3.1 ⇒ detA = 50 e detB = 1.2.1 + 4.1.6 + 2.3.3 – 2.2.6 – 4.3.1 – 1.3.1 ⇒ detB = 5.

P$_6$: Se multiplicarmos uma matriz quadrada A de ordem n por um número real k, seu determinante ficará multiplicado por k^n.

PROVA: por $\mathbf{P_5}$, se n linhas foram multiplicadas por k então o determinante será multiplicado por k um número n de vezes. O que equivale a k^n.

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ km & kn & kp \\ kx & ky & kz \end{bmatrix}$. Notemos que detB = k^3.detA.

De fato, detA = anz + bpx + cmy – cnx – bmz – apy e detB = ka.kn.kz + kb.kp.kx + kc.km.ky – kc.kn.kx – kb.km.kz – ka.kp.ky $\Rightarrow$ detB = k^3.(anz + bpx + cmy – cnx – bmz – apy) $\Rightarrow$ detB = k^3.detA.

$\mathbf{P_7}$: Se numa matriz quadrada os elementos de uma fila são proporcionais aos de outra fila paralela, isto é, são respectivamente iguais aos elementos desta multiplicados por um mesmo número real k, então o determinante desta matriz será nulo.

PROVA: Sejam F_1 e F_2 duas filas paralelas formadas por elementos proporcionais de uma matriz quadrada A e k um número real. Digamos que os elementos de F_1 são iguais a k multiplicado pelos respectivos elementos de F_2. Usando o argumento da observação 2, se colocarmos k em evidência, a fila F_2 ficará igual a F_1. Teremos então duas filas paralelas idênticas na matriz que, de acordo com $\mathbf{P_3}$ tem determinante nulo.

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} a & b & c \\ ka & kb & kc \\ x & y & z \end{bmatrix}$. Vamos mostrar que detA = 0.

De fato, detA = k.$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$. Mas $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$= 0. Então detA = k.0 = 0.

$\mathbf{P_8}$: Se os elementos de uma fila de uma matriz quadrada são somas de duas parcelas, o determinante pode decompor-se numa soma de dois determinantes obtidos da matriz original onde o primeiro determinante apresenta uma das parcelas no lugar desta fila e o segundo apresenta a outra parcela.

PROVA: Considere o determinante de A = $\begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ (a_{21} + b_{21}) & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ (a_{31} + b_{31}) & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ (a_{n1} + b_{n1}) & c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$.

Escolhemos arbitrariamente a matriz com a primeira coluna formada por duas parcelas. Mas, poderia ser qualquer fila.

Em cada termo do desenvolvimento do determinante aparecerá como fator um elemento da primeira coluna, isto é, uma soma $(a_{i1} + b_{i1})$.

Então podemos decompor cada termo do desenvolvimento do detA numa soma de dois termos. Cada um destes dois termos se obtém do termo correspondente do detA pela substituição da soma $(a_{i1} + b_{i1})$ por cada uma de suas parcelas. Logo, o desenvolvimento do detA pode ser decomposto numa soma de dois desenvolvimentos semelhantes, obtidos daquele pela substituição, em cada termo, da soma $(a_{i1} + b_{i1})$ por suas parcelas.

Ex.: Vamos mostrar que se A = $\begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11}) & c_{12} & c_{13} \\ (a_{21} + b_{21}) & c_{22} & c_{23} \\ (a_{31} + b_{31}) & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$, então detA = detB + detC, onde B = $\begin{bmatrix} a_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} b_{11} & c_{12} & c_{13} \\ b_{21} & c_{22} & c_{23} \\ b_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$.

De fato, detA = $c_{22}.c_{33}(a_{11} + b_{11}) + c_{12}.c_{23}(a_{31} + b_{31}) + c_{13}.c_{32}(a_{21} + b_{21})$
$-c_{13}.c_{22}(a_{31} + b_{31}) - c_{12}.c_{33}(a_{21} + b_{21}) - c_{23}.c_{32}(a_{11} + b_{11})$

$\Leftrightarrow$ detA = $\boxed{a_{11}c_{22}c_{33}} + b_{11}c_{22}c_{33} + \boxed{a_{31}c_{12}c_{23}} + b_{31}c_{12}c_{23} + \boxed{a_{21}c_{13}c_{32}} + b_{21}c_{13}c_{32}$
$-\boxed{a_{31}c_{13}c_{22}} - b_{31}c_{13}c_{22} - \boxed{a_{21}c_{12}c_{33}} - b_{21}c_{12}c_{33} - \boxed{a_{11}c_{23}c_{32}} - b_{11}c_{23}c_{32}$.

Nesse desenvolvimento as parcelas circuladas, que apresentam o fator a, correspondem ao detB e as demais correspondem ao detC.

P₉: O valor de um determinante não se altera quando somamos ou subtraímos dos elementos de uma fila os elementos de outra fila paralela multiplicada por uma constante.

PROVA: Seja A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ka_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$.

Vamos considerar, sem perda de generalidade, a primeira coluna de B sendo a soma da primeira coluna de A com a segunda coluna multiplicada por k.

Se detA = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ e detB = $\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ka_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, sabemos por **P₈** que

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + ka_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{detA}} + \underbrace{\begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n2} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\substack{\text{determinante nulo} \\ \text{por } \mathbf{P_7}}}$$

Ex.: Calcular o valor do determinante de A = $\begin{bmatrix} 151 & 212 & 102 \\ 37 & 52 & 25 \\ 75 & 104 & 53 \end{bmatrix}$.

Solução: Se aplicarmos a regra de Sarrus teremos um imenso trabalho nas multiplicações. Vamos, então, evitar essas multiplicações aplicando **P₉**.
Subtraindo da primeira linha a segunda multiplicada por (–4) e da terceira linha a segunda multiplicada por (–3), obtemos:

$$\begin{vmatrix} 151 & 212 & 102 \\ 37 & 52 & 25 \\ 75 & 104 & 53 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 151-4.37 & 212-4.52 & 102-4.25 \\ 37 & 52 & 25 \\ 75-2.37 & 104-2.52 & 53-2.25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 37 & 52 & 25 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ainda podemos subtrair da segunda linha a primeira multiplicada por 12, obtendo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 37-12.3 & 52-12.4 & 25-12.2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Aplicando nesta última a regra de Sarrus, fica: detA = 36 + 4 – 8 – 12 = 20.

P_{10}: Um determinante é nulo se os elementos de uma fila são combinações lineares semelhantes dos elementos correspondentes de filas paralelas.

PROVA: Seja A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e, suponhamos arbitrariamente que a coluna j seja igual a uma combinação linear da coluna r com a coluna s.

Digamos: $a_{ij} = p.a_{ir} + k.a_{is}$, com {p, k} ⊂ **R** . Assim, por **P_8**, podemos decompor o determinante de A numa soma de dois determinantes onde os elementos a_{ij} da coluna j em um deles serão substituídos pelas parcelas $p.a_{ir}$ e no outro, serão substituídos pelas parcelas $k.a_{is}$. Deste modo, os dois determinantes obtidos serão nulos porque terão uma coluna proporcional a outra (veja **P_7**).

Ex.: Mostre que é nulo o determinante de A, se A = $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & ka_1+pb_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2+pb_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3+pb_3 \end{bmatrix}$, com {p, k} ⊂ **R**.

Solução: Sabemos por **P_8** que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1+pb_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2+pb_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3+pb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & pb_1 \\ a_2 & b_2 & pb_2 \\ a_3 & b_3 & pb_3 \end{vmatrix}$.
Mas, as parcelas obtidas acima têm determinante nulo porque apresentam filas paralelas proporcionais. Então, teremos detA = 0.

3.3 Cálculo de um Determinante por Redução da Ordem

Utilizando as propriedades vistas e usando o teorema de Laplace vamos mostrar um método prático para o cálculo de um determinante de ordem n reduzindo-o para determinantes de ordens menores sucessivamente até chegar num determinante de ordem 3 para aplicar a regra de Sarrus.

Vejamos um exemplo de como reduzir um determinante de ordem 4 para um de ordem 3 usando as propriedades vistas.

Ex.: Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 19 & 13 \end{bmatrix}$. Obtenha uma matriz de ordem 3 com o mesmo determinante de A e em seguida encontre o seu valor.

<u>Solução:</u> Usando o elemento a_{11} = 1 podemos somar a segunda linha com a primeira multiplicada por (–2), somar a terceira com a primeira multiplicada por (–1) e somar a quarta com a primeira multiplicada por (–3) a fim de anular todos os elementos abaixo do 1 na primeira coluna.

Assim, a matriz A se transformará na matriz B = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo o determinante de B pelo teorema de Laplace em relação à primeira coluna teremos: detB = 1.cof(a_{11}) + 0.cof(a_{21}) + 0.cof(a_{31}) + 0.cof(a_{41}). Portanto, detB = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ = –1 – 9 + 16 – 6 – 2 – 12 = –14. Note que o determinante de B ficou reduzido a um único de ordem 3 ao suprimir a primeira linha e a primeira coluna de B.

O resultado acima nos mostra um recurso indireto de calcular um determinante de ordem 4 reduzindo-o para um de ordem 3. Basta para isso recorrer ao elemento unitário que ocorre na primeira linha e primeira coluna. Caso o referido elemento não seja unitário, podemos colocá-lo em evidência multiplicando o determinante e dividindo a primeira linha por ele.

Análogo ao que fizemos com a matriz de ordem 4, demonstra-se facilmente que é possível numa matriz A de ordem n, fazer surgir um elemento unitário na posição da primeira linha e primeira coluna e em seguida obter n – 1 zeros abaixo desse elemento.

A matriz de ordem n – 1 obtida ao descartar as filas do elemento unitário, terá, pelo teorema de Laplace, o mesmo determinante de A.

Operando analogamente sobre este determinante de ordem n – 1 obtém-se outro de ordem n – 2 e, assim segue-se até chegar num determinante de ordem 3.

Um método prático que resume e facilita os passos descritos acima, na resolução dos determinantes de ordem superior a 3, foi apresentado pelo matemático italiano Felice Chió (1813 – 1871) e ficou conhecido como regra de Chió, apresentada a seguir.

REGRA DE CHIÓ

- Obter um elemento unitário na primeira linha e primeira coluna (posição 11).
- Suprimir a primeira linha e a primeira coluna da matriz.
- De cada elemento restante, subtrair o produto dos dois elementos suprimidos e pertencentes à linha e à coluna desse elemento restante.
- Com os resultados das subtrações obtém-se uma matriz de ordem menor, porém com o mesmo determinante.

Ex.: Aplicando a regra de Chió calcule o determinante de $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 10 & 8 \\ 2 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 19 & 13 \end{bmatrix}$

<u>Solução:</u> $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 10 & 8 \\ 2 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 19 & 13 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 7 & 11 & 10 \\ 1 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 19 & 13 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 7-2.3 & 11-2.5 & 10-2.4 \\ 5-1.3 & 4-1.5 & 7-1.4 \\ 6-3.3 & 19-3.5 & 13-3.4 \end{vmatrix} =$

$= 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2.(-1 -9 +16 -6 -2 -12) = 2.(-14) = -28$

EXERCÍCIO COM APLICAÇÃO DAS PROPRIEDADES

Mostraremos a seguir como o uso das propriedades dos determinantes pode facilitar bastante a solução de algumas questões.

1) Para **x**, **y**, **z** e **w** números reais quaisquer, calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ y+z & x+w & x+w & y+z \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$.

<u>Solução:</u> Sabemos por **P₉** que o determinante não se altera ao somarmos filas paralelas. Então, somando à terceira linha com a primeira e a quarta, obtemos:

$= \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ x+y+z+w & x+y+z+w & x+y+z+w & x+y+z+w \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$. Temos agora, a segunda e a terceira linhas proporcionais. Daí, concluímos que o determinante é <u>nulo</u>.

2) Mostre que o determinante de uma matriz triangular é igual ao produto de sua diagonal principal.

<u>Solução:</u> vejamos na matriz triangular 2 por 2: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}$;

Na matriz triangular 3 por 3: $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{33}.\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}$. Note que a matriz triangular 3 por 3 pode ser construída a partir da triangular 2 por 2 acrescentando apenas os zeros da última coluna e uma terceira linha que será suprimida ao se calcular o determinante desenvolvendo por Laplace em relação à terceira coluna. De modo análogo podemos construir a matriz triangular 4 por 4 acrescentando os zeros da quarta coluna e uma quarta linha que será suprimida no cálculo do determinante usando Laplace na quarta coluna. Daí o determinante de ordem 4 será o produto $a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{44}$. Continuando nesse critério, na matriz triangular n por n, o determinante será o produto $a_{11}.a_{22}.a_{33}.a_{44} \dots a_{nn}$.

3) Usando a propriedade do determinante da matriz triangular vista na questão anterior, calcule o determinante $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 & 2 & 3 \\ \sqrt{3} & 0 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Solução: Se trocarmos a segunda coluna com a primeira, o determinante muda de sinal e a matriz fica triangular. Assim teremos.

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 9 & 2 & 3 \\ \sqrt{3} & 0 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 & 2 & 3 \\ 0 & \sqrt{3} & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -6.\sqrt{3}.2.\sqrt{3}.6 = -216$$

4) Mostre que o determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$ é igual ao produto:

$$(b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c).$$

Obs.: Esta matriz formada pelas potências crescentes dos elementos a, b, c e d é chamada de matriz de Vandermonde.

Solução: Somando a segunda, terceira e quarta colunas com a primeira multiplicada por (–1), teremos: detA = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix}$. Em seguida vamos somar cada linha, à partir da segunda, com a linha anterior multiplicada por $(-a)$, obtendo:

detA = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) \end{vmatrix}$.

Colocando em evidência o fator comum a cada coluna obtemos:

$(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$. Aplicando a regra de Chió, temos:

$$(b-a)(c-a)(d-a).\begin{vmatrix} c-b & d-b \\ c^2-b^2 & d^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

Mais uma vez, colocando em evidência o fator comum a cada coluna obtemos: $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b & d+b \end{vmatrix} =$

$(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d+b-c-b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\text{detA} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).}$

5) Para **x**, **y**, **z** e **w** números reais não nulos, calcule o valor do determinante associado à matriz

$$M = \begin{bmatrix} yzw & 1 & x & x^2 \\ xzw & 1 & y & y^2 \\ xyw & 1 & z & z^2 \\ xyz & 1 & w & w^2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos multiplicar a primeira linha por x, a segunda linha por y, a terceira linha por z e a quarta por w. E, para compensar dividimos o determinante por x.y.z.w a fim de não alterar seu valor.

Assim, $\begin{vmatrix} yzw & 1 & x & x^2 \\ xzw & 1 & y & y^2 \\ xyw & 1 & z & z^2 \\ xyz & 1 & w & w^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{xyzw}\begin{vmatrix} xyzw & x & x^2 & x^3 \\ xyzw & y & y^2 & y^3 \\ xyzw & z & z^2 & z^3 \\ xyzw & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$. Colocando em evidência a 1ª coluna, fica: $\frac{1}{xyzw}\begin{vmatrix} xyzw & x & x^2 & x^3 \\ xyzw & y & y^2 & y^3 \\ xyzw & z & z^2 & z^3 \\ xyzw & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$. Calculando a transposta,

$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix}$. Esta última recai no caso da matriz de potências ou de Vandermonde, cujo determinante, visto na questão anterior, é o produto de todas as subtrações com os elementos x, y, z e w. Portanto,

$$\boxed{\det M = (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z).}$$

Considerações Finais

Sempre achamos bastante incômodo para os professores de matemática, ensinar determinantes sem a possibilidade de mostrar o porquê daquelas tantas regras trazidas nos livros didáticos os quais omitiam as demonstrações por não apresentarem os conceitos adequados.

O estudo das matrizes e dos determinantes constitui uma ferramenta nas resoluções e discussões dos sistemas lineares que são modelos matemáticos essenciais para estudar vários conteúdos de outras disciplinas, como balanceamento de reações químicas ou nos circuitos elétricos.

Esperamos com este trabalho contribuir para que o primeiro contato mantido pelos alunos com esta disciplina seja embasado e possa servir de inspiração nos estudos mais aprofundados de álgebra linear.

É preciso esclarecer que o contato com as demonstrações de teoremas e propriedades tem o poder de dar confiança ao estudante no seu aprendizado.

Os professores precisam estimular os alunos a buscar as demonstrações, procurar entendê-las passo a passo sem a necessidade de decorá-las. Basta conhecer as origens e buscá-las quando precisar.

Referências

[1] BOLDRINI, JOSÉ L.; Álgebra Linear – São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

[2] BUENO, H. P.; Álgebra Linear Um Segundo Curso. Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[3] CARVALHO, THALES MELLO; Matemática Para Cursos Clássicos e Científicos – São Paulo, São Paulo, Editora S/A, 1954.

[4] CATUNDA, OMAR e outros; Matemática: segundo ciclo, ensino atualizado – Rio de Janeiro. Editora ao Livro Técnico, 1971.

[5] CONTADOR, PAULO R. M.; Matemática uma breve história, vol III, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.

[6] DANTE, L.R.; Matemática: Contexto e aplicações – São Paulo: Ática, 2010.

[7] EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

[8] LIMA, E.L.; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E; MORGADO, A.C.; A Matemática do Ensino Médio, vol 3. Rio de Janeiro, SBM, 1999.