



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia
Mestrado em Matemática – PROFMAT

CELSO ITSUO TARUMOTO

POLÍGONOS DE REULEAUX E APLICAÇÕES

Dourados - MS
2014



UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia
Mestrado em Matemática – PROFMAT

CELSO ITSUO TARUMOTO

POLÍGONOS DE REULEAUX E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT na Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Gonzaga Manzine.

Dourados - MS
2014



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DA GRANDE DOURADOS
FACULDADE DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

Termo de Aprovação

Após a apresentação, arguição e apreciação pela banca examinadora foi emitido o parecer APROVADO, para a dissertação intitulada: “**Polígnos de Reuleaux e Aplicações**”, de autoria de Celso Itsuo Tarumoto, apresentada ao Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal da Grande Dourados.

Prof. Dr. Luiz Gonzaga Manzine (Orientador-UFGD)
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Rogério de Oliveira
Membro Examinador (UFGD)

Prof. Dr. Aginaldo Lenine Alves
Membro Examinador (UEMS)

Dourados/MS, 22 de abril de 2014

A

DEDICATÓRIA

À minha esposa Elaine, pelo apoio incondicional, pela paciência e compreensão e ao meu filho Lucas, pelo seu amor e paciência e a todos os que acreditaram em mim nestes dois anos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me deu o dom da vida e a força para continuar sempre.

Ao meu orientador Professor Luiz Gonzaga Manzine, pelos ensinamentos, paciência e orientação.

À banca de defesa, os professores Rogerio de Oliveira e Aguinaldo Lenine Alves, pelas contribuições dadas a este trabalho.

À coordenação do Mestrado, o Professor Sérgio Rodrigues, pelo empenho e atenção dados aos alunos.

Aos professores do Mestrado, Adriano Cavalcante Bezerra, Ana Maria Vilela Grecco, Irene Magalhães Craveiro, Lino Sanabria, Luiz Gonzaga Manzine, Robert Jesús Rodriguez Reyes, Rogerio de Oliveira, Sandra Regina de Oliveira de Souza, Sérgio Rodrigues, pelos ensinamentos.

À secretaria da coordenação, Lilian de Pádua Moreira Geisenhoff, pela dedicação e paciência para com os alunos.

Aos colegas de turma, André Santana Vieira, Dionisio Nogueira Neto, Fabio Augusto Correa, Juliana Arguelho Aquino Guilherme, Luiz Alberto Esquivel, Luzia de Oliveira Da Silva, Miriam Oliveira Espindola, Rômulo Marcos Pinheiro Júnior, Rubens de Oliveira Paz, Valdemir Contiero e Wilhelm dos Santos Paes, pela ajuda e companheirismo nestes dois anos.

Enfim, a todos que colaboraram direta ou indiretamente para a concretização deste Mestrado.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar os Polígonos de Reuleaux, em particular o Triângulo de Reuleaux e algumas aplicações dos mesmos que motivaram a escolha do tema.

Serão consideradas algumas definições relativas aos Polígonos de Reuleaux, a construção dos mesmos, suas propriedades e as aplicações e por último é colocado como sugestão para o ensino médio e fundamental algumas atividades tendo como referência o Triângulo de Reuleaux.

ABSTRACT

The objective of this work is to present the Reuleaux polygons, in particular the Reuleaux triangle and some applications thereof that motivated the choice of topic.

Be considered some definitions relating to Reuleaux polygons, their construction, their properties and applications, and lastly is placed as a suggestion for the elementary and middle school some activities with reference to the Reuleaux triangle.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1 CURVAS PLANAS CONVEXAS FECHADAS	12
2.1.1 REGIÃO CONVEXA	12
2.2 CURVAS PLANAS DE LARGURA CONSTANTE	12
2.2.1 RETAS SUPORTES E LARGURA DE UMA CURVA PLANA CONVEXA FECHADA	12
2.2.2 PONTOS ANTÍPODAS	14
2.2.3 CURVAS DE LARGURA CONSTANTE	14
2.2.3.1 CURVAS REGULARES DE LARGURA CONSTANTE	15
2.2.3.2 CURVAS IRREGULARES DE LARGURA CONSTANTE	15
2.3 POLÍGONOS DE REULEAUX	15
2.3.1 DEFINIÇÃO	15
2.3.2 CONSTRUÇÃO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	16
2.3.3 CONSTRUÇÃO DE POLÍGONOS DE REULEAUX QUAISQUER	17
2.3.4 CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA IRREGULAR DE LARGURA CONSTANTE	17
2.4 PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS DE REULEAUX	19
2.4.1 PROPRIEDADE FUNDAMENTAL.....	19

2.4.2 POLÍGONO DE REULEAUX REGULAR.....	20
2.4.2.1 EXISTÊNCIA DO POLÍGONO DE REULEAUX REGULAR.....	20
2.4.2.2 JUSTIFICATIVA.....	20
2.4.3 PROPRIEDADE DO TRIÂNGULO DE REULEAUX.....	21
2.4.3.1 ILUSTRAÇÃO	21
2.4.3.2 ÁREA COBERTA PELO TRIÂNGULO DE REULEAUX	23
3 APLICAÇÕES	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 ENGENHARIA CIVIL	24
3.2.1 ILUSTRAÇÃO.....	24
3.2.2 FURADEIRA PARA FUROS APROXIMADAMENTE QUADRADOS	26
3.2.2.1 ILUSTRAÇÃO	27
3.3 ENGENHARIA MECÂNICA.....	27
3.4 ARQUITETURA	28
3.5 FABRICAÇÃO DE LÁPIS E CANETAS	29
3.6 PALHETAS	29
3.7 ESTUDO DA FISIOLOGIA HUMANA	30
3.8 PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA OS ENSINOS FUNDAMENTAL E MÉDIO	30
3.9 ROTEIRO PARA A CONSTRUÇÃO DE UMA BROCA QUE FAZ FURO QUADRADO.....	31
4 CONCLUSÃO	32
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	33

ANEXO – BIOGRAFIA DE FRANZ REULEAUX	35
---	----

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – REGIÃO CONVEXA E REGIÃO NÃO CONVEXA	12
FIGURA 2 – ELIPSE COM LARGURA $2a$ NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ABSCISSAS	13
FIGURA 3 – ELIPSE COM LARGURA $2b$ NA DIREÇÃO DO EIXO DAS ORDENADAS	13
FIGURA 4 – PONTOS ANTÍPODAS.....	14
FIGURA 5 – CÍRCULO COM LARGURA $2R$ EM QUALQUER DIREÇÃO	15
FIGURA 6 – TRIÂNGULO EQUILÁTERO	16
FIGURA 7 – CONSTRUINDO O TRIÂNGULO DE REULEAUX	16
FIGURA 8 – O TRIÂNGULO DE REULEAUX	16
FIGURA 9 – RETAS CONCORRENTES	17
FIGURA 10 – CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA IRREGULAR DE LARGURA CONSTANTE	18
FIGURA 11 – CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA IRREGULAR DE LARGURA CONSTANTE	18
FIGURA 12 – CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA IRREGULAR DE LARGURA CONSTANTE	18
FIGURA 13 – CURVA IRREGULAR DE LARGURA CONSTANTE	19
FIGURA 14 – TRIÂNGULOS DE REULEAUX TANGENCIANDO AS RETA r E s ... 19	19
FIGURA 15 – PENTÁGONOS DE REULEAUX TANGENCIANDO AS RETA r E s ... 20	20
FIGURA 16 – TRIÂNGULO DE REULEAUX INSCRITO NUM QUADRADO	21
FIGURA 17 – TRIÂNGULO DE REULEAUX GIRANDO NO QUADRADO	21
FIGURA 18 – TRIÂNGULO DE REULEAUX GIRANDO NO QUADRADO	22
FIGURA 19 – TRIÂNGULO DE REULEAUX GIRANDO NO QUADRADO	22
FIGURA 20 – TRIÂNGULO DE REULEAUX GIRANDO NO QUADRADO	22
FIGURA 21 – TRIÂNGULO DE REULEAUX GIRANDO NO QUADRADO	22
FIGURA 22 – ELIPSE QUE DESCREVE UM DOS CANTOS DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	23
FIGURA 23 – ELIPSE QUE DESCREVE UM DOS ARCOS DA TRAJETÓRIA	

DESCRITA PELO CENTRO	24
FIGURA 24 – TRAJETÓRIA DESCRITA PELO CENTRO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	25
FIGURA 25 – TRAJETÓRIA DESCRITA PELO CENTRO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	25
FIGURA 26 – TRAJETÓRIA DESCRITA PELO CENTRO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	25
FIGURA 27 – TRAJETÓRIA DESCRITA PELO CENTRO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	25
FIGURA 28 – TRAJETÓRIA DESCRITA PELO CENTRO DO TRIÂNGULO DE REULEAUX	26
FIGURA 29– FURADEIRA COM EIXO MÓVEL	26
FIGURA 30 – EXECUÇÃO DE FURO APROXIMADAMENTE QUADRADO	27
FIGURA 31 – EXECUÇÃO DE FURO APROXIMADAMENTE QUADRADO	27
FIGURA 32 – MOTOR WANKEL	28
FIGURA 33 – JANELA DA CATEDRAL DE NOTRE DAME NA BÉLGICA	28
FIGURA 34 – LÁPIS COM SEÇÃO TRANSVERSAL COM A FORMA APROXIMADA DE UM TRIÂNGULO DE REULEAUX	29
FIGURA 35 – PALHETA COM A FORMA DE UM TRIÂNGULO DE REULEAUX REGULAR	29
FIGURA 36 – GRÁFICO DE SOMATÓTIPO.....	30
FIGURA 37 – FRANZ REULEAUX (1829 – 1905)	35
FIGURA 38 – CADEIA CINEMÁTICA	36

1 INTRODUÇÃO

Segundo Mello (2013, p.34), desde os tempos mais remotos o homem já usava cilindros para deslocar materiais pesados como enormes blocos de pedra utilizados para edificar grandes obras. Os blocos eram colocados sobre os cilindros e eram empurrados, facilitando assim o deslocamento daqueles e de outros materiais. O deslocamento tinha relativa segurança, uma vez que o movimento era estável, sem variações na altura ou na velocidade em que o objeto era transportado, pois a distância entre o solo e o bloco era constante. Assim, os blocos se deslocavam com uma distância constante em relação ao solo. Mais recentemente, descobriram-se outras formas geométricas que permitem o mesmo efeito do cilindro. São formas geométricas ditas de largura constante, dentre as quais destacam-se os Polígonos de Reuleaux.

O objetivo deste trabalho é o estudo dos Polígonos de Reuleaux, em particular o Triângulo de Reuleaux, de um ponto de vista intuitivo, e algumas de suas aplicações.

Conforme Mello, quando se diz “de um ponto de vista intuitivo”, isto quer dizer que os conceitos trabalhados não têm a profundidade exigida por uma pesquisa matemática.

Será apresentada a fundamentação teórica mínima para o entendimento das aplicações referidas no trabalho e será mostrada a construção do Triângulo de Reuleaux e a condição para se construir um Polígono de Reuleaux qualquer.

Também serão apresentadas as aplicações dos Polígonos de Reuleaux, em particular o Triângulo de Reuleaux na Engenharia. Este triângulo leva o nome de um engenheiro alemão, Franz Reuleaux, cuja história se encontra em anexo neste trabalho.

No conjunto das aplicações técnicas são colocadas ainda algumas sugestões de atividades que podem ser exploradas nos ensinos fundamental e médio.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Curvas planas convexas fechadas

2.1.1 Região convexa

Conforme Muniz Neto (2013, p.21), “uma região R do plano é convexa quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $AB \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região não convexa”. No contexto, AB é um segmento de reta com extremidades A e B .

A Figura 1 mostra uma região convexa do plano e uma região não convexa.

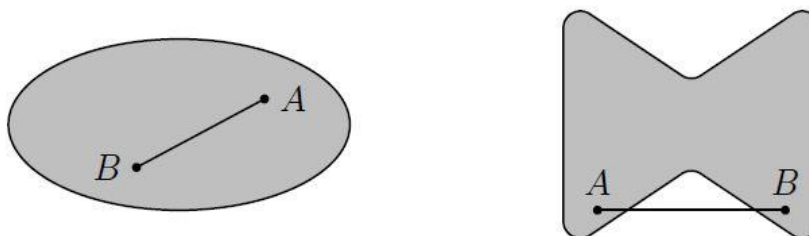


Figura 1 – Região convexa (esquerda) e região não convexa (direita)
Geometria Profmat (2012, p.9)

2.2 Curvas planas de largura constante

2.2.1 Retas suportes e largura de uma curva plana convexa fechada

Reta suporte é uma reta que tem a seguinte propriedade: a curva está contida num dos semiplanos definidos pela reta e a reta toca a curva. Em cada direção há exatamente duas retas suportes da curva e a distância entre estas retas é dita a largura da curva (LÜBECK, 2009, p.2).

Observação: a largura de uma curva plana convexa fechada não é única. Exemplo: a elipse.

A largura da elipse na direção do eixo Ox é $2a$. Neste caso, as retas paralelas r e s tangenciam a elipse nas interseções da curva com o eixo das abscissas.

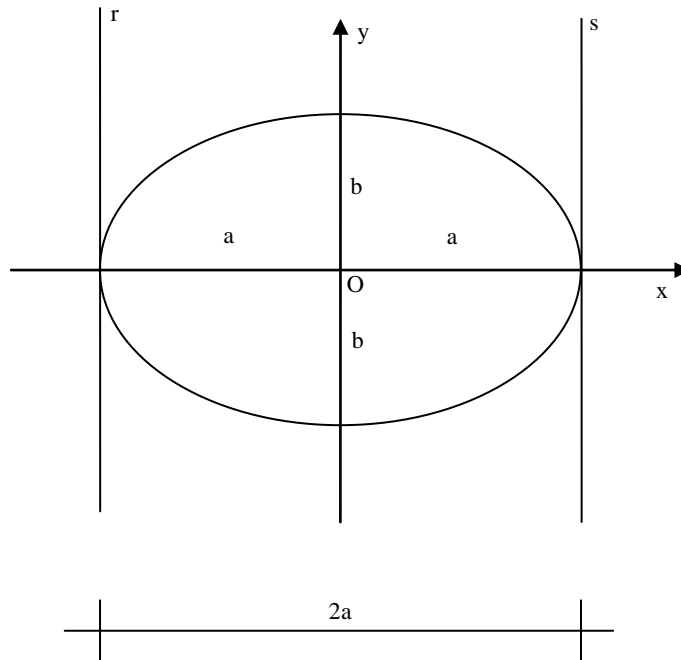


Figura 2 – Elipse com largura $2a$ na direção do eixo das abscissas.

A largura na direção do eixo Oy tem medida $2b$ caso as retas paralelas t e u tangenciem a elipse nas interseções da curva com o eixo das ordenadas.

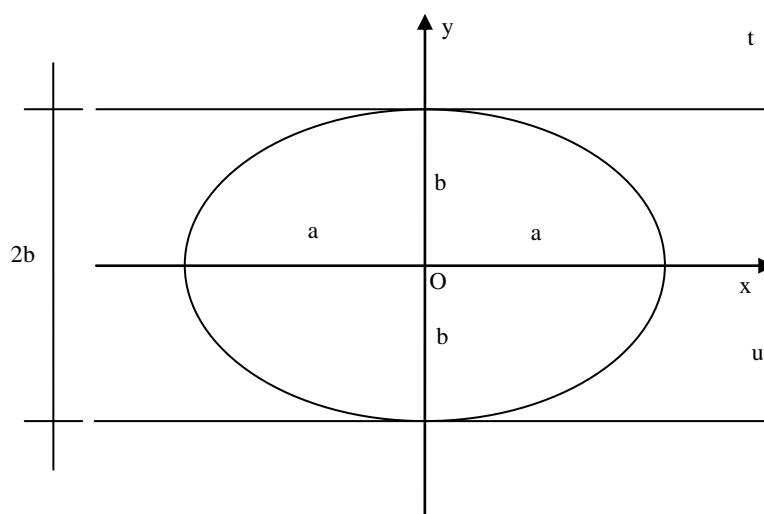


Figura 3 – Elipse com largura $2b$ na direção do eixo das ordenadas.

Outros exemplos de larguras de figuras planas podem ser dados como a largura de um quadrado, um retângulo, um triângulo, um círculo ou qualquer outra curva plana convexa fechada.

2.2.2 Pontos antípodas

Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos da curva.

Na Figura 4, A e C são os pontos de interseção da curva com o eixo das abscissas e B e D são os pontos de interseção da curva com o eixo das ordenadas. Os pontos A e C são antípodas, assim como B e D.

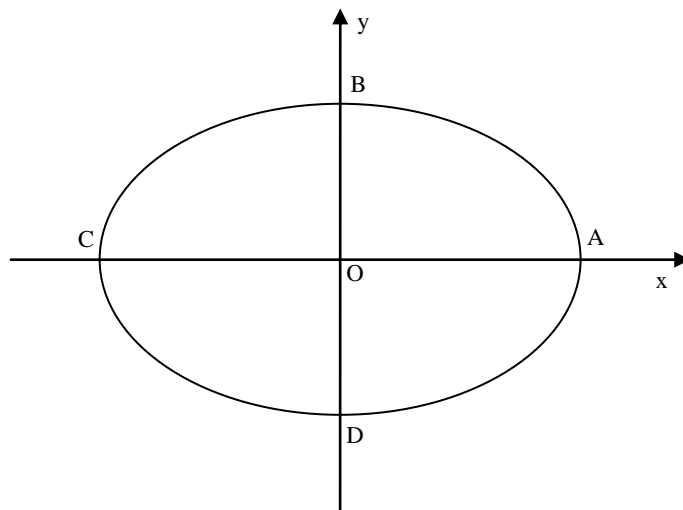


Figura 4 – Pontos antípodas

2.2.3 Curvas de largura constante

Segundo Lübeck (2009, p.1), curvas de largura constante são “[...] curvas planas, fechadas e convexas, nas quais a distância entre dois ‘pontos antípodas’ é constante, ou seja, a distância em qualquer direção determinada pelos pontos de interseção das retas suportes com a curva é sempre a mesma”.

O círculo possui a propriedade de ter a largura constante. Isso significa que qualquer que seja a direção de duas retas paralelas tangenciando o círculo em pontos diametralmente opostos, a largura tem sempre a mesma medida $2R$, onde R é o raio do círculo, como mostrado na Figura 5.

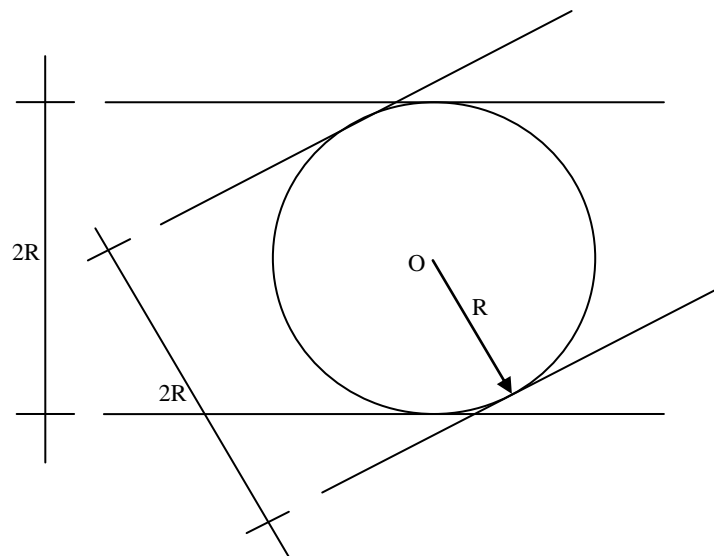


Figura 5 – Círculo com largura $2R$ em qualquer direção.

2.2.3.1 Curvas regulares de largura constante

São curvas formadas por arcos de circunferência que possuem o mesmo comprimento e mesmo raio (Figuras 8 e 15).

2.2.3.2 Curvas irregulares de largura constante

São curvas formadas por arcos de circunferência de diferentes comprimentos e raios (Figura 13).

2.3 Polígonos de Reuleaux

2.3.1 Definição

Os Polígonos de Reuleaux são curvas planas convexas fechadas de largura constante.

Observação: estritamente falando, os Polígonos de Reuleaux não são polígonos conforme Muniz Neto, mas curvas fechadas construídas a partir de polígonos. Estas curvas podem ser regulares ou irregulares. Se o polígono que dá origem ao Polígono de Reuleaux é regular, então o Polígono de Reuleaux é chamado de regular.

2.3.2 Construção do Triângulo de Reuleaux

Esta curva plana de largura constante é construída a partir de um triângulo equilátero, como mostrado na Figura 6.

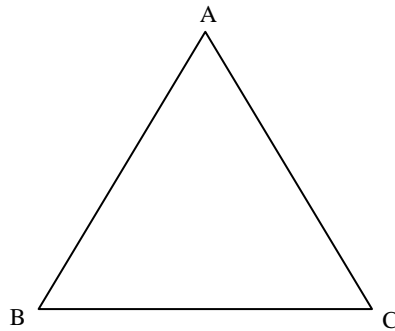


Figura 6 – Triângulo equilátero

Sua construção é feita da seguinte maneira: centrando o compasso no vértice A com abertura de medida AB, traça-se um arco de circunferência do vértice B ao C (Figura 7).

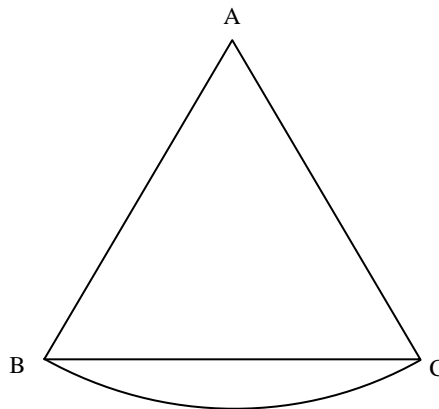


Figura 7 – Construindo o Triângulo de Reuleaux

Analogamente se constrói os arcos de circunferência de A para C e de A para B. O Triângulo de Reuleaux fica então conforme a Figura 8.

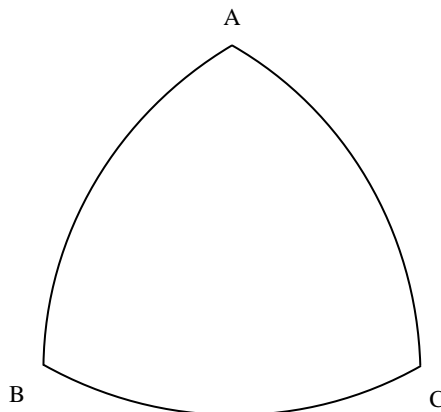


Figura 8 – O Triângulo de Reuleaux

2.3.3 Construção de Polígonos de Reuleaux quaisquer

A construção de Polígonos de Reuleaux regulares segue a mesma sequência da construção do triângulo (Figura 15).

2.3.4 Construção de uma curva irregular de largura constante

As curvas irregulares de largura constante podem ser construídas a partir de retas concorrentes. Para se traçar os arcos de circunferência que formarão a curva, deve-se traçar um arco de circunferência com centro na interseção de duas retas concorrentes. O arco será limitado por essas retas.

As Figuras 9 a 13 mostram o processo de construção de uma curva irregular de largura constante.

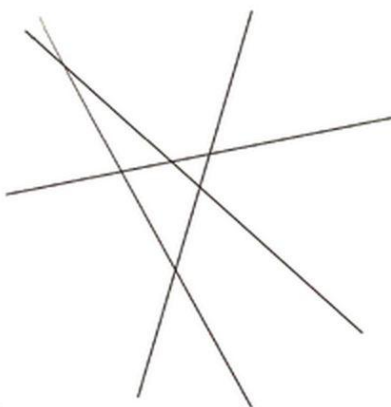


Figura 9 – Retas concorrentes

Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>

Acesso em: março de 2014

Cada arco de circunferência tem centro no ponto de interseção das retas que o limitarão. A Figura 10 mostra o traçado do primeiro arco com centro na interseção das retas.

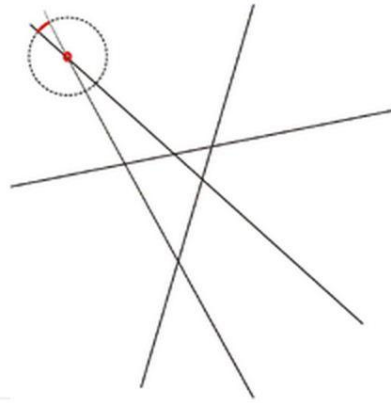


Figura 10 – Construção de uma curva irregular de largura constante
Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>
Acesso em: março de 2014

O arco seguinte terá centro no ponto de interseção das retas que o limitarão e o raio tem a medida determinada pelo arco traçado anteriormente.

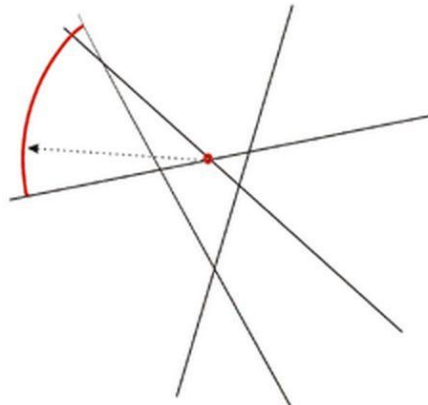


Figura 11 – Construção de uma curva irregular de largura constante
Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>
Acesso em: março de 2014

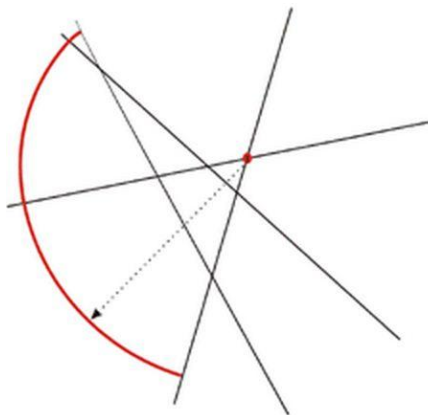


Figura 12 – Construção de uma curva irregular de largura constante
Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>
Acesso em: março de 2014

O procedimento é análogo para a construção dos demais arcos, resultando na curva da Figura 9.

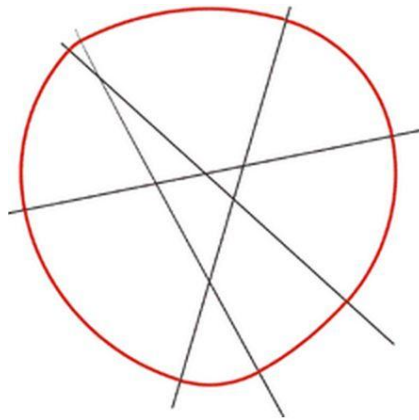


Figura 13 – Curva irregular de largura constante
Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>
Acesso em: março de 2014

Nesse exemplo a curva tem 8 arcos. Apesar de ser uma curva irregular de largura constante, para o traçado de cada arco, cada triângulo menor deve ser equilátero ou isósceles.

2.4 Propriedades dos Polígonos de Reuleaux

2.4.1 Propriedade Fundamental

Os Polígonos de Reuleaux são curvas planas convexas fechadas de largura constante.

A Figura 14 ilustra a propriedade 2.4.1, para o Triângulo de Reuleaux quando o mesmo gira entre duas retas r e s paralelas, tangenciando-as.

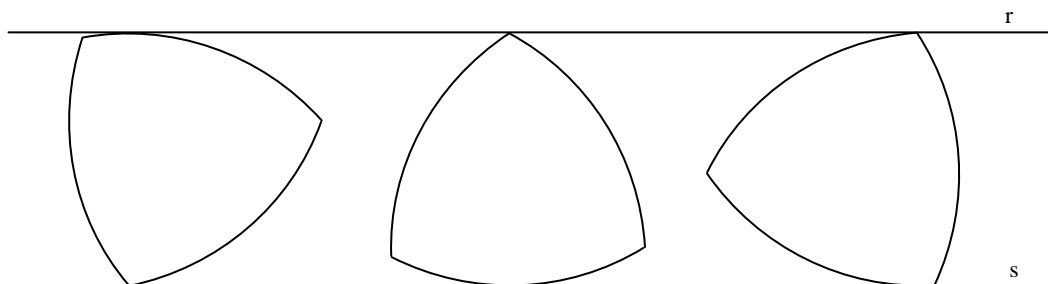


Figura 14 – Triângulos de Reuleaux tangenciando as retas r e s

2.4.2 Polígono de Reuleaux regular

Um Polígono de Reuleaux é regular se é construído a partir de um polígono regular.

2.4.2.1 Existência do Polígono de Reuleaux regular

Só existe Polígono de Reuleaux regular se o polígono que originou o mesmo tiver número ímpar de lados (MELLO, 2013, p.36).

2.4.2.2 Justificativa

Segundo Mello (2013, p.35), “[...] um Polígono de Reuleaux é uma forma geométrica particular de diâmetro constante obtida a partir de um número finito de arcos circulares de mesmo raio, centrados sempre no vértice oposto”.

Os polígonos regulares com número par de lados não possuem um lado oposto a um vértice. Desse modo, a construção de um quadrado de Reuleaux, por exemplo, seria impossível, porque não há um lado oposto a um vértice.

A Figura 15 mostra um Pentágono de Reuleaux com sua regularidade, construído de maneira similar ao Triângulo de Reuleaux girando entre duas retas paralelas r e s .

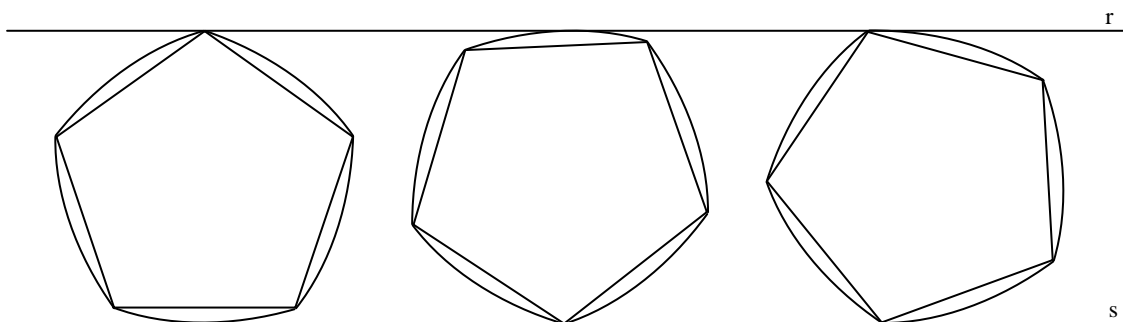


Figura 15 – Pentágonos de Reuleaux tangenciando as reta r e s

2.4.3 Propriedade do Triângulo de Reuleaux

Um Triângulo de Reuleaux construído a partir de um triângulo equilátero de lado L pode ser inscrito em um quadrado de lado L .

Quando o Triângulo de Reuleaux gira no interior do quadrado, seu centro descreve uma trajetória não circular.

2.4.3.1 Ilustração

As Figuras 16 a 21 mostram o movimento do Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado. Com este movimento o Triângulo de Reuleaux cobre uma área aproximada de um quadrado.

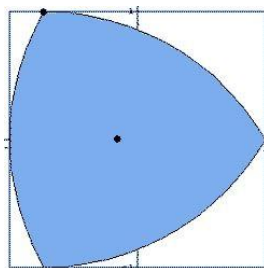


Figura 16 – Triângulo de Reuleaux inscrito num quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

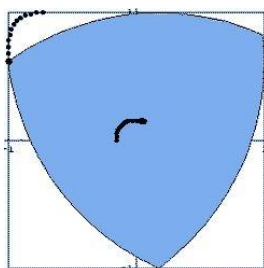


Figura 17 – Triângulo de Reuleaux girando no quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

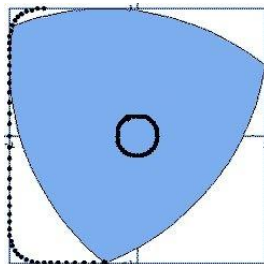


Figura 18 – Triângulo de Reuleaux girando no quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

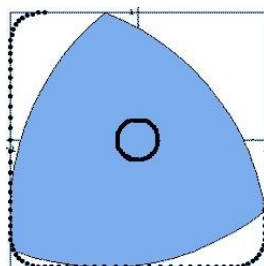


Figura 19 – Triângulo de Reuleaux girando no quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

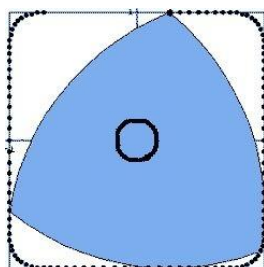


Figura 20 – Triângulo de Reuleaux girando no quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

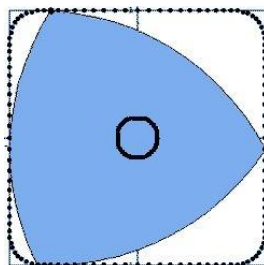


Figura 21 – Triângulo de Reuleaux girando no quadrado
Disponível em: <http://curvebank.calstatela.edu/reu/reuleaux.htm>
Acesso em: março de 2014

A linha pontilhada mostra que a trajetória do Triângulo de Reuleaux é uma figura próxima ao quadrado, porém com vértices abaulados.

2.4.3.2 Área coberta pelo Triângulo de Reuleaux

Gleißner e Zeitler, em *The Reuleaux Triangle and Its Center of Mass* (2000), afirmam que os cantos arredondados determinados pelo Triângulo de Reuleaux inscrito num quadrado são segmentos de elipse. A área coberta pelo Triângulo de Reuleaux inscrito em um quadrado de lado 1 quando este gira em torno de um eixo móvel é $A = 0,9877003907\dots$ (Gleißner e Zeitler, 2000).

A Figura 22 mostra uma elipse que descreve um dos cantos da figura aproximada de um quadrado coberto pelo Triângulo de Reuleaux.

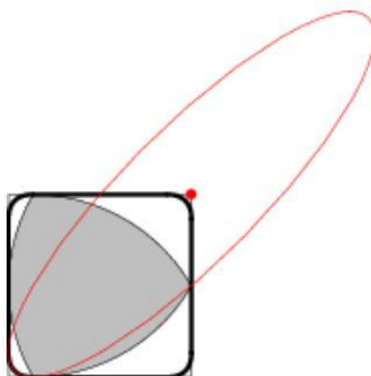


Figura 22 – Elipse que descreve um dos cantos do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>
Acesso em: abril de 2014

3 APLICAÇÕES

3.1 Introdução

Os Polígonos de Reuleaux têm diversas aplicações em várias áreas, tais como engenharia mecânica, civil, fabricação de objetos diversos, arquitetura e também pode servir de motivação em construções geométricas, cálculo de área, perímetro e construção de material didático nos ensinamentos fundamental e médio.

3.2 Engenharia Civil

Na engenharia civil, equipamentos com a forma do Triângulo de Reuleaux são utilizados para executar furos aproximadamente quadrados.

Para executar tal tarefa, o centro do Triângulo de Reuleaux descreve uma trajetória determinada por 4 arcos de elipse (WAGON, 1991). Caso o Triângulo de Reuleaux gire em torno de um eixo fixo o furo seria circular, mas se o eixo seguir a trajetória descrita pelos arcos de elipse, o furo resultante será aproximadamente um quadrado.

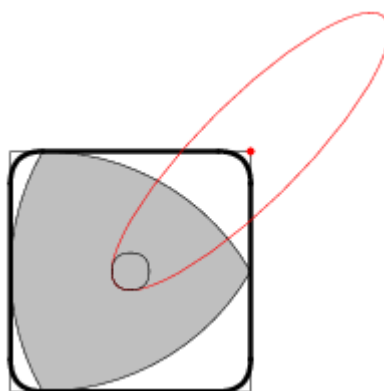


Figura 23 – Elipse que descreve um dos arcos da trajetória descrita pelo centro
Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>
Acesso em: abril de 2014

3.2.1 Ilustração

As Figuras 24 a 27 mostram a trajetória percorrida pelo centro do triângulo para que o furo resultante seja aproximadamente um quadrado.

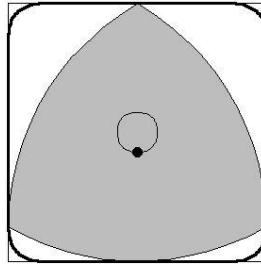


Figura 24 – Trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://beogris.wordpress.com/2007/05/>
Acesso em: março de 2014

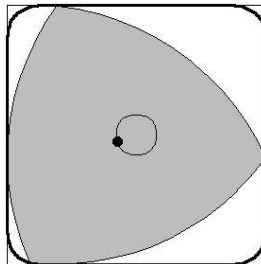


Figura 25 – Trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://beogris.wordpress.com/2007/05/>
Acesso em: março de 2014

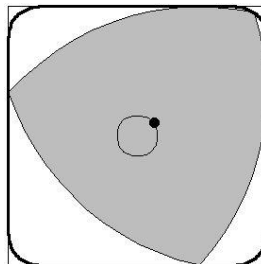


Figura 26 – Trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://beogris.wordpress.com/2007/05/>
Acesso em: março de 2014

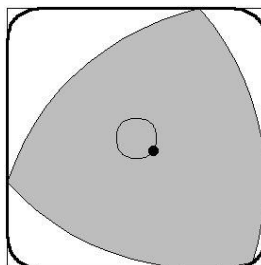


Figura 27 – Trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://beogris.wordpress.com/2007/05/>
Acesso em: março de 2014

Assim, para que a furadeira execute furos aproximadamente quadrados é necessário que a broca tenha um eixo que se movimenta descrevendo uma trajetória formada por 4 arcos de elipse.

A Figura 28 mostra a trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux, comparando-a a um círculo. É possível notar que o centro descreve uma trajetória com achatamentos próximos aos eixos das abscissas e das ordenadas.

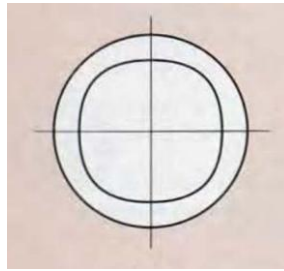


Figura 28 – Trajetória descrita pelo centro do Triângulo de Reuleaux
Disponível em: http://britton.disted.camosun.bc.ca/drilling_square_holes.pdf
Acesso em: março de 2014

3.2.2 Furadeira para furos aproximadamente quadrados

A Figura 29 mostra uma furadeira com eixo móvel, o que possibilita o centro do Triângulo de Reuleaux descrever a trajetória conforme o item 2.4.3.1. Esta trajetória é formada por quatro arcos de elipse conforme demonstrado em Wagon, 1991.

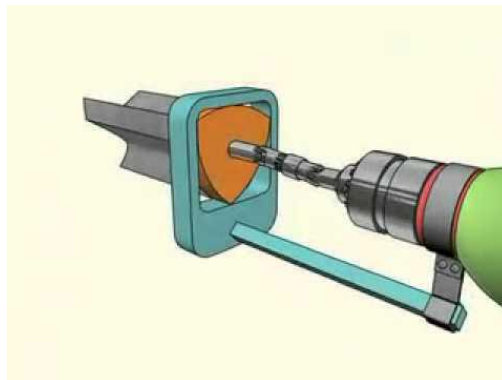


Figura 29 – Furadeira com eixo móvel
Disponível em: <http://www.youtube.com/watch?v=reKmsqTMwU8>
Acesso em: março de 2014

3.2.2.1 Ilustração

As Figuras 30 e 31 mostram a execução de furos aproximadamente quadrados.

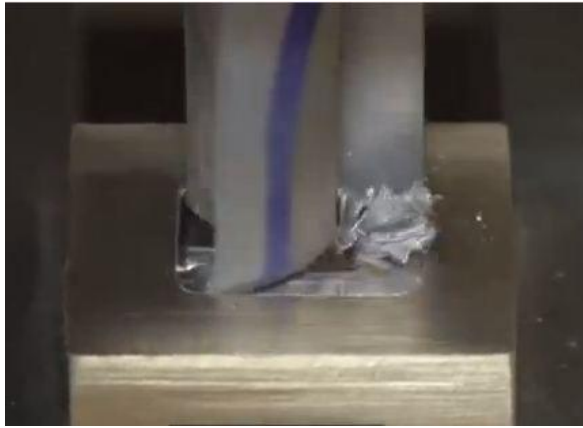


Figura 30 – Execução de furo aproximadamente quadrado
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Jwk1FOj2xtE>
Acesso em: abril de 2014



Figura 31 – Execução de furo aproximadamente quadrado
Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Jwk1FOj2xtE>
Acesso em: abril de 2014

3.3 Engenharia mecânica

Os Polígonos de Reuleaux têm aplicações nas mais variadas áreas como na engenharia mecânica com mecanismos de máquinas e motores a combustão como o motor Wankel, criado em 1924.

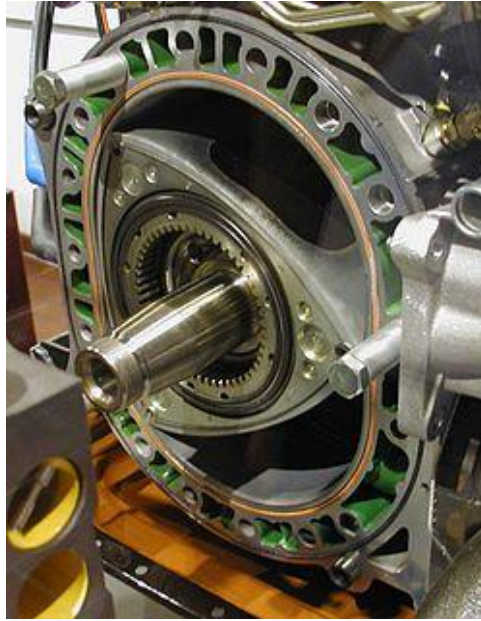


Figura 32 – Motor Wankel
Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Motor_Wankel
Acesso em: março de 2014

3.4 Arquitetura

Na arquitetura os Polígonos de Reuleaux regulares são usados na composição geométrica de fachadas, em volumetrias e também em elementos construtivos. Na Figura 33 pode-se ver o uso de um Triângulo de Reuleaux dando forma a uma janela. Trata-se de uma janela da Catedral de Notre Dame (Catedral de Nossa Senhora de Tournai) na Bélgica.



Figura 33 – Janela da Catedral de Notre Dame na Bélgica
Disponível em: <http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>
Acesso em: março de 2014

3.5 Fabricação de lápis e canetas

Os Polígonos de Reuleaux também são utilizados na fabricação de lápis e canetas.

Nestes objetos a seção transversal tem a forma de um Polígono de Reuleaux e faz com que a caneta ou lápis não role sobre a mesa. Além disso, conforme Mello, a forma de um Polígono de Reuleaux regular, por ter a largura constante, torna o uso do objeto mais confortável e ergonômico.



Figura 34 – Lápis com seção transversal com a forma aproximada de um Triângulo de Reuleaux
Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema280613b.pdf>
Acesso em: março de 2014

3.6 Palhetas

As palhetas utilizadas para tocar violão também possuem a forma aproximada de um Triângulo de Reuleaux. Assim como nos lápis e canetas, Mello afirma que a forma de um Triângulo de Reuleaux regular torna o uso mais confortável e ergonômico.



Figura 35 – Palheta com a forma de um Triângulo de Reuleaux regular
Disponível em: <http://www.setlistrp.xpg.com.br/palhetas.html>
Acesso em: março de 2014

3.7 Estudo da fisiologia humana

No estudo da fisiologia humana utiliza-se o Triângulo de Reuleaux através de um gráfico de somatótipo. O Somatótipo é uma teoria de classificação corporal dividida em endomorfia, mesomorfia e ectomorfia (adiposidade, muscularidade e magreza). “O somatótipo procura descrever a configuração morfológica apresentada pelo indivíduo [...]” (GUEDES & GUEDES, 1999).

O gráfico é um Triângulo de Reuleaux dividido por três eixos que se interceptam no centro, formando ângulos de 120° . Cada uma das áreas formadas pelas bissetrizes dos ângulos representa setores de predominância relativa de um dos componentes. A intersecção dos três eixos no centro do triângulo representa a origem.

A classificação do indivíduo é representada por três valores que variam de 1 a 7, sendo o primeiro valor referente a endomorfia, o segundo a mesomorfia e o terceiro a ectomorfia. Esse terço é representado no gráfico de somatótipo como um ponto.

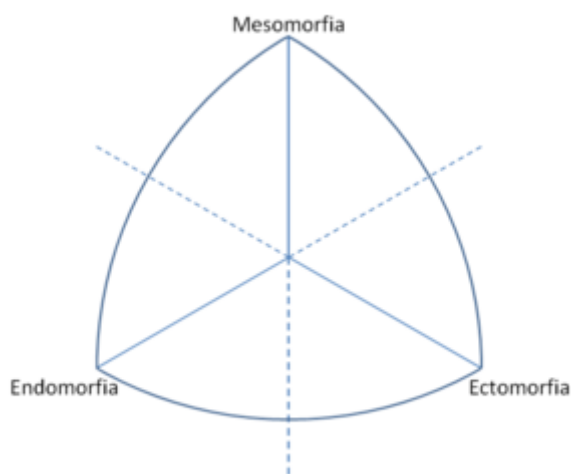


Figura 36 – Gráfico de somatótipo
Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Somatotipo>
Acesso em: março de 2014

3.8 Propostas de atividades para os ensinos fundamental e médio

O estudo dos Polígonos de Reuleaux e suas aplicações podem motivar e subsidiar aulas de desenho geométrico, cálculo de áreas e perímetros e construção de material didático. As atividades sugeridas são elencadas a seguir:

- 1) Construa com régua e compasso um Triângulo e um Pentágono de Reuleaux a partir de um triângulo equilátero e um pentágono regular, respectivamente.
- 2) Calcule a área de um Triângulo de Reuleaux formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1.
- 3) Calcule e compare as áreas de um Triângulo de Reuleaux formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1, e de um círculo de diâmetro 1.
- 4) Calcule o acréscimo de área de um Triângulo de Reuleaux formado a partir de um triângulo equilátero de lado 1.
- 5) Calcule o comprimento dos arcos de um Triângulo de Reuleaux.

3.9 Roteiro para a construção de uma broca que faz furo quadrado

Como complemento às propostas do item 3.8 é sugerido o roteiro para a construção de uma broca que faz furo quadrado conforme Moise.

Recorte, de uma folha grossa de papelão, um quadrado de 10cm de lado. O buraco resultante será o buraco quadrado para usar na experiência. Em seguida, num pedaço separado de papelão construa um triângulo equilátero de lado igual ao lado do quadrado. Com um compasso e usando como centro os vértices do triângulo, desenhe os arcos necessários. Recorte esse Triângulo de Reuleaux. O Triângulo gira no buraco mantendo sempre contato com os lados do buraco quadrangular. Desenhe a broca a partir do Triângulo de Reuleaux.

4 CONCLUSÃO

Os Polígonos de Reuleaux são formas geométricas que têm como principal característica a largura constante. Essa propriedade permite o uso desses polígonos nas mais diversas áreas, com objetos e mecanismos com funcionamentos e aplicações particulares dessas figuras planas.

O objetivo deste trabalho foi mostrar as propriedades desses polígonos e como eles podem ser utilizados no funcionamento de máquinas e em objetos que consideramos simples, mas que são projetados e fabricados a partir de um estudo matemático envolvendo essas figuras.

A construção dos Polígonos de Reuleaux regulares possui uma teoria compreensível para alunos do ensino médio, sendo assim um assunto possível de ser abordado pelo professor. O desenvolvimento de atividades relacionadas à construção e verificação de algumas propriedades pode ser feito utilizando materiais e teorias conhecidas por alunos deste nível.

A teoria e as suas diversas aplicações a tornam um assunto capaz de gerar interesse e curiosidade por parte de estudantes de Engenharia ou Matemática, levando-o a uma pesquisa com todos os detalhes formais da Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GLEIBNER & ZEITLER, *The Reuleaux Triangle and Its Center of Mass*, Results in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel – Switzerland, 2000.

LÜBECK, K. R. M. *Curvas de Largura Constante e suas Generalizações*, artigo, 13º Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – XIII ERMAC, disponível em <<http://revistas.utfpr.edu.br/pb/index.php/SysScy/article/viewFile/689/393>>, acesso em 07/03/2014.

MELLO, J. L. P. *Polígonos de Reuleaux e a Generalização do Pi*. Revista do Professor de Matemática, nº 81, 2º Quadrimestre de 2013, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

MOISE, E. E. & DOWNS, F.L. *Geometria Moderna*. Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1971.

MOON, F. C. & FORD, J. *The Reuleaux Collection of Kinematic Mechanisms at Cornell University*, artigo, Cornell University, Ithaca – New York, disponível em <<https://www.asme.org/getmedia/f47f8dae-5d5c-4b9e-abd0-1ff665b17100/232-Reuleaux-Collection-of-Kinematic-Mechanisms-at-Cornell-University.aspx>>, acesso em 04/03/2014.

MUNIZ NETO, A. C. *Geometria*, Coleção Profmat, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2013.

SMITH, S. G. *Drilling Square Holes*, artigo – The Mathematics Teacher, v.86, nº 7, Reston – Virginia, 1993, disponível em <http://britton.disted.camosun.bc.ca/drilling_square_holes.pdf>, acesso em 14/03/2014.

TAIMINA, D. & HENDERSON, D. W. *Reuleaux Triangle*, artigo, Cornell University, Ithaca – New York, disponível em <<http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/>>, acesso em 10/03/2014.

VOLOCH, J. F. *Curvas de Largura Constante*, artigo, XVI Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, disponível em <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n05/n05_Artigo05.pdf>, acesso em 10/03/2014.

WAGON, S. *Mathematica in Action*. W. H. Freeman, New York, 2000.

WEISSTEIN, E. W. C. *Reuleaux Triangle*, artigo – Wolfram MathWorld, disponível em <<http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html>>, acesso em 02/04/2014.

ANEXO – BIOGRAFIA DE FRANZ REULEAUX

Franz Reuleaux nasceu em 30 de setembro de 1829 em Eschweiler, na Alemanha. Filho de um construtor de máquinas, Franz estudou na Polytechnic University of Karlsruhe de 1850 a 1852.

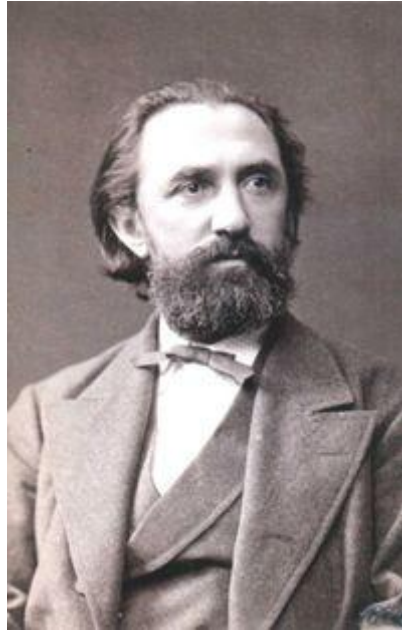


Figura 37 – Franz Reuleaux (1829 – 1905)
Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Franz_Reuleaux
Acesso em: março de 2014

Em 1856, Reuleaux, então com vinte e sete anos, foi convidado para ser professor de engenharia mecânica na Swiss Federal Institute em Zurique. Oito anos depois, em 1864, Reuleaux assumiu a mesma função na Royal Industrial Institute em Berlim. Foi diretor nesta instituição de 1868 a 1879.

Reuleaux foi eleito reitor da instituição no período de 1890 a 1891. Nessa época, a instituição era uma das maiores universidades técnicas do mundo, com mais de três mil alunos e trezentos professores.

Moon e Ford (2004, p.10) afirma que:

Reuleaux não era o maior inventor da época, nem um cientista puro, mas era um engenheiro-cientista, uma nova figura da era industrial. Ao contrário de muitos engenheiros que praticavam uma engenharia de tentativa-e-erro, Reuleaux acreditava que as máquinas poderiam ser criadas e projetadas usando princípios científicos e guiados pela Matemática.

Reuleaux projetava elementos de máquinas que funcionavam como uma cadeia de movimentos. Ele acreditava que os símbolos poderiam representar um mecanismo de máquina, assim ele teria descoberto a chave para os princípios racionais de invenção e de síntese. Segundo Moon e Ford (2004, p.12), os elementos de máquinas são como uma rede de partes conectadas, onde o movimento de cada parte é limitado pelas partes vizinhas da cadeia. Assim, ele criou um museu com mais de oitocentos modelos de mecanismos de máquinas que tiveram autorização para serem construídas. Por volta de 1900 já haviam trezentos e cinquenta modelos à venda.

Um exemplo é o elemento de máquina mostrado na Figura 37, uma cadeia cinemática simples com parafuso sem fim.

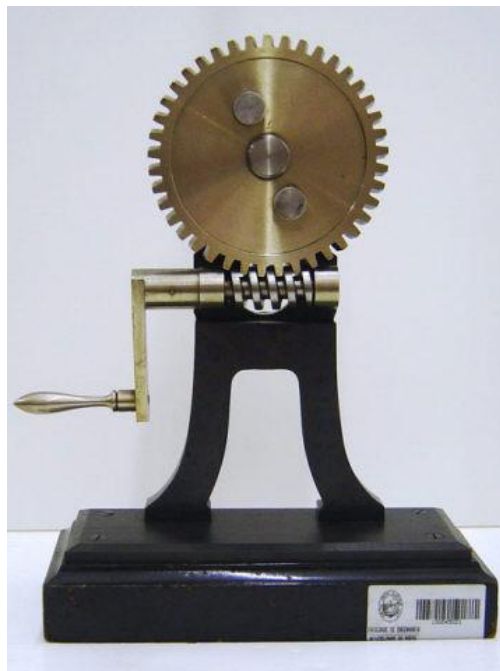


Figura 38 – Cadeia cinemática

Disponível em: <http://inarte.fe.up.pt/inweb/ficha.aspx?id=22&src=feup>

Acesso em: março de 2014