UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
MESTRADO EM MATEMÁTICA – PROFMAT

MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO

Dourados/MS
Abril. 2014

Miriam Oliveira Espindola

MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao curso do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados, como exigência para obtenção do título de Mestre em matemática, sob orientação Prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes

Dourados/MS
Abril. 2014

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora, foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: **"Método de Mínimos Quadrados no Ensino Médio"**, de autoria de Miriam Oliveira Espindola, apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Cosme Rúbio Mercedes
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 15 de abril de 2014

Dedicatória

A Deus, que sempre me iluminou e deu-me forças ao longo desta caminhada. A meu orientador Robert Reyes pela dedicação e atenção que me concedeu durante todo processo deste trabalho. A minha *mãe Glória, minha tia Kely e ao meu esposo Alex, que estiveram sempre presentes me apoiando em todos os momentos que estive ausente.*

"Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis."
René Descartes

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem, em caráter introdutório, do método de mínimos quadrados. Será feita em um nível acessível ao estudante do ensino médio sem fugir do rigor dos conceitos matemáticos. Inicialmente será abordada a importância de trabalharmos com problemas do cotidiano do aluno, traremos os conceitos e a demonstração do Método de Mínimos Quadrados, em seguida o método será exemplificado usando situações cotidianas do aluno para a significação do conteúdo, nossa motivação para este tema é que os alunos do ensino médio não adquirem no decorrer do colegiado nenhum conhecimento para trabalhar com problemas superdeterminados, estes que são importantíssimos, pois recaem em diversos problemas encontrados no dia-a-dia do aluno. Para finalizar traremos uma proposta de aula para ser trabalhado com alunos de ensino médio.

Palavras-chave: Mínimos Quadrados. Resolução de Problemas. Ensino Aprendizagem.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A matemática sempre foi conhecida pela grande dificuldade que a maioria das pessoas têm em compreendê-la, esta que é uma ciência exata e que exige um alto grau de abstração e rigor de raciocínio.

Uma das grandes dificuldades encontradas pelo professor é fazer com que o aluno compreenda que a matemática é mais que meros cálculos, que ela pode ser utilizada para resolver diversos tipos de problemas do cotidiano do aluno.

Problemas como prever a população de uma determinada cidade para o ano de 2020, baseando-se na quantidade de habitantes dos anos anteriores, são simples e interessantes, mas para resolver, é necessário conhecimentos em sistemas superdeterminados, por todo ensino médio os alunos não chegam a estudar tal assunto, entretanto possuem todo conhecimento algébrico necessário para aprofundar seus estudos, como operações envolvendo matrizes, matriz transposta, resolução de sistemas algébricos e somatórios, que são vistos no 2º bimestre do 2º ano do Ensino Médio.

Tais assuntos podem ser mais explorados e aprofundados no Ensino Médio, utilizando a resolução de problemas para complementar o método de mínimos quadrados, que apresentaremos no decorrer do trabalho, para resolver um sistema superdeterminado, ao trabalhar desta forma, é possível ajudar os alunos a compreender melhor a matemática.

CAPÍTULO I

DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, notações, teoremas e propriedades básicas para o estudo do método de Mínimos Quadrados. Este conteúdo facilitará o entendimento das demonstrações realizadas nos capítulos posteriores.

Definição 1.1. Matriz

Sejam m e n dois números inteiros maiores ou iguais a 1. Denomina-se uma matriz A de tamanho m x n a uma tabela retangular formada por m.n números reais, dispostos em m linhas e n colunas. Denotada por A_{mxn}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn}$$

Os números neste agrupamento são chamados entradas da matriz. Quando for necessária uma notação mais compacta a matriz precedente pode ser escrita como $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mxn}$. Nós iremos usar letras maiúsculas para denotar matrizes.

Por exemplo,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Uma matriz com somente uma coluna é chamada matriz coluna (ou vetor coluna) e uma matriz com somente uma linha é chamada matriz linha (ou vetor linha). Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad [4 - 1 \;\; 6 \; 10 \,]$$

Matrizes linha e matrizes coluna são de importância especial, e é prática comum denotá-las por letras minúsculas

$$\boldsymbol{u} = [4 - 1 \ \ 6 \ 10 \ ]$$

Definição 1.2. Matriz Quadrada

Uma matriz **A** com n linhas e n colunas é chamada matriz quadrada de ordem n. Por exemplo

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}_{2x2}$$

A matriz acima é uma matriz de ordem 2.

Definição 1.3. Matriz Múltiplo Escalar

Se **A** é uma matriz e c é um escalar, então o produto c**A** é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz **A** por c. A matriz c**A** é chamada múltiplo escalar de **A.**

Se $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n$ são matrizes de mesmo tamanho e $c_1, c_2, \dots, c_n$ são escalares então uma expressão da forma

$$c_1\boldsymbol{A}_1 + c_2\boldsymbol{A}_2 + \cdots c_n\boldsymbol{A}_n$$

É chamada combinação linear de $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \dots, \boldsymbol{A}_n$ com coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Definição 1.4. Multiplicação de Matrizes

O produto de duas matrizes, tais que o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{mxn}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{mxn}$ é definido pela matriz $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})_{mxn}$, ou seja, o elemento ij-ésimo da matriz produto é igual a soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

multiplicando as matrizes A e B temos,

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + & \dots & +a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + & \dots & +a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + a_{mn}b_{n1} & \dots & a_{m1}b_{1p} + a_{n2}b_{2p} + & \dots & +a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}_{mx1}$$

sejam a_i, b_k e $c_k, i = 1 \dots n \; e \; k = 1 \dots p$, as colunas A, B e C, respectivamente.

Exemplo. Sejam $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $e \; \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

então

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definição 1.5. Combinação Linear

Seja V um espaço vetorial real e $S = \{v_1, v_2 \dots v_n\}$ uma conjunto de vetores em V. Dizemos que um vetor qualquer v∈ V é combinação linear dos elementos de S, se existem escalares $k_1, k_2, k_3 \dots k_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Definição 1.6. Produtos matriciais como combinações lineares

Matrizes linha e coluna fornecem uma maneira alternativa de ver a multiplicação matricial. Por exemplo, seja a matriz **A** dada por

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{mxn} \quad \text{e o vetor} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}_{nx1}$$

então

$$\boldsymbol{Au} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + & a_{12}u_2 + & a_{13}u_3 + & \dots & +a_{1n}u_n \\ a_{21}u_1 + & a_{22}u_2 + & a_{23}u_3 + & \dots & +a_{2n}u_n \\ a_{31}u_1 + & a_{32}u_2 + & a_{33}u_3 + & \dots & +a_{3n}u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}u_1 + & a_{m2}u_2 + & a_{m3}u_3 + & \dots & +a_{mn}u_n \end{bmatrix}_{mx1}$$

ou também,

$$\boldsymbol{Au} = u_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{m3} \end{bmatrix} + \cdots + u_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

logo $\boldsymbol{Au}$ é uma combinação linear das colunas de $\boldsymbol{A}$ com coeficientes provenientes da matriz $\boldsymbol{u}$.

Definição 1.7. Sistemas Lineares

Uma equação linear nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$$

onde b e os coeficientes $a_1, \dots, a_n$ são números reais. As variáveis de uma equação linear, são muitas vezes, chamadas de incógnitas.

Exemplo. Uma equação linear nas variáveis x_1, x_2 ,

$$4x_1 + 16x_2 = 36$$

Um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado um sistema de equações lineares ou um sistema linear. Um exemplo é o seguinte sistema linear de duas equações e duas incógnitas

$$x_1 + 4x_2 = 9$$
$$x_1 - x_2 = -1$$

Uma solução de um sistema linear é uma lista $s_1, s_2, \dots, s_n$ de números que torna cada equação do sistema uma afirmação verdadeira quando os valores $s_1, s_2, \dots, s_n$ são substituídos por $x_1, x_2, \dots, x_n$ respectivamente. Por exemplo 1 e 2 é uma solução para o sistema do exemplo anterior.

Um sistema linear que não possui soluções é chamado **inconsistente**; se existir pelo menos uma solução do sistema, dizemos que ele é **consistente.**

Um sistema arbitrário de m equações lineares e n incógnitas pode ser escrito como

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \dots & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \dots & a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 & a_{32}x_2 & a_{33}x_3 & \dots & a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & a_{m3}x_3 & \dots & a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

Onde $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ são as incógnitas e as letras a e b com subscritos denotam constantes. O subscrito duplo nos coeficientes das incógnitas é um recurso útil que é usado para especificar a localização do coeficiente no sistema. O primeiro subscrito no coeficiente a_{ij} indica a equação na qual o coeficiente ocorre e o segundo subscrito indica qual incógnita ele multiplica.

Definição 1.8. Notação matricial de um sistema linear

Considere o sistema linear anterior de m equações e n incógnitas. Usando a multiplicação matricial podemos escrever o sistema como

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A matriz **A** neste equação é chamada matriz de coeficientes do sistema. A matriz aumentada deste sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Por exemplo, para o sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \vdots & 14 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \vdots & 10 \end{bmatrix}$$

Definição1.9. Matriz transposta

A matriz transposta da matriz $A_{(mxn)}$ é a matriz $A^t_{(nxm)}$ que se obtém da matriz A, permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemplo

$Seja\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ então a matriz transposta de A será $\boldsymbol{A^t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Definição1.10. Matriz inversa

Seja A uma matriz de ordem n a matriz B que satisfaz a condição AB=BA=I diz-se inversa de A e representa-se por $A^{-1}, B = A^{-1}$. Onde I é a matriz identidade.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Exemplo. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ e\ B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, estas são inversas entre si, pois

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição 1.11. Produto Escalar

O produto escalar (ou produto interno) de dois vetores $v\,,w$ é o escalar denotado $v.w$ definido por

$v.w = v_1w_1 + v_2w_2$

se $v = v_1, v_2$ e $w = w_1, w_2$ são vetores no plano, e por

$v.w = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$

se $v = v_1, v_2, v_3$ e $w = w_1, w_2, w_3$ são vetores no espaço.

Definição 1.12. O espaço nulo de A, consiste de todas as soluções para AX=0 Esses vetores x estão em $\mathbb{R}^n$. O espaço nulo contendo todas as soluções de x é denotado por Nul(A).

Definição 1.13. Seja $A = [a_{ij}] \in M_{pxn}$ ($\mathbb{K}$).

1) Designa-se por espaço-coluna de A, e denota-se por ColA, o subespaço de K^p gerado pelas colunas de A.
2) Designa-se por subespaço de anulamento de A, e denota-se por NulA, o subespaço de K^n das soluções do sistema homogêneo AX = 0.

Proposição 1.14 Sejam $A \in M_{pxn}$, B ∈ M_{px1}. O sistema de equações lineares AX = B é possível se e somente se B ∈ ColA.

Teorema 1.15. Sejam $AX = B$ um sistema possível de p equações lineares em n incógnitas, x_0 uma solução particular de $AX = B$ e (v_1, v_2,..., v_n) uma base

do espaço de anulamento de A. Tem-se que x_1 é solução do sistema $AX = B$ se e só se x_1 se escreve na forma:

$$x_1 = x_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_r v_r$$

Sendo a_1, a_2,..., $a_r \in K$

Definição 1.16. Norma

A norma é uma função f_n: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada vetor x ∈ $\mathbb{R}^n$ um escalar representado por $\|x\|$.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, y \rangle} = \sqrt{x^t y} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

norma euclidiana do vetor x com produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo.

$$\|e\| = ({e_1}^2 + {e_2}^2 +, \dots, {e_m}^2)^{1/2}$$

Definição 1.17. Conjunto ortogonal

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Diz-se que um conjunto de vetores v_1, v_2,..., v_n $\subset V$, é ortogonal se dois vetores quaisquer, distintos, são ortogonais, isto é, $v_{i\,.}v_j$= 0 quando $i \neq j$.

Teorema1.18. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Sejam {v_1, v_2,..., v_n} um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V. Então v_1, v_2,..., v_n, são vetores linearmente independentes.

Teorema 1.19. Teorema da Melhor Aproximação

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Seja W um subespago de V. Seja u um vetor em V e suponha que u não pertença a W. Então $proj_w$u é a

melhor aproximação de u em W, isto é,

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{proj_w u}\| < \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}\|$$

para qualquer vetor w em W, diferente de $\boldsymbol{proj_w u}$.

Teorema 1.20. Teorema da Decomposição Ortogonal. Se V é um espaço euclidiano e S um subespaço de V com dimensão finita, então todo o elemento x de V pode ser representado, de uma Única maneira. Como a soma de dois elementos, um pertencente a S e outro a $S^{\perp}$, isto é tem-se

$$x = s + s^{\perp}, onde\ s \in S\ e\ s^{\perp} \in S^{\perp}$$

Além disso a norma de x é dada pela fórmula de Pitágoras

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^{\perp}\|^2$$

CAPÍTULO II

2.1. ORIGEM E JUSTIFICATIVA DA PROPOSTA

Os sistemas de equações algébricas lineares e suas soluções constituem um dos tópicos estudados no ensino médio que pode ser encontrado em DANTE (2005) e/ou MARCONDES, GENTIL, SÉRGIO (2003). Em geral, esses sistemas são do tipo (mesmo número de equações e incógnitas)

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad (1)$$

por exemplo,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A busca de solução do sistema (1) é feita, por exemplo, usando a retrosubstituição como resultado da eliminação Gaussiana, BOLDRINI(1980), HEFEZ(2012), LAGES(1998). No entanto, muitos problemas interessantes que aparecem nas ciências recaem em sistemas arbitrários de equações lineares que pode não ter uma solução (HOWARD,2012. BOLDRINI, 1980). Ou seja, não é possível realizar a retrosubstiuição. Na prática, isto ocorre na observação ou aquisição de dados. Há mais equações que incógnitas (chamados sistemas superdeterminados). Por exemplo, considere o seguinte sistema superdeterminado

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

onde,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 1 \\ 30 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Este sistema não tem solução no sentido usual. Uma vez que se deve prever algum tipo de solução, faz-se necessário ampliar ou reinterpretar o conceito de solução. O método de mínimos quadrados nos dá uma solução chamada de solução de mínimos quadrados. O método consiste em encontrar um **x** que torne a distância

$$||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}||$$

a menor possível.

Os sistemas lineares com mais equações que incógnitas (sistemas superdeterminados) são poucos estudados no ensino médio. Neste estudo pretendemos, através deste método, ampliar o estudo de sistemas lineares e com isso agregar valores ao estudo de sistemas para além de sistemas com equações e incógnitas iguais.

2.2. OBJETIVOS

2.2.1. Objetivos Gerais:

Induzir os alunos a compreender a matemática no seu contexto real, apresentando-lhes aplicações de sistemas lineares superdeterminados em forma de situações problemas do cotidiano.

2.2.2. Objetivos Específicos:

- Desenvolver o raciocínio matemático;
- Aprimorar as aulas de matemática;
- Dar sentido e uma aplicação à matemática;
- Explorar conceitos de matrizes e sistemas ;
- Fazer o aluno pensar logicamente e algebricamente;
- Dar oportunidade aos alunos de enfrentar situações novas;
- Estimular o interesse e a participação do aluno;
- Compreender os conceitos e definições do método de Mínimos Quadrados;
- Possibilitar que o aluno possa compreender as variadas leituras possíveis em uma situação problema.

CAPÍTULO III

3.1. PROBLEMAS DE MÍNIMOS QUADRADOS

Um sistema arbitrário de equações lineares Ax=b pode não ter uma solução, isto é, o dado b é inconsistente. Na prática esta inconsistência se deve a “erros de medida” nas entradas de A e de b que perturbam o sistema suficiente mente a ponto de criar inconsistência. Em tais situações procuramos um valor de x que chegue “tão perto quanto possível” de ser uma solução, no sentido que minimiza o valor de $\|Ax - b\|$ em relação ao produto interno euclidiano. A quantidade $\|Ax - b\|$ pode ser vista como uma medida de erro que resulta por considerar x uma solução aproximada do sistema $Ax = b$.

Se o sistema é consistente e x é uma solução exata, então, o erro é zero, pois $\|Ax - b\| = 0$.

Em geral o problema dos mínimos quadrados pode ser estabelecido como se segue.

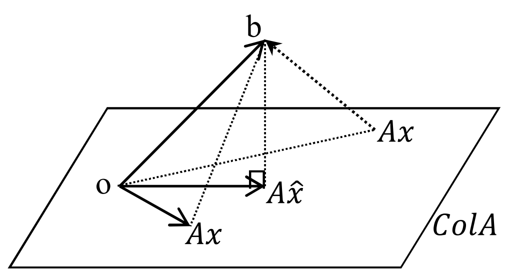
Problema geral dos mínimos quadrados: Sejam **A** uma matriz mxn e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ **e** $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Encontre se possível um $\hat{\boldsymbol{x}}$ tal que $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\| \leq \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}\| \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Um tal $\hat{\boldsymbol{x}}$ é chamado uma solução de mínimos quadrados de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$

Observação: Para entender a origem do termo mínimos quadrados, seja $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}$, que podemos considerar como vetor erro que resulta da aproximação x.

Se $\boldsymbol{e} = (e_1, e_2, , \ldots, e_m)$, então uma solução de mínimos quadrados minimiza $\|e\| = ({e_1}^2 + \ {e_2}^2 +, \ldots, {e_m}^2)^{1/2}$ e portanto também minimiza $\|e\|^2 = {e_1}^2 + \ {e_2}^2 +, \ldots, {e_m}^2$. Daí o termo mínimos quadrados.

O aspecto mais importante de um problema de mínimos quadrados é que, independentemente do vetor $\boldsymbol{x}$ selecionado, o vetor Ax pertence, necessariamente, ao espaço de colunas ColA. Procuramos então, $\hat{\boldsymbol{x}}$ que torna Ax o ponto mais próximo de **b** em ColA. Veja a figura.



É claro que, se $b \in ColA$ então b é da forma Ax para algum **x** e tal que **x** é a "solução de mínimos quadrados".

3.2. Existência de soluções do problema geral dos mínimos quadrados

Nesta seção, iremos estabelecer condição sob as quais um sistema linear tem garantida solução de mínimos quadrados. Assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 1: Seja $\boldsymbol{Ax = b}$ um sistema linear de m equações e n incógnitas. O conjunto de soluções de mínimos quadrados de $\boldsymbol{Ax = b}$ coincide com o conjunto não vazio de soluções das equações $\boldsymbol{A^tA\hat{x} = A^tb}$.

Demonstração: A demonstração tem duas partes.

Primeira parte: Mostraremos que o conjunto de soluções de mínimos quadrados é um conjunto não vazio e que qualquer um de seus elementos $\boldsymbol{\hat{x}}$ satisfaz as equações $\boldsymbol{A^tA\hat{x} = A^tb}$.

Segunda parte: Mostraremos que se $\boldsymbol{\hat{x}}$ satisfaz as equações $\boldsymbol{A^tA\hat{x} = A^tb}$, então $\boldsymbol{\hat{x}}$ é uma solução de mínimos quadrados.

Demonstração primeira parte

Seja o sistema $\boldsymbol{Ax = b}$. Decorre do teorema da melhor aproximação (1.18) que o vetor em **ColA** mais próximo de **b** é

$$\boldsymbol{\hat{b} = Proj_{ColA}b}$$

desde que $\boldsymbol{\hat{b}} \in \boldsymbol{ColA}$, a equação $\boldsymbol{A\hat{x} = \hat{b}}$ é possível e existe $\boldsymbol{\hat{x}} \in \mathbb{R}$, tal que

$$\boldsymbol{A\hat{x} = \hat{b}} \qquad (\mathbf{1})$$

assim, um vetor $\boldsymbol{\hat{x}}$ é uma solução de mínimos quadrados para $\boldsymbol{Ax = b}$, se e somente se $\boldsymbol{\hat{x}}$ satisfaz a (1). Se $\boldsymbol{\hat{x}}$ satisfaz a (1) então pelo teorema da decomposição ortogonal (1.18), $\boldsymbol{b - \hat{b}}$ é ortogonal a **ColA**. Como **ColA** é o espaço coluna de **A**, segue do teorema (1.17) que $\boldsymbol{b - \hat{b}} \in \boldsymbol{NulA^t}$, isto é,

$$\boldsymbol{A^t(b - A\hat{x}) = 0}$$

logo

$$\boldsymbol{A^tA\hat{x} = A^tb} \qquad (\mathbf{2})$$

Demonstração da segunda parte

Suponha que $\hat{\boldsymbol{x}}$ satisfaz o sistema $\boldsymbol{A^tA\hat{x}} = \boldsymbol{A^tb}$**.** Então , $\hat{\boldsymbol{x}}$ satisfaz o sistema $\boldsymbol{A^t(b - A\hat{x}) = 0}$**,** o que mostra que $\boldsymbol{b - A\hat{x}}$ é ortogonal as linha de $\boldsymbol{A^t}$ e portanto, ortogonal às colunas de **A**. Desde que as colunas de **A** geram **ColA**, o vetor $\boldsymbol{b - A\hat{x}}$ é ortogonal a todo o espaço **ColA**. Logo, a equação

$$\boldsymbol{b = A\hat{x} + (b - A\hat{x})}$$

é uma decomposição de **b** em uma soma de um vetor em **ColA** e um vetor ortogonal a **ColA**, Pela unicidade da decomposição ortogonal, $\boldsymbol{A\hat{x}}$ tem que ser a projeção ortogonal de **b** sobre **ColA**, ou seja, $\boldsymbol{A\hat{x} = \hat{b}}$ e $\hat{\boldsymbol{x}}$ é uma solução de mínimos quadrados. ■

O sistema (2) é chamado sistema normal associado a $Ax = b$ e as equações que o compõem são chamadas equações normais associadas a $Ax = b$. Note da demonstração que o sistema normal pode ser de finitas soluções. Podemos também observar esse fato no seguinte exemplo.

Exemplo. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema impossível $\boldsymbol{Ax = b}$*,* onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Solução

Para usar o sistema normal $\boldsymbol{A^tA\hat{x}} = \boldsymbol{A^tb}$, calcule:

$$\boldsymbol{A^tA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^t b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$$

a matriz aumentada para $\boldsymbol{A^t A \hat{x}} = \boldsymbol{A^t b}$ é

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & \vdots & 14 \\ 2 & 2 & 0 & \vdots & 4 \\ 2 & 0 & 2 & \vdots & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & \vdots & 10 \\ 0 & 2 & -2 & \vdots & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

a solução geral é $\boldsymbol{x_1 = 5 - x_3}$, $\boldsymbol{x_2 = -3 + x_3}$ e $\boldsymbol{x_3}$ é arbitrário, logo a solução geral de mínimos quadrados de $\boldsymbol{Ax = b}$ tem a forma

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O próximo teorema estabelece condições sob as quais o sistema linear de m equações e n incógnitas admite apenas uma solução de mínimos quadráticos.

Teorema 2. Seja $Ax = b$ um sistema linear de m equações e n incógnitas. A matriz $\boldsymbol{A^t A}$ é invertível se e somente se as colunas de **A** são linearmente independentes. Neste caso a equação $\boldsymbol{Ax = b}$ tem apenas uma solução de mínimos quadrados $\boldsymbol{\hat{x}}$ dada por

$$\boldsymbol{\hat{x}} = (\boldsymbol{A^t A})^{-1} \boldsymbol{A^t b}$$

Demonstração:

Primeiramente nós devemos mostrar que se os vetores coluna de $\boldsymbol{A_{mxn}}$ são linearmente independentes então $\boldsymbol{A^t A}$ é invertível.

Assim, suponha que **A** tenha vetores coluna linearmente independentes. A matriz $\boldsymbol{A^t A}$ possui tamanho $\boldsymbol{nxn}$, portanto podemos provar sua invertibilidade mostrando que o sistema linear $\boldsymbol{A^t A x = 0}$ possui somente a solução trivial. Mas se $\boldsymbol{x}$ é qualquer solução desde sistema, então $\boldsymbol{Ax} \in \boldsymbol{NulA^t}$ e também $\boldsymbol{Ax} \in \boldsymbol{ColA}$.

Pelo **teorema 1** estes espaços são complementos ortogonais de modo que a parte (b) do **teorema 1** implica $\boldsymbol{Ax = 0}$, como **A** tem vetores coluna linearmente independentes, resulta que $\boldsymbol{x = 0}$, pelo **teorema 1**.

Seguidamente provaremos que se $\boldsymbol{A^tA}$ é invertível, então os vetores coluna de **A** são linearmente independentes.

Assim, seja **x** uma solução de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$, então $\boldsymbol{A^tAx} = \boldsymbol{0}$, pois $\boldsymbol{A^t0} = \boldsymbol{0}$. Assim, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, pois $\boldsymbol{A^tA}$ é invertível. Logo, os vetores coluna de **A** são linearmente independentes, pois o espaço nulo de **A** é não nulo se, e somente se, as colunas de **A** são linearmente dependentes. ■

Exemplo. Encontre a solução de mínimos quadrados do sistema impossível $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}$$

determine também o erro de mínimos quadrados.

Solução: Observe que **A** e as colunas de **A** são linearmente independentes, portanto existe uma única solução de mínimos quadrados, temos

$$\boldsymbol{A^tA} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A^tb} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

a equação $\boldsymbol{A^tA\hat{x}} = \boldsymbol{A^tb}$ fica então

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Ao resolver o sistema obtemos a solução de mínimos quadrados.

$$\boldsymbol{x_1} = 1, \ \ \boldsymbol{x_2} = 2.$$

Para determinar o erro de mínimos quadrados, temos

$$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A\hat{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

logo

$$\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\| = \sqrt{84}.$$

3.3. AJUSTE DE CURVAS PELO MÉTODO DE MÍNIMOS QUADRADOS.

Suponha-se que, como resultado de medições em um laboratório ou algo similar, foi obtida uma coleção de valores $y_{1,}y_2,...,y_{n,}$ correspondentes a uma coleção de alguma outra grandeza $x_{1,}x_2,\ldots,x_n$. O problema a seguir é obter uma relação matemática $y = f(x)$ entre as variáveis x e y através do "ajuste" de uma curva.

A forma geral da curva $y = f(x)$ a ser ajustada é decidida na base de considerações teóricas ou simplesmente pelo padrão apresentado pelos pontos $(x_{i,}y_i)$. Algumas possibilidades que obtemos neste trabalho são

a) Uma reta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}$

b) Um polinômio quadrático $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^2$

Como os pontos $(x_{i,}y_i)$ são obtidos experimentalmente, geralmente tem algum erro de medição nos dados tornando impossível encontrar uma curva de forma desejada que passe por todos os pontos. Assim, a ideia é escolher a curva (determinando seus coeficientes) que "melhor" se ajuste a curva. Por isso usamos o método de mínimos quadrados.

3.3.1. Ajuste Linear

Suponha-se que exista uma relação linear entre uma variável dependente $\boldsymbol{y}$ e uma variável independente $\boldsymbol{x}$, ou seja

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x} \qquad (3)$$

e que sejam realizadas medições em $\boldsymbol{y}$ para vários valores de $\boldsymbol{x}$, originando os seguintes pontos

$$(\boldsymbol{x}_{1,}\boldsymbol{y}_1), (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2), (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{y}_3) \ldots (\boldsymbol{x}_{n,}\boldsymbol{y}_n)$$

se estes pontos de dados fossem colineares, a reta (3) passaria por todos os $\boldsymbol{n}$ pontos e os coeficientes $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b}$ desconhecidos satisfariam

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{x}_1$$

$$\boldsymbol{y_2 = a + bx_2}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{y_n = a + bx_n}$$

podemos escrever este sistema como

$$\boldsymbol{Ax = b} \qquad (4)$$

onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x_1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

é claro que, se os pontos não são colineares, então é impossível encontrar $\boldsymbol{a\ e\ b}$ que satisfaçam o sistema (1) exatamente.

Neste caso, temos um problema de mínimos quadrados, então vamos procurar uma solução de mínimos quadrados

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\hat{a}} \\ \boldsymbol{\hat{b}} \end{bmatrix}$$

uma reta $\boldsymbol{y = \hat{a} + \hat{b}x}$ é chamada reta de mínimos quadrados de um ajuste linear de mínimos quadrados aos dados se os coeficientes da reta provém de uma solução de mínimos quadrados. Lembre que uma solução de mínimos quadrados de (2) minimiza

$$\|\boldsymbol{b - Ax}\|^2 \qquad (6)$$

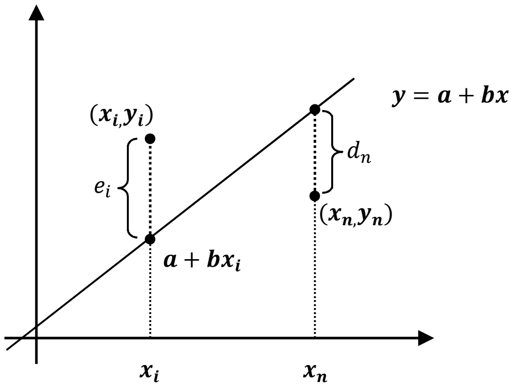
expressando (4) em termos de componentes, obtemos

$$\|\boldsymbol{b - Ax}\|^2 = \boldsymbol{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \cdots + e_n^2} \qquad (7)$$

onde

$$\boldsymbol{e_i = |y_i - a - bx_i|, \quad i = 1, 2, 3, \ldots n}$$

Os valores $\boldsymbol{e_i}$ podem ser interpretados como a distância vertical entre a reta $\boldsymbol{y = a + bx}$ e os pontos de dados $(\boldsymbol{x_i, y_i})$.



Esta distância é uma medida do “erro” que resulta no ponto $(\boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{y_i})$ do ajuste inexato de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{bx}$, a este ponto dos dados.

Equações normais

Pelo **teorema 1** a solução de mínimos quadrados de (2) pode ser obtido resolvendo o sistema normal associado

$$A^T A x = A^T b \qquad (8)$$

Ou escrevendo em forma estendida,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i y_i} \end{bmatrix} \qquad (9)$$

O uso do sistema (9) com somatórias será mais conveniente para nosso trabalho com alunos do ensino médio. Observe que o critério usado para chegar a essas equações normais (8) ou (9) foi através de conceitos geométricos e algébricos. No entanto, também podemos minimizar a expressão (6) usando critérios de círculo. Como segue,

$$E = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 \qquad (10)$$

Para minimizar E, calcula-se as derivadas parciais em relação a **a** e **b,** obtendo-se as condições

$$\frac{\boldsymbol{dE}}{\boldsymbol{da}} = -2 \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bx_i}) = 0 \ (11)$$

$$\frac{\boldsymbol{dE}}{\boldsymbol{db}} = -2\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bx_i}) = 0 \ (12)$$

De (11),

$$\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bx_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y_i}) - \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a} - \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{bx_i}) = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y_i}) - \boldsymbol{na} - (\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i}))\boldsymbol{b} = 0$$

E de (12),

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}(\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{bx_i}) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x_i y_i} - (\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x_i})\boldsymbol{a} - (\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i}^2))\boldsymbol{b} = 0$$

assim, obtemos um sistema,

$$\begin{cases} \boldsymbol{na} - (\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i}))b = \sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y_i}) \\ (\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x_i})\boldsymbol{a} - (\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{x_i}^2))\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{x_i y_i} \end{cases}$$

Ou equivalente

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i} \\ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i} & \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{y_i} \\ \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{x_i y_i} \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{13})$$

Pode ser mostrado que os vetores coluna de A em (3) são linearmente independentes se, e somente se, pelo menos dois dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são distintos. Neste caso segue do **teorema 2** que a solução de mínimos quadrados é única e é dada por

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Resumindo, temos o seguinte teorema,

Teorema 3. Sejam $(x_{1,}y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \ldots (x_{n,}y_n)$, um conjunto de dois ou mais pontos dados, são todos em uma reta vertical, e sejam

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x_1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_n} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix}$$

então existe um único ajuste linear de mínimos quadrados

$$\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{a}} + \widehat{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{x}$$

aos pontos dados. Além disso,

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{a}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix}$$

é dado pela fórmula

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A^t A})^{-1} \boldsymbol{A^t b}$$

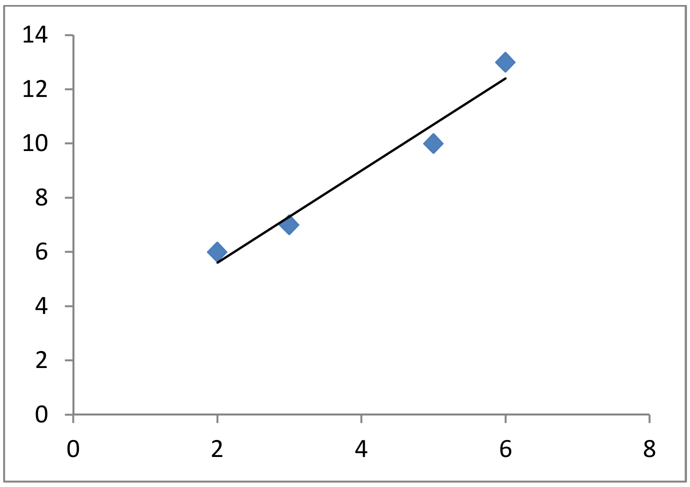
que expressa a unicidade da solução $\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{x}}$ da equação normal

$$\boldsymbol{A^t A x} = \boldsymbol{A^t b}$$

Exemplo. Encontre a equação da reta que mais se aproxima dos pontos abaixo

X	Y
2	6
3	7
5	10
6	13

O gráfico de dispersão dos pontos dados é



Desde que são todos os pontos, estão em uma reta vertical, pelo teorema anterior, temos que existe uma única solução de mínimos quadrados dado pela solução do sistema normal.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{4} & \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i} \\ \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i} & \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{y_i} \\ \sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i y_i} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Calculando as somatórias, teremos

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i} = 2 + 3 + 5 + 6 = 16$$

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i}^2 = (2)^2 + (3)^2 + (5)^2 + (6)^2 = 74$$

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{y_i} = 6 + 7 + 10 + 13 = 36$$

$$\sum_{i=1}^{4} \boldsymbol{x_i y_i} = 2.6 + 3.7 + 5.10 + 6.13 = 161$$

Assim, o sistema normal (14) fica como

$$\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{a}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 161 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\widehat{\boldsymbol{a}} + 16\widehat{\boldsymbol{b}} = 36 \\ 16\widehat{\boldsymbol{a}} + 74\widehat{\boldsymbol{b}} = 161 \end{cases}$$

daí obtemos que $\widehat{\boldsymbol{a}} = 2{,}2 \;\; e \; \widehat{\boldsymbol{b}} = 1{,}7$, logo a reta de mínimos quadrados é

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2.2 + 1.7\boldsymbol{x}$$

3.3.2. Ajuste Polinomial Quadrático

No caso de ajuste polinomial, o objetivo é encontrar uma aproximação $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$.

$$\boldsymbol{y = P(x) = a + bx + cx^2} \qquad \textbf{(15)}$$

para um conjunto pontos $(\boldsymbol{x_1, y_1}), (\boldsymbol{x_2, y_2}), (\boldsymbol{x_3, y_3}) \dots (\boldsymbol{x_n, y_n})$

Neste caso o sistema inconsistente é dado por

$$Ax = b \qquad (16)$$

onde,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_1}^2 \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_2}^2 \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{x_n} & \boldsymbol{x_n}^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix}$$

Equações normal. Pelo **teorema 1**, a solução de mínimos quadrados de (2) pode ser obtida resolvendo o sistema normal associado

$$A^T A x = A^T b \qquad (17)$$

Ou escrevendo de forma estendida,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2 \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i} & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2 & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^3 \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^2 & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^3 & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}^4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i x_i} \\ \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y_i x_i}^2 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

Analogamente ao caso de ajuste linear, podemos obter (18) usando critérios de calculo, como segue.

A soma dos quadrados das distâncias de $\boldsymbol{y_i}$ *ao polinômio* $\boldsymbol{p(x_i)}$ é dado por

$$\boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{p(x_i)})^2 \qquad (19)$$

para minimizar E é necessário que $\boldsymbol{\frac{dE}{da}, \frac{dE}{db}}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{\frac{dE}{dc}}$, sejam igual a zero. Isto é,

$$\frac{dE}{da} = 2\sum_{i=1}^{n} a + bx_i + cx_i^2 - y_i = 0$$

$$\frac{dE}{db} = 2\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)x_i = 0$$

$$\frac{dE}{dc} = 2\sum_{i=1}^{n} (a + bx_i + cx_i^2 - y_i)x_i^2 = 0$$

utilizando a propriedade distributiva da adição, obtemos as equações normais (18)

de forma equivalente

$$A^t A\hat{x} = A^t b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3. \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Como no caso do ajuste linear as soluções das equações normais (18) determinam os coeficientes do polinômio quadrático que minimiza

$$||b - Ax||$$

Se $A^t A$ é invertível, então as equações normais têm uma única solução $\hat{x}$, dada por

$$\hat{x} = (A^t A)^{-1} A^t b$$

A seguir serão discutidas condições que garantem a invertibilidade de $A^t A$.

Assuma que pelo menos três dos números $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ são distintos e $n > 2$. Suponha então que

$$\boldsymbol{Ac} = 0 \qquad\qquad (20)$$

onde

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_1}^2 \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_n} & \boldsymbol{x_n}^2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \propto \\ \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \neq 0$$

de (20) temos que o polinômio

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \propto + \boldsymbol{\beta t} + \boldsymbol{\gamma t}^2$$

possui como raízes distintas os pontos $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ (**n**>2).

No entanto um polinômio não nulo de grau 2 tem, no máximo, duas raízes distintas, logo $\propto = \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} = 0$. Assim de (20) temos que as colunas da matriz **A** são linearmente dependentes e assim $\boldsymbol{A^t A}$ é invertível.

Resumindo, temos o seguinte teorema.

Teorema 4. Sejam $(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1}), (\boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_2}), (\boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{y_3}) \dots (\boldsymbol{x_n}, \boldsymbol{y_n})$, um conjunto de pontos com **n**>2 e pelo menos três dos números $\boldsymbol{x_1},\ \boldsymbol{x_2}, \dots, \boldsymbol{x_n}$ são distintos, e sejam

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{x_1} & \boldsymbol{x_1}^2 \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_2} & \boldsymbol{x_2}^2 \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_3} & \boldsymbol{x_3}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{x_n} & \boldsymbol{x_n}^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \boldsymbol{y_2} \\ \boldsymbol{y_3} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_n} \end{bmatrix}$$

então existe um único ajuste de mínimo quadrado

$$\boldsymbol{y} = \widehat{\boldsymbol{a}} + \widehat{\boldsymbol{b}} + \widehat{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{x}^2$$

aos pontos dados, além disso,

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{a}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} \\ \widehat{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix}$$

é dado pela fórmula

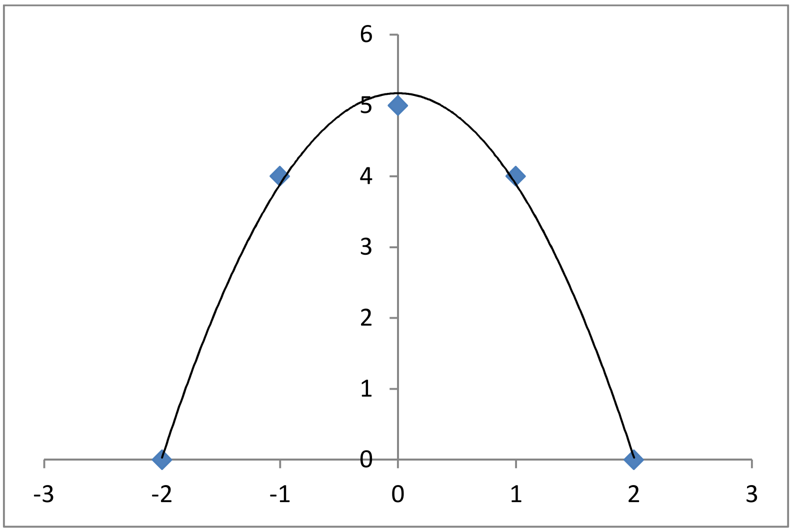
$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A^t A})^{-1} \boldsymbol{A^t b}$$

que expressa a unicidade da solução $\boldsymbol{x} = \widehat{\boldsymbol{x}}$ da equação normal

$$\boldsymbol{A^t A x} = \boldsymbol{A^t b},$$

EXEMPLO. Determinar o polinômio de segundo grau que mais se ajusta aos pontos A(-2, 0), B(-1, 4), C(0, 5), D(1, 4) e E(2, 0).

Construindo o gráfico de acordo com os pontos, temos



Desde que esses pontos satisfaçam as condições do teorema, Calculando as somatórias, temos a existência de uma única solução de mínimos Quadrados dado pela solução do sistema normal

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i & \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 \\ \sum_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum_{i=1}^{5} x_i^4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{5} y_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i x_i \\ \sum_{i=1}^{5} y_i x_i^2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{21})$$

Calculando as somatórias, temos

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + (1)^2 + (2)^2 = 10$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^3 = (-2)^3 + (-1)^3 + 0^3 + (1)^3 + (2)^3 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{4}} = (-2)^4 + (-1)^4 + 0^4 + (1)^4 + (2)^4 = 34$$

$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{y_i} = 0 + 4 + 5 + 4 + 0 = 13$$

$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{y_i x_i} = (-2.0) + (-1.4)) + (0.5) + (1.4) + (2.0) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{y_i x_i}^2 = (0) + (16) + (0) + (16) + (0) = 32$$

Assim, o sistema (21) fica como,

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{a}} \\ \widehat{\boldsymbol{b}} \\ \widehat{\boldsymbol{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \\ 32 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema obtemos os valores de $a, b\ e\ c$

$$\hat{a} = 1.74 \quad , \hat{b} = 0\ e\ \hat{c} = 0{,}43$$

Portanto o polinômio quadrático de mínimos quadrados é dado por

$$y = p(x) = 1{,}74 + 0{,}43x^2.$$

CAPÍTULO IV

4.1. Proposta de aula para o Ensino Médio

Neste capítulo, apresentaremos uma proposta de aula para ser trabalhada com alunos do 2º ano do Ensino Médio. Propomos introduzir o Método de Mínimos Quadrados logo que o professor terminar o conteúdo de sistemas lineares.

- **1º aula**

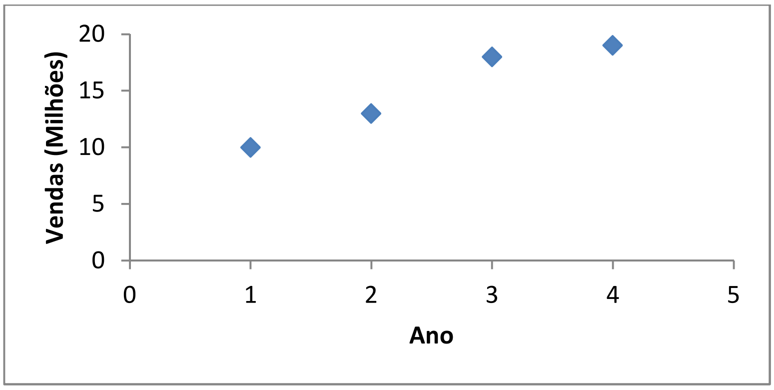
O professor iniciará a aula propondo aos alunos que descubram de quanto será as vendas no 7º ano de uma empresa de publicidade de acordo com os dados abaixo.

O quadro abaixo apresenta as vendas (em milhões).

Ano	1	2	3	4	...	7
Vendas	10	13	18	19	...	?

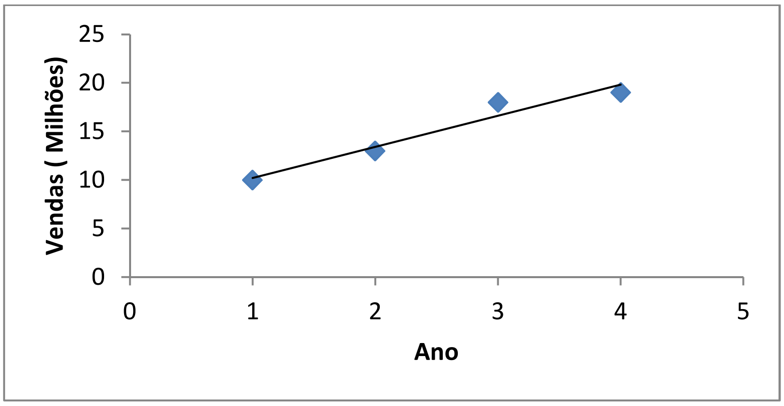
Nesta aula o professor deverá introduzir os conceitos de mínimos quadrados explicando a importância e a necessidade de saber trabalhar com tal método. Fará a representação do diagrama de dispersão, para que os alunos possam visualizar melhor o problema a ser resolvido.

Diagrama de Dispersão



O professor explicarará aos alunos, utilizando o diagrama de dispersão, que o método de mínimos quadrados irá encontrar uma reta que melhor se aproxima dos pontos dados, para que seja possivel determinar o valor de vendas para o ano 7.

Com auxílio do software Excel o professor mostrará aos alunos o diagrama de dispersão dos pontos do problema e os ensinará construir um diagrama de dispersão no excel, para que os mesmos utilizem o excel como auxílio para resolver as atividades propostas.



Para encontrar tal função será utilizado Método de Mínimos Quadrados, logo será apresentado aos alunos a fórmula do método,

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \end{bmatrix}$$

Onde,

$$\sum x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$$

$$\sum (x_i)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + \cdots + (x_n)^2$$

$$\sum y_i = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_n$$

$$\sum x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n$$

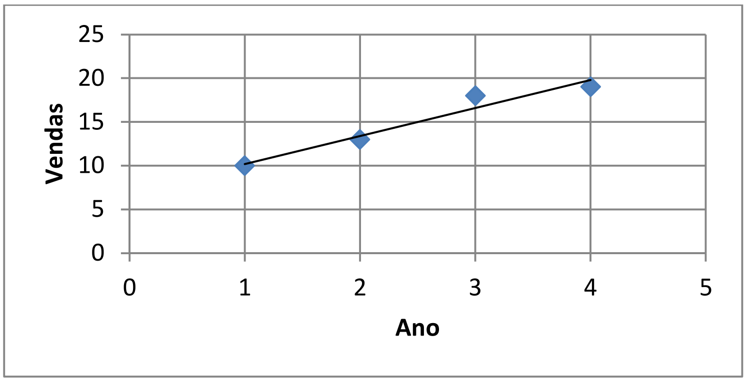
E que $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são os parametros a serem encontrados.

Na sequência o professor deverá resolver um problema junto com os alunos.

Exemplo. Encontrar a reta linear que mais se aproxima dos pontos dados na tabela.

Ano (x_i)	1	2	3	4
Vendas (y_i)	10	13	18	19

Primeiro devemos criar o diagrama de dispersão



Calculando as somatórias

Temos,

$$\sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\sum (x_i)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\sum y_i = 10 + 13 + 18 + 19 = 60$$

$$\sum x_i y_i = (1.10) + (2.13) + (3.18) + (4.19) = 166$$

Aplicando os resultados do somatório na fórmula

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 166 \end{bmatrix}$$

Que reacairia em um sistema com duas incógnitas e duas variáreis, já estudados pelos alunos.

$$b = 3.2 \; e \; a = 7 \quad donde, \quad f(x) = 7 + 3.2x \quad \text{por (1).}$$

Portanto, para o ano 7, as vendas estariam em aproximadamente

$$f(7) = 3.2.(7) + 7 = 29.4$$

Após explicação e resolução do problema com os alunos, será proposto atividades para serem iniciadas nesta aula e concluídas em casa.

Atividade 1

Utilizando os dados da tabela abaixo, encontre a reta que melhor se ajusta aos pontos dados, em seguida descubra qual o custo aproximado para 16 artigos.

Quantidade (x)	custos(y)
40	200
50	180
70	170
75	150

Atividade 2

A tabela abaixo relata os custos de manutenção por hora, classificados por idade de máquinas em meses. Determinar a reta dos custos sobre a idade e fazer uma previsão de custo para uma máquina de 50 meses.

Idade em meses (x)	Custos médios (y)
6	9,7
15	16,5
24	19,3
33	19,2
42	26,9

Atividade 3

Os dados a seguir representam a produção de soja durante vários anos em um determinado terreno, em toneladas. Esboce o diagrama de dispersão. Em seguida encontre a reta que melhor se ajusta aos dados. E ainda, Faça uma estimativa da produção para o ano 2000.

Ano(x)	Produção(y)
1989	96,2
1990	92,0
1991	90,1
1992	89,0
1993	86,8

Aula 2 – Correção de atividades

Nesta aula será feito a correção das atividades no quadro, para que os alunos confiram suas respostas e retirem as dúvidas que restaram com relação ao Método.

Aula 3 – A parábola dos Mínimos Quadrados

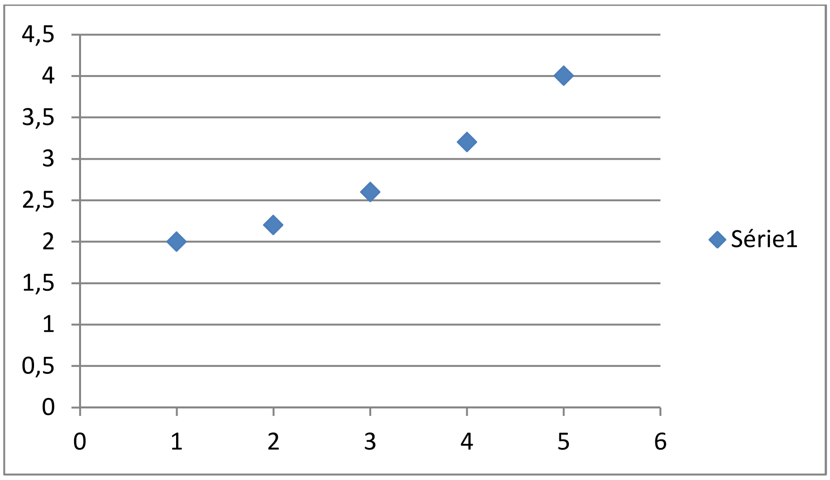
O professor irá apresentar aos alunos o problema abaixo, junto com seu diagrama de dispersão, para que os mesmos percebam a diferença do comportamento dos pontos (mais se aproxima de uma parábola) e então irá explicar utilizando o diagrama de dispersão que o método irá encontrar uma curva quadrática que mais se aproxima dos pontos dados.

Em seguida serão aplicadas atividades para que os alunos resolvam.

Exemplo que será resolvido junto com os alunos

A tabela abaixo representa as vendas em milhões nos 5 primeiros meses do ano, de uma determinada empresa. Marcamos estes dados no gráfico abaixo e conjecturamos que as vendas podem ser aproximadas por um polinômio de grau 2.

x	1	2	3	4	5
y	2	2,2	2,6	3,2	4



Pretende-se determinar $y = a + bx + cx^2$ que melhor se ajuste aos dados obtidos, e usar esta função para deduzir qual o volume de vendas que a empresa irá realizar no mês 12 do ano.

Extraindo os dados da tabela temos,

$$\sum x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

$$\sum (x_i)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

$$\sum {x_i}^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225$$

$$\sum (x_i)^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 = 979$$

$$\sum y_i = 2 + 2.2 + 2.6 + 3.2 + 4 = 14$$

$$\sum x_i y_i = (1.2) + (2.(2.2)) + \big(3.(2.6)\big) + \big(4.(3.2)\big) + (5.4) = 47$$

$$\sum y_i {x_i}^2 = (2.1^2) + (2.2 * 2^2) + (2.6 * 3^2) + (3.2 * 4^2) + (5 * 4^2) = 185.4$$

Logo, utilizaremos a fórmula para ajuste polinomial de grau 2.

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum {x_i}^2 \\ \sum x_i & \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 \\ \sum {x_i}^2 & \sum {x_i}^3 & \sum {x_i}^4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum y_i x_i \\ \sum y_i {x_i}^2 \end{bmatrix}$$

Aplicando os dados nas somatórias

$$\begin{bmatrix} 5 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 47 \\ 185.4 \end{bmatrix}$$

A solução de mínimos quadrados é $a = 2,\quad b = -0,1 \quad e \quad c = 0,1$

O polinômio procurado será $f(x) = 2 - 0.1x + 0.1x^2$. Logo a previsão das vendas para o ultimo mês do ano será de $y(12) = 15.2\, milhões$ de y(12) = 15.2 milhões.

Para resolver as atividades, os alunos serão levados até a STE (Sala de Tecnologia Educacional), para utilizarem o *Software Excel* como apoio nos cálculos.

Atividade1.

Calcule o polinômio de mínimos quadrados de grau 2 para os dados da tabela abaixo, use o *software Excel* ou *brcalc* para auxiliar nos cálculos e para gerar o diagrama de dispersão.

X	1	2	3	4	5	6
Y	1,3	3,5	4,2	5	7	8,5

Atividade 2

Encontre os polinômios de mínimos quadrados de grau 1 e 2 para os dados apresentados na tabela a seguir e faça o diagrama de dispersão.

X	1	1,1	1,3	1,5	1,9	2,1
Y	1,84	1,96	2,21	2,45	2,94	3,18

4º Aula

Para finalizar, será feito a correção das atividades da aula anterior no quadro para que os alunos possam conferir suas respostas e sanar as dúvidas que ainda restam.

CONCLUSÕES FINAIS

Neste trabalho fizemos o estudo do Método de Mínimos Quadrados, enfatizamos a importância de se trabalhar com tal método, utilizamos definições e teoremas para chegar ao método a ser aplicado. Estudamos e definimos o que é um problema de mínimo quadrado com exemplos de sistemas que recaem em infinitas e única solução. Discutimos o ajuste linear e polinomial seguido de exemplos.

Concluímos que para introduzir o método nas aulas do ensino Médio, é viável trabalhar o mesmo utilizando somatórias, pois facilita as contas e o entendimento pelos alunos já que se trata de uma introdução, concluímos ainda que este material não é indicado para dar suporte ao aluno e sim ao professor, por se tratar de definições e demonstrações pouco complexas.

O Método facilita a resolução de diversos problemas do cotidiano o que pode fazer com que os alunos se sintam motivados a aprender.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOLDRINI, José L., **Álgebra Linear**. 3ª Edição. São Paulo: Editora Harbra, 1980.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN): matemática. Brasília: MEC/SEE, 1997.

Cecco. B. L, Fiori. A. F, Vassoler. G, **Ajuste De Curvas Pelo Método Dos Quadrados Mínimos. Disponível em:** http://www.unochapeco.edu.br/static/data/portal/downloads/1409.pdf Acesso em 28 de fevereiro de 2014.

DANTE, L. R**. Didática da Resolução de Problemas de Matemática** – São Paulo: Editora Ática, 1994.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Ensino Médio**, volume1. 1ªed. Editora Ática. São Paulo. 2005.

FEO, A. E. **Resolução de Sistemas Superdeterminados**. In: II Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia. SEGETEC. 2005. Disponível em: http://www.aedb.br/seget/artigos05/16_TP3_SEGet.pdf. Acesso em 09 de janeiro de 2014.

HEFEZ, Abramo. FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução a Álgebra Linear,** SBM, 2012.

ANTON, Howard. C. Rorres, **Álgebra Linear com Aplicações**, Ed. Bookman, 10a.edição, 2012.

LAGES, Elon. **Algebra Linear,** 3º edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

LEON, Steven J. **Álgebra linear com aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC , 2008.

MARCONDES, C.A. GENTIL, Nelson. GRECO, S. E. **Matemática no Ensino Médio**. Volume Único. 7ª Edição. São Paulo: Editora Ática, 2003.

MASSARANI, Giulio. **Introdução ao cálculo numérico**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967.

ONUCHIC, L. de la R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (org.). Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, p. 199-218, 1999.