2014: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ / Campus Alto Paraopeba - CAP

Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

A Razão Áurea e a sequência de Fibonacci

Janine Velloso do Amaral[1]

José Eloy Ottoni[2]

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de mostrar a relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea. O livro *Elementos* de Euclides consiste em um tratado de geometria escrito em 300 a. C., nele aparece pela primeira vez a definição da divisão de um segmento em extrema e média razão que resulta na Razão Áurea. Assim, tanto professores quanto estudantes de várias áreas de conhecimento referem-se ao *Elementos* como um dos mais bem-sucedidos livros da história da humanidade. Em 1202, um matemático italiano chamado Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci tornou-se conhecido através do livro *Liber Abaci* ou *Livro de Cálculo* onde apresenta um problema sobre a reprodução de coelhos e define a sequência onde, a partir do terceiro termo, cada termo é dado pela soma dos dois anteriores, uma recorrência de segunda ordem. Essa sequência apresentou várias propriedades que foram objeto de estudo de vários matemáticos ao longo do tempo. Uma das características dessa sequência é que a sequência formada pelo quociente de um termo qualquer pelo seu anterior tende a uma constante, sendo essa constante a própria Razão Áurea.
Palavras-chave: Razão Áurea, Fibonacci, recorrência.

Abstract

The Golden Number and the Fibonacci Sequences

This article intends to show the relationship between Fibonacci sequence and the Golden Number Proportion. The Euclid's *Elements* book is a mathematical treatise written by the greek mathematician in 300 b. C. This book has been referred to scholars and professors from many branches of knowledge as one of the most successful textbook ever written by human being. In 1202, a mathematical Italian Leonardo of Pisa well-known as Fibonacci published *Liber Abaci* or *The Book of Calculation* that describes the growth of a population of rabbits. Fibonacci sequence is a serie of numbers where the next number is found by adding up the two numbers before it. Through any two successive (one after the other) Fibonacci numbers, their ratio is very close to the Golden ratio.

Keywords: Fibonacci Sequences, Golden Numbers, Recurrence.

---

[1] Licenciada em Matemática pelo Centro Universitário Newton Paiva; Aluna do PROFMAT Universidade Federal de São João Del Rei – Campus Alto Paraopeba (UFSJ-CAP).

[2] Orientador

Introdução

Pitágoras (527-497 a.C.) foi um importante filósofo e matemático grego, provavelmente discípulo de Tales de Mileto. Nasceu na ilha de Samos, na costa do que hoje é a Turquia. É possível que tenha viajado muito no início da vida, principalmente pelo Egito e talvez à Babilônia, onde teria recebido pelo menos parte de sua educação em matemática. Por fim emigrou para uma pequena colônia grega em Crotona, perto da extremidade sul da Itália, onde logo atraiu um grupo de estudantes. Estes seguidores e discípulos são conhecidos hoje como pitagóricos. [1]

Os pitagóricos tinham verdadeiro fascínio pelos números e consideravam que tudo no universo, desde objetos materiais como a Terra até conceitos abstratos como justiça, seria número, do início ao fim. Para eles (os pitagóricos) o número 5 representava a perfeita união do primeiro número feminino 2, com o primeiro masculino 3. Esta seria uma das possíveis explicações para a utilização do pentagrama como símbolo que os representava. [2]

Não existem registros sobre a vida de Pitágoras ou sobre sua Escola, e de acordo com alguns estudiosos todo o ensinamento ocorria de forma oral, sendo proibido qualquer tipo de registro escrito. [1]

> Os pitagóricos formavam uma irmandade secreta e mantinham o conhecimento em comum, de forma que é impossível fazer atribuições individuais aos trabalhos. Eles se encantavam com padrões e propriedades dos números e sequências e acreditavam que os números estavam no coração de todas as coisas. [3]

Em cerca de 300 a.C. o matemático *Euclides* descreveu no Livro VI de sua obra *Os Elementos,* a divisão de um segmento em duas partes dividindo-o em razão média e extrema, motivado, possivelmente, pelas propriedades observadas no estudo do pentagrama. A razão obtida a partir dessa definição é um número irracional conhecido como número de ouro, ou ainda, razão áurea ou proporção divina.

Essa forma de divisão de um segmento em duas partes há muito intriga estudiosos e curiosos. Esse padrão de disposição geométrico já foi identificado em obras de arte, construções antigas, padrões naturais de disposição de sementes de flores, em casca de frutos e ainda nas proporções entre diversas partes do corpo humano idealizado – representado simbolicamente na obra de Leonardo da Vinci “O Homem Vitruviano”. (fig. 7)

Em 1202, Fibonacci, publicou o livro *Liber Abaci* no qual apresentou um problema sobre reprodução de coelhos. A resolução desse problema define uma sequência de número inteiros de forma recorrente onde, cada termo a partir do terceiro, é dado pela soma dos dois anteriores, sendo os dois primeiros iguais a 1. A sequência assim formada $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ e assim sucessivamente leva seu nome, “Sequência de Fibonacci”, e, assim como a Razão Áurea, já foi identificada e observada em diversos elementos de ocorrência natural e em obras executadas por artistas em diferentes épocas.

Objetivo

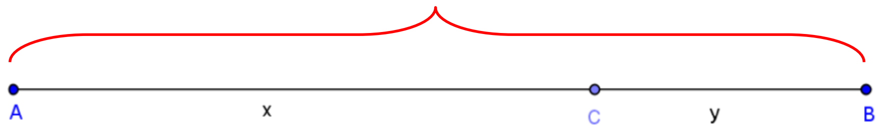
A motivação para o presente estudo é a exposição da relação, não óbvia, entre esses dois objetos: a Razão Áurea descrita por *Euclides* e a sequência de Fibonacci fruto de um problema teórico que analisa a reprodução de coelhos.

1. A Razão Áurea

Em *Os Elementos* (Euclides), no livro VI, definição III, lê-se: “Uma linha se diz dividida em extrema e média razão, quando toda a linha é para o segmento maior, como este segmento maior é para o segmento menor.” [4]

Desde o século XIX essa razão é conhecida como Razão Áurea, também chamada de seção áurea ou ainda proporção divina.

Seja o segmento AB e C um ponto interior a AB que divide AB em extrema e média razão.



Considerando $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = y$. Com $\overline{AC} > \overline{CB}$ temos que

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow x^2 = xy + y^2 \Rightarrow x = \frac{y\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2} \qquad (1)$$

Como x e y são números positivos, descartamos o resultado negativo obtido em (1). Obtendo dessa forma

$$x = \frac{y\left(1 + \sqrt{5}\right)}{2}$$

A razão $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033988749895\cdots$ é denominada Razão Áurea e foi nomeado como ϕ (letra grega fi).

A escolha da letra ϕ seria uma homenagem a *Fídias* (490-430 a.C.), famoso arquiteto e escultor grego que viveu em Atenas e foi o responsável pela ornamentação do Partenon – construção onde já foram verificados a ocorrência da Razão Áurea em diversos elementos. [2]

O número ϕ é irracional e como veremos mais a frente o pentagrama, símbolo que representava os pitagóricos, apresenta em vários de seus elementos a Razão Áurea. Esse é um fato curioso, pois é sabido que Pitágoras não reconhecia a existência de números irracionais. De acordo com ROONEY (2012) "*Pitágoras não era capaz de provar pela lógica que os números* *irracionais não existem, mas quando Hipaso de Metaponto (nascido em 500 a.C.) demonstrou que a raiz quadrada de 2 é irracional e argumentou sua existência, diz a lenda que Pitágoras o afogou.”*

LEMA 1 - *A incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um pentágono regular.* [2]

DEM.: Seja ABCDE um pentágono regular de lado l_1 e diagonal d_1.

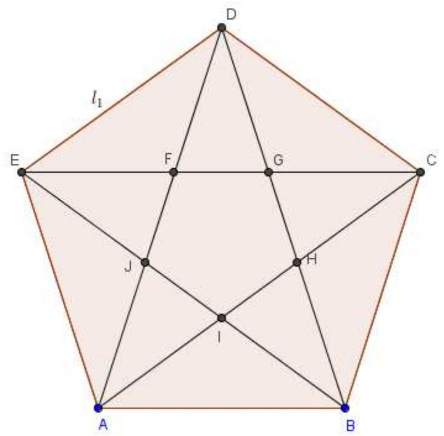


Figura 1 – Pentágono regular e suas diagonais[3]

Os pontos de interseção das diagonais formam um novo pentágono semelhante ao primeiro de lado l_2 e diagonal d_2.

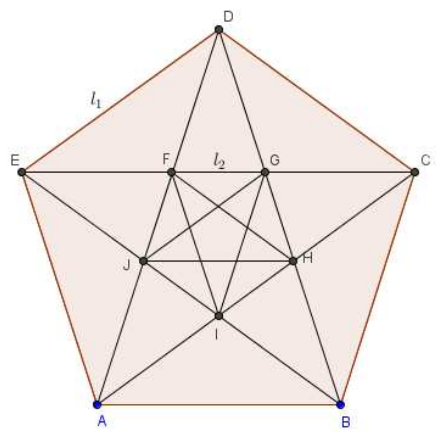


Figura 2 – Pentágonos e pentagramas semelhantes[4]

[3] Figura construída no GeoGebra
[4] Figura construída no GeoGebra

Suponha l_1 e d_1 segmentos comensuráveis entre si, logo existe uma medida comum a l_1 e d_1. Por semelhança a razão entre l_2 e d_2 é igual a razão entre l_1 e d_1 e assim, a medida comum a l_1 e d_1 também será comum a l_2 e d_2, esse processo pode ser repetido infinitamente e nos levará a concluir que a medida comum entre l_1 e d_1 também será comum a todos os infinitos pentágonos independente de quão pequenos sejam. O que nos leva claramente a um absurdo, significando que a suposição inicial de que o lado e a diagonal do pentágono regular tem uma medida comum é falsa, o que completa a prova que l e d são incomensuráveis.

■

1.1. A Razão Áurea na natureza e na arte.

O fascínio de estudiosos e curiosos por esse número especial está no fato de ser observado em diversos elementos naturais, construções antigas e ainda em várias obras artísticas. Um dos diversos exemplos naturais é a concha do Nautilus. [2]

O Nautilus (*Nautilus pompilius*) pode ser encontrado nos oceanos Índico e Pacífico em águas profundas (cerca de 550m abaixo da superfície). É considerado por muitos um fóssil vivo e sua estrutura permanece inalterada há mais de 400 milhões de anos.[5]

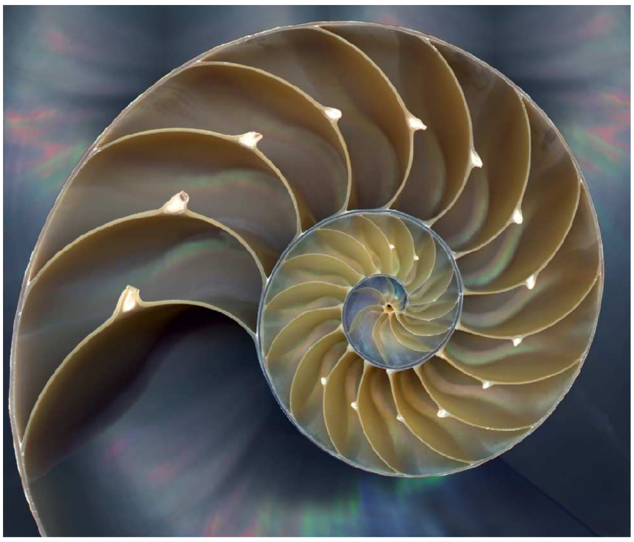


Figura 3 – Foto de corte longitudinal da concha do Nautilus[6]

[5] Disponível em: http://www.seasky.org/deep-sea/chambered-nautilus.html acesso em: 07 jan. 2014.

Sua concha forma uma espiral logarítmica e a proporção de crescimento segue a Razão Áurea. O mesmo padrão é observado na construção de uma espiral a partir do retângulo áureo – suas dimensões guardam entre si a Razão Áurea.

Segue abaixo um esquema para construção de um retângulo áureo de dimensões a x $(a + b)$, sendo $\frac{a}{b} = \phi$. Com b contruimos um novo retângulo semelhante ao primeiro de dimensões b x $(a - b)$, a razão $\frac{b}{a-b} = \phi$ e assim sucessivamente.

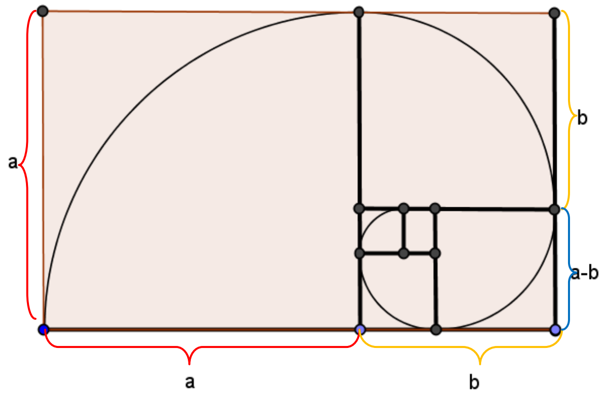


Figura 4 – Retângulo áureo[7]

Outro exemplo onde encontramos a presença da Razão Áurea, é o Parthenon, obra da arquitetura da Grécia antiga. A razão áurea ocorre em muitos de seus elementos, com destaque para a fachada, onde a razão entre largura e altura é aproximadamente igual a ϕ.

Figura 5 – Foto do Parthenon[8]

[6] Disponível em: http://gallery.mailchimp.com/374c94fd6234e49f184736200/images/Nautilus_Shell.JPG acesso em: 07 jan. 2014.

[7] Figura construída no GeoGebra

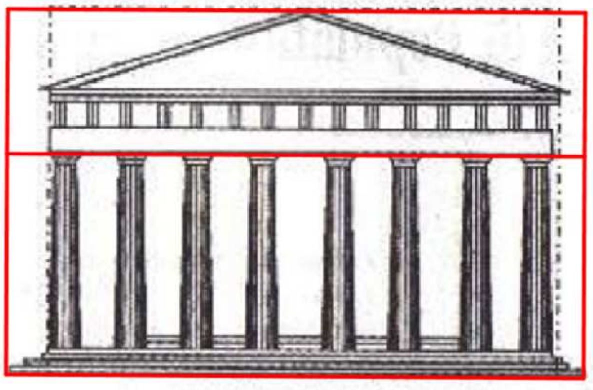


Figura 6 – Razão Áurea na fachada do Parthenon[9]

Além disso, nos tempos da Grécia antiga, a razão áurea foi verificada em uma figura que consiste na união das diagonais do pentágono, o Pentagrama, que no decorrer da história da humanidade, serviu de símbolo para a religiosidade cristã e posteriormente para a cultura neopagã. [5]

Veremos a razão áurea presente na geometria do pentágono e do pentagrama mais adiante na seção 1.3.1.

> Amantes da cultura pagã, Michelangelo e Leonardo da Vinci, utilizaram desta proporção em suas obras. Da Vinci dissecava cadáveres e media a proporção de seus corpos para identificar que o corpo humano é uma das únicas substâncias naturais que obedeciam a "Divina Proporção" – como pode ser visto em sua obra conhecida como O Homem Vitruviano. [5]

> O "Homem Vitruviano" é uma obra de 1490 e que foi primeiramente baseada numa obra mais antiga sobre arquitetura do famoso Vitrúvio e que faz menção às proporções divinas perfeitas, portanto este homem seria o ideal humano; toda a obra tem proporções baseadas no número phi (1,618) que os gregos difundiram.[10]

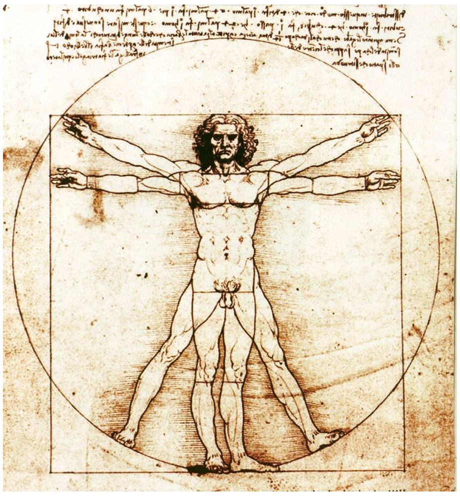
Na figura 7 temos a identificação de segmentos numerados que estão em Razão Áurea. Dessa o forma observamos que o segmento 3 é igual a soma de 1 e 2 e 1 está para 2 assim como 2 está para 3 (definição de razão média e extrema de um segmento descrita por Euclides). O mesmo é observados para os demais segmentos apresentados na figura 8.

---

[8] Disponível em http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/da/The_Parthenon_in_Athens.jpg acesso em 16 fev 2014.

[9] Disponível em http://pnld.moderna.com.br/wp-content/uploads/2012/08/Matem%C3%A1tica-N%C3%BAmero-de-Ouro-Partenon.jpg acesso em 16 fev 2014

[10] Disponível em: http://academiadefilosofia.org/publicacoes/olhar-filosofico/o-homem-vitruviano-leonardo-da-vinci acesso em 07 jan. 2014.



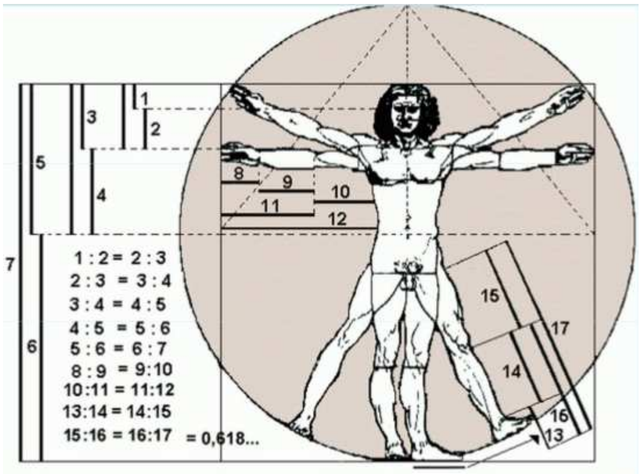


Figura 7 – O Homem Vitruviano – Leonardo da Vinci[11]

Figura 8 – A Razão Áurea em "O homem vitruviano"[12]

1.2. Propriedades de ϕ

O número ϕ tem muitas características interessantes, vejamos algumas delas.

Propriedade 1 - $\phi^2 = 1 + \phi$.

DEM.: Seja $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, então

$$\phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\phi$$

Além disso, perceba que se $\phi^2 = 1+\phi$ podemos escrever

$$\phi^2 - \phi = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi(\phi - 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \phi - 1 = \frac{1}{\phi} \text{ ou } \phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

■

Partindo dessa última igualdade o número ϕ pode ser definido como uma fração infinita na forma

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+\cdots}}}$$

[11] Disponível em: http://derosealtodaxv.org.br/blog/wp-content/uploads/2013/07/Imagem-Filosofia-Homem-Vitruviano-Leonardo-Da-Vinci.jpg acesso em 07 jan. 2014.

[12] Disponível em http://image.slidesharecdn.com/ageometriasagrada-120401150908-phpapp01/95/slide-48-728.jpg?cb=1333311031 acesso em 16 fev. 2014

Voltando à igualdade $\phi^2 = 1+\phi$ podemos escrever $\phi = \sqrt{1+\phi}$ e com isso ϕ pode ser definido a partir de outra fórmula infinita

$$\phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

O número ϕ apresenta ainda outras propriedades interessantes:

Propriedade 2 - A soma de duas potências inteiras consecutivas de ϕ resulta na próxima potência, ou seja, $\phi^k + \phi^{k+1} = \phi^{k+2}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

DEM.: Partindo da igualdade $\phi^2 = 1+\phi$ e multiplicando ambos os lados por ϕ^k, com $k \in \mathbb{Z}$ (válido também para $k \in \mathbb{R}$).

$$\phi^k \cdot \phi^2 = (1+\phi)\cdot \phi^k \Rightarrow \phi^{k+2} = \phi^k + \phi^{k+1}$$

■

Propriedade 3 - A soma de todas as potências de expoente negativo e base ϕ resulta no próprio ϕ, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi$.

DEM.: $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^{-n} = \phi^{-1} + \phi^{-2} + \phi^{-3} + \phi^{-4} + \cdots$

Os termos dessa soma formam uma progressão geométrica infinita de razão $q = \frac{1}{\phi} < 1$, com primeiro termo $a_1 = \frac{1}{\phi}$. Sabemos que a soma (S) dessa sequência pode ser expressa por

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{\phi}}{1-\frac{1}{\phi}} = \frac{1}{\phi - 1}$$

multiplicando numerador e denominador por $\phi + 1$, temos

$$S = \frac{1}{\phi - 1} \cdot \frac{\phi + 1}{\phi + 1} = \frac{\phi + 1}{\phi^2 - 1}$$

Mas $\phi^2 = \phi + 1$ então

$$S = \frac{\phi+1}{\phi^2 - 1} = \frac{\phi^2}{\phi} = \phi$$

■

1.3. Construção geométrica da razão áurea

A divisão de um segmento em razão média e extrema pode ser construída geometricamente da seguinte forma. [6]

Construção 1 *Construção geométrica da razão áurea.*

- sobre uma reta suporte r, determine o segmento AB.
- marque M o ponto médio de $\overline{AB}$
- trace uma reta s perpendicular a r passando por B.
- marque sobre s o ponto D tal que $\overline{BD}$=$\overline{MB}$
- traçar $\overline{AD}$
- marcar o ponto E sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{BD}$=$\overline{DE}$.
- marque C sobre r tal que $\overline{AC}$=$\overline{AE}$

C é o ponto que determina a divisão de $\overline{AB}$ em razão média e extrema.

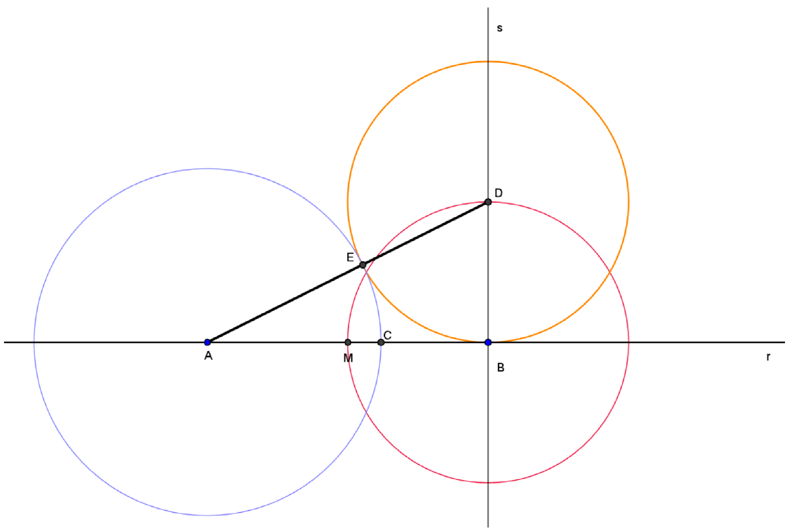


Figura 9 – Construção geométrica da divisão de um segmento $\overline{AB}$ pelo ponto C em razão média e extrema.[13]

[13] Figura construída no GeoGebra

Justificativa da construção: $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = x$, o triângulo ABD é retângulo em B por construção logo $\overline{AD}$ é a hipotenusa ΔABD, pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(\overline{AD}\right)^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 + \left(\overline{BD}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Então a razão entre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \phi$$

1.3.1. A Razão Áurea no pentágono e no pentagrama

A divisão de um segmento em razão média e extrema (que define a Razão Áurea) aparece pela primeira vez na obra *Os Elementos*. Mas por que Euclides se daria ao trabalho de definir essa determinada divisão de linha, uma vez que o segmento pode ser dividido em duas partes de outras formas que não foram mencionadas?

Uma das explicações está relacionada com o estudo do pentagrama (fig. 8), herança mística cultural dos pitagóricos e de Platão. Os pitagóricos eram obcecados pelos números e tinham uma afinidade especial pelo número 5, razão pela qual utilizavam o pentagrama como símbolo de sua fraternidade. Se tomarmos um pentagrama regular, a razão do lado de qualquer um dos triângulos com a base implícita é exatamente igual à Razão Áurea (fig. 9). Assim como a razão de qualquer diagonal de um pentágono regular com seu lado conforme mostraremos mais a frente. [1]

Vejamos agora a demonstração dessas propriedades. Primeiramente façamos a construção de um pentágono regular:

Construção 2 *Pentágono regular inscrito numa circunferência.*

- Começamos com uma circunferência de centro O.
- Traçamos dois diâmetros perpendiculares $\overline{AB}$ e $\overline{EL}$.
- Determinar M, o ponto médio de $\overline{OB}$.
- Determinar F, um ponto sobre $\overline{AB}$ tal que $\overline{ME}$=$\overline{MF}$.

A medida de $\overline{EF}$ é o lado do pentágono regular inscrito na circunferência.

- Com a medida de $\overline{EF}$, determinamos os pontos H, I, J e K que juntamente com E formam o pentágono.

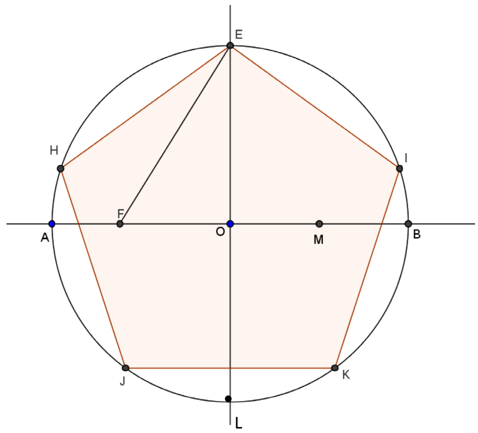


Figura 10 - Construção geométrica de um pentágono regular inscrito numa circunferência.[14]

Justificativa da construção:

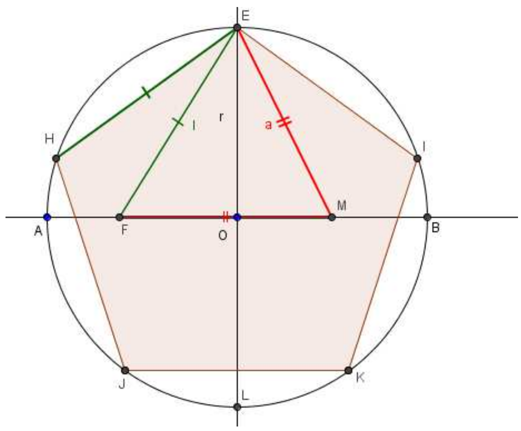


Figura 11 – Pentágono inscrito numa circunferência[15]

[14] Figura construída no GeoGebra.
[15] Figura construída no GeoGebra.

Pelo triângulo ΔEMO retângulo em O, seja $\overline{EM} = a$, utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$a^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{r\sqrt{5}}{2}$$

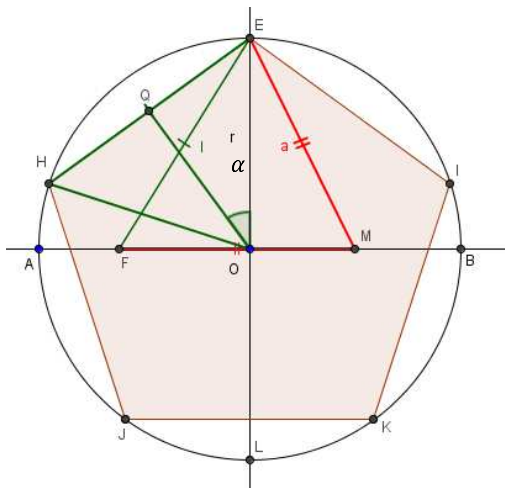
$\overline{EM} = \overline{MF}$ por construção, e $\overline{OM} = \frac{r}{2}$, então $\overline{OF} = \frac{r\sqrt{5}}{2} - \frac{r}{2} \Rightarrow \overline{OF} = \frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$.

No triângulo ΔEFO retângulo em O, considerando $\overline{EF} = l$, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$l^2 = r^2 + \left(\overline{OF}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = r^2 + \left(\frac{r\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

Queremos mostra que $\angle EOH = 72°$.

$\overline{EF} = \overline{EH}$ por construção. Observemos o triângulo isósceles ΔEOH de base $\overline{EH = l}$ e lado r.



Seja Q o ponto médio de $\overline{EH}$, $\overline{OQ}$ é a altura do triângulo ΔEOH e também bissetriz do ângulo $\angle EOQ$ que chamaremos de α. Note que ΔEOQ é retângulo em Q, assim utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo, temos:

$$sen\alpha = \frac{\frac{l}{2}}{r} = \frac{l}{2r} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arcsen\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = 36°$$

Dessa forma, temos $\alpha = 36°$ e o ângulo $\angle EOH = 2\alpha = 72°$

■

As diagonais do pentágono regular formam o pentagrama regular, também conhecido como estrela de cinco pontas.

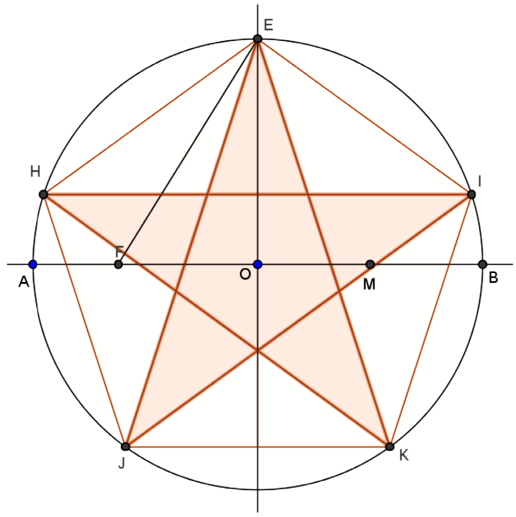


Figura 12 - Construção geométrica de um pentagrama inscrito numa circunferência.[16]

LEMA 2 - A razão entre o lado e a base implícita do triângulo determinado por três vértices consecutivos de um pentagrama é igual a Razão Áurea.

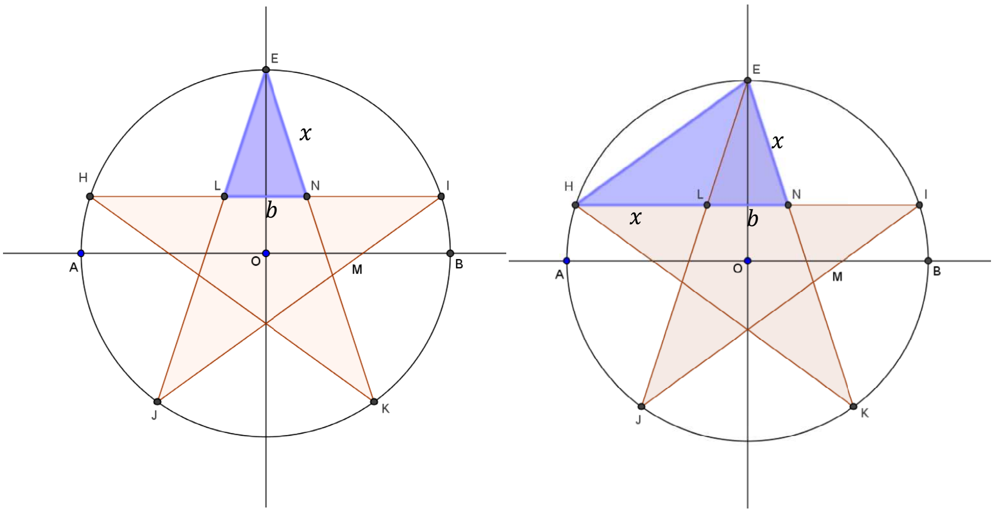


Figura 13 – Triângulos isósceles no pentagrama.[17]

DEM.:Queremos mostrar que $\overline{EN}$ está para $\overline{LN}$ assim como $\overline{EN}+\overline{LN}$ está para $\overline{EN}$, definição da divisão de um segmento em média e extrema.

Sejam os triângulos isósceles ΔELN de base $\overline{LN}$ e ΔENH de base $\overline{EN}$. Considere $\overline{EN} = x$ e $\overline{LN} = b$ e o triângulo ΔELH de base $\overline{EH}$. Segue que $\overline{EN} = \overline{EL} = \overline{LH} = x$ e $\overline{HN} =$

[16] Figura construída no GeoGebra
[17] Figura construída no GeoGebra

$\overline{HL} + \overline{LN} = x + b$. Os triângulos ΔELN e ΔENH são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Logo os lados homólogos são proporcionais e $\frac{x}{b} = \frac{x+b}{x}$, resolvendo para $\frac{x}{b}$ temos $\left(\frac{x}{b}\right) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{b}\right)} \Rightarrow \frac{x}{b} = \phi$. Com isso mostramos que $\frac{\overline{EN}}{\overline{LN}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{EN}} = \frac{x+b}{x} = \frac{x}{b} = \phi$ conforme a definição de Euclides (divisão de um segmento em média e extrema razão).

■

LEMA 3 - A razão entre o lado e a diagonal do pentágono é igual a Razão Áurea.

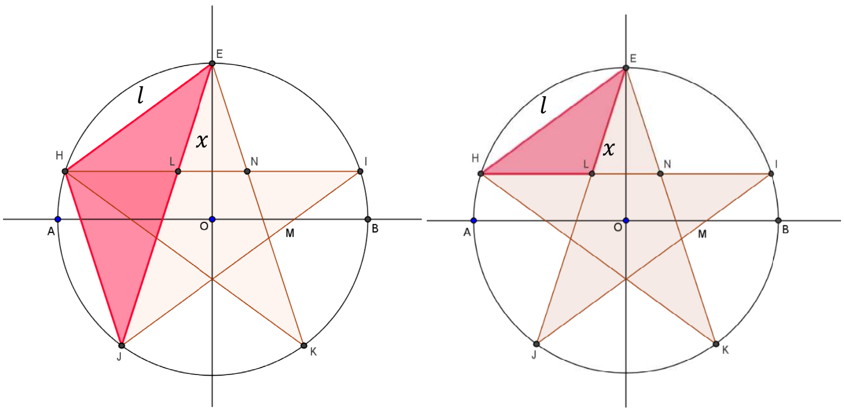


Figura 14 – Triângulos isósceles no pentagrama[18]

DEM.: Observe os dois triângulos isósceles ΔEJH e ΔELH semelhantes pelo caso ângulo-ângulo. Com isso os lados homólogos são proporcionais, ou seja, $\frac{\overline{EJ}}{\overline{EH}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EL}}$.

Considere $\overline{EH} = \overline{HJ} = l$ e perceba que o triângulo ΔHJL é também isósceles (c.f. demonstração anterior) então $\overline{EH} = \overline{HJ} = l = \overline{JL}$ logo a diagonal $\overline{EJ}$ = $\overline{EL}$+$\overline{LJ}$, fazendo $\overline{EL} =$ x temos $\overline{EJ} = l + x$.

[18] Figura construída no GeoGebra

Queremos mostrar que $\frac{\overline{EJ}}{\overline{EH}} = \phi$.

$$\frac{l}{x} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EL}} = \frac{\overline{EJ}}{\overline{EH}} = \frac{l+x}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{x} = \frac{l+x}{l} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l}{x}\right) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{l}{x}\right)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l}{x}\right) = \phi$$

■

1.3.2. Trigonometria no pentágono e no pentagrama

O pentágono regular inscrito numa circunferência e o pentagrama obtido pela união de suas diagonais nos permitem determinar as razões trigonométricas para os ângulos de 18°, 36° e 72°.

1.3.2.1. Seno e cosseno do arco de 72°

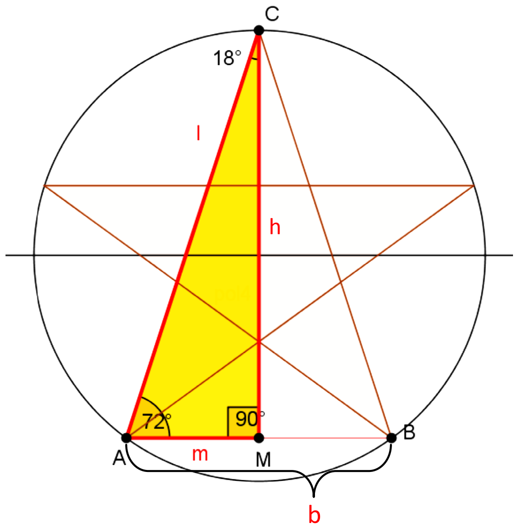


Figura 15 – Razões trigonométricas dos arcos de 18° e 72°[19]

Tomemos o triângulo ΔAMC retângulo em M.

Conforme demonstrações anteriores a razão entre o segmento $\overline{AC} = l$ e $\overline{AB} = b$ é igual a ϕ.

Observe que M é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Vamos determinar a medida do segmento $\overline{MC}$ denominado h. Pelo Teorema de Pitágoras

[19] Figura construída no Geogebra.

$$l^2 = m^2 + h^2$$

mas $m = \frac{b}{2}$ e $\frac{l}{b} = \phi \quad \Rightarrow \quad l = b\phi$. Sabendo que $\phi^2 = 1 + \phi$, temos:

$$h^2 = (b\phi)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad h = b\sqrt{\phi + \frac{3}{4}}$$

$$sen\ 72° = \frac{h}{l} = \frac{b\sqrt{\phi + \frac{3}{4}}}{b\phi} = \frac{\sqrt{3 + 4\phi}}{2\phi} \approx 0{,}951056516$$

$$\cos\ 72° = \frac{m}{l} = \frac{\frac{b}{2}}{b\phi} = \frac{1}{2\phi} \approx 0{,}309016994$$

1.3.2.2. Seno e cosseno do arco de 18°

Como os arcos de 18° e 72° são complementares, temos

$$\cos 18° = sen\ 72° \approx 0{,}951056516$$

$$sen\ 18° = \cos\ 72° \approx 0{,}309016994$$

1.3.2.3. Seno e cosseno do arco de 36°

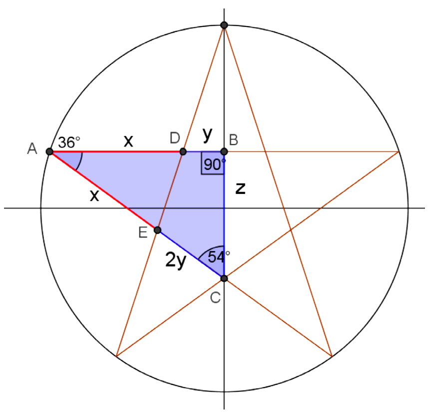


Figura 16 – Razões trigonométricas para os arcos de 36° e 54°[20]

Observando o triângulo ΔABC retângulo em B, temos conforme demonstrações anteriores

$$\frac{x}{2y} = \phi \quad \Rightarrow \quad x = 2y\phi$$

[20] Figura construída no Geogebra

Pelo Teorema de Pitágoras: $(x+2y)^2 = z^2 + (x+y)^2 \quad \Rightarrow \quad z = y\sqrt{4\phi+3}$. Então

$$sen\ 36° = \frac{z}{x+2y} = \frac{\sqrt{4\phi+3}}{2\phi+2} \approx 0{,}587785252$$

$$\cos 36° = \frac{x+y}{x+2y} = \frac{2\phi+1}{2\phi+2} = \frac{\phi+\phi+1}{2(\phi+1)} = \frac{\phi\cdot\phi^2}{2\phi^2} = \frac{\phi}{2} \approx 0{,}809016994$$

1.3.2.4. Seno e cosseno do arco de 54°

Como os arcos de 36° e 54° são complementares temos:

$$sen\ 54° = \cos 36° \approx 0{,}809016994$$

$$\cos 54° = sen\ 36° \approx 0{,}587785252$$

1.3.2.5. Seno e cosseno do arco de 108°

No pentágono regular os ângulos internos são iguais a 108°.

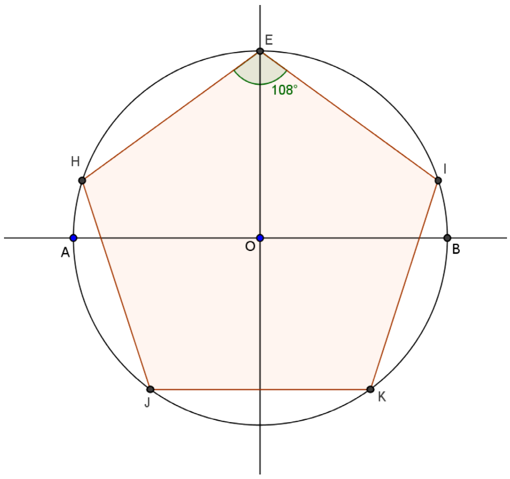


Figura 17 – Ângulo interno do pentágono regular.[21]

Na determinação das razões trigonométricas para o arco de 108° utilizaremos as fórmulas de multiplicação de arcos.

$$\cos 2a = 1 - 2\cdot sen^2 a$$

$$\cos\ 108° = \cos(2\cdot 54°) = 1 - 2\cdot sen^2 54° = 1 - 2\cdot\left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\phi^2}{2} \approx -0{,}309016994$$

$$sen\ 2a = 2\cdot sen\ a\cdot\cos a$$

[21] Figura construída no Geogebra

$$sen\,108° = sen\,2 \cdot 54° = 2 \cdot sen\,54° \cdot \cos 54° = 2 \cdot \frac{\phi}{2} \cdot \frac{\sqrt{4\phi+3}}{2\phi+2} = \frac{\sqrt{\phi+2}}{2} \approx 0{,}951056516$$

2. A sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170-1250) nasceu no centro comercial italiano de Pisa. Seu pai, *Guilelmo*, era funcionário da alfândega em Bugia, atual Argélia, e foi quem ensinou a seu filho os símbolos numéricos inventados pelos hindus e pelos árabes. Somente no século XIX o nome Fibonacci (filho de Bonaccio) lhe foi atribuído e assim é conhecido até hoje. [7]

Mais tarde Leonardo tornou-se comerciante e escreveu: ”Gostei tanto das instruções que continuei a estudar matemática durante viagens de negócios ao Egito, Síria, Grécia, Sicília e Provença, e gostei de debater com os estudiosos desses lugares.” [7]

Sua principal obra foi *Liber Abaci* (livro de ábaco), publicado em 1202, mas ao contrário do que o título sugere, não se trata de um livro sobre ábaco e sim um texto aritmético escrito utilizando os símbolos e métodos hindus e arábicos. [7]

Fibonacci foi o primeiro matemático europeu a utilizar a barra para representação de frações da mesma forma como é usado hoje. [3]

Um dos problemas apresentados no *Liber Abaci*, trata de um modelo idealizado de reprodução de coelhos, apresentado na segunda parte do capítulo 15.

> “Problema 18 – quantos pares de coelhos são criados por um par num ano
> Um certo homem tem um par de coelhos num determinado local cercado, e quer-se saber quanto são criados por esse par num ano, quando é natural que eles gerem num mês outro par, e no segundo mês, os que nasceram, geram também” (a partir da tradução de Sigler)[22]

[22] Disponível em http://pt.slideshare.net/giuseppevitale1/liber-abaci-esp acesso em 16 fev 2014.

A resolução desse problema nos leva a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ⋯, que corresponde ao número de pares de coelhos ao fim de cada mês. Observe que a partir do terceiro termo, cada um deles é dado pela soma dos dois anteriores. Conhecida como sequência de Fibonacci, ela é a razão da fama de Leonardo de Pisa, não pela aplicação prática do modelo de reprodução desses animais, mas por seus notáveis padrões matemáticos e seu papel chave na teoria dos números irracionais. [7]

Os números da sequência de Fibonacci apresentam algumas propriedades interessantes, vamos demonstrar algumas delas.

2.1. Propriedades da sequência de Fibonacci

Utilizaremos a representação moderna dessa sequência, definida por

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \,, n \in \mathbb{N} \quad \text{com} \quad u_1 = u_2 = 1.$$

LEMA 4 - A soma S_n para n>1, dos n primeiros número de Fibonacci é dada por $S_n = u_{n+2} - 1$.

DEM.: Utilizaremos o princípio de indução finita.

i) Para n=2 a propriedade é válida.

$$S_n = u_{n+2} - 1 \quad S_2 = u_4 - 1 = 3 - 1 = 2 = 1 + 1 = u_1 + u_2$$

ii) Suponha a propriedade válida para k. $S_k = u_{k+2} - 1$

iii) Queremos mostrar que a propriedade é válida para $n = k + 1$, ou seja, $S_{k+1} = u_{k+3} - 1$

Como $S_k = u_{k+2} - 1$, acrescentando u_{k+1} em ambos os lados, temos

$$S_k + u_{k+1} = u_{k+2} - 1 + u_{k+1} \Rightarrow S_{k+1} = u_{k+3} - 1$$

■

LEMA 5 - A soma dos quadrados do n primeiros números é $S_{n^2} = u_n \cdot u_{n+1}$

DEM.: Utilizaremos o princípio de indução finita.

i) Para n=1 a propriedade é válida

$$S_1 = u_1 \cdot u_2 = 1 \cdot 1 = 1 = 1^2 = 1$$

ii) Suponha a propriedade válida para n=k. $S_{k^2} = u_k \cdot u_{k+1}$

iii) Queremos mostrar que a propriedade é válida para $n = k + 1$.

Como $S_{k^2} = u_k \cdot u_{k+1}$ acrescentando $(u_{k+1})^2$ em ambos os lados. Temos

$$S_{k^2} + (u_{k+1})^2 = u_k \cdot u_{k+1} + (u_{k+1})^2 \Rightarrow S_{(k+1)^2} = u_{k+1} \cdot (u_k + u_{k+1}) = u_{k+1} \cdot u_{k+2}$$

■

LEMA 6 - A identidade de Cassini (1680): $u_{n-1} \cdot u_{n+1} - u_n{}^2 = (-1)^n$ para $n \in \mathbb{N}$.

DEM.: Seja a matriz $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $(u_{n+2}) = u_{n+1} + u_n$ com $u_0 = 0$ e $u_1 = 1$ a sequência de Fibonacci. Observe que nesse caso estamos considerando o primeiro termo como zero, mas isso não afeta a sequência e suas propriedades.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F^4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$F^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Mostraremos que $F^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}$ utilizando o Princípio da Indução Finita.

i) F é válida para $n = 1$ pois $F^1 = \begin{bmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ii) Suponha F válida para algum $n = k$. Então $F^k = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} \end{bmatrix}$

iii) Queremos mostrar que F é válida para $n = k + 1$.

Partimos de $F^k = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} \end{bmatrix}$ e multiplicamos ambos os lados por F.

$$F^k \cdot F = \begin{bmatrix} u_{k+1} & u_k \\ u_k & u_{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow F^{k+1} = \begin{bmatrix} u_{k+1} + u_k & u_{k+1} \\ u_k + u_{k-1} & u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{k+2} & u_{k+1} \\ u_{k+1} & u_k \end{bmatrix}$$

Portanto

$$F^n = \begin{bmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Na identidade de Cassini temos $u_{n-1} \cdot u_{n+1} - {u_n}^2 = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$.

Como $\det(F^n) = u_{n-1} \cdot u_{n+1} - {u_n}^2$, devemos mostra que $\det(F^n) = (-1)^n$.

Pelas propriedades dos determinantes, temos $\det(F^n) = (\det F)^n$. Como $\det(F) = -1$

$$u_{n-1} \cdot u_{n+1} - {u_n}^2 = \det(F^n) = (\det F)^n = (-1)^n$$

$\blacksquare$

Além das propriedades demonstradas, a sequência de Fibonacci apresenta muitas outras. Ela aparece, por exemplo, na soma dos números em diagonal no triângulo de Pascal[23] (de demonstração elaborada e por isso não a apresentamos).

[23] Blaise Pascal (1623-1662) foi um físico, matemático, filósofo e teólogo francês. Disponível em http://www.e-biografias.net/blaise_pascal/ acesso em 09 fev 2014.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

$$\vdots$$

Figura 18 – Triângulo de Pascal

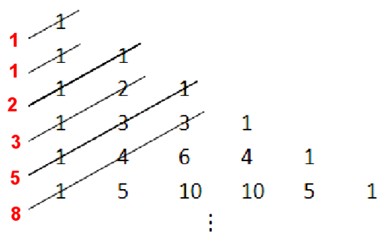


Figura 19 – Soma em diagonal dos números do triângulo de Pascal

3. Recorrências

Recorrências são sequências do tipo $x_1, x_2, \cdots$ em que cada termo é determinado em função dos termos anteriores. A sequência de Fibonacci é uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, ou seja, cada termo é dado em função dos dois termos anteriores com expoente igual a um para cada um dos termos. [8]

Seja $(u_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \cdots$, a sequência de Fibonacci, que pode ser escrita da seguinte forma

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Teorema 1 [9]

Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

DEM.: Sejam r_1 e r_2 raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$. Vamos mostrar que $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

Seja $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ então

$$\begin{aligned} a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n &= C_1 r_1^{\,n+2} + C_2 r_2^{\,n+2} + p\left(C_1 r_1^{\,n+1} + C_2 r_2^{\,n+1}\right) + q\left(C_1 r_1^{\,n} + C_2 r_2^{\,n}\right) \\ &= C_1 r_1^{\,n}\left(r_1^{\,2} + pr_1 + q\right) + C_2 r_2^{\,n}\left(r_2^{\,2} + pr_2 + q\right) \end{aligned}$$

Mas r_1 e r_2 são raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$ logo $\left(r_1^{\,2} + pr_1 + q\right) = \left(r_2^{\,2} + pr_2 + q\right) = 0$, com isso independente dos valores das constantes C_1 e C_2 teremos $C_1 r_1^{\,n}\left(r_1^{\,2} + pr_1 + q\right) + C_2 r_2^{\,n}\left(r_2^{\,2} + pr_2 + q\right) = 0$.

■

Para a sequência de Fibonacci $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ com $u_1 = u_2 = 1$, podemos escrever $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$, que leva ao polinômio característico $r^2 - r - 1 = 0$ com $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = (1-\phi)$, então pelo Teorema 1 a solução da recorrência é

$$u_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observe que as raízes r_1 e r_2 são as mesmas obtidas no cálculo da proporção áurea.

Para determinar as constantes C_1 e C_2, fazemos $u_1 = u_2 = 1$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_1 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ u_2 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

Escrevendo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1-\phi$

$$\begin{cases} C_1\phi + C_2(1-\phi) = 1 & (1) \\ C_1\phi^2 + C_2\phi^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Fazendo $\phi\cdot(1)-(2)=C_2\left(\phi-\phi^2\right)-C_2(1-\phi)^2=\phi-1$

Substituindo $\phi^2=1+\phi$

$$C_2\left(\phi-\phi^2\right)-C_2(1-\phi)^2=\phi-1 \Rightarrow -C_2-C_2(2-\phi)=\phi-1 \Rightarrow C_2=\frac{1-\phi}{3-\phi}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Para determinar C_1 fazemos

$$(1-\phi)\cdot(1)-(2)=C_1(1-\phi)-C_1\phi^2=-\phi \Rightarrow C_1=\frac{1}{2\phi-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Então os termos da sequência de *Fibonacci* podem ser escritos a partir da fórmula

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ ou } u_n=\frac{\phi^n-(1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

conhecida como Fórmula de Binet.

Jacques Philippe Marie Binet desenvolveu essa fórmula em 1843. Apesar de levar seu nome, ela já era conhecida cerca de um século antes por *Euler*, *Daniel Bernoulli* e *de Moivre*.[24]

4. Relação entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci e a Razão Áurea estão matematicamente relacionadas. Nessa seção mostraremos duas importantes relações entre elas, além da fórmula de *Binet* apresentada na seção 3. Para tanto considere a sequência de Fibonacci: $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ com $u_1=u_2=1$.

[24] Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/BinetsFibonacciNumberFormula.html acesso em 08 jan. 2014.

LEMA 7 - $\phi^{n+1} = u_{n+1} \cdot \phi + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

DEM.: Utilizaremos o Princípio de Indução Finita.

i) Para n=0 a relação é válida.

$$\phi^1 = u_1 \cdot \phi + u_0$$

ii) Suponha válida para $n = k$. Então $\phi^{k+1} = u_{k+1} \cdot \phi + u_k$

iii) Queremos mostrar que a igualdade é válida para $n = k + 1$.

Partindo de $\phi^{k+1} = u_{k+1} \cdot \phi + u_k$, multiplicamos ambos os lados da igualdade por ϕ, temos

$$\phi \cdot \phi^{k+1} = (u_{k+1} \cdot \phi + u_k) \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \phi^{k+2} = u_{k+1} \cdot \phi^2 + u_k \cdot \phi$$

Fazendo $\phi^2 = 1 + \phi$, temos

$$\phi^{k+2} = u_{k+1} \cdot (1 + \phi) + u_k \cdot \phi \quad \Rightarrow \quad \phi^{k+2} = u_{k+2} \cdot \phi + u_{k+1}$$

■

Mostraremos agora outra relação entre a Razão Áurea e a sequência de Fibonacci: o limite da razão entre um termo qualquer da sequência pelo seu anterior.

LEMA 8 - $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi$, $n \in \mathbb{N}$

DEM.: Tomemos a fórmula fechada que representa os termos da sequência de Fibonacci

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Podemos escrevê-la em função de ϕ (fi) como

$$u_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}$$

Seja uma nova sequência $(x_n) = \frac{u_{n+1}}{u_n}$, vamos mostrar que se n tende a infinito, (x_n) tende a ϕ.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\phi^{n+1}-(1-\phi)^{n+1}}{\phi^n-(1-\phi)^n}$$

Primeiramente vamos mostrar o comportamento de $(1-\phi)^n$ quando n tende a infinito.

Queremos provar que $\lim_{n\to\infty}(1-\phi)^n=0$.

DEM.: Vamos mostrar que para todo $\varepsilon>0$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n>n_0$ temos $|x_n|<\varepsilon$:

tomemos $n_0>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|1-\phi|}$, então

$$n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|1-\phi|}\ \Rightarrow\ n\cdot\ln|1-\phi|<\ln\varepsilon\ \Rightarrow\ \ln|1-\phi|^n<\ln\varepsilon\ \Rightarrow\ |1-\phi|^n<\varepsilon$$

Observe que se $\lim_{n\to\infty}(1-\phi)^n=0$ então

$$\lim_{n\to\infty}(1-\phi)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left[(1-\phi)^n\cdot(1-\phi)\right]=\lim_{n\to\infty}(1-\phi)^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\phi)=0\cdot(1-\phi)=0.$$

Com isso $\lim_{n\to\infty}(x_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\phi^{n+1}-(1-\phi)^{n+1}}{\phi^n-(1-\phi)^n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\phi^{n+1}}{\phi^n}=\lim_{n\to\infty}\phi=\phi$

■

5. Considerações Finais

O número ϕ, chamado de Razão Áurea, é um número irracional e sua presença foi identificada nos elementos do pentagrama – estrela de cinco pontas – que surgiu na história como símbolo que representava os seguidores ou discípulos de Pitágoras. Mas Pitágoras negava a existência de tais números – os irracionais – portanto essa característica só foi demonstrada e apreciada anos mais tarde.

Euclides em sua obra *Os Elementos* definiu a divisão de um segmento em média e extrema razão, e descreveu geometricamente sua construção. A razão encontrada entre o todo e a maior parte, e também entre a maior parte e a menor era igual a uma constante que foi chamada de Razão Áurea e foi denominada pela letra grega ϕ (fi).

A construção geométrica da divisão de um segmento em média e extrema razão é semelhante à utilizada na construção do pentágono regular por isso a razão entre alguns elementos desse polígono é igual a ϕ.

Além disso, o pentagrama também apresenta o ϕ como razão entre alguns de seus elementos.

Em 1202 Fibonacci apresentou em sua obra *Liber Abaci*, um problema teórico sobre reprodução de coelhos, no qual temos a formação de uma recorrência de segunda ordem. A relação entre a sequência de Fibonacci e a Razão Áurea aparece no quociente entre um termo qualquer daquela sequência pelo seu anterior. Tal processo nos levou a uma nova sequência,

$$1, 2, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{11}{8}, \cdots$$

que como apresentado, converge para ϕ.

Como a Razão Áurea foi identificada em vários elementos naturais, considerados belos, e que de acordo com o cristianismo, criados por Deus, alguns estudiosos a designaram como a proporção divina, atribuindo sua beleza estética e a presença de tal simetria ao Criador.

Por fim podemos perceber a presença da sequência de Fibonacci em vários elementos naturais assim como a presença da Razão Áurea. Tal descoberta fez com que artistas renascentistas a utilizassem em suas obras a fim de reproduzir a perfeição, inspirada na realidade.

Outras sequências também apresentam características semelhantes à sequência de Fibonacci tais como a Sequência de Tribonacci e a Sequência de Lucas e também podem ser tratadas a partir de técnicas semelhantes às aqui apresentadas.

Referências Bibliográficas

[1] LÍVIO, M. Deus é matemático?. 3ª Edição ed. Rio de Janeiro: Record, 2012.

[2] LIVIO, M. The golden ratio: The history of phi, the world's most astonishing number. New York: Broadway Books.

[3] ROONEY A. A história da matemática. São Paulo: M. Books do Brasil, 2012.

[4] EUCLIDES. Os Elementos. Tradutor: R. Simson. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[5] INFOESCOLA. A Razão Áurea. Disponível em: <http://www.infoescola.com> Acesso em: 03 out. 2013.

[6] ROGRIGUES M. S. O número phi. *FAMAT em revista.* Num. 11, pp. 81-184, out 2008.

[7] STEWART I. Uma história da simetria na matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[8] MOREIRA C. G. “Sequências Recorrentes”. Disponível em <http://w3.impa.br/~gugu/SequenciasRecorrentes.pdf>. Acesso em 1 set 2013.

[9] “Unidade 8 - Recorrências Lineares de Segunda Ordem,” em *Matemática Discreta*.

[10] SEA AND SKY. Chambered nautilus. Disponível em: <http://www.seasky.org>. Acesso em: 7 jan 2014.