



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

**NELSON CLAUDIANO DA SILVA JUNIOR**

**UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE TRIÂNGULOS COM O**  
***SOFTWARE* GEOGEBRA**

FORTALEZA

2014

NELSON CLAUDIANO DA SILVA JUNIOR

UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE TRIÂNGULOS COM O  
*SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2014

NELSON CLAUDIANO DA SILVA JUNIOR

UMA ABORDAGEM INTRODUTÓRIA AO ESTUDO DE TRIÂNGULOS COM O  
*SOFTWARE* GEOGEBRA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26 / 04 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará (UFC)

---

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, à minha amada esposa Jurema de Jesus da Silva, pelo seu apoio incondicional, a meus pais: minha saudosa mãe Marineide Fernandes da Silva, que sempre me deu forças para eu vencer nos estudos, e onde quer que esteja, está sempre olhando por mim, e a meu pai, Nelson Claudiano da Silva, que sempre me orientou nos estudos e na vida.

## **AGRADECIMENTOS**

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela excelente orientação.

À minha Esposa, Jurema de Jesus da Silva, pelo seu apoio incondicional, pela sua compreensão das minhas ausências nas manhãs e tardes de sábado, para a realização deste importante curso.

Ao colega de trabalho mestre Francisco Ademir Lopes de Souza pelas contribuições na estruturação dos capítulos desta dissertação.

À Sudbireção de Ensino do Colégio Militar de Fortaleza, pelo suporte oferecido, ao autorizar a aplicação da pesquisa nas dependências deste Colégio, e nas horas de estudos dispensadas.

Aos colegas da coordenação do oitavo ano do Colégio Militar de Fortaleza, pelo apoio prestado.

A meu pai, Nelson Claudiano da Silva e minha irmã, Marcelle Fernandes Claudiano da Silva Vargas, pelo apoio e torcida, mesmo a milhares de quilômetros de distância.

Aos colegas do PROFMAT, pelas valorosas conversas e resoluções de problemas das atividades deste curso.

Aos professores do PROFMAT, pela valorosa contribuição prestada durante as aulas.

## RESUMO

Um bom educador vem sempre buscando melhorar a qualidade de seu ensino, e um dos fatores para se atingir este objetivo é o aperfeiçoamento de técnicas de ensino, atrelado às novas tecnologias. Dentro deste universo, se encontram as aulas informatizadas, onde são utilizados micro computadores como meios auxiliares de instrução. Dentre os diversos *softwares* educacionais existentes no mercado, podemos destacar, na área de matemática, alguns que são de extrema importância para o desenvolvimento de um raciocínio matemático por parte do aluno. Seguindo este raciocínio, o autor destacará, neste trabalho, as vantagens de uma nova maneira de se ensinar geometria, de uma forma que só um ambiente informatizado pode proporcionar: a Geometria Dinâmica, caracterizada por "desenhos em movimento". Dentro deste contexto, representando os *softwares* que trabalham com geometria dinâmica, será apresentado o Geogebra. Através de pesquisa documental, o autor apresentará definições de geometria dinâmica, mencionará informações sobre informática na educação, definirá tópicos de geometria no oitavo ano do Ensino Fundamental, em particular, pontos notáveis de triângulos quaisquer, realizará uma pesquisa de campo com turmas do Colégio Militar de Fortaleza, para verificar se há relevância deste programa educacional para as classes. Ao final da pesquisa de campo, será verificado se as aulas de geometria no Ensino Fundamental podem tornar-se mais estimulantes e interessantes com a aplicação deste software, que pode ser de grande valia como mais uma ferramenta para o aperfeiçoamento do processo ensino-aprendizagem.

**Palavras-chave:** *Software* educacional. Ensino de matemática. Pontos notáveis no triângulo. Geogebra.

## ABSTRACT

A good teacher is always seeking to improve the quality of their teaching , and one of the factors for achieving this goal is the improvement of teaching techniques , coupled with new technologies . Within this universe , are computerized classes , where micro computers as instructional aids are used . Among the several existing educational software in the market, we can highlight in the area of mathematics, some that are of utmost importance for the development of mathematical thinking by the student . Following this reasoning , the author will highlight this work , the advantages of a new way of teaching geometry in a way that only a computerized environment can provide : Dynamic Geometry , characterized by " drawings in motion." Within this context , accounting software working with dynamic geometry , Geogebra will be presented . Through archival research, the author will present definitions of dynamic geometry , mention information on computing in education , define topics of geometry in the eighth grade of elementary school , in particular , any notable points of triangles , conduct a field study with classes at the Colégio Militar de Fortaleza, to check for relevance of this educational program for classes . At the end of the field research , it will be checked if the geometry classes in elementary school can become more exciting and interesting with the use of this software , which can be very useful as an additional tool for improving the teaching- learning process .

Keywords: Educational Software. Teaching math. Notable points in the triangle. Geogebra.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 4.1	–	Construção de quadrados .....	31
Figura 4.2	–	Deformação e movimentação de quadrados .....	32
Figura 5.1	–	Tela de apresentação do Geogebra .....	34
Figura 5.2	–	Janela de visualização com eixos coordenados .....	34
Figura 5.3	–	Janela de visualização com malhas .....	35
Figura 5.4	–	Janela de visualização com eixos coordenados e malhas .....	35
Figura 5.5	–	Barra de ferramentas.....	36
Figura 5.6	–	Colunas 1 e 2 da Barra de ferramentas .....	36
Figura 5.7	–	Colunas 3 e 4 da Barra de ferramentas .....	37
Figura 5.8	–	Colunas 5 e 6 da Barra de ferramentas .....	38
Figura 5.9	–	Colunas 7 e 8 da Barra de ferramentas .....	38
Figura 5.10	–	Colunas 9 e 10 da Barra de ferramentas .....	39
Figura 5.11	–	Colunas 11 e 12 da Barra de ferramentas .....	39
Figura 5.12	–	Instrução para a função Polígono .....	40
Figura 6.1	–	Teorema de Ceva.....	41
Figura 6.2	–	Teorema de Ceva.....	43
Figura 6.3	–	Baricentro .....	43
Figura 6.4	–	Demonstração .....	44
Figura 6.5	–	Demonstração .....	45
Figura 6.6	–	Circunferência inscrita no triângulo e seu centro S.....	45
Figura 6.7	–	Teorema de Ceva: bissetrizes internas.....	47
Figura 6.8	–	Propriedade do incentro.....	47
Figura 6.9	–	Demonstração da propriedade do incentro .....	47
Figura 6.10	–	Ex-incentro “E” .....	48
Figura 6.11	–	Circunferência ex inscrita.....	49
Figura 6.12	–	Incentro e ex-incentros .....	50
Figura 6.13	–	Circuncentro “O”.....	51
Figura 6.14	–	Circunferência circunscrita ao triângulo.....	52
Figura 6.15	–	Propriedade do circuncentro .....	53



Figura 6.16 – Propriedade do circuncentro .....	53
Figura 6.17 – Ortocentro “H” .....	54
Figura 6.18 – Demonstração ortocentro.....	55
Figura 6.19 – Teorema de Ceva: alturas .....	56
Figura 6.20 – Propriedade do ortocentro .....	57
Figura 6.21 – Demonstração .....	57
Figura 6.22 – Ortocentro no triângulo acutângulo .....	58
Figura 6.23 – Demonstração .....	59
Figura 6.24 – Ortocentro no triângulo retângulo .....	59
Figura 6.25 – Ortocentro no triângulo obtusângulo .....	60
Figura 6.26 – Ponto de Fermat.....	61
Figura 6.27 – Demonstração .....	61
Figura 6.28 – Demonstração .....	62
Figura 6.29 – Ponto de Fermat.....	63
Figura 6.30 – Cevianas isogonais .....	63
Figura 6.31 – Teorema de Malthieu.....	64
Figura 6.32 – Ponto de Lemoine (L).....	65
Figura 6.33 – Ponto de Brocard ( $B_1$ ) .....	65
Figura 6.34 – Ponto de Brocard ( $B_2$ ) .....	66
Figura 6.35 – Pontos de Brocard.....	66
Figura 6.36 – Circunferência de Brocard.....	67
Figura 6.37 – Ponto de Miquel (M) .....	68
Figura 6.38 – Ponto de Gergonne (J) .....	69
Figura 6.39 – Ponto de Nagel (N).....	69
Figura 6.40 – Incentro do triângulo $A_1B_1C_1$ .....	70
Figura 6.41 – Ponto de Spieker (S).....	70
Figura 6.42 – Ponto de Feuerbach (F).....	71
Figura 6.43 – Pontos de Feuerbach.....	71
Figura 6.44 – Circunferência dos nove pontos .....	72
Figura 6.45 – Triângulo órtico (DEF).....	73

Figura 6.46 – Triângulo pedal (EFG).....	74
Figura 6.47 – Triângulo mediano (DEF) .....	74
Figura 6.48 – Baricentro do triângulo mediano (J).....	75
Figura 6.49 – Triângulo antimediano.....	75
Figura 6.50 – Triângulo exincentral $E_a E_b E_c$ .....	76
Figura 6.51 – Teorema 3.....	77
Figura 6.52 – Teorema de Morley.....	77
Figura 6.53 – Demonstração teorema de Fagnano.....	78
Figura 6.54 – Reta de Euler .....	80
Figura 6.55 – Reta de Spieker.....	80
Figura 6.56 – Reta de Housel.....	81
Figura 7.1 – Colégio Militar de Fortaleza.....	83
Figura 7.2 – Palácio Duque de Caxias, sede do DECEX e da DEPA, no RJ .....	84
Figura 7.3 – Construção do triângulo através da ferramenta “segmento definido por dois pontos” .....	88
Figura 7.4 – Construção do triângulo através da ferramenta “polígono”.....	88
Figura 7.5 – Triângulo com as medidas de seus lados.....	89
Figura 7.6 – Triângulo após sua deformação e novas medidas dos lados.....	90
Figura 7.7 – Construção do triângulo isósceles na malha quadriculada .....	91
Figura 7.8 – Construção do triângulo equilátero.....	92
Figura 7.9 – Construção do triângulo acutângulo .....	93
Figura 7.10 – Construção do triângulo obtusângulo .....	93
Figura 7.11 – Construção do triângulo retângulo .....	94
Figura 7.12 – 1ª atividade do descritor D100.....	95
Figura 7.13 – 2ª atividade do descritor D100.....	95
Figura 7.14 – 3ª atividade do descritor D100.....	96
Figura 7.15 – Construção do baricentro.....	97
Figura 7.16 – Baricentro e segmentos que compõem as medianas com suas respectivas Medidas.....	98
Figura 7.17 – Triângulo modificado .....	98
Figura 7.18 – Construção do incentro.....	99

Figura 7.19 – Ex-incentros (H, I, J) do triângulo ABC.....	100
Figura 7.20 – Circunferência inscrita no triângulo e seus pontos de tangência.....	101
Figura 7.21 – Construção do ortocentro.....	102
Figura 7.22 – Pontos simétricos do ortocentro em relação aos lados .....	103
Figura 7.23 – Construção do circuncentro .....	104
Figura 7.24 – Circunferência circunscrita ao triângulo.....	105
Figura 7.25 – Circuncentro no triângulo acutângulo .....	106
Figura 7.26 – Circuncentro no triângulo obtusângulo .....	106
Figura 7.27 – Circuncentro no triângulo retângulo.....	107
Figura 9.1 – Comentário do aluno A1 .....	118
Figura 9.2 – Comentário do aluno A2 .....	118
Figura 9.3 – Comentário do aluno A3 .....	119
Figura 9.4 – Comentário do aluno A4 .....	119
Figura 9.5 – Comentário do aluno A5 .....	119
Figura 9.6 – Comentário do aluno A6 .....	122
Figura 9.7 – Comentário do aluno A7 .....	122
Figura 9.8 – Comentário do aluno A8 .....	123
Figura 9.9 – Comentário do aluno A9 .....	123
Figura 9.10 - Comentário do aluno A10 .....	125
Figura 9.11 - Comentário do aluno A11 .....	125
Figura 9.12 - Comentário do aluno A12 .....	126
Figura 9.13 - Comentário do aluno A13 .....	126

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1	–	Comparação dos graus dos grupos na VI aplicada .....	112
Gráfico 2	–	Questão 1 .....	114
Gráfico 3	–	Questão 2 .....	115
Gráfico 4	–	Questão 3 .....	116
Gráfico 5	–	Questão 4 .....	117
Gráfico 6	–	Questão 5 .....	120
Gráfico 7	–	Questão 6 .....	121
Gráfico 8	–	Questão 7 .....	124
Gráfico 9	–	Questão 8 .....	127
Gráfico 10	–	Questão 9 .....	128

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	- Coleta de dados dos grupos, a partir da 1ª VI do 1º bimestre.....	85
Tabela 2	- Resultados da primeira questão da avaliação .....	109
Tabela 3	- Resultados da segunda questão da avaliação.....	110
Tabela 4	- Resultados da terceira questão da avaliação.....	110
Tabela 5	- Resultados da quarta questão da avaliação.....	111
Tabela 6	- Coleta de dados dos grupos, a partir da avaliação aplicada.....	113

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	16
2	UM BREVE HISTÓRICO DA EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA .....	18
3	INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO .....	26
3.1	Desenvolvimento de <i>software</i> educacional .....	29
4	GEOMETRIA DINÂMICA .....	30
5	O SOFTWARE GEOGEBRA .....	33
5.1	Barra de ferramentas do Geogebra .....	36
6	TRIÂNGULO: CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS .....	41
6.1	Teorema de Ceva .....	41
6.2	Pontos Notáveis do Triângulo .....	43
6.2.1	<i>Baricentro</i> .....	43
6.2.2	<i>Incentro</i> .....	44
6.2.2.1	<i>Propriedade do Incentro</i> .....	47
6.2.3	<i>Ex-Incentro</i> .....	48
6.2.4	<i>Circuncentro</i> .....	50
6.2.4.1	<i>Propriedades do Circuncentro</i> .....	52
6.2.5	<i>Ortocentro</i> .....	53
6.2.5.1	<i>Propriedades do Ortocentro</i> .....	57
6.2.5.1.1	Propriedade I .....	57
6.2.5.1.2	Propriedade II .....	58
6.2.6	<i>Pontos Notáveis Especiais</i> .....	60
6.2.6.1	<i>Ponto de Fermat</i> .....	61
6.2.6.2	<i>Cevianas Isogonais</i> .....	63
6.2.6.2.1	Teorema de Mathieu .....	64
6.2.6.2.2	Simedianas .....	64
6.2.6.3	<i>Ponto de Lemoine</i> .....	65
6.2.6.4	<i>Ponto de Brocard</i> .....	65
6.2.6.4.1	Circunferência de Brocard .....	67
6.2.6.5	<i>Ponto de Miquel</i> .....	67

6.2.6.6	<i>Ponto de Gergonne</i> .....	68
6.2.6.6.1	<i>Ceviana de Gergonne</i> .....	68
6.2.6.7	<i>Ponto de Nagel</i> .....	69
6.2.6.8	<i>Ponto de Spieker</i> .....	70
6.2.6.9	<i>Ponto de Feuerbach</i> .....	71
6.2.6.9.1	<i>Circunferência dos nove pontos</i> .....	72
<b>6.3</b>	<b>Triângulos notáveis</b> .....	<b>73</b>
<b>6.3.1</b>	<b><i>Triângulo órtico</i></b> .....	<b>73</b>
<b>6.3.2</b>	<b><i>Triângulo pedal</i></b> .....	<b>73</b>
<b>6.3.3</b>	<b><i>Triângulo mediano</i></b> .....	<b>74</b>
<b>6.3.4</b>	<b><i>Triângulo anti mediano</i></b> .....	<b>75</b>
<b>6.3.5</b>	<b><i>Triângulo exincentral</i></b> .....	<b>76</b>
<b>6.4</b>	<b>Teoremas</b> .....	<b>77</b>
<b>6.4.1</b>	<b><i>Teorema de Morley</i></b> .....	<b>77</b>
<b>6.4.2</b>	<b><i>Teorema de Fagnano</i></b> .....	<b>78</b>
<b>6.5</b>	<b>Retas notáveis</b> .....	<b>79</b>
<b>6.5.1</b>	<b><i>Reta de Euler</i></b> .....	<b>79</b>
<b>6.5.2</b>	<b><i>Reta de Spieker</i></b> .....	<b>80</b>
<b>6.5.3</b>	<b><i>Reta de Housel</i></b> .....	<b>81</b>
<b>7</b>	<b>METODOLOGIA DA PESQUISA</b> .....	<b>82</b>
<b>7.1</b>	<b>Campo de Pesquisa</b> .....	<b>83</b>
<b>7.2</b>	<b>Sujeitos da Pesquisa</b> .....	<b>85</b>
<b>7.3</b>	<b>Etapas da Pesquisa</b> .....	<b>86</b>
<b>7.3.1</b>	<b><i>Atividades realizadas com os grupos</i></b> .....	<b>86</b>
7.3.1.1	<i>Atividades com o grupo A</i> .....	87
7.3.1.2	<i>Atividades com o grupo B</i> .....	107
<b>8</b>	<b>ANÁLISE DOS RESULTADOS DA AVALIAÇÃO APLICADA AOS GRUPOS A E B</b> .....	<b>109</b>
<b>8.1</b>	<b>Comparação entre as notas da avaliação aplicada aos alunos dos grupos A e B</b> .....	<b>112</b>

<b>9</b>	<b>QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS DO GRUPO A.....</b>	<b>114</b>
<b>10</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>129</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>130</b>
	<b>APÊNDICE A – SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA APLICAR A PESQUISA NO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA AO SUBDIRETOR DO CMF.....</b>	<b>131</b>
	<b>APÊNDICE B – CARTA DO ORIENTADOR AO SUBDIRETOR DO CMF.....</b>	<b>132</b>
	<b>APÊNDICE C – COMUNICATIVO AOS RESPONSÁVEIS PELOS ALUNOS DO GRUPO A, PARTICIPANTES DA PESQUISA .....</b>	<b>133</b>
	<b>APÊNDICE D – COMUNICATIVO AOS RESPONSÁVEIS PELOS ALUNOS DO GRUPO B, PARTICIPANTES DA PESQUISA.....</b>	<b>135</b>
	<b>APÊNDICE E – AVALIAÇÃO APLICADA AOS ALUNOS.....</b>	<b>137</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Século XXI, terceiro milênio. Por diversas vezes citado em livros, filmes e diversas formas de entretenimento e cultura, o uso dos computadores no dia-a-dia do homem, outrora ficção, é realidade nos dias de hoje. Praticamente em todas as áreas de atividades humanas está inserido o computador, seja em supermercados, hospitais, oficinas mecânicas, cinemas, teatros, locadoras de vídeo, creches, restaurantes, shoppings, postos de gasolina, escolas, há sempre um computador realizando determinada função.

Na história da humanidade, sabe-se que o homem sempre se adapta às novas mudanças a que lhes são impostas, desta forma, os profissionais das mais diversas áreas de atuação não podem prescindir dos conhecimentos e possibilidades que as novas tecnologias oferecem. Tal avanço da tecnologia e a ampla disseminação do uso do computador se fizeram presentes também na área da educação.

Na área de matemática, o ensino-aprendizagem de diversos assuntos pode ser aprimorado com o auxílio do computador, como é o caso da Geometria.

A Geometria é fundamental para o ensino da matemática. Ela permite um trabalho criativo em matemática, desperta a curiosidade, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Este raciocínio lógico desenvolvido com a Geometria poderá ser aplicada em diversas áreas, não somente em matemática. Através da Geometria pode-se desfazer o mito da dificuldade na aprendizagem nesta área do conhecimento, que se configura de grande aplicabilidade na vida cotidiana.

Corroborando com essa idéia de facilitação da aprendizagem, surge a Geometria Dinâmica, como um novo instrumento para o ensino da geometria. A Geometria Dinâmica conta com diversos *softwares* desenvolvidos para o seu aprendizado, e um deles será exposto neste trabalho, o *Geogebra*.

O autor desta pesquisa teve um contato mais intenso com este *software* durante os estudos no PROFMAT, na disciplina Geometria II, quando pelo material do curso, foram desenvolvidos diversos problemas que exigiam a utilização do Geogebra.

O objetivo deste trabalho é discutir como o software *Geogebra* pode auxiliar o ensino-aprendizagem da geometria, e mostrar como a aplicação da Geometria Dinâmica pode tornar a aprendizagem dos conteúdos de geometria, inseridos na disciplina matemática, mais

completa, criando no aluno uma postura mais crítica, uma participação mais ativa nas aulas, pois a geometria dinâmica possibilita que aluno analise suas construções geométricas, entre outras características.

O autor utilizou o método da pesquisa bibliográfica e pesquisa de campo.

O autor discutirá a geometria, desde o seu surgimento até a sua abordagem mais atual, através da geometria dinâmica. Abordará o assunto triângulos e seus pontos notáveis, aplicará pesquisa de campo com duas turmas do oitavo ano do ensino fundamental, sobre este assunto. Uma turma assistirá de forma passiva as aulas, em sala de aula, outra turma participará de forma ativa, manuseando o software Geogebra, no laboratório de informática.

## 2 UM BREVE HISTÓRICO DA EVOLUÇÃO DA GEOMETRIA

Não se pode falar de Geometria Dinâmica, antes de entender a importância da geometria na vida do homem, a evolução do seu estudo e ensino.

A origem da geometria se confunde com a origem da matemática, sendo os antigos egípcios os primeiros a desenvolverem seu estudos, pois necessitavam reconstituir as marcações de terrenos destruídos pelas cheias do rio Nilo, bem como construir as memoráveis pirâmides.

A história da geometria é composta de dois fios entrelaçados. Um trata do desenvolvimento de seu conteúdo, e outro trata de sua natureza, em constante mutação. É indiscutível que a geometria provavelmente se iniciou em tempos remotos da antigüidade, a partir de modestas origens, e foi gradualmente crescendo, até chegar à grande dimensão que possui atualmente (EVES, 1992).

Segundo Eves (1992), as considerações iniciais que o homem fez a respeito da geometria são, provavelmente, muito antigas. Devem ter se originado de simples observações inerentes da capacidade humana de reconhecer as configurações físicas, de comparar formas e tamanhos. Diversas circunstâncias da vida do homem primitivo acarretavam uma certa quantidade de descobertas geométricas subconscientes. A noção de distância foi um dos primeiros conceitos a serem desenvolvidos. Necessitando de delimitar a terra, o homem foi criando noções de figuras geométricas simples, tais como retângulos, quadrados e triângulos. Demais conceitos simples de geometria teriam sido naturalmente sugeridos pela construção de muros e moradias, como noções de vertical, paralela e perpendicular.

Inúmeras observações do seu dia-a-dia devem ter propiciado ao homem primitivo a concepção de curvas, superfícies e sólidos. Os exemplos de curvas eram vários, como por exemplo os contornos do sol e da lua, o arco íris, o corte transversal de um tronco de árvore. O arremesso de um objeto descreve uma parábola; uma espiral era formada por uma corda enrolada; a sugestão de uma família de curvas poderia ser observado pelos círculos de crescimento do tronco de uma árvore e pelos círculos concêntricos na superfície de um lago, causado pelo arremesso de um objeto. O corpo humano, dos animais, grande parte das folhas e flores dão a idéia de simetria. A concepção de volume aparecia imediatamente ao utilizarem

recipientes para a contenção de líquidos e outros tipos de material. Esses exemplos citados anteriormente podem multiplicar-se infinitamente. Por falta de melhor denominação, podemos chamar essa geometria de “geometria subconsciente”. O homem empregava essa geometria para elaborar ornamentos decorativos, desenhos, e a arte primitiva preparou consideravelmente o caminho para o posterior desenvolvimento geométrico, conforme afirmou Eves (1992).

As mais antigas atividades do homem no campo da geometria têm como registros algumas tábulas de argila cozida desenterradas na Mesopotâmia, e devem ser datadas, em parte, por volta do ano 3000 a.C. Inúmeros exemplos concretos mostram que os babilônios de 2000 – 1600 a.C. aplicavam as regras gerais para calcular as áreas de retângulos, triângulos retângulos e isósceles, do trapézio retângulo, volume do paralelepípedo retângulo. O comprimento da circunferência era calculado como sendo o triplo do diâmetro e a área do círculo como um doze avos da área do quadrado construído sobre um lado de comprimento igual à circunferência do círculo (sempre considerando  $\pi = 3$ ). Assim, o cálculo do volume de um cilindro reto obtinha-se pelo produto da base pela altura. Parece também que há indícios de que os antigos babilônios utilizavam a seguinte fórmula incorreta para a área de um quadrilátero, onde a, b, c e d são os lados consecutivos do quadrilátero:

$$A = \frac{(a + c) * (b + d)}{4} .$$

Essas civilizações sabiam que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos são proporcionais, que a altura desenhada de um vértice de um triângulo isósceles divide a base oposta a esse vértice em duas partes iguais e que o ângulo inscrito num semicírculo é de 90°. O Teorema de Pitágoras já era conhecido, desde cerca de 2000 a.C, conforme relata Eves (1992).

As principais fontes de informações sobre a geometria antiga egípcia são os papiros Moscou e Rhind, textos matemáticos contendo, respectivamente, 25 e 85 problemas, datando de aproximadamente 1850 a.C. e 1650 a.C. Localiza-se no Museu de Berlim, o mais antigo instrumento astronômico ou de agrimensura conhecido procedente do Egito, aproximadamente de 1850 a.C. O mais antigo relógio de sol que se conhece também está lá no

Museu de Berlim, é egípcio e data de 1500 a.C. Todos esses instrumentos mostram que estes povos eram dotados de conhecimentos de geometria prática. É interessante considerar que a grande pirâmide de Giseh, construção primorosa que envolveu geometria prática, foi erguida aproximadamente em 2900 a.C.

De acordo com Eves (1992), somando os papiros de Moscou e Rhind, temos 110 problemas, sendo que 26 são de geometria. Grande parte desses problemas provém de fórmulas de mensuração com o objetivo de calcular áreas de terras e volumes de celeiros. Para o cálculo da área de um círculo, considerava-se que era igual à de um quadrado de lado igual a  $\frac{8}{9}$  de seu diâmetro, e o volume de um cilindro reto como o produto da área da base pelo comprimento da altura. Apesar de não haver provas documentais de que os antigos egípcios conheciam o teorema de Pitágoras, agrimensores (funcionários cuja tarefa era avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas posses) egípcios primitivos verificavam que um triângulo cujos lados têm como medida 3, 4 e 5 unidades é um triângulo retângulo. O famoso Teorema de Pitágoras nasceria muito tempo depois.

É muito interessante a existência, no papiro Moscou, de um exemplo numérico da fórmula correta do volume do tronco de pirâmide de bases quadradas :

$$V = \frac{h \cdot (a^2 + ab + b^2)}{3}$$

3

onde h é a altura e a e b são os comprimentos dos lados das bases.

Segundo Eves (1992), realizações na área da geometria semelhantes às citadas anteriormente, no Egito e na Babilônia, provavelmente ocorreram também na China e Índia antigas. Os antigos egípcios guardavam seus trabalhos em pedras e papiros, e o responsável pela resistência destes é o clima excepcionalmente seco do Egito; e os babilônios utilizavam as suas tábulas de argila cozida, materiais imperecíveis. Os antigos chineses e indianos, entretanto, utilizavam para escrever fibra de entrecasca de árvores e bambu, materiais muito perecíveis. Logo, há uma quantidade relevante de informações certas, obtidas de fontes primárias, acerca da geometria dos antigos egípcios e babilônios, ao passo que não existem informações relevantes sobre a geometria dos antigos chineses e indianos.

O poder do Egito e da Babilônia enfraqueceu com as mudanças econômicas e políticas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. Assim, os desenvolvimentos no campo da geometria passaram para as mãos dos gregos, transformando a matéria em coisa bastante

diferente do conjunto de conclusões empíricas que foi produzido por seus predecessores. A idéia que os gregos pregavam era de que os fatos geométricos deveriam ser estabelecidos, não por processos empíricos, mas por deduções, as verdades geométricas deveriam ser descobertas em salas de estudos, e não em laboratórios. Resumindo, os gregos transformaram a geometria empírica, ou científica, dos antigos egípcios e babilônios em uma geometria que podemos denominar de geometria “sistemática” ou “demonstrativa” (EVES, 1992).

Ao contrário do que ocorreu com a geometria dos antigos egípcios e babilônios, em que havia uma grande quantidade de informações, não há quase nenhuma fonte primária para o estudo da geometria grega primitiva. Os relatos sobre a geometria grega primitiva são apoiados em manuscritos e relatos que datam de vários séculos depois de os originais terem sido escritos. A principal fonte de informações sobre a geometria grega primitiva, aqui relatada, é o chamado Sumário eudemiano de Proclus. O referido sumário possui várias páginas do Comentário sobre Euclides, Livro I, sendo um breve esboço do desenvolvimento da geometria grega desde os tempos mais remotos até Euclides. A denominação Sumário eudemiano origina-se no trabalho de Eudemo, discípulo de Aristóteles, trabalho esse que relatava a história completa da geometria grega, cobrindo o período anterior a 335 a.C.,. O Sumário eudemiano afirma que a geometria grega parece ter iniciado praticamente com as ações de Tales de Mileto, na primeira metade do século VI a.C. Tales, considerado um dos “sete sábios” da antigüidade, foi um digno fundador da geometria demonstrativa. Ele é o primeiro homem conhecido a que é associado a utilização de métodos dedutivos em geometria. Conforme relatado no sumário, Tales residiu por um tempo no Egito, trazendo a geometria assim que retornou à Grécia, onde começou a aplicar à matéria procedimentos dedutivos da filosofia grega. Pela primeira vez um estudioso da geometria teve o comprometimento com um método de raciocínio dedutivo, mesmo que fosse incompleto e parcial. Interessante citar que o fato de o primeiro pensamento dedutivo surgir no campo da geometria inaugurou uma tradição em matemática que se manteve até épocas bastante recentes, segundo Eves (1992).

Os três estudiosos gregos mais importantes da antigüidade foram Euclides, Arquimedes e Apolônio. Não há exagero nenhum em dizer que quase tudo o que se fez de significativo na área da geometria, até os dias de hoje, tem sua semente original em algum trabalho desses três grandes gênios.

Em meados do ano 300 a.C, Euclides produziu sua memorável obra, os Elementos, uma cadeia dedutiva única de 465 proposições, compreendendo de maneira clara e harmoniosa geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. Logo que surgiu, essa obra galgou o mais alto respeito, superando rapidamente os esforços anteriores no mesmo sentido. Euclides, Arquimedes e Apolônio foram escritores prolíficos. Embora os Elementos sejam de longe seu trabalho mais importante, Eves (1992) afirma que é a obra de geometria mais importante de toda a história. Euclides produziu diversos outros tratados de geometria, e somente há conhecimento de oito deles.

Cerca de dez tratados matemáticos de Arquimedes sobrevivem até os nossos dias, havendo vestígios de vários trabalhos que se perderam. Dos que restaram, três são sobre geometria plana e dois sobre geometria sólida. Essas obras são criações altamente originais, fazendo com que Arquimedes figure como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, o maior da antigüidade. Em um de seus trabalhos sobre geometria plana, Arquimedes inaugurou o método clássico dos perímetros para calcular  $\pi$ , e achou que  $\pi$  está situado entre  $223/71$  e  $22/7$ , ou que, com duas casas decimais,  $\pi$  é dado como 3,14. Esse procedimento de Arquimedes foi o início da longa história da busca de aproximações cada vez mais acuradas para o valor de  $\pi$ , e em 1967, alcançou a fantástica aproximação de 500000 (quinhentas mil) casas decimais (atualmente já temos aproximações de mais de um milhão de casas decimais). Em uma de suas obras de geometria espacial, encontramos pela primeira vez fórmulas corretas para as áreas da superfície esférica e para os volumes da esfera do segmento esférico de uma base.

Apesar de Apolônio ter sido um grande astrônomo, e embora tenha produzido diversas obras na matemática, ficou famoso pela obra “Secções cônicas”, obra monumental e extraordinária, graças à qual adquiriu o cognome, entre seus contemporâneos, de “o grande geômetra”. As “Secções cônicas” é um exaustivo estudo sobre essas curvas, superando completamente todos os trabalhos anteriores deste assunto. Apolônio criou os termos “elipse, parábola e hipérbole”(EVES, 1992).

A época de ouro da geometria grega chegou ao fim com a morte de Apolônio. É inestimável a importância do notável legado da geometria grega para toda a geometria subsequente.

Segundo Eves ( 1992 ), houve um período negro na história do ensino, no período que iniciou-se com a queda do Império Romano, na metade do século V, e que se estendeu até o século XI. Neste período a civilização na Europa Ocidental decaiu consideravelmente. O ensino quase entrou em extinção, o saber grego quase desapareceu e grande parte das artes e ofícios apresentados ao mundo entraram no esquecimento. Neste período estacionário do ensino, a civilização do Oriente, especialmente hindus e árabes, se tornaram os maiores depositários da matemática. O conceito rigoroso de raciocínio dos gregos desagradava aos hindus, embora os mesmos se destacassem na arte da computação, e também os hindus contribuíram para a álgebra e desempenharam um relevante papel no desenvolvimento do atual sistema de numeração posicional. Entretanto, em geometria ou em metodologia matemática elementar não produziram quase nada de importância.

Os gregos da matemática e ciência só voltaram a atuar na Europa em meados da parte final do século XI, onde se seguiu um período de transmissão em que o saber antigo, preservado pela cultura muçulmana, passou para a Europa Ocidental, através de traduções latinas trabalhadas por eruditos cristãos que movimentavam-se até centros de ensino muçulmanos, e também através da abertura de relações comerciais da Europa ocidental com o mundo árabe. Os eruditos cristãos se infiltraram na Espanha, fazendo com que o século XII fosse considerado, na história da matemática, o século dos tradutores. O fator relevante no século XIII foi o surgimento das universidades de Paris, Oxford, Cambridge, Pádua e Nápoles, que se tornaram fatores poderosos no que diz respeito à matemática, já que diversos matemáticos se vinculavam a uma ou mais dessas instituições. Ainda neste século, a grande obra Elementos, de Euclides, foi traduzida para o latim por Johannes Campanus, para ser mais exato, no ano de 1260. Bem mais tarde, em 1482, esta tradução se tornou a primeira versão impressa dessa importante obra (EVES, 1992).

Continuando com a evolução da geometria através dos séculos, pode-se afirmar que o século XIV não foi relevante no desenvolvimento da matemática, já que foi o século da peste, que dizimou mais de um terço da população da Europa. Além disso, houve neste século a Guerra dos Cem Anos, que ocasionou profundas transformações políticas e econômicas no norte da Europa.

O século XV foi contemplado com o reaparecimento da arte e do saber na Europa. Inúmeros clássicos gregos, conhecidos por traduções árabes muitas vezes de baixo nível,



poderiam agora ser estudados nas suas fontes originais. O conhecimento se difundiu numa velocidade sem precedentes, já que foi inventada a imprensa com tipos móveis, em meados do século. Muitos artistas e arquitetos da época do Renascimento, buscando sempre se aprimorar, e com o objetivo de produzir quadros cada vez mais realistas, procuraram estudar as leis formais que regem a construção de projeções de objetos sobre uma tela. Começaram a dar seus primeiros passos no século XV, criando elementos de uma teoria geométrica subjacente à perspectiva (EVES, 1992).

Pode-se afirmar que dois instrumentos foram fundamentais para a prática e desenvolvimento da geometria: a régua e o compasso.

Ambos os instrumentos foram muito utilizados por artistas dos séculos XV e XVII, como Leonardo da Vinci e Albrecht Dürer. Os dois artistas desenvolveram construções com base em apenas uma abertura do compasso. Muitas dessas construções relacionavam-se à construção de polígonos regulares, muito utilizados pelos artistas em decoração e arquitetura. A régua e o compasso foram também muito utilizados no desenho de projetos para fortificações, logo após a invenção das armas de fogo.

Não foram apenas os europeus que contribuíram para o desenvolvimento do estudo da geometria, os chineses também atuaram com relevância no campo da geometria. A geometria, para os chineses, surgiu a partir da necessidade de encontrar distâncias, volumes, sendo aritmética por natureza. Se diferenciavam dos gregos, pois nunca desenvolveram a geometria de forma abstrata e sistemática, pois a aritmética e o conceito de número sempre foram necessários. Segundo Eves (1992), “os primeiros trabalhos chineses envolvendo geometria e que chegaram até nós foram escritos entre os séculos III a.C. e I a.C, mas vários especialistas os consideram comentários ou compilações de trabalhos mais antigos.” Há ainda historiadores que localizaram as origens de parte deste trabalho no século XII a.C. A geometria chinesa teve o período de maior produtividade entre 200 a.C e 500 a.C. Houve um estudo bem preliminar do triângulo 3-4-5 (triângulo pitagórico), em um trabalho primitivo denominado *Chou Pei Suan Ching*, em que uma figura está incluída, mas não há nenhuma demonstração do teorema pitagórico (EVES, 1992).

Conforme afirma Eves (1992), o teorema pitagórico, uma das proposições mais importantes de todo o campo da geometria, era conhecido antes do tempo do matemático Pitágoras, apesar da forte associação de seu nome à afirmação de que “o quadrado da

hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos”. Um fato curioso aconteceu acerca da demonstração, por parte de Pitágoras, deste teorema: diz-se que o matemático sacrificou um rebanho de cem bois, em observância à prática de ação de graças daquele tempo. Desta forma, a sociedade pitagórica chegou à primeira prova efetiva da afirmação do teorema.

Existem inúmeras áreas da matemática em que a introdução de um procedimento e uma terminologia geométricos torna simples tanto a compreensão como a apresentação de um determinado conceito ou desenvolvimento. Muitos matemáticos do século passado sentem que talvez a melhor forma de descrever a geometria atualmente não seja como um corpo de conhecimentos, algo separado e determinado, mas como uma maneira particular de observar o assunto. A linguagem geométrica é normalmente muito mais simples e elegante do que a linguagem da álgebra e da análise e, às vezes, há a possibilidade de levar a cabo linhas de raciocínio rigorosas em termos geométricos sem precisar traduzir para a álgebra e a análise. Desta forma, há uma economia tanto de reflexões como de comunicação de reflexões. O aspecto mais importante são as imagens geométricas sugeridas, que levam a resultados e estudos posteriores, dotando o homem de um instrumento poderoso de raciocínio indutivo ou criativo (EVES, 1992).

A geometria vem sendo, no decorrer dos séculos, estudada, ensinada e desenvolvida por diversas civilizações, que em determinados momentos da história passaram seus conhecimentos de um para outro povo.

De acordo com a realidade da sociedade, no decorrer dos séculos, o ensino da geometria foi e vem se adaptando; na pré-história o ensino por meio de pedras, e, nos dias de hoje, com o computador inserido na vida do homem, o ensino da geometria através da máquina, representado pela geometria dinâmica.

### 3 INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Falar sobre informática na educação é ter à frente a visão da revolução que está sendo provocada na educação.

As escolas estão dentro da nossa cultura e refletem valores da sociedade. Entretanto, a mudança tecnológica vem causando grande influência na vida do homem, em todos os aspectos e, na área da informática, o sistema educacional tem acompanhado lentamente essa evolução tecnológica.

Segundo Baldin e Villagra (2002), os recursos de informática presentes nos ambientes e meios de ensino têm chamado a atenção de professores e alunos para o potencial didático de sua utilização em sala de aula. A variedade de *softwares* (programas) que vêm sendo aplicados com o objetivo de motivar o ensino e a aprendizagem, é muito grande. Os *softwares* para uso educacional possuem várias capacidades e propriedades que devem ser reconhecidas e aproveitadas, tanto pelos professores, quanto pelos alunos, obtendo assim, eficientes resultados no processo de ensino aprendizagem. Para se escolher um programa a ser instalado nos equipamentos de uma escola, devem-se levar em consideração os aspectos financeiros e técnicos, como facilidade de manuseio e manutenção; contudo, o mais importante é o preparo dos professores na correta utilização dos programas e equipamentos, principalmente no aspecto pedagógico.

Particularmente, no ensino da matemática, um dos pilares da educação básica, o aparecimento de excelentes programas educacionais traz uma perspectiva muito animadora de diferenciadas metodologias que levam mais significados ao ensinar e aprender dessa disciplina. Tendo em vista este cenário atual, torna-se importante a produção de material didático sobre a utilização da informática no ensino, para todos aqueles que estão pesquisando e introduzindo novos modos de ensino com auxílio de tecnologia.

Santos (2008) afirma que na implantação da informática na educação consideram-se os seguintes fatores: o computador, o *software* educativo, o professor capacitado e o aluno. O *software* educativo tem tanta importância quanto os outros fatores, pois, sem ele, o computador jamais poderá ser utilizado na educação. O computador pode ser utilizado tanto para ensinar sobre computação – aprender sobre o computador – quanto para ensinar qualquer assunto.

Segundo Santos (2008), a aprendizagem pelo computador implica que o aluno, através do equipamento, adquira conceitos sobre qualquer domínio. A abordagem pedagógica de como isto acontece é bastante variada. Varia entre dois grandes pólos:

a – A direção do ensino é a mesma do conjunto {Computador, *Software*, Aluno}

Neste pólo, o computador ensina o aluno, assumindo então o papel de máquina de ensinar, e a abordagem educacional é a instrução auxiliada pelo computador. Essa abordagem é baseada nos sistemas de ensino tradicionais, porém ao invés do livro ou do papel, utiliza-se o computador. Os *softwares* utilizados neste tipo de abordagem se dividem em duas categorias: tutoriais e exercício-e-prática. Um outro tipo de software que ensina são os jogos educacionais e a simulação (SANTOS, 2008).

a.1 - Programas Tutoriais – Conforme Santos (2008), os programas tutoriais constituem uma versão computacional da instrução programada. A grande vantagem dos tutoriais é o fato do computador poder apresentar o material com outras características que não são possíveis no papel, como animação, efeitos sonoros e a monitoração da performance do aluno, facilitando o processo de acompanhamento das lições e possíveis programas de remediação. Programas tutoriais são bastante utilizados pelo fato de possibilitarem a introdução do computador na escola sem muita mudança, pois é a versão computadorizada do que já é utilizada em salas-de-aula. O professor não precisa ser nenhum ás em informática, basta apenas dominar o conteúdo que ensinará para o aluno. Por outro lado, o desenvolvimento de um bom tutorial é bem caro e difícil. As indústrias de *software* preferem gastar no aspecto de entretenimento – gráficos e sons chamativos- ao invés de gastar no aspecto pedagógico e na qualidade do programa.

Um programa tutorial de qualidade é aquele que utiliza técnicas de inteligência artificial para analisar padrões de erro, avaliar o estilo e a capacidade do aluno e oferecer instrução especial sobre o conceito que o aluno está apresentando dificuldade (SANTOS, 2008).

Segundo Santos (2008), há dois tipos de problemas que não permitiram que os sistemas tutoriais inteligentes deslanchassem:

- A intervenção do sistema no processo de aprendizagem é muito superficial. É difícil desenvolver na máquina um “bom professor”;

- As escolas ainda não podem dispor de computadores tão poderosos que permitam a utilização destes programas.

A falta de recursos computacionais e de equipes multidisciplinares que permitam o desenvolvimento de bons tutoriais favorece que grande parte dos programas que se encontram no mercado sejam de má qualidade. A maioria dos programas disponíveis é desprovida de técnicas pedagógicas, não requer nenhuma ação por parte do aprendiz a não ser ler um texto e responder uma pergunta de múltipla escolha, perpetuando um método de ensino que é péssimo, só que agora numa versão computacional, segundo Santos (2008).

a.2 - Programas de Exercício e Prática - Este tipo de programa é utilizado tipicamente para revisar o assunto visto em sala, principalmente material que envolve memorização e repetição, como aritmética e vocabulário. Este programa requer a resposta freqüente do aluno, propiciando *feedback* imediato, explorando as características gráficas e sonoras do computador e são apresentados geralmente sob a forma de jogos.

A vantagem deste tipo de programa é o fato do professor dispor de uma infinidade de exercícios que os alunos podem resolver de acordo com o seu grau de conhecimento.

A idéia de que os programas de exercício-e-prática aliviam a tarefa dos professores corrigirem os testes ou avaliações não é totalmente verdadeira. Eles podem eliminar a parte mecânica da avaliação. Entretanto, ter uma visão clara do que está acontecendo com o processo de assimilação dos assuntos vistos em sala de aula, exige uma visão mais profunda da performance dos alunos.

a.3 - Jogos Educacionais - Esta filosofia de ensino defende que a criança aprende melhor quando ela é livre para descobrir relações por ela mesma, ao invés de ser explicitamente ensinada. Exemplos de *softwares* que se enquadram nesse contexto são os jogos e a simulação.

Os jogos, do ponto de vista das crianças, constituem a maneira mais divertida de aprender. Há no mercado uma grande variedade de jogos educacionais para ensinar conceitos que podem ser difíceis de serem assimilados pelo fato de não existirem aplicações práticas mais imediatas, como a trigonometria e probabilidade.

b – A direção do ensino é a mesma do conjunto {Aluno, *Software*, Computador}.

Neste pólo, para o aluno “ensinar” o computador, o software deverá ter uma linguagem computacional que permita ao aluno representar suas idéias perante à máquina.

Nesse caso o computador pode ser visto como uma ferramenta que possibilita ao aluno resolver problemas ou realizar tarefas como desenhar, escrever etc.

### 3.1 Desenvolvimento de *software* educacional

Para o desenvolvimento de um *software* educacional, é necessária a compreensão do modo como as pessoas aprendem, para que se possa transpor este entendimento para o *software*. Logo, torna-se necessário estudar as teorias de aprendizagem. O desenvolvimento de um *software* educacional geralmente segue as etapas determinadas pela engenharia de *software*. Um ciclo de vida clássico contém as seguintes fases (SANTOS, 2008):

- Análise – fase em que se analisa qual é a melhor solução para o problema que o *software* educacional irá resolver, definindo assim, o ambiente educacional;
- Projeto – fase em que é definida o plano de desenvolvimento do *software* educacional. Nesta etapa convém utilizar algum método para suporte de modelagem ;
- Codificação – escolha da plataforma de *hardware* e *software* na que o *software* educacional vai ser implementado;
- Avaliação – onde se define os critérios e marcos de avaliação do processo de desenvolvimento e do produto;
- Manutenção – implantação e controle das versões do *software* educacional.

Segundo Santos (2008), quando se desenvolve um *software* educacional, há a necessidade de se debater o controle da aprendizagem pelo projetista e pelo usuário final. Sistemas tradicionais dão valor ao controle do projetista na apresentação do que/quando/como algo será aprendido. Entretanto, a aprendizagem é mais efetiva quando o controle é do usuário final, quando este tem a iniciativa e tem a escolha de cada passo na seqüência de eventos de aprendizagem.

## 4 GEOMETRIA DINÂMICA

Um dos objetivos da geometria é conduzir os alunos a terem uma leitura geométrica dos desenhos. O computador pode contribuir para que o aluno tenha uma leitura e exploração dos desenhos em termos geométricos. A idéia é dar um acesso com possibilidades de cálculo e representações do computador ao conjunto de desenhos representando a mesma figura. Esse acesso é através da geometria dinâmica.

Segundo Neri (2008), "...o termo "Geometria Dinâmica" foi usado inicialmente por Nick Jakiw e Steve Rasmussen com o objetivo de diferenciar este tipo de software dos demais softwares geométricos...". A Geometria Dinâmica engloba os programas interativos que permitem a criação e manipulação de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Desta forma, os programas utilizados em Geometria Dinâmica não devem ser entendidos como uma nova geometria.

A geometria dinâmica não é a geometria euclidiana ou uma das geometrias não-euclidianas. Os diversos softwares de geometria dinâmica implementam modelos de geometria diferentes. Cada implementação da geometria dinâmica, além de ter as características da geometria que a modeliza, tem também propriedades específicas. De uma certa forma, ela constitui uma extensão dessas geometrias. Uma dessas extensões é o gerenciamento dos casos limites: objetos nem sempre definidos, gerenciamento dos pontos de interseção durante o deslocamento. A característica dinâmica aparece pela possibilidade de se passar de um desenho a um outro pelo deslocamento quase contínuo dos objetos com "graus de liberdade". Os objetos com "graus de liberdade" são os objetos não completamente definidos pelas especificações, por exemplo: "Seja um triângulo ..." (NÓBRIGA, 2004). Esses objetos com "graus de liberdade" a que o autor se refere são as figuras geométricas que se desenha aleatoriamente, sem as suas propriedades intrínsecas, como um quadrilátero qualquer ou um triângulo qualquer. Um exemplo prático será apresentado logo a seguir.

Segundo Nóbriga (2004):

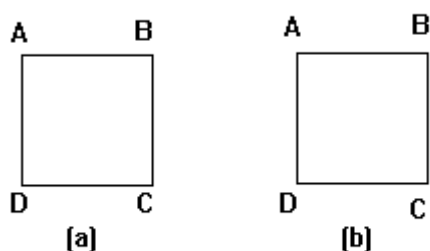
“Com o dinamismo, as propriedades geométricas da figura aparecem como propriedades mecânicas dos desenhos. A percepção age sobre as características dinâmicas dos desenhos geométricos. As propriedades geométricas aparecem dinamicamente como invariantes durante o deslocamento dos elementos básicos. “

Gravina (1996) afirma que os programas construídos através dos princípios da Geometria Dinâmica são aqueles em que as construções de desenhos de objetos e configurações geométricas são feitos a partir das propriedades que os definem. Portanto, para um qualquer objeto ou propriedade, associa-se um conjunto de “desenhos em movimento” e os invariantes que surgirão corresponde à propriedade geométrica do objeto, implícito ao problema. E este é o principal objetivo da Geometria Dinâmica: a multiplicidade de representações das configurações geométricas clássicas, descobrindo-se, a partir dos invariantes do movimento, as propriedades geométricas.

O software Tabulae possui o recurso da “régua e compasso eletrônicos”, e a interface de menus de construção encontra-se em linguagem clássica da Geometria.

Com um exemplo bastante simples, pode-se ilustrar a questão da estabilidade da construção: será mostrado dois quadrados. Na figura 4.1, o quadrado da letra (a) foi construído à mão livre, e o quadrado da letra (b) foi construído a partir de suas propriedades geométricas, como mostra a figura a seguir:

Figura 4.1 - Construção de quadrados

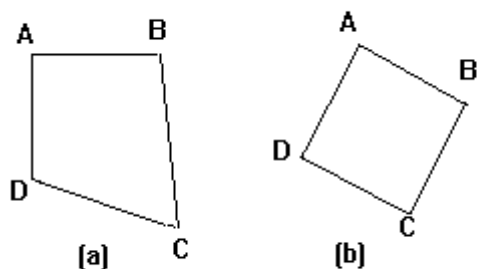


Fonte: Elaborada pelo autor

Vê-se, aparentemente, que ambos os quadrados são idênticos. Movimentando-se os quadrados através do vértice C, ocorrerá o seguinte:



Figura 4.2 - Deformação e movimentação de quadrados



Fonte: Elaborada pelo autor

Nota-se claramente, pela figura 4.2, a diferença: enquanto o primeiro quadrado se deforma, o segundo muda de posição, mas mantendo suas características geométricas (continua sendo um quadrado).

Pelos exemplos notam-se os objetos com suas propriedades intrínsecas, e os objetos com “graus de liberdade”, que são os que se deformam, quando movimentados. Essa possibilidade de movimentar objetos em tempo real é uma das principais características da geometria dinâmica.

Pode-se citar dois aspectos didáticos para a utilização de programas com base na Geometria Dinâmica:

- 1) Construir desenhos de objetos, para que o aluno adquira o domínio de determinada propriedade geométrica;
- 2) Receber desenhos elaborados pelo professor, para que através deste os alunos possam, pela observação das invariantes do movimento, determinar e analisar as propriedades geométricas descobertas.

No primeiro aspecto o aluno participará de forma ativa, no que se refere às construções das figuras geométricas, manuseando o programa; já no segundo aspecto, o aluno tem uma característica passiva sobre construção geométrica, pois apenas o professor fará as construções, mas terá uma participação ativa sobre a análise das figuras geométricas. Seja em um ou outro aspecto apresentado, nota-se a importância deste meio auxiliar, que é a geometria dinâmica, na aprendizagem da matemática, mais especificamente falando, da geometria.

## 5 O SOFTWARE GEOGEBRA

O Geogebra é um *software* educativo voltado para o aprendizado da Geometria.

Segundo site oficial do Geogebra, ele é um *software* de matemática dinâmica gratuito e multi-plataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo em um único sistema. Ele tem recebido vários prêmios na Europa e EUA.

Será visto aqui que é uma boa opção frente a outros softwares que trabalham com Geometria Dinâmica. O seu funcionamento é prático e funcional. Utilizando o mouse/touch pad como principal ferramenta, desenvolvem-se inúmeras atividades que estimularão o aluno para o aprendizado da Geometria Plana.

As regras, leis, aplicadas nas construções geométricas através do Geogebra condizem com aquelas aplicadas na Geometria, ou seja, o software é programado de acordo com os teoremas, propriedades das figuras geométricas.

Com o *Geogebra*, pode se desenvolver o estudo da Geometria Dinâmica, conforme foi relatado anteriormente.

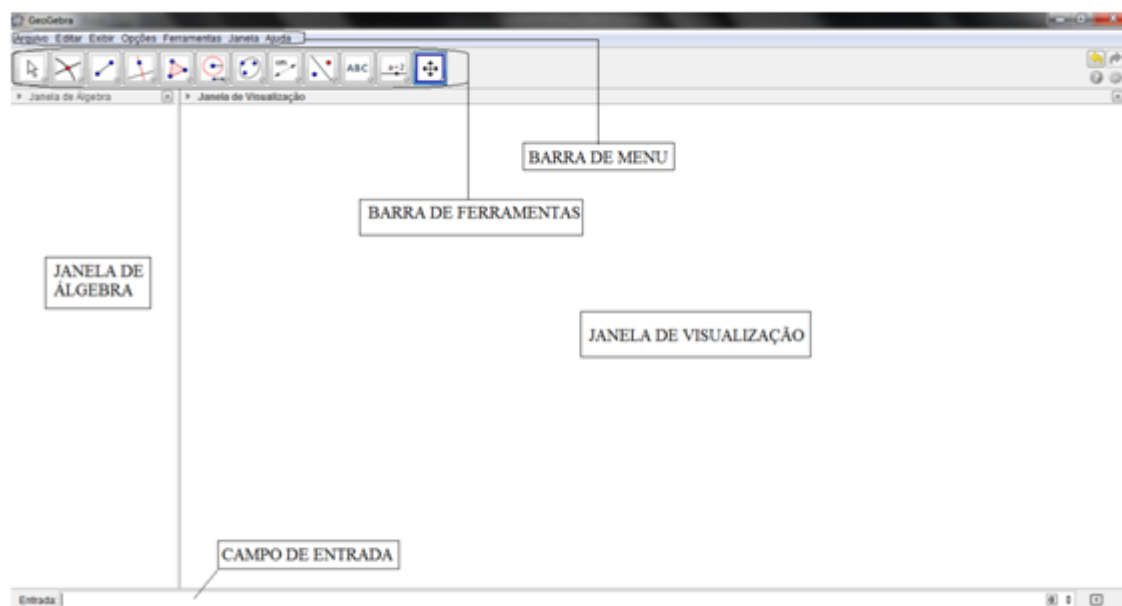
O autor pretende mostrar nesta pesquisa algumas funções básicas do software, e mostrar que os professores têm a opção de mais uma ferramenta poderosa no ensino-aprendizagem da Geometria.

A versão do *software* aqui mostrada é a 4.2.54.0.

Será visto a seguir uma breve introdução ao *software* e desenvolver-se-á uma atividade aplicável, de acordo com o Plano de Execução Didática do Colégio Militar de Fortaleza, no 8º ano do Ensino Fundamental, assunto Triângulos.

Pode-se observar, na Figura 01, a tela inicial do Geogebra. Sua barra de ferramentas, barra de menu, sua janela de visualização (onde são realizadas as atividades), que serão detalhadas a seguir.

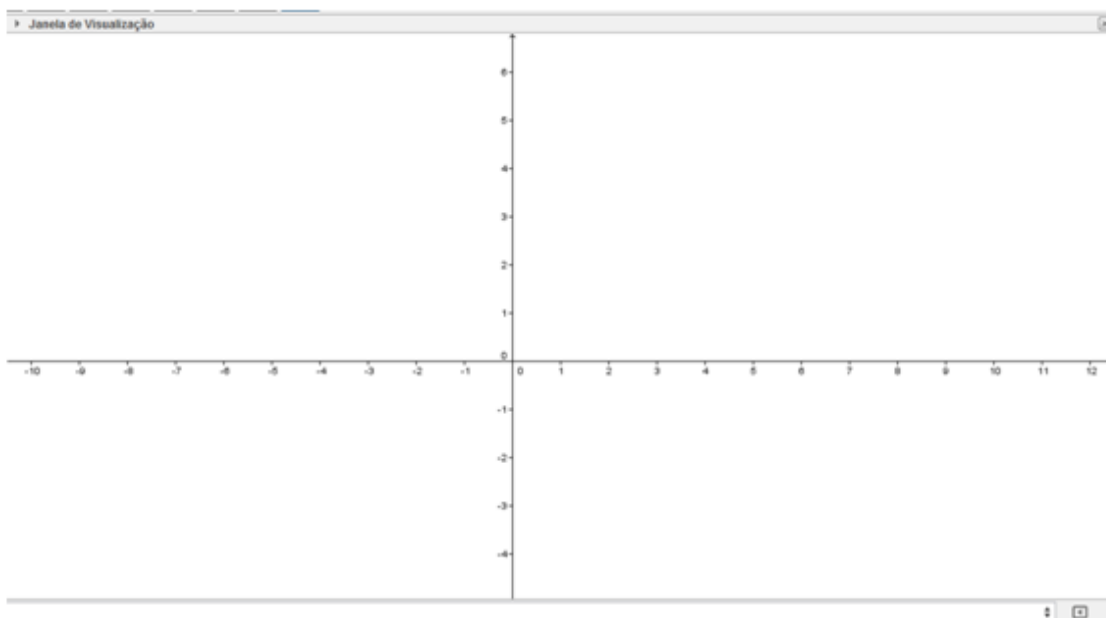
Figura 5.1 - Tela de apresentação do Geogebra



Fonte: Elaborada pelo autor.

A janela de visualização pode se apresentar em branco, como na figura 5.1, com eixos, como na figura 5.2, com malhas, como na figura 5.3, ou com eixos e malhas simultaneamente, como na figura 5.4.

Figura 5.2 - Janela de visualização com eixos coordenados



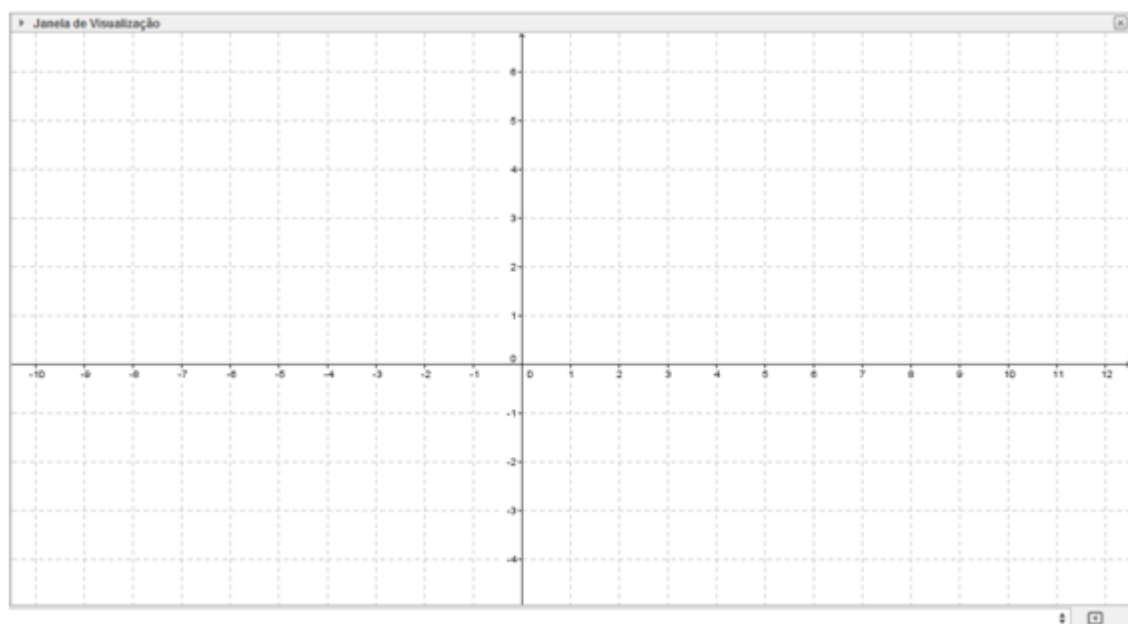
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.3 - Janela de visualização com malhas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.4 - Janela de visualização com eixos coordenados e malhas



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.1 Barra de ferramentas do Geogebra

A Barra de ferramentas do Geogebra será apresentada a seguir:

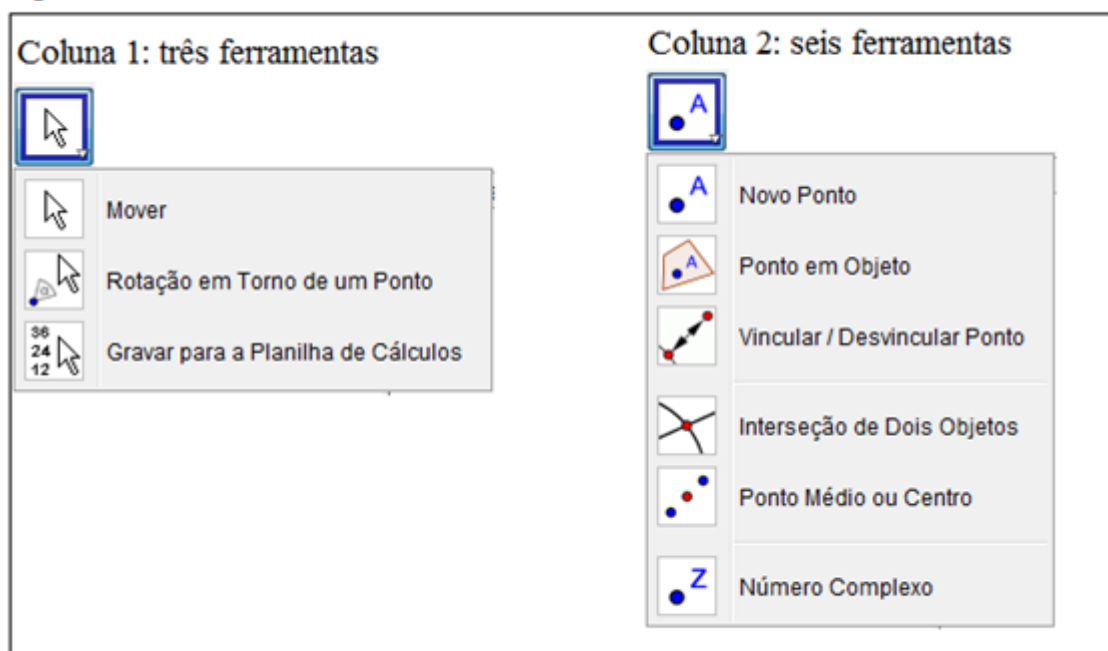
Figura 5.5 - Barra de ferramentas



Fonte: Elaborada pelo autor.

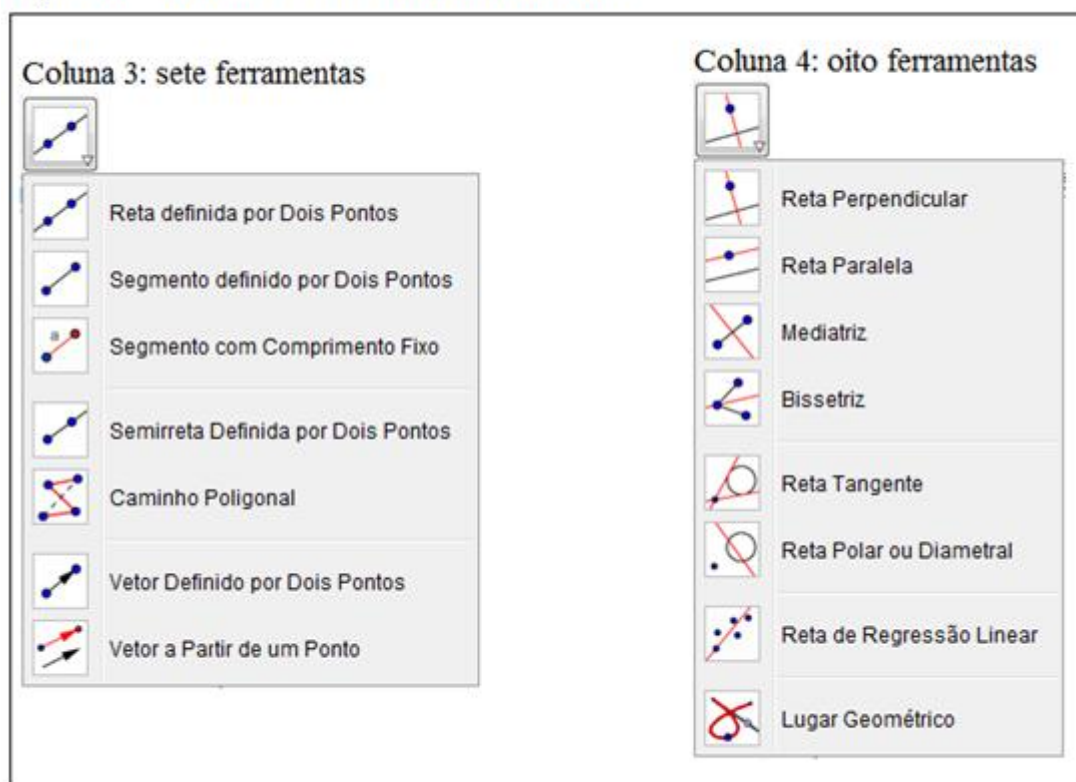
Ao clicar em alguma ferramenta desta barra, apresentada na figura 5.5, é aberta uma aba vertical, com novas ferramentas, conforme mostram as figuras 5.6, 5.7, 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11.

Figura 5.6 - Colunas 1 e 2 da Barra de ferramentas



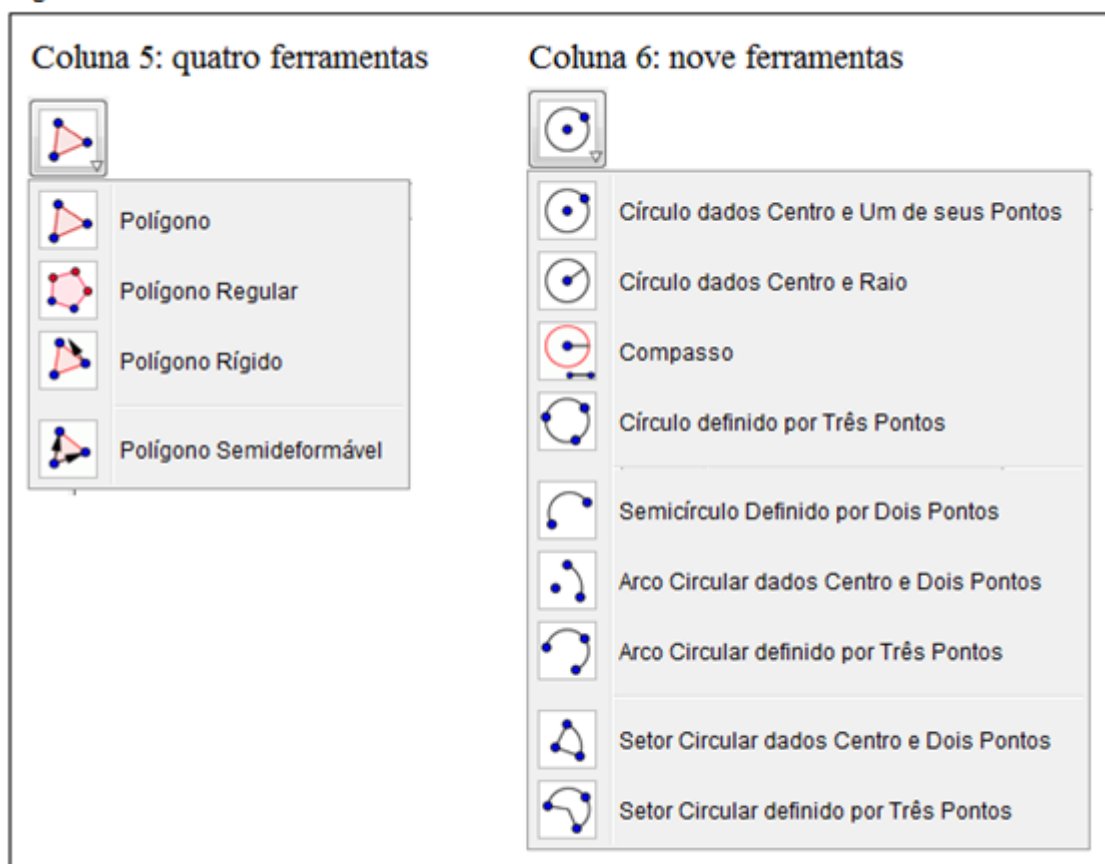
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.7 - Colunas 3 e 4 da Barra de ferramentas



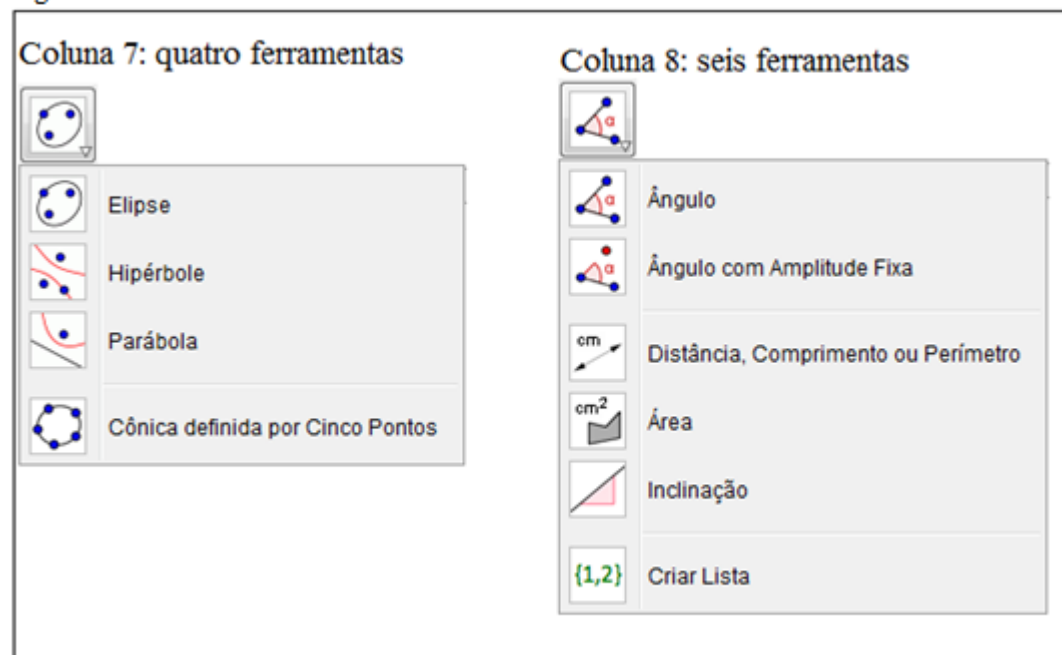
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.8 - Colunas 5 e 6 das Barra de ferramentas



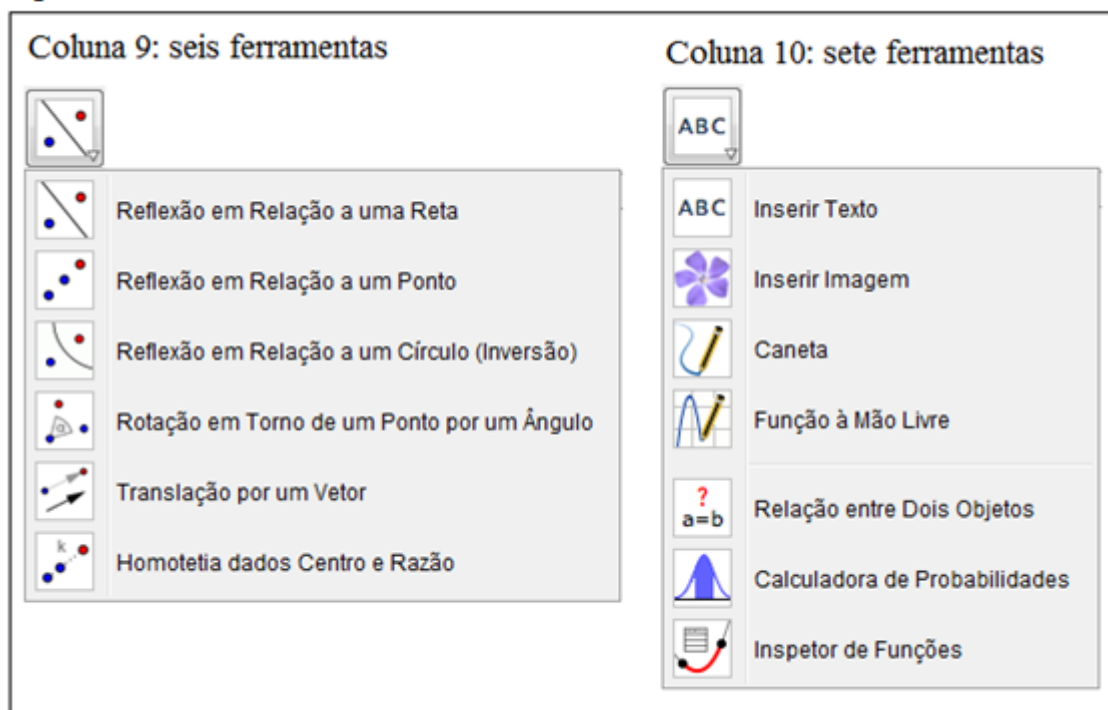
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.9 - Colunas 7 e 8 da Barra de ferramentas



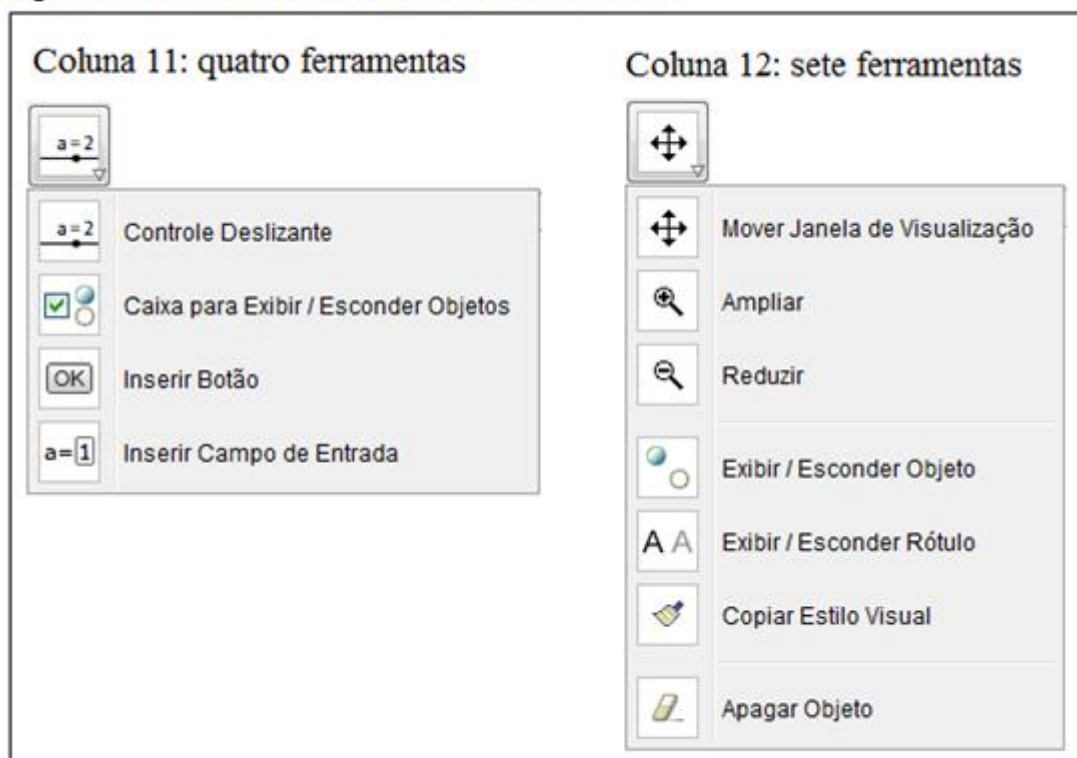
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.10 - Colunas 9 e 10 da Barra de ferramentas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.11 - Colunas 11 e 12 da Barra de ferramentas

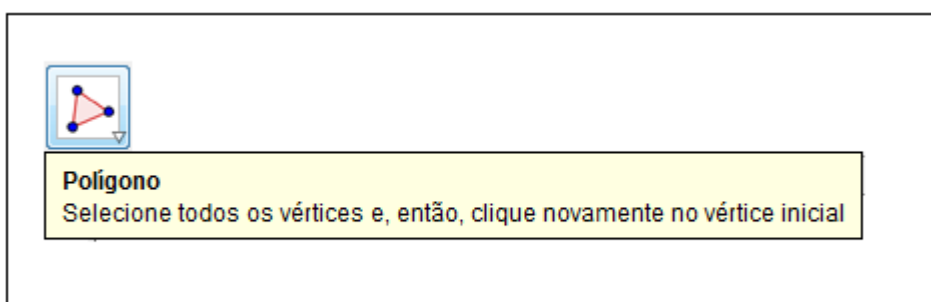


Fonte: Elaborada pelo autor.



Ao clicar sobre uma das ferramentas, ela é fixada na tela do Geogebra. Ao passar o mouse/touch pad sobre a ferramenta solicitada, uma instrução de como usar esta ferramenta é apresentada na tela. Na figura 5.12, é apresentado um exemplo com a ferramenta polígono.

Figura 5.12 – Instrução para a função polígono



Fonte: Elaborada pelo autor.

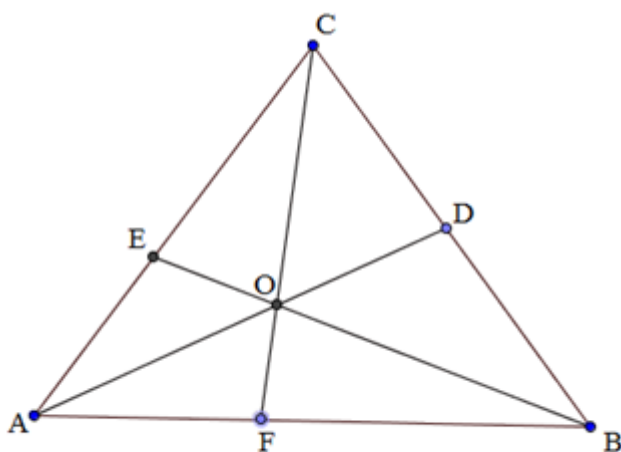
Sua interface é prática e funcional, tornando este software um dos melhores softwares livres que trabalham com Geometria Dinâmica no mercado.

## 6 TRIÂNGULO: CEVIANAS E PONTOS NOTÁVEIS

### 6.1 Teorema de Ceva

O teorema de Ceva estabelece uma condição necessária e suficiente para que três cevianas sejam concorrentes. Este teorema, provado em 1678 por Giovanni Ceva, na sua obra *De lineis rectis*, afirma que três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto se, e somente se,  $\overline{CD} \times \overline{FB} \times \overline{AE} = \overline{DB} \times \overline{FA} \times \overline{EC}$ .

Figura 6.1 – Teorema de Ceva



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

( $\Rightarrow$ ): três cevianas de um triângulo concorrem em um ponto, então, conforme figura 6.1,  $\overline{CD} \times \overline{FB} \times \overline{AE} = \overline{DB} \times \overline{FA} \times \overline{EC}$ .

Na figura 6.1, sejam os segmentos AD, BE e CF concorrentes. Considere (ABC) a área de um triângulo ABC. Note que os triângulos AFC e FBC possuem a mesma altura  $h$  em relação às bases AF e FB, respectivamente, e os triângulos AFO e FBO têm altura  $H$  em relação às bases AF e FB, respectivamente. Assim,

$$(AFC) = \frac{1}{2} h \overline{AF} \quad ; \quad (FBC) = \frac{1}{2} h \overline{FB} \quad ; \quad (AFO) = \frac{1}{2} H \overline{AF} \quad ; \quad (FBO) = \frac{1}{2} H \overline{FB}$$

Desta forma, na figura 6.1,  $\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{(AFC)}{(FBC)} = \frac{(AFO)}{(FBO)} = \frac{(AFC) - (AFO)}{(FBC) - (FBO)} = \frac{(AOC)}{(BOC)}$

Analogamente temos:  $\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{(BOA)}{(COA)}$  e  $\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{(COB)}{(AOB)}$

Ao multiplicarmos as frações temos:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{(AOC)}{(BOC)} \times \frac{(BOA)}{(COA)} \times \frac{(COB)}{(AOB)} = 1,$$

Assim,  $\overline{CD} \times \overline{FB} \times \overline{AE} = \overline{DB} \times \overline{FA} \times \overline{EC}$ , c.q.d.

( $\Leftarrow$ ): Se  $\overline{CD} \times \overline{FB} \times \overline{AE} = \overline{DB} \times \overline{FA} \times \overline{EC}$ , então as cevianas AD, BE e CF são concorrentes.

Considere O como ponto de interseção de AD e BE e seja F' a interseção do prolongamento de CO com AB (figura 6.2). Como provado anteriormente, temos

$$\frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1. \text{ Comparando com } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1, \text{ verificamos que } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}}$$

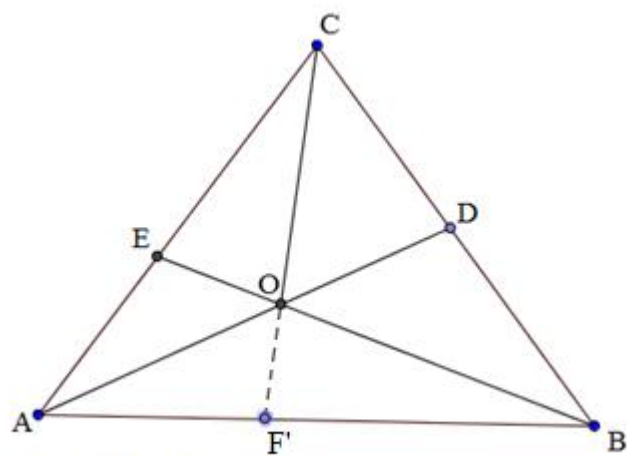
$$\text{Logo, } \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + 1 = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} + 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{FB}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'}}{\overline{F'B}} + \frac{\overline{F'B}}{\overline{F'B}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AF} + \overline{FB}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AF'} + \overline{F'B}}{\overline{F'B}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{F'B}} \Leftrightarrow \overline{FB} = \overline{F'B}$$

Assim,  $F = F'$ , ou seja,  $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$  concorrem ao mesmo ponto, c.q.d.

Como aplicações imediatas deste teorema, verificaremos alguns pontos notáveis, a seguir:

Figura 6.2 – Teorema de Ceva



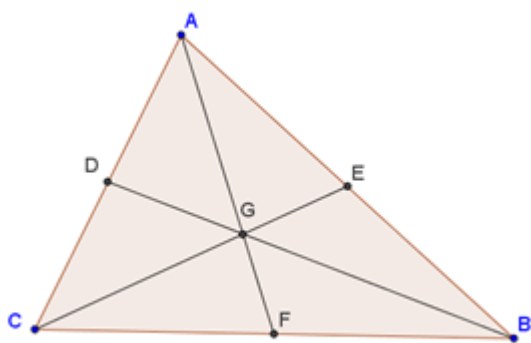
Fonte: Elaborada pelo autor

## 6.2 Pontos Notáveis do Triângulo

### 6.2.1 Baricentro

As três medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto, denominado baricentro do triângulo.

Figura 6.3 - Baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.2:

Medianas: segmentos AF, BD e CE.

Baricentro: ponto G

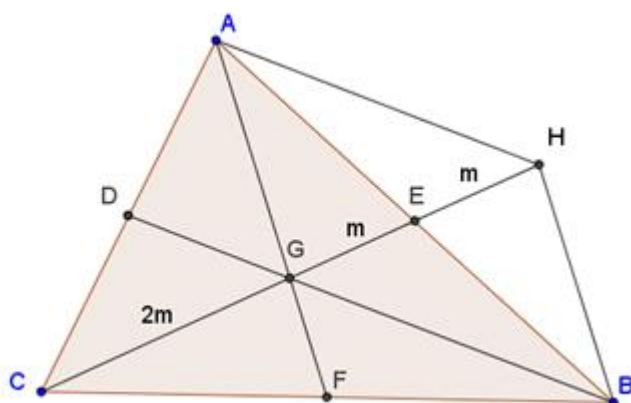
G divide cada mediana na razão 1 : 2

### Demonstração pelo Teorema de Ceva:

Na figura 6.2, E, F e D são pontos médios de AB, BC e CA, respectivamente. Pelo Teorema de Ceva, para que três cevianas sejam concorrentes em um mesmo ponto,

$\overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD} = \overline{DA} \times \overline{EB} \times \overline{FC}$ . Mas, como  $\overline{DA} = \overline{CD}$ ,  $\overline{EB} = \overline{AE}$  e  $\overline{FC} = \overline{BF}$ , verifica-se que a igualdade  $\overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD} = \overline{DA} \times \overline{EB} \times \overline{FC}$  é satisfeita, c.q.d.

Figura 6.4 - Demonstração



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

No triângulo ABC da figura 6.3, traçamos as medianas AF e BD que se interceptam em G. Seja H o simétrico de G em relação a E. Logo, AHBG é um paralelogramo, pelo caso LAL de congruência de triângulos, triângulos AEH e GEB, e triângulos AEG e HEB. Logo,  $AF \parallel BH$ , e como  $CF = FB$ , no triângulo CHB:  $CG = GH = 2m$ , pelo teorema da base média.

Assim,  $CG = 2GE$ , e, analogamente,  $AG = 2GF$  e  $BG = 2GD$

### 6.2.2 Incentro

As três bissetrizes internas de um triângulo se interceptam num único ponto denominado incentro, que está à igual distância dos lados do triângulo.

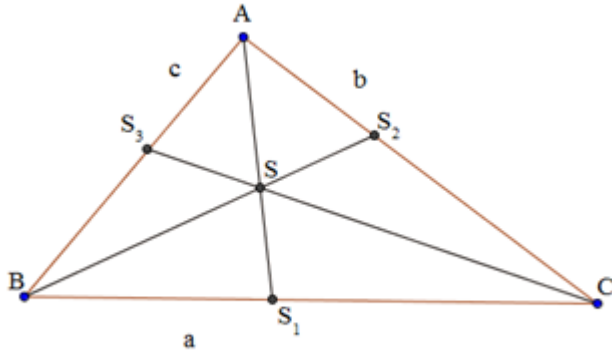
Sendo o triângulo ABC de lados  $BC = a$ ,  $AC = b$ , e  $AB = c$ , considerando  $d_{S,a}, d_{S,b}, d_{S,c}$  as distâncias de S aos lados a, b e c, respectivamente, temos:

Hipótese

Tese

$$\overline{AS_1}, \overline{BS_2}, \overline{CS_3} \text{ são bissetrizes internas} \Rightarrow \begin{cases} 1) \overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\} \\ 2) d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c} \end{cases}$$

Figura 6.5 - Demonstração



Fonte: Elaborada pelo autor

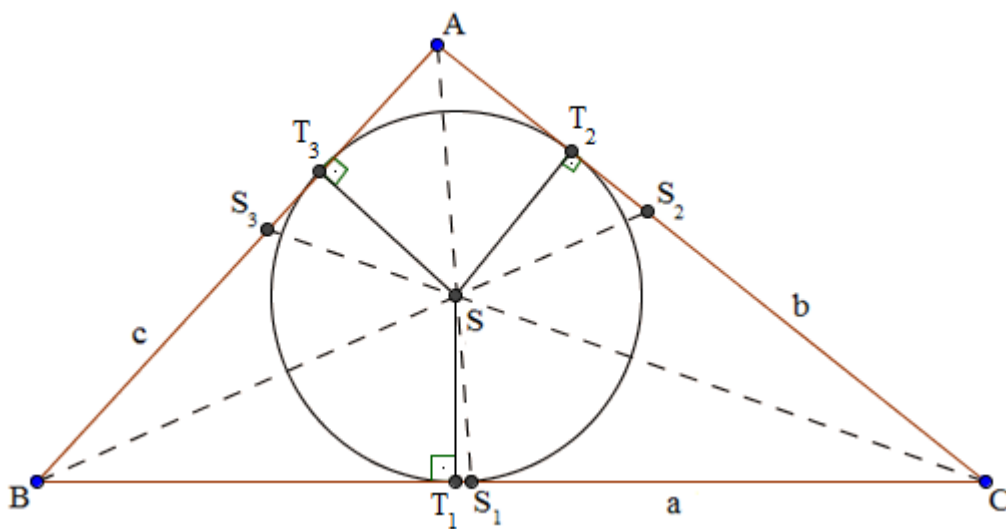
**Demonstração:**

Na figura 6.4, seja S o ponto tal que  $\overline{BS_2} \cap \overline{CS_3} = \{S\}$ .

$$\left. \begin{array}{l} S \in \overline{BS_2} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,c} \\ S \in \overline{CS_3} \Rightarrow d_{S,a} = d_{S,b} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{S,b} = d_{S,c} \Rightarrow S \in \overline{AS_1}$$

Logo,  $\overline{AS_1} \cap \overline{BS_2} \cap \overline{CS_3}$  e  $d_{S,a} = d_{S,b} = d_{S,c}$

Figura 6.6 – Circunferência inscrita no triângulo e seu centro S



Fonte: Elaborada pelo autor

Verifica-se na figura 6.5, as distâncias de S aos lados a, b e c, respectivamente, que é igual ao raio da circunferência inscrita ao triângulo ABC.  $T_1, T_2$  e  $T_3$  são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo.

### **Demonstração pelo teorema de ceva:**

Na figura 6.7, pelo teorema de Ceva, para que três cevianas concorram num mesmo ponto,

$$\overline{AD} \times \overline{CF} \times \overline{BE} = \overline{EA} \times \overline{DC} \times \overline{FB}.$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna para cada bissetriz interna do triângulo ABC, temos:

I: Em relação a  $\overline{AF}$  :

$$\frac{(\overline{AE} + \overline{EB})}{\overline{BF}} = \frac{(\overline{AD} + \overline{DC})}{\overline{FC}} \Rightarrow \overline{FC}(\overline{AE} + \overline{EB}) = \overline{BF}(\overline{AD} + \overline{DC})$$

II: Em relação a  $\overline{BD}$  :

$$\frac{(\overline{BE} + \overline{EA})}{\overline{AD}} = \frac{(\overline{BF} + \overline{FC})}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{AD}(\overline{BF} + \overline{FC}) = \overline{CD}(\overline{BE} + \overline{EA})$$

III: Em relação a  $\overline{CE}$  :

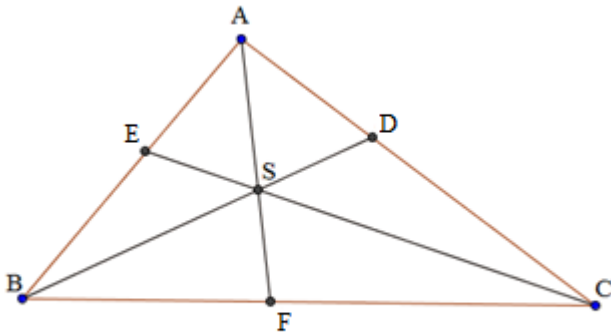
$$\frac{(\overline{CD} + \overline{DA})}{\overline{AE}} = \frac{(\overline{CF} + \overline{FB})}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{BE}(\overline{CD} + \overline{DA}) = \overline{AE}(\overline{CF} + \overline{FB})$$

Multiplicando as equações I, II e III:

$$\overline{FC}(\overline{AE} + \overline{EB}) \times \overline{AD}(\overline{BF} + \overline{FC}) \times \overline{BE}(\overline{CD} + \overline{DA}) = \overline{BF}(\overline{AD} + \overline{DC}) \times \overline{CD}(\overline{BE} + \overline{EA}) \times$$

$$\overline{AE}(\overline{CF} + \overline{FB}) \Rightarrow \overline{FC} \times \overline{AD} \times \overline{BE} = \overline{BF} \times \overline{CD} \times \overline{AE} \Rightarrow \overline{AD} \times \overline{CF} \times \overline{BE} = \overline{EA} \times \overline{DC} \times \overline{FB}, \text{ c.q.d.}$$

Figura 6.7 – Teorema de Ceva: bissetrizes internas



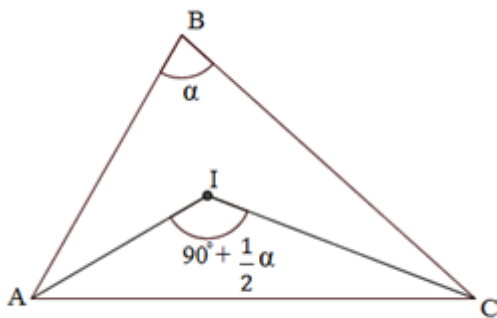
Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.2.2.1 Propriedade do Incentro

Conforme mostra a figura 6.8:

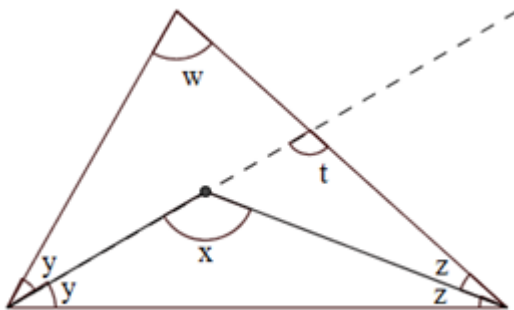
- Se I é o incentro do  $\Delta ABC$ , então  $\angle AIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$

Figura 6.8 – Propriedade do incentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.9 – Demonstração da propriedade do incentro



Fonte: Elaborada pelo autor



Demonstração:

Na figura 6.9, tem-se:

$$1: x = t + z ;$$

$$2: t = y + w ;$$

$$3: 2 \text{ em } 1: x = y + w + z ;$$

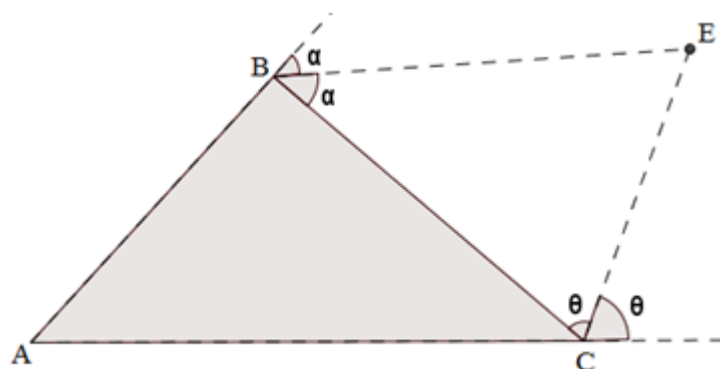
$$4: x + y + z = 180^\circ \Rightarrow y + z = 180^\circ - x ;$$

$$5: 4 \text{ em } 3: x = 180^\circ - x + w \Rightarrow 2x = 180^\circ + w \Rightarrow x = 90^\circ + \frac{w}{2} . \text{ c.q.d}$$

### 6.2.3 Ex-Incentro

As bissetrizes externas de um triângulo interceptam-se duas a duas em três pontos denominados ex-incentros.

Figura 6.10 – Ex-incentro “E”

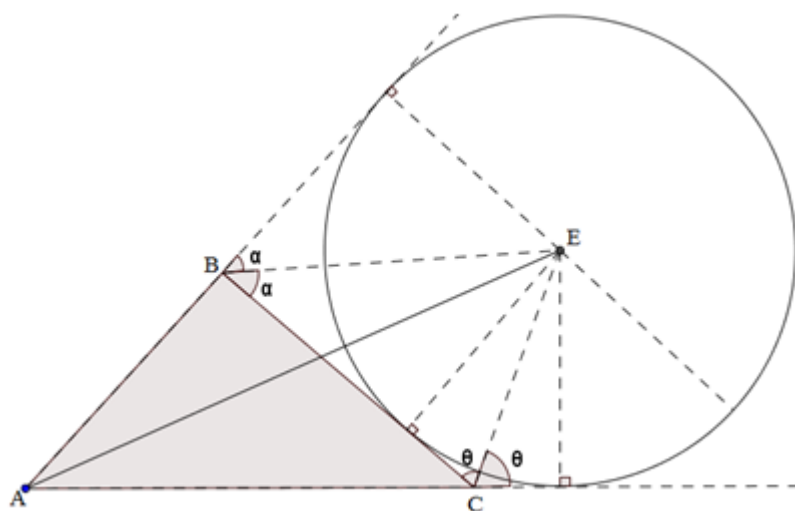


Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.10, BE e CE são duas bissetrizes externas do  $\Delta ABC$ . Desta forma, E é o ex-incentro.

Se considerarmos o segmento  $\overline{AE}$ , verificamos que esta reta é uma das bissetrizes internas do  $\Delta ABC$ . Então, para cada ex-incentro do triângulo, concorrem duas bissetrizes externas e uma bissetriz interna.

Figura 6.11 – Circunferência ex-inscrita



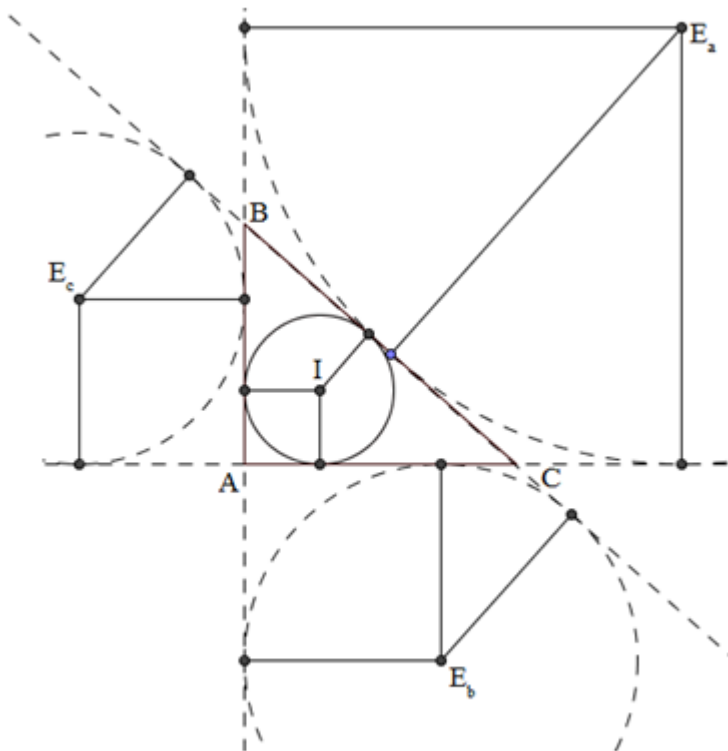
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.11, observamos a existência de uma circunferência tangente a um lado do  $\Delta ABC$  e aos prolongamentos dos outros lados deste triângulo. A esta circunferência denominamos circunferência ex-inscrita.

O ex-incentro  $E$  é o centro de uma das circunferências circunscritas ao triângulo.

Dado um triângulo, no plano que o contém, existem quatro pontos que equidistam de seus lados, conforme mostrado na figura 6.12. São eles: o incentro e os três ex-incentros.

Figura 6.12 – Incentro e ex-incentros



Fonte: Elaborada pelo autor

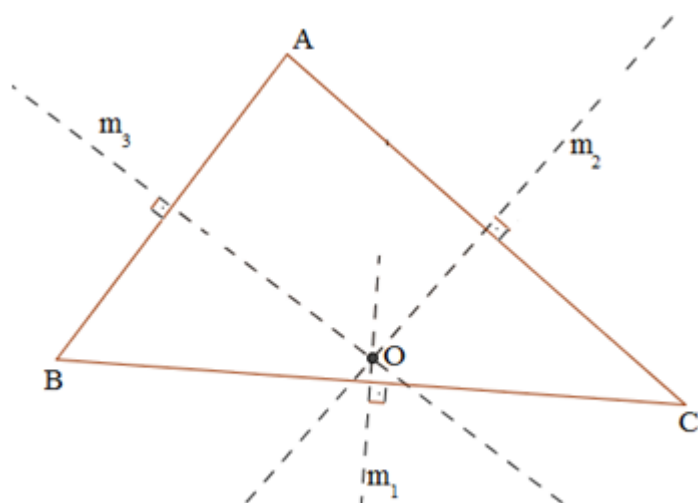
#### 6.2.4 Circuncentro

As mediatrizes dos lados de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto que está à igual distância dos vértices do triângulo.

Seja o triângulo ABC, da figura 6.13:

Hipótese	Tese
$m_1, m_2, m_3$ mediatrizes de $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$	$\Rightarrow \begin{cases} 1) m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \\ 2) \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \end{cases}$

Figura 6.13 – Circuncentro “O”



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

Na figura 6.13:

Seja  $O$  o ponto tal que  $m_2 \cap m_3 = \{O\}$ .

$$\left. \begin{array}{l} O \in m_2 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OC} \\ O \in m_3 \Rightarrow \overline{OA} \equiv \overline{OB} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{OB} \equiv \overline{OC} \Rightarrow O \in m_1$$

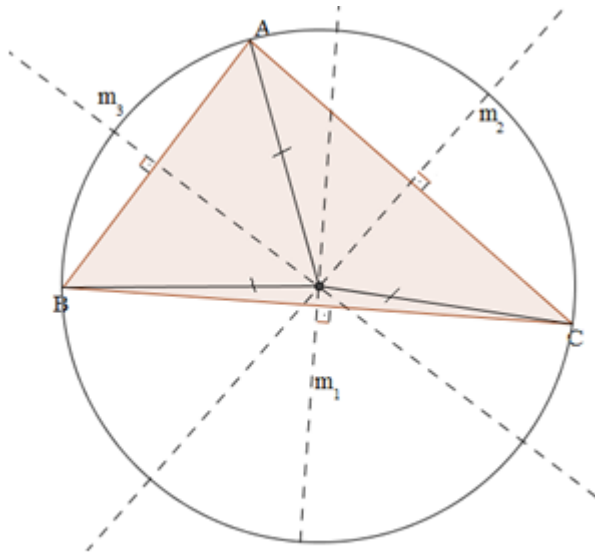
Assim,

$$m_1 \cap m_2 \cap m_3 = \{O\} \quad \text{e} \quad \overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC}$$

Definição:

O ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo é o **circuncentro** do triângulo, centro da sua circunferência circunscrita (figura 6.14).

Figura 6.14 – Circunferência circunscrita ao triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.4.1 Propriedades do Circuncentro

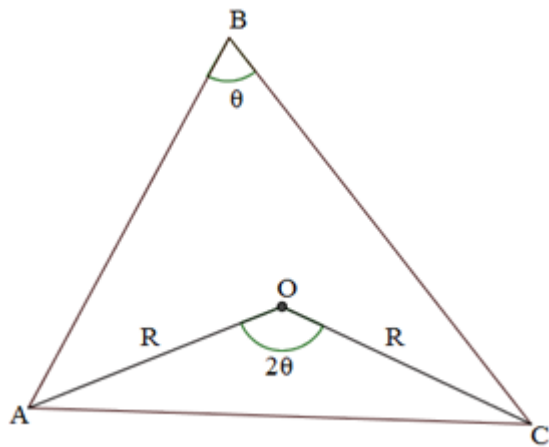
- Em um triângulo ABC, se O é circuncentro de ABC, então  $\widehat{AOC} = 2 \widehat{ABC}$ , conforme exposta na figura 6.15.

- Em contra partida, no triângulo ABC, se  $\overline{AO} \equiv \overline{OC}$  e  $\angle AOC = 2 \angle ABC$ ,  
O é circuncentro do triângulo ABC.

- Em um triângulo ABC, se O é circuncentro do  $\Delta ABC$  e  $OM \perp AC$ , então  $\widehat{MOC} = \widehat{ABC}$  ( figura 6.16).

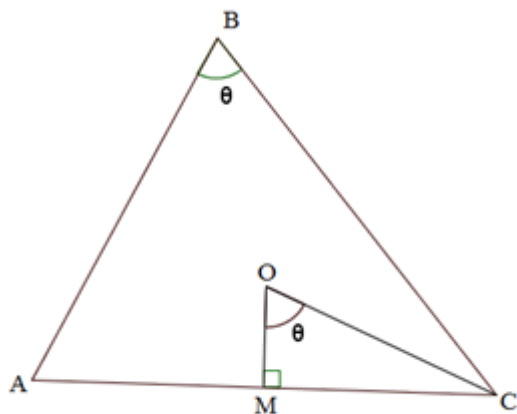
- Em um triângulo ABC, se  $OM \perp AC$ ,  $AM = MC$  e  $\angle MOC = \angle ABC$ , então O é circuncentro do  $\Delta ABC$ .

Figura 6.15 – Propriedade do circuncentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.16 – Propriedade do circuncentro



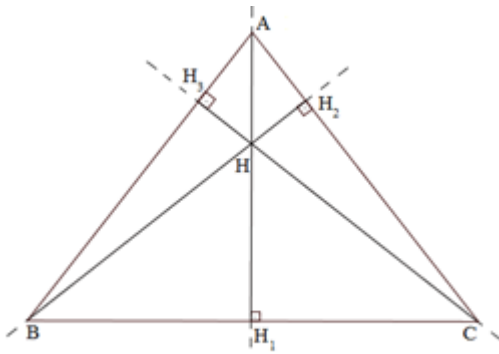
Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.2.5 Ortocentro

As três retas suportes das alturas de um triângulo interceptam-se num mesmo ponto.

De acordo com a figura 6.17, considere o  $\Delta ABC$  de alturas  $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$ ,  $\overline{CH_3}$

Figura 6.17 – Ortocentro “H”



Fonte: Elaborada pelo autor

Hipótese

$\overleftrightarrow{AH_1}$ ,  $\overleftrightarrow{BH_2}$ ,  $\overleftrightarrow{CH_3}$  retas que contém as alturas  $\Rightarrow$

Tese

$\overleftrightarrow{AH_1} \cap \overleftrightarrow{BH_2} \cap \overleftrightarrow{CH_3} = \{ H \}$ .

Demonstração:

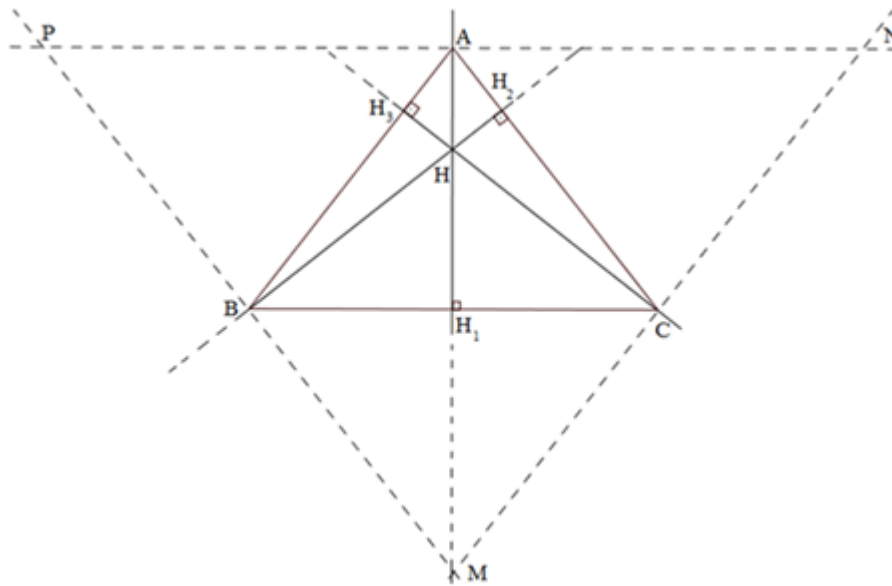
Na figura 6.18, dos vértices A, B e C do triângulo conduzimos retas paralelas aos lados opostos, obtendo o triângulo MNP.

$A \in \overline{NP}$  e  $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$

$B \in \overline{MP}$  e  $\overline{MP} \parallel \overline{AC}$

$C \in \overline{MN}$  e  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$

Figura 6.18 – Demonstração ortocentro



Fonte: Elaborada pelo autor

$$\left. \begin{array}{l} APBC \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AP} \equiv \overline{BC} \\ ABCN \text{ é paralelogramo} \Rightarrow \overline{AN} \equiv \overline{BC} \end{array} \right\} \Rightarrow A \text{ é ponto médio de } \overline{NP} \quad (1)$$

$$(\overrightarrow{AH_1} \perp \overline{BC}, \overline{NP} \parallel \overline{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{AH_1} \text{ é perpendicular a } \overline{NP} \quad (2)$$

De (1) e (2) vem que a reta  $\overrightarrow{AH_1}$  é mediatriz de  $\overline{NP}$ .

Analogamente

$\overrightarrow{BH_2}$  é mediatriz de  $\overline{MP}$ .

$\overrightarrow{CH_3}$  é mediatriz de  $\overline{MN}$ .

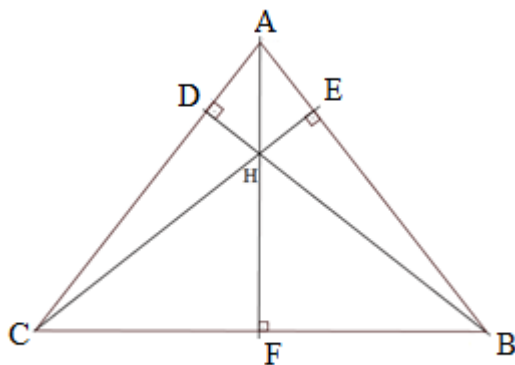
Assim, as mediatrizes  $\overrightarrow{AH_1}$ ,  $\overrightarrow{BH_2}$  e  $\overrightarrow{CH_3}$  dos lados do triângulo MNP interceptam-se num ponto H. Ou seja,  $\overrightarrow{AH_1} \cap \overrightarrow{BH_2} \cap \overrightarrow{CH_3} = \{ H \}$ .

### **Demonstração pelo Teorema de Ceva:**

Seja a figura 6.19:



Figura 6.19 – Teorema de Ceva: Alturas



Fonte: Elaborada pelo autor

Pelo Teorema de Ceva,  $\overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD} = \overline{DA} \times \overline{EB} \times \overline{FC}$

Verifica-se a semelhança dos triângulos:

I:  $\triangle AEC \sim \triangle ADB$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \Rightarrow \overline{AE} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CE}}{\overline{DB}}$$

II:  $\triangle BEC \sim \triangle AFB$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{FB} = \frac{\overline{AF} \times \overline{BE}}{\overline{CE}}$$

III:  $\triangle CFA \sim \triangle CDB$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{DB} \times \overline{CF}}{\overline{AF}}$$

$$\text{Realizando os produtos: } \overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CE}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{AF} \times \overline{BE}}{\overline{CE}} \times \frac{\overline{DB} \times \overline{CF}}{\overline{AF}}$$

Logo,  $\overline{AE} \times \overline{BF} \times \overline{CD} = \overline{DA} \times \overline{EB} \times \overline{FC}$ , c.q.d.

Definição:

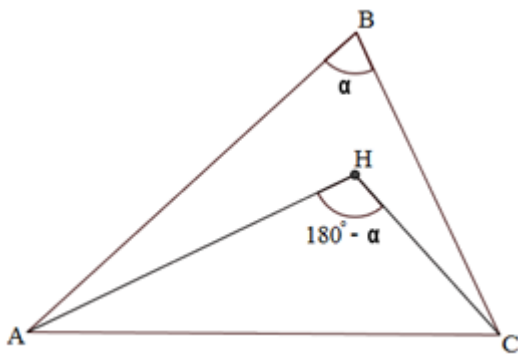
O ponto de encontro das retas suportes das alturas de um triângulo é denominado ortocentro do triângulo.

### 6.2.5.1 Propriedades do Ortocentro

#### 6.2.5.1.1 Propriedade I

No  $\Delta ABC$  da figura 6.20, H é o seu ortocentro. Então  $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$

Figura 6.20 – Propriedade do ortocentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

Na figura 6.21, z é ângulo externo dos triângulos ADH e EHC.

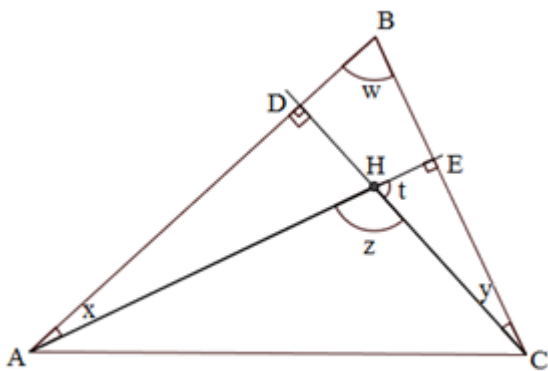
Assim,  $z = 90^\circ + x$ , e  $z = 90^\circ + y$ . Logo,  $90^\circ + x = 90^\circ + y$ ,  $x = y$ .

No  $\Delta ABE$ ,  $w + x = 90^\circ$ . No  $\Delta EHC$ ,  $t + y = 90^\circ \Rightarrow t + x = 90^\circ$

Portanto,  $w + x = t + x \Rightarrow w = t$ .

Desta forma,  $z + t = 180^\circ \Rightarrow z + w = 180^\circ \Rightarrow z = 180^\circ - w$

Figura 6.21 - Demonstração



Fonte: Elaborada pelo autor

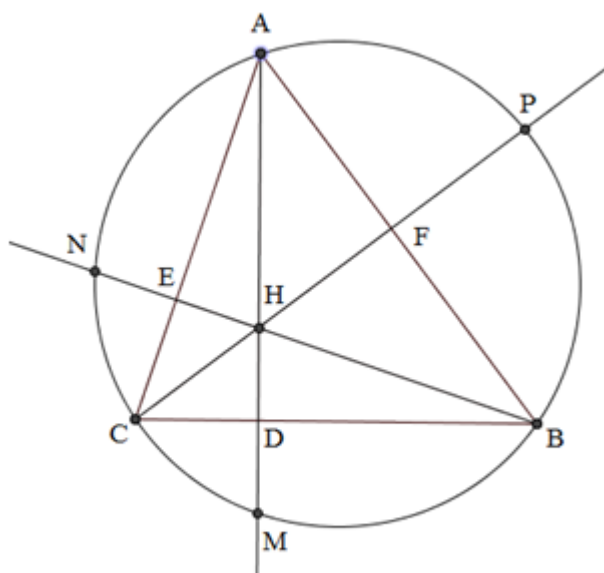
## 6.2.5.1.2 Propriedade II

O simétrico do ortocentro em relação a um lado pertence à circunferência circunscrita.

**1 - Triângulo acutângulo**

Seja um triângulo ABC inscrito em uma circunferência. Traçando as alturas a partir dos vértices, encontramos o ortocentro H. As retas suportes das alturas interceptam a circunferência em M, N e P, respectivamente (figura 6.22).

Figura 6.22 – Ortocentro no triângulo acutângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

**Proposição**

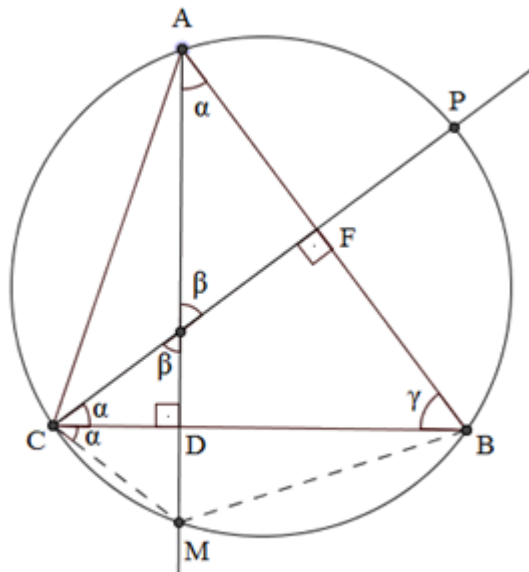
$DH = DM$ ,  $EH = EN$  e  $FH = FP$ .

Demonstração:

Na figura 6.23, se  $\widehat{DAB} = \alpha$  e  $\widehat{ABC} = \gamma$ , então  $\alpha$  e  $\gamma$  são complementares e  $\widehat{FCB} = 90^\circ - \gamma$ , pois o  $\triangle FCB$  é retângulo. E como  $\widehat{DAB}$  e  $\widehat{MCB}$  são ângulos inscritos relativos ao arco BM,  $\widehat{MCB} = \alpha$ .

Desta forma,  $\triangle CHD$  e  $\triangle MCD$  são congruentes, pelo caso ALA, e, assim,  $DH = MD$ , como queríamos demonstrar. Análogo aos outros lados, está provada a proposição.

Figura 6.23 - Demonstração



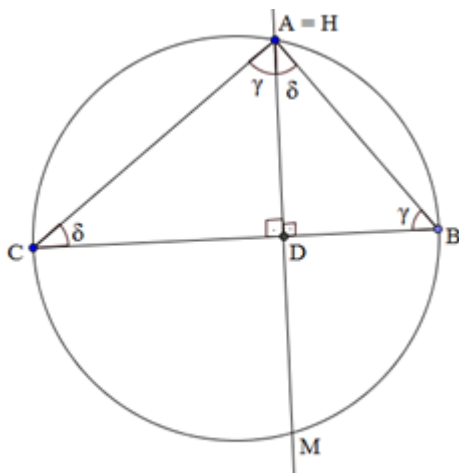
Fonte: Elaborada pelo autor

## 2 – Triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, o vértice do ângulo reto é igual ao ortocentro.

Na figura 6.24, se  $\angle ABC = \gamma$  e  $\angle ACB = \delta$ , então  $\angle BAM = \angle ACB = \delta$ . Temos que  $\angle ACB$  e  $\angle BMA$  são congruentes, pois são inscritos ao mesmo arco  $AB$ , assim,  $\angle BMA = \delta$ . Desta forma,  $\triangle ABD$  e  $\triangle MBD$  são congruentes, portanto,  $DM = DA$ .

Figura 6.24 – Ortocentro no triângulo retângulo



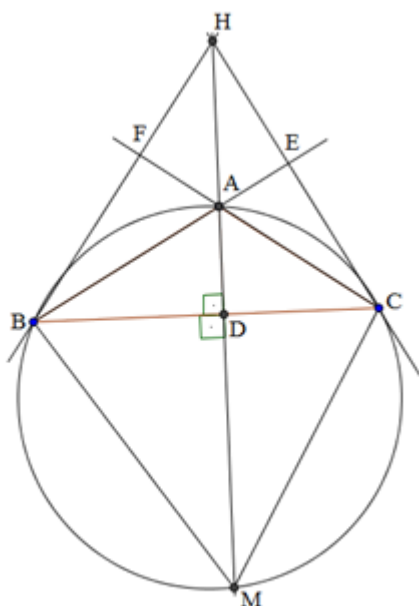
Fonte: Elaborada pelo autor

### 3 – Triângulo obtusângulo

Na figura 6.25, se  $ABC = \gamma$ , então  $DAB = 90^\circ - \gamma = HAE$ , e, como  $AHE$  é o complemento de  $HAE$ , então  $AHE = 90^\circ - (90^\circ - \gamma) = \gamma$ .

Temos também que  $AMC = ABC$ , pois são inscritos ao mesmo arco  $AC$ . Assim, os triângulos retângulos  $CDH$  e  $CDM$  são congruentes, implicando  $DH = DM$ .

Figura 6.25 – Ortocentro no triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6 Pontos Notáveis Especiais

Os pontos notáveis vistos anteriormente são os “clássicos, tradicionais”, conhecidos desde o oitavo ano do ensino fundamental. Até os dias atuais, os amantes da matemática ficam surpresos com o descobrimento de novos pontos notáveis de triângulos e de polígonos em geral. Poderíamos mencionar diversos novos pontos, retas ou figuras notáveis que desconhecíamos nas figuras mais simples.

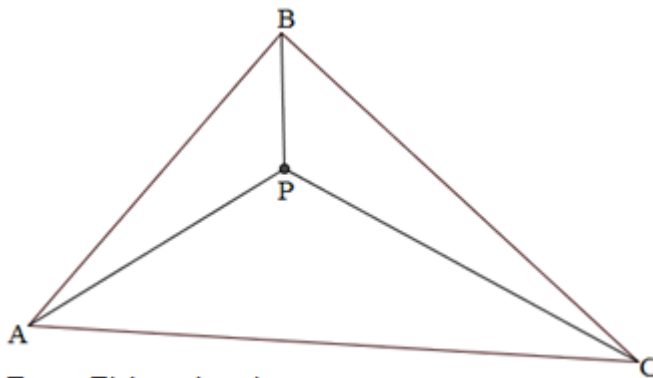
A seguir serão mostrados pontos, retas e triângulos notáveis utilizados para a resolução de diversos problemas de geometria.

### 6.2.6.1 Ponto de Fermat

É o ponto da região interna do triângulo onde a soma das distâncias aos vértices é mínima.

Se P é ponto de Fermat, então  $PA + PB + PC$  é mínima, conforme visto na figura 6.26.

Figura 6.26 – Ponto de Fermat



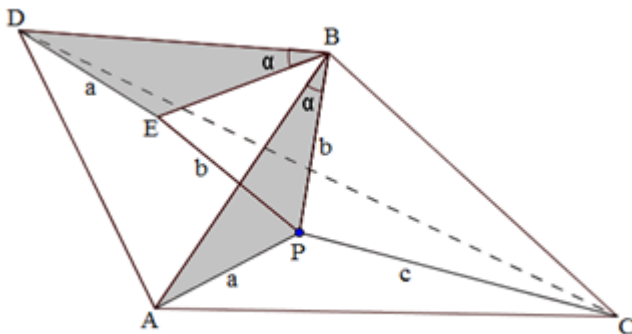
Fonte: Elaborada pelo autor

#### Demonstração

Na figura 6.27, P é um ponto da região interna do triângulo ABC. Escolhe-se um lado qualquer do triângulo e a partir deste, constrói-se um triângulo equilátero ABD, e em seu interior inserir o ponto E, tal que  $\Delta PBE$  é equilátero.

Conforme mostra a figura,  $DE + EP + PC = PA + PB + PC$ .

Figura 6.27 - Demonstração

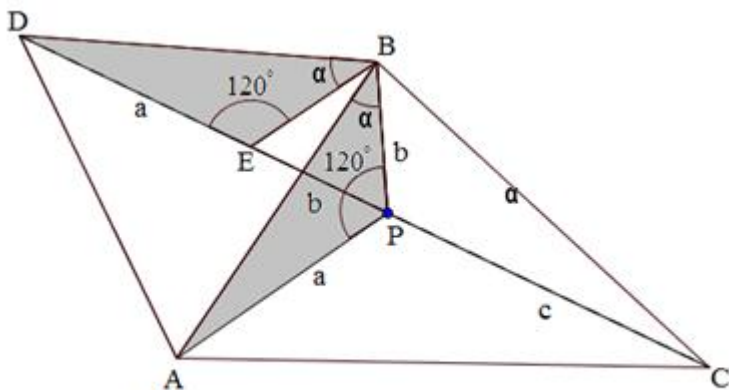


Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura, o percurso será mínimo se os pontos D, E, P e C forem colineares.

Desta forma, quando estes pontos estão alinhados,  $m\angle BPC = 120^\circ$ , e como os triângulos APB e DEB são congruentes (LAL),  $m\angle BED = m\angle BPA = 120^\circ$  (figura 6.28).

Figura 6.28 - Demonstração



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, o ponto de Fermat observa cada lado do triângulo sob um ângulo de  $120^\circ$ .

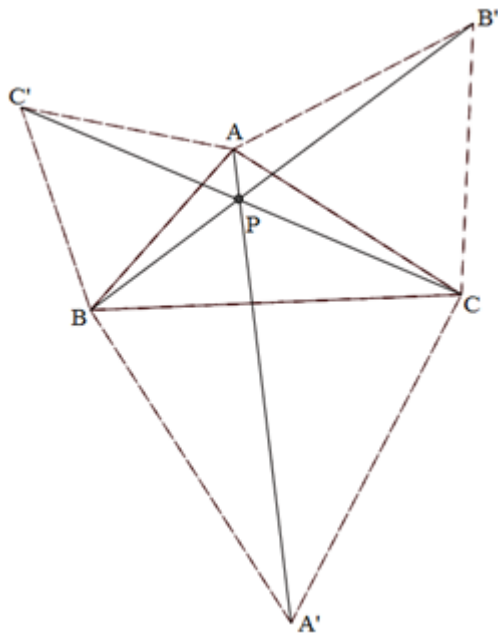
Este ponto também é conhecido como **ponto de Torricelli**.

Assim temos o seguinte problema, conhecido como **problema de Fermat**:

Num triângulo agudo ABC, localize um ponto P cujas distâncias a A, B e C têm a menor soma possível.

Se triângulos equiláteros  $BCA'$ ,  $CAB'$  e  $ABC'$  são construídos externamente a partir dos lados do triângulo ABC, os segmentos  $AA'$ ,  $BB'$  e  $CC'$  são congruentes, concorrentes em P e formam  $60^\circ$  um com o outro (figura 6.29).

Figura 6.29 – Ponto de Fermat

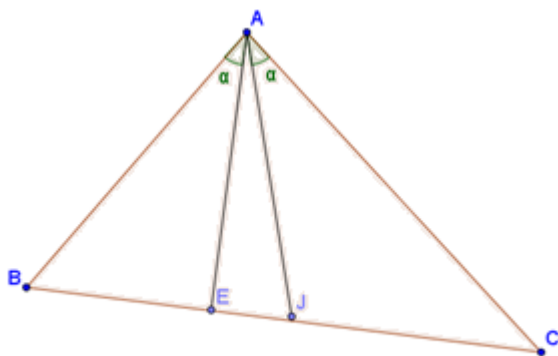


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6.2 Cevianas Isogonais

São cevianas traçadas de um vértice que formam ângulos de igual medida com os lados do triângulo (figura 6.30).

Figura 6.30 – Cevianas isogonais



Em ABC: AE e AJ são isogonais do triângulo em relação ao vértice A.  
AE é isogonal de AJ e vice-versa.

Fonte: Elaborada pelo autor

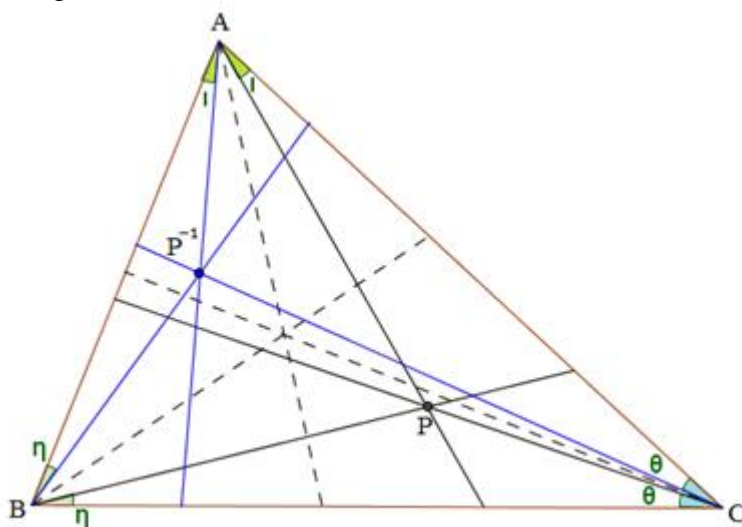


### 6.2.6.2.1 Teorema de Mathieu

As isogonais de três cevianas concorrentes de um triângulo também são concorrentes.

Dado um triângulo ABC, o conjugado isogonal em relação a ABC de um ponto P no interior de ABC é obtido ao refletir as retas PA, PB e PC em relação às bissetrizes internas de ABC. Essas retas isogonais são concorrentes no ponto  $P^{-1}$ , isogonal de P (figura 6.31).

Figura 6.31 – Teorema de Malthieu



Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.31, as bissetrizes internas do triângulo ABC são representadas pelos segmentos pontilhados. Os segmentos azuis representam as reflexões de PA, PB e PC sobre as bissetrizes.

A explicação de os segmentos azuis serem concorrentes decorre do Teorema de Ceva, a de que existem cevianas concorrentes num único ponto, o ponto P. Como as cevianas originadas da reflexão das cevianas concorrentes em P formam o mesmo ângulo que estas cevianas, mas em sentido contrário, haverá o ponto de interseção  $P^{-1}$ , isogonal de P.

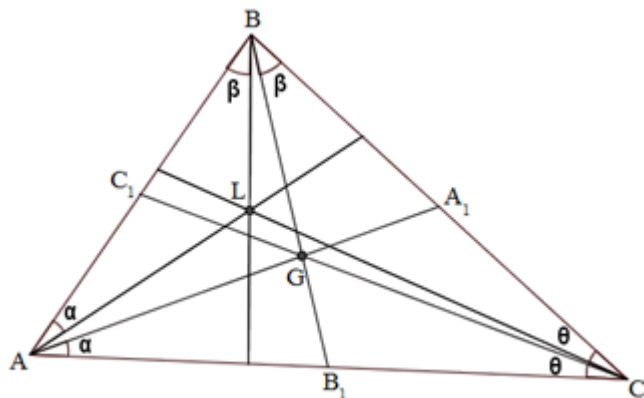
### 6.2.6.2.2 Simedianas

Os segmentos isogonais das medianas de um triângulo são denominados Simedianas.

### 6.2.6.3 Ponto de Lemoine

É a interseção das simedianas de um triângulo. Na figura 6.32, é representado pelo ponto L.

Figura 6.32 – Ponto de Lemoine (L)

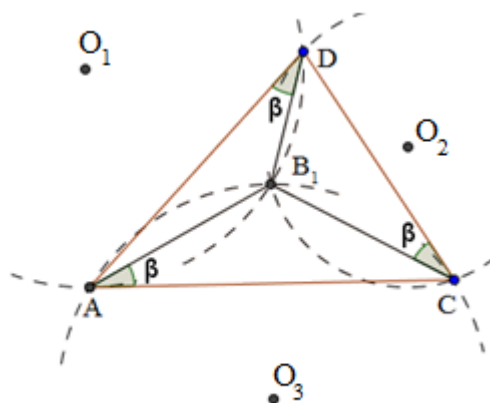


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.2.6.4 Ponto de Brocard

É o ponto da região interna do triângulo que ao ser ligado com seus vértices, forma ângulos congruentes com cada um de seus lados, no sentido positivo (anti horário) ou no sentido negativo (horário).

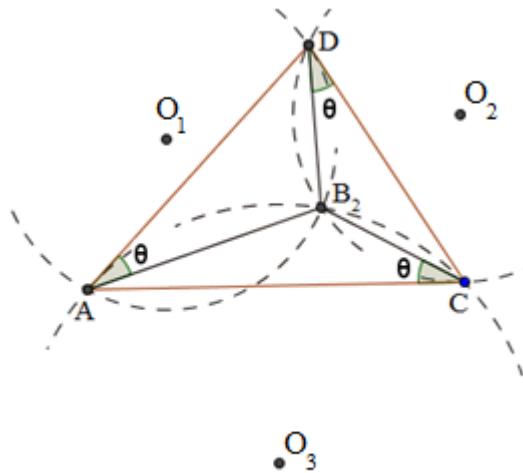
Figura 6.33 – Ponto de Brocard ( $B_1$ )



Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.33, é construído um dos pontos de Brocard.

Figura 6.34 – Ponto de Brocard ( $B_2$ )

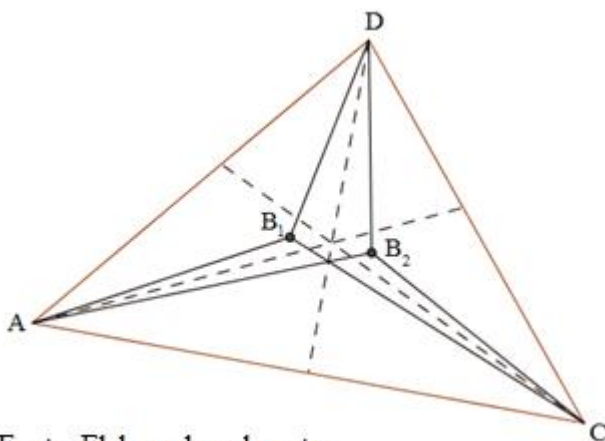


Fonte: Elaborada pelo autor

Pode-se verificar que as cevianas que contêm os pontos de Brocard de um triângulo acutângulo são isogonais entre si, conforme mostrada na figura 6.34.

Na figura 6.35, as linhas pontilhadas são as bissetrizes dos ângulos internos do  $\Delta ACD$ .  $B_1$  e  $B_2$  são os pontos de Brocard.

Figura 6.35 – Pontos de Brocard

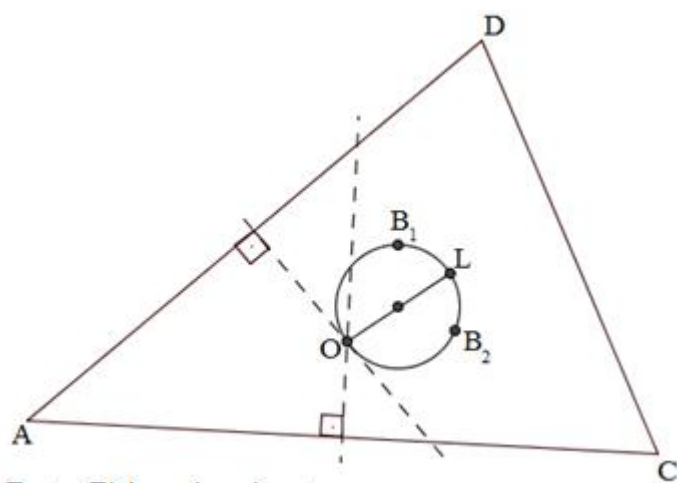


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6.4.1 Circunferência de Brocard

É a circunferência que contém os dois pontos de Brocard, o Ponto de Lemoine e o circuncentro de um triângulo, onde o segmento que tem como extremidades o ponto de Lemoine e o ortocentro é igual ao diâmetro desta circunferência. Na figura 6.36, temos que  $O$  é o circuncentro,  $B_1$  e  $B_2$  são os pontos de Brocard,  $L$  é o ponto de Lemoine.

Figura 6.36 – Circunferência de Brocard

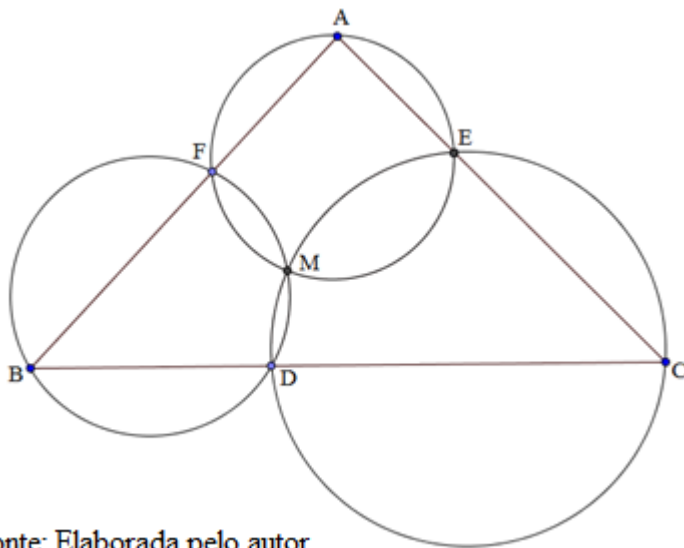


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6.5 Ponto de Miquel

Seja  $ABC$  um triângulo e  $D, E, F$  pontos sobre as retas  $BC, CA, AB$ , respectivamente. As circunferências que passam por  $AEF, BFD$  e  $CDE$  têm um ponto em comum, denominado Ponto de Miquel (figura 6.37).

Figura 6.37 – Ponto de Miquel (M)



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

Seja M uma das interseções das circunferências que contém AEF e BFD.

Assim,  $\angle CDM = \angle BFM = \angle AEM = 180^\circ - \angle CEM$ .

#### 6.2.6.6 Ponto de Gergonne

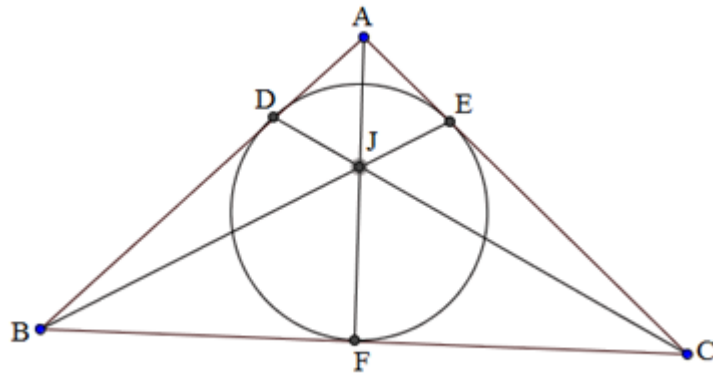
É o ponto de encontro das cevianas de Gergonne de um triângulo.

##### 6.2.6.6.1 Ceviana de Gergonne

É a ceviana que une um vértice com o ponto de tangência da circunferência inscrita.

Na figura 6.38, AF, BE e CD são as cevianas de Gergonne, J é o ponto de Gergonne.

Figura 6.38 – Ponto de Gergonne (J)

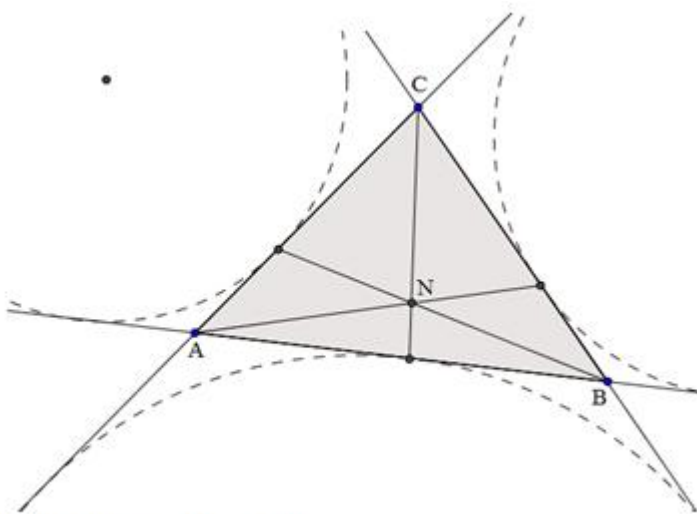


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6.7 Ponto de Nagel

É o encontro das cevianas de Nagel, cevianas cujos pés são os pontos de tangência da circunferência exinscritas com seu relativo lado (figura 6.39).

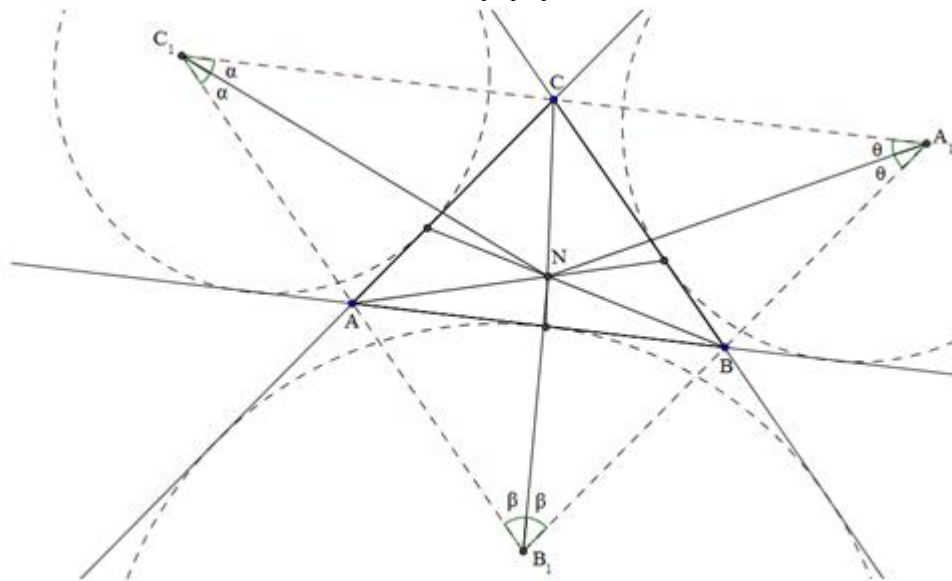
Figura 6.39 – Ponto de Nagel (N)



Fonte: Elaborada pelo autor

O ponto de Nagel é o incentro de seu triângulo antimedial ( $A_1B_1C_1$ ), como mostra a figura 6.40.

Figura 6.40 – Incentro do triângulo  $A_1B_1C_1$

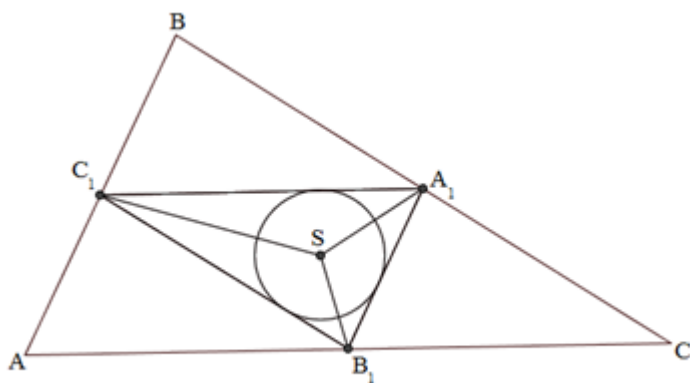


Fonte: Elaborada pelo autor

#### 6.2.6.8 Ponto de Spieker

É o centro da circunferência inscrita no triângulo mediano de um triângulo.

Figura 6.41 – Ponto de Spieker (S)



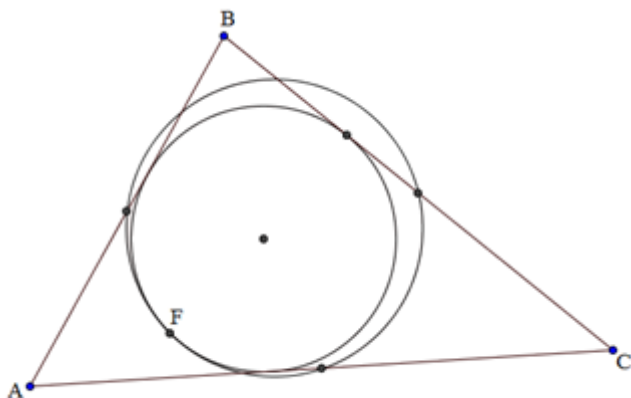
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 6.41, S é o ponto de Spieker do triângulo ABC.

### 6.2.6.9 Ponto de Feuerbach

É o ponto de interseção entre a circunferência inscrita e a circunferência dos nove pontos de um triângulo (figura 6.42).

Figura 6.42 – Ponto de Feuerbach (F)

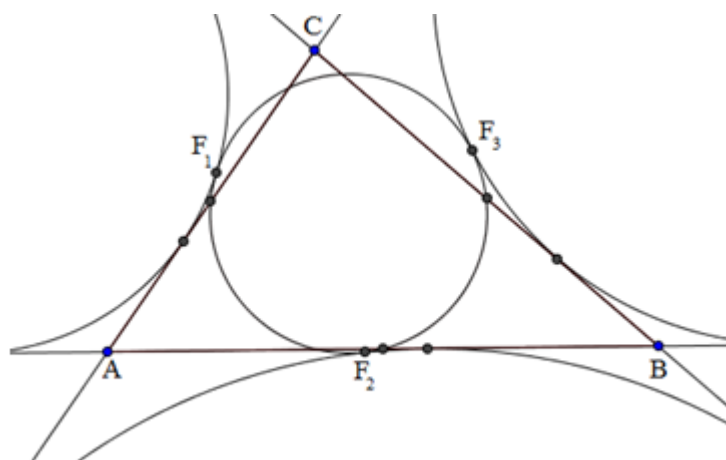


Fonte: Elaborada pelo autor

Alguns matemáticos consideram o ponto de Feuerbach como o centro da circunferência dos nove pontos de um triângulo.

Por extensão, os pontos de Feuerbach também são conhecidos como os três pontos de tangência entre a circunferência dos nove pontos e as circunferências exinscritas de um triângulo, conforme mostra a figura 6.43.

Figura 6.43 – Pontos de Feuerbach



Fonte: Elaborada pelo autor

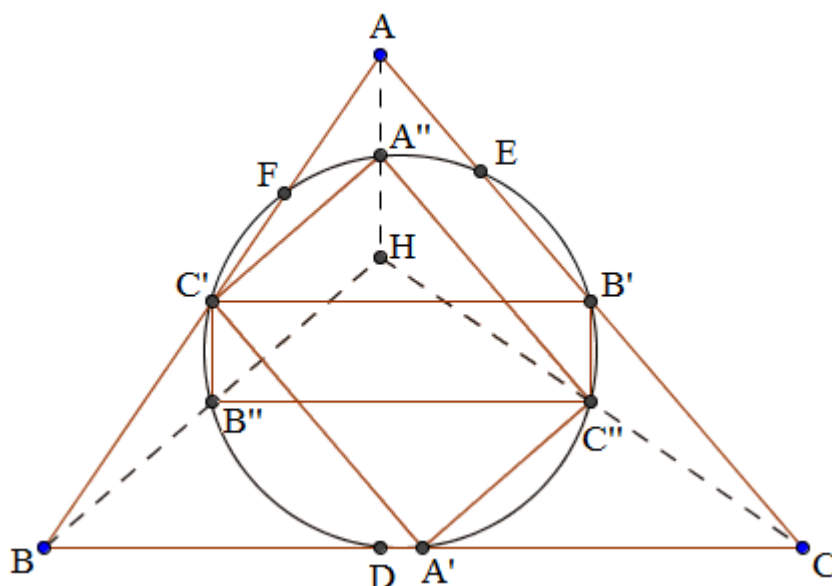


## 6.2.6.9.1 Circunferência dos Nove Pontos

Os pés das alturas formam o triângulo órtico de  $ABC$ . A circunferência circunscrita ao triângulo órtico é conhecida como a **Circunferência dos Nove Pontos**, ou circunferência de Feuerbach, do triângulo original  $ABC$ , porque ela contém não somente os pés das três alturas, mas também seis outros pontos significantes.

Prop 1- Os pontos médios dos três lados, os pontos médios dos segmentos que ligam os vértices ao ortocentro, e os pés das três alturas, todos pertencem a esta especial circunferência.

Figura 6.44 – Circunferência dos nove pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

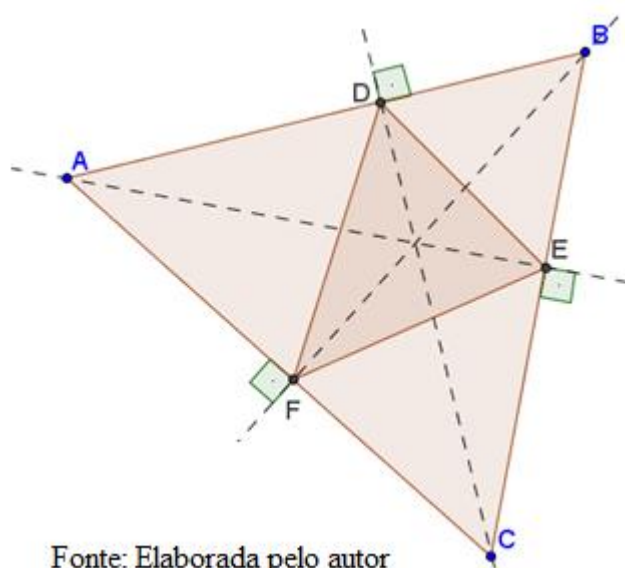
Na figura 6.44, seja  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$  os pontos médios de  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ ,  $HA$ ,  $HB$ ,  $HC$ , e seja  $D$ ,  $E$ ,  $F$  os pés das alturas, conforme mostra a figura X. Por Euclides VI.2 e 4,  $C'B'$  e  $B''C''$  são paralelos a  $BC$  enquanto  $B'C''$  e  $C'B''$  são paralelos a  $AH$ . Como  $AH$  é perpendicular a  $BC$ , resulta que  $B'C'B''C''$  é um retângulo. Analogamente,  $C'A'C''A''$  é um retângulo. Assim,  $A'A''$ ,  $B'B''$ ,  $C'C''$  são três diâmetros de uma circunferência. Uma vez que estes diâmetros formam ângulos retos com  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , respectivamente, a mesma circunferência passa por esses pontos também.

## 6.3 Triângulos notáveis

### 6.3.1 Triângulo órtico

Triângulo órtico é aquele cujos vértices são os pés da altura traçada de um triângulo qualquer (figura 6.45).

Figura 6.45 – Triângulo órtico (DEF)



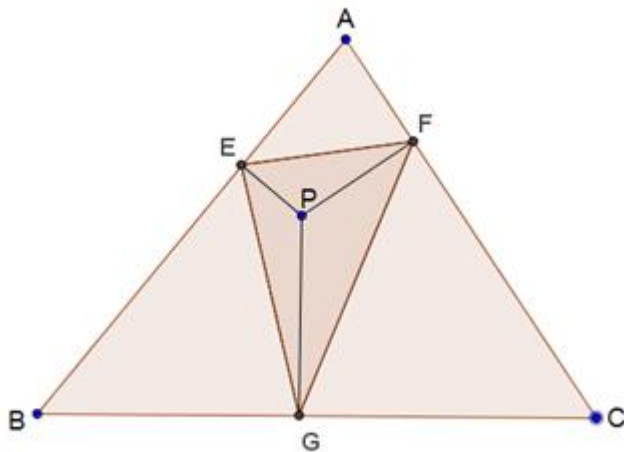
Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.3.2 Triângulo pedal

Seja P, na figura 6.46, um ponto no plano do triângulo ABC e E, F e G as projeções de P sobre os lados AB, AC e BC. O triângulo EFG é o triângulo pedal de P em relação ao triângulo ABC.

O triângulo órtico é um caso particular de triângulo pedal.

Figura 6.46 – Triângulo pedal (EFG)

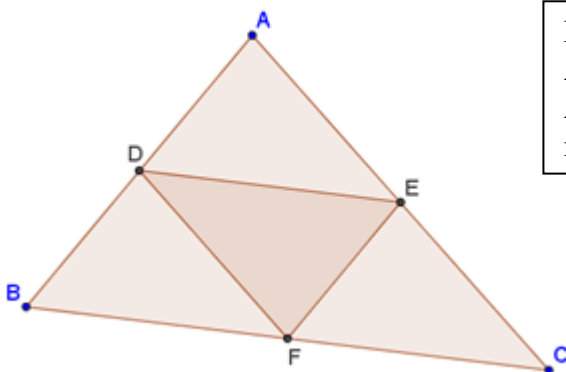


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.3.3 Triângulo mediano

É o triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados de um triângulo.

Figura 6.47 – Triângulo mediano (DEF)

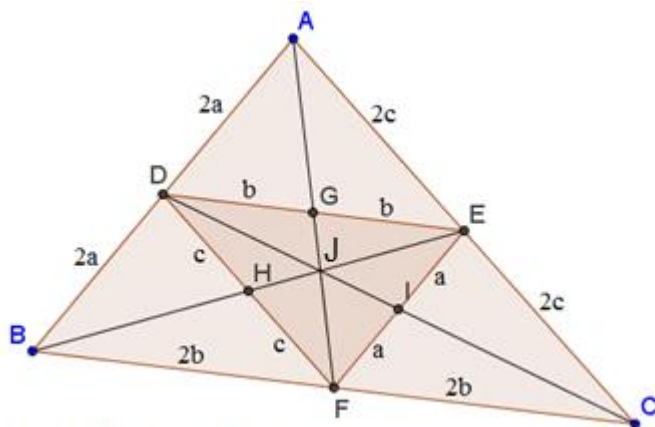


D, E e F são pontos médios de AB, AC e BC, respectivamente. Assim, o triângulo DEF é mediano de ABC.

Fonte: Elaborada pelo autor

O baricentro do triângulo mediano DEF da figura 6.47 é o mesmo do triângulo a que ele é relacionado, como mostrado na figura 6.48.

Figura 6.48 – Baricentro do triângulo mediano (J)

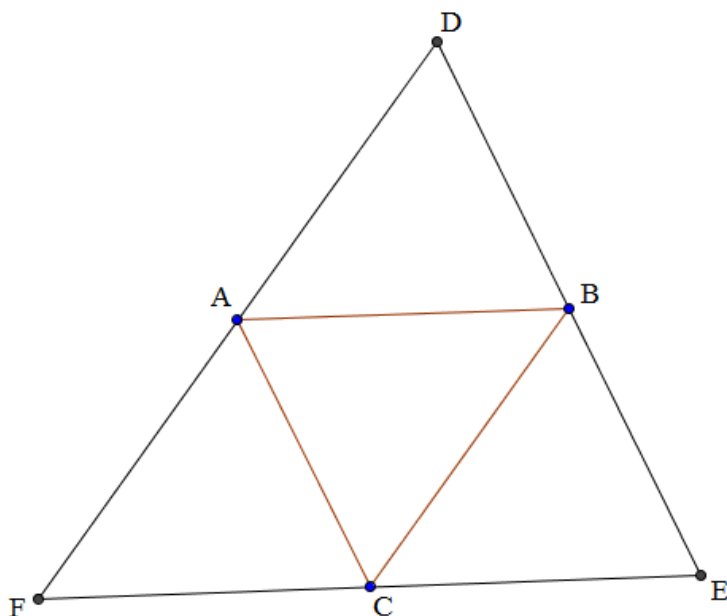


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.3.4 Triângulo anti mediano

É o triângulo cujos vértices são interseções de retas paralelas aos lados de um triângulo, que passam pelo vértice do triângulo original. Na figura 6.49, o triângulo DEF é antimedianiano do triângulo ABC.

Figura 6.49 – Triângulo antimedianiano

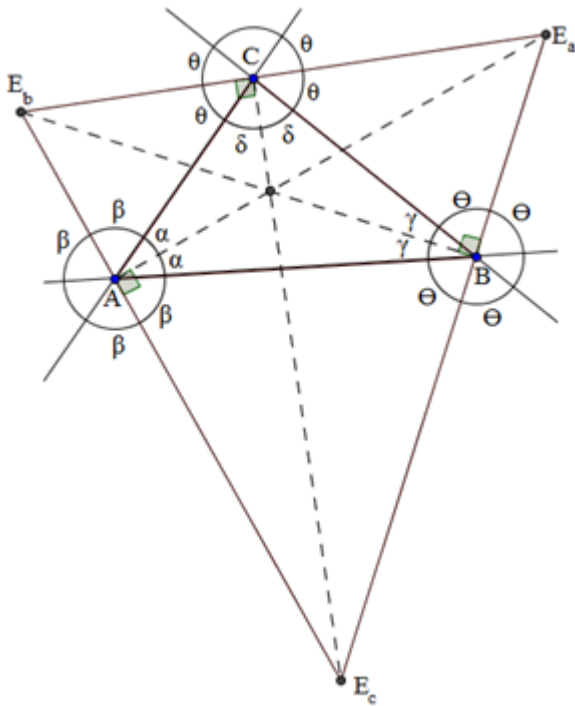


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.3.5 Triângulo ex-incentral

É o triângulo cujos vértices são os ex-incentros de um triângulo.

Figura 6.50 – Triângulo ex-incentral  $E_a E_b E_c$



Fonte: Elaborada pelo autor

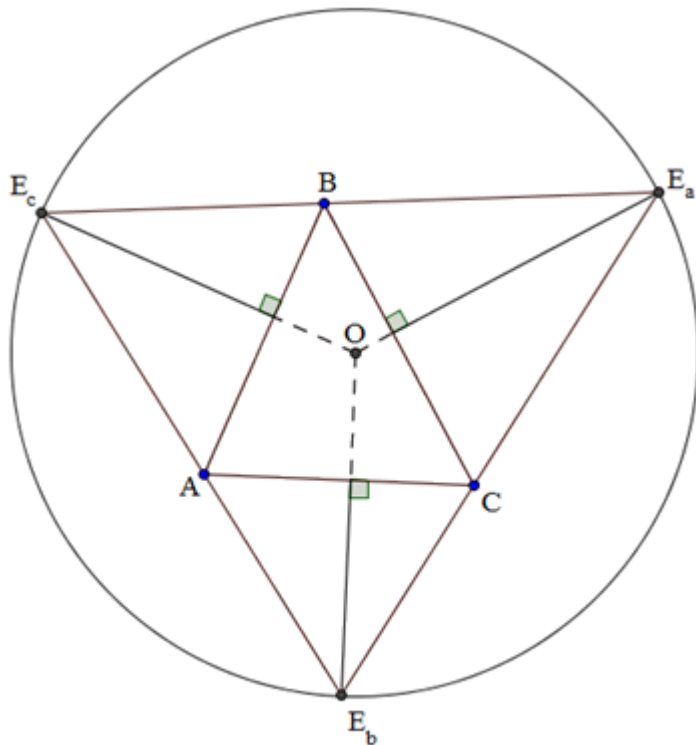
Pela figura 6.50, notam-se claramente os teoremas 1 e 2:

Teorema 1: O incentro de um triângulo é igual ao ortocentro de seu triângulo exincentral.

Teorema 2: Todo triângulo é triângulo órtico de seu triângulo exincentral.

Teorema 3: As perpendiculares traçadas dos exincentros de um triângulo ABC aos seus lados são concorrentes, e este ponto de interseção é igual ao circuncentro do triângulo exincentral de ABC, conforme mostrado na figura 6.51.

Figura 6.51 – Teorema 3



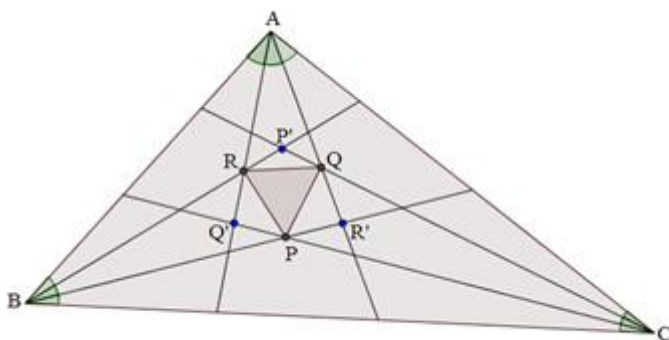
Fonte: Elaborada pelo autor

## 6.4 Teoremas

### 6.4.1 Teorema de Morley

As retas que trisectam os ângulos internos de um triângulo se intersectam dois a dois em pontos que são vértices de um triângulo equilátero.

Figura 6.52 – Teorema de Morley



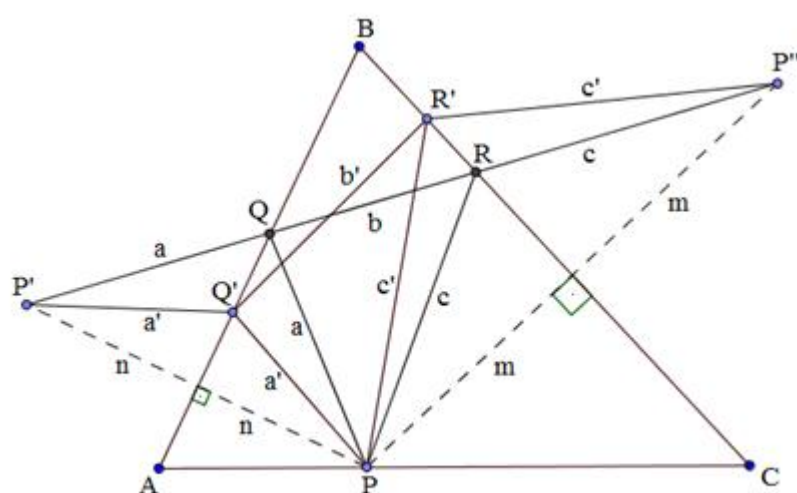
Fonte: Elaborada pelo autor

Em outras palavras, qualquer triângulo ABC determina um triângulo equilátero PQR se os ângulos A, B e C são trisectados por AQ e AR, BR e BP, CP e CQ, como exposto na figura 6.52.

### 6.4.2 Teorema de Fagnano

O triângulo órtico é o triângulo de menor perímetro que se pode inscrever em um triângulo acutângulo.

Figura 6.53 – Demonstração do teorema de Fagnano



Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração:

Na figura 6.53, seja P um ponto qualquer de um dos lados do triângulo ABC, nos outros dois lados coloca-se os pontos Q' e R', formando o triângulo PQ'R' cujo perímetro é  $a' + b' + c'$ .

Sejam P' e P'' pontos simétricos de P em relação a AB e BC, respectivamente. Logo  $P'Q' = PQ' = a'$  e  $P''R' = PR' = c'$ , então  $P'Q' + Q'R' + R'P''$  é igual ao perímetro do triângulo PQ'R'.

Esta distância será menor se seus pontos forem colineares; logo conclui-se que a interseção de Q e R nos lados AB e BC se encontram na interseção da reta PP' com os lados AB e BC.

Do teorema da mediatriz  $BP' = BP$  e  $BP'' = BP$ , também  $\angle P'BP'' = 2\angle ABC$ . Como a medida do ângulo ABC é constante, então P'P'' se minimiza quando BP é mínimo.

Sabe-se que a ceviana de menor comprimento é a altura, assim, quando P é o pé da altura traçada de B, o triângulo PQR construído com os simétricos de P em relação a AB e BC será o de menor perímetro.

Por analogia, pode-se concluir que se P é o pé da altura traçada de B, Q e R devem ser os pés das alturas traçadas de C e A, respectivamente.

Mas o triângulo que resulta de unir os pés das alturas é o triângulo órtico, sendo este então o de menor perímetro que se pode inscrever em um triângulo.

## 6.5 Retas notáveis

### 6.5.1 Reta de Euler

L.Euler (1707-1783), matemático e físico suíço que viveu a maior parte de sua vida na Rússia, prestou importantes contribuições para todos os ramos da matemática.

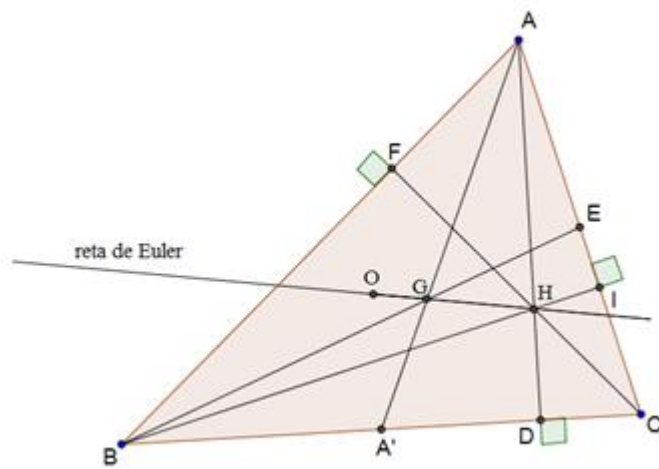
Se o circuncentro O e o baricentro G de um triângulo se coincidem, cada mediana é perpendicular ao lado que ela corta, e o triângulo é equilátero.

De outra forma, na figura 6.54, se um triângulo ABC não é equilátero, seu circuncentro e baricentro se encontram numa única reta OG. Nesta reta, conhecida como reta de Euler, considere um ponto H tal que  $OH = 3OG$ , isto é,  $GH = 2OG$ . Desde também  $GA = 2A'G$ , na segunda metade do Euclides VI.2 nos dizem que AH é paralelo a A'O, que é a perpendicular do BC. Assim AH é perpendicular a BC. Da mesma forma BH é perpendicular a CA, e CH para AB. A reta que passa através de um vértice perpendicular para o lado oposto é a altura. As observações acima mostram que:

As três alturas de qualquer triângulo passam por um ponto na linha de Euler. Este ponto comum H das três alturas é o ortocentro do triângulo.



Figura 6.54 – Reta de Euler

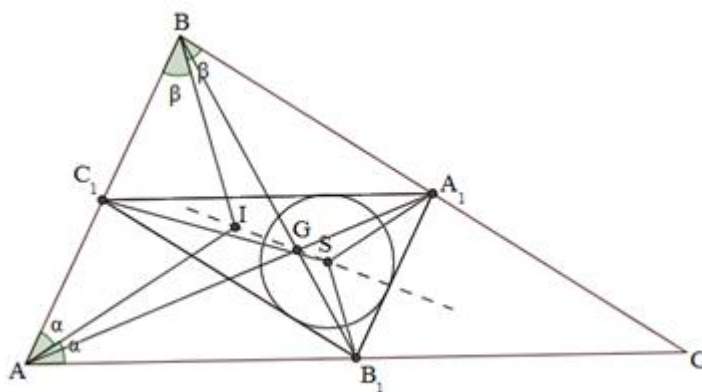


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.5.2 Reta de Spieker

O incentro, baricentro e o ponto de Spieker de um triângulo estão sempre alinhados numa reta, denominada Reta de Spieker (figura 6.55).

Figura 6.55 – Reta de Spieker

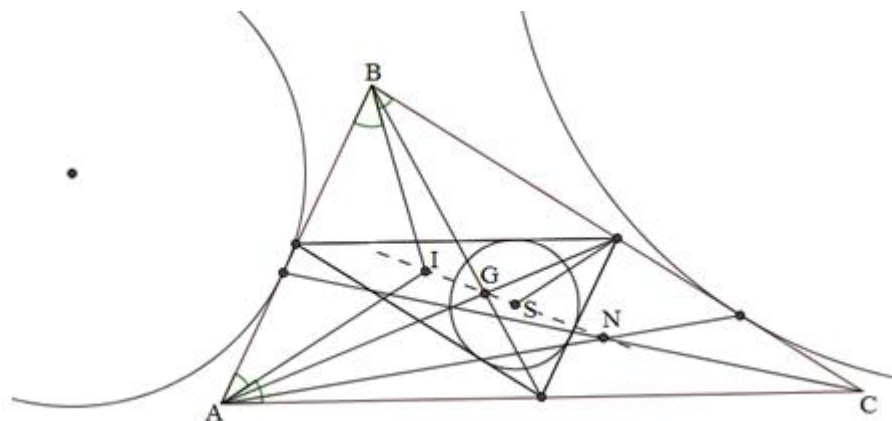


Fonte: Elaborada pelo autor

### 6.5.3 Reta de Housel

Em todo triângulo não equilátero, o incentro, baricentro, ponto de Spieker e ponto de Nagel são colineares. A reta que contém estes pontos é conhecida como reta de Housel (figura 6.56).

Figura 6.56 – Reta de Housel



Fonte: Elaborada pelo autor

## 7 METODOLOGIA DA PESQUISA

O capítulo a seguir mostrará a caracterização da pesquisa realizada; apresentação da coleta de dados e dos objetivos que direcionaram o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso; as características do campo em que foi realizada a pesquisa; a apresentação dos sujeitos da pesquisa e os critérios de seleção destes; e o modo de aplicação da pesquisa em campo.

Com a finalidade de se buscar resultados que mostrem a influência ou não da utilização do *software* GeoGebra como ferramenta pedagógica na aprendizagem de alunos do 8º ano do EF do CMF em geometria/triângulos, o autor decidiu optar por desenvolver uma pesquisa de campo. As técnicas de pesquisa utilizadas foram: observação, diário de bordo, teste e questionário. Com os dados coletados, realizaram-se abordagens quantitativas e qualitativas.

A coleta de dados foi realizada pela observação de atividades realizadas por duas turmas do oitavo ano do EF do CMF, das quais o autor é professor. O *software* Geogebra foi manuseado pelos alunos em uma das turmas. O registro das atividades realizadas nas duas turmas foi realizado em um diário de bordo.

A principal técnica de pesquisa para a coleta de dados foi a aplicação de um teste, realizado no fim dos encontros realizados com as turmas desta pesquisa. Este teste teve como finalidade a verificação de aprendizagem dos assuntos ministrados na semana do dia 24 a 28 de fevereiro por parte dos alunos. Esta avaliação é uma das que compõem a nota bimestral dos alunos.

Ainda na turma que utilizou o *software* Geogebra, foi aplicado um questionário, a fim de verificar a realidade dos alunos sobre manuseio de computadores e a expectativa sobre a utilização do Geogebra.

Através do teste e do questionário, foram realizadas considerações qualitativas e quantitativas, a fim de verificar a aceitação de um programa educativo pelos alunos como ferramenta auxiliar da prática pedagógica.

## 7.1 Campo de Pesquisa

O campo de pesquisa onde foi realizado este trabalho foi o Colégio Militar de Fortaleza (CMF), localizado na cidade de Fortaleza-CE. Este estabelecimento de ensino é uma organização militar do Exército Brasileiro, integrante do Sistema Colégio Militar do Brasil (SCMB), que é subordinado à Diretoria de Educação Preparatória e Assistencial (DEPA), que por sua vez, é subordinada ao Departamento de Educação e Cultura do Exército (DECEX). A DEPA e o DECEX localizam-se na cidade do Rio de Janeiro-RJ.

Figura 7.1 – Colégio Militar de Fortaleza



Fonte: <http://www.eb.mil.br/web/ingresso/conheca-os-12-colegios-militares>

Figura 7.2 – Palácio Duque de Caxias, sede do DECEX e da DEPA, no RJ



Fonte: [oglobo.globo.com/rio/o-amanhecer-nesta-sexta-feira-no-rio-8924468](http://oglobo.globo.com/rio/o-amanhecer-nesta-sexta-feira-no-rio-8924468)

Devidamente autorizado pelo Subdiretor de Ensino do CMF, a pesquisa foi desenvolvida em dois ambientes: laboratório de informática e sala de aula.

O objetivo geral que orienta esta pesquisa é analisar se o uso do *software* educativo GeoGebra, como ferramenta auxiliar da prática pedagógica, proporciona a alunos de 8º ano do EF uma melhor aprendizagem do assunto de triângulos.

O campo de aplicação da pesquisa foi o CMF. Situado na Avenida Santos Dumont, número 485, Aldeota, Fortaleza, Ceará, o CMF é um dos doze estabelecimentos de ensino que formam o Sistema Colégio Militar do Brasil (SCMB). Os demais colégios militares são: Colégio Militar do Rio de Janeiro (CMRJ), no estado do Rio de Janeiro, Colégio Militar de Belo Horizonte (CMBH), em Minas Gerais, Colégio Militar de Juiz de Fora (CMJF), em Minas Gerais, Colégio Militar de Porto Alegre (CMPA), no Rio Grande do Sul, Colégio Militar de Santa Maria (CMSM), no Rio Grande do Sul, Colégio Militar de Brasília (CMB), no Distrito Federal, Colégio Militar de Campo Grande (CMCG), em Mato Grosso do Sul, Colégio Militar de Salvador (CMS), na Bahia, Colégio Militar de Curitiba

(CMC), no Paraná, Colégio Militar de Manaus (CMM), no Amazonas e Colégio Militar de Recife (CMR), em Pernambuco.

## 7.2 Sujeitos da Pesquisa

Os sujeitos pesquisados foram alunos de 8º ano do EF do CMF, no ano de 2014. Em 2014, existem 5 turmas de oitavo ano do EF. O autor é professor de três destas turmas, entretanto, das cinco turmas de 8º ano existentes, pelo conflito de horários, apenas as três das quais o autor é professor ficaram disponíveis. Dessas, foram selecionadas as turmas 801 e 803 a partir de um estudo estatístico realizado com as notas obtidas pelos alunos na 1ª avaliação de Matemática de 2014.

Tabela 1 - Coleta de dados dos grupos, a partir da 1ª VI do 1º bimestre

Turmas	Categoria				
	Média da turma	Desvio Padrão	Nº de alunos com grau acima da média da turma	Nº de alunos com grau abaixo da média da turma	Total de alunos
<b>801</b>	<b>6,7</b>	<b>2,3</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>27</b>
<b>803</b>	<b>6,1</b>	<b>2,4</b>	<b>13</b>	<b>13</b>	<b>26</b>

Fonte: Elaborada pelo autor

Como todos os sujeitos da pesquisa eram menores de idade, suas participações foram autorizadas pelos seus responsáveis, através de um termo de consentimento, assinada pelo autor e responsáveis dos alunos.

O critério de escolha das turmas ocorreu como se segue: a turma que obteve grau de desempenho menor das três turmas, para qual o autor é professor, na primeira avaliação de 2014 (1ª VI - Verificação Imediata), foi contemplada com aulas no laboratório de informática, com os sujeitos da pesquisa manuseando o Geogebra. Esta turma foi nomeada como Grupo A. A turma que obteve melhor grau de desempenho dentre as três turmas, para a qual o autor é professor, assistiu às aulas em sala de aula, sem manusear o Geogebra. Esta turma foi nomeada como Grupo B.

### 7.3 Etapas da Pesquisa

De acordo com as aulas previstas no Plano de Execução Didática (PED) 2014 do CMF, documento que contém todos os assuntos das disciplinas, cada turma teve uma carga horária de cinco tempos para tratar o assunto. Foram três dias de aula, quatro tempos de assuntos ministrados e exercícios e um tempo para a avaliação.

No Colégio Militar de Fortaleza, esta avaliação é denominada Verificação Imediata (VI). Esta avaliação faz parte de um dos graus (notas) que compõem a Avaliação Parcial (AP), que é obtida pela média aritmética das VIs.

Foram disponibilizados, no laboratório de informática, 15 computadores para 28 alunos. Desta forma, foi distribuído um computador para dois alunos. Os alunos em geral, já familiarizados com a utilização de equipamentos de informática em geral, não tiveram problemas em manusear o software. Para o assunto ministrado (triângulos), não foi necessário digitar comandos no Geogebra, utilizou-se apenas a barra de ferramentas, o que tornou bastante prático o manuseio do computador por parte dos alunos.

#### 7.3.1 Atividades realizadas com os grupos

Proposta das aulas com os grupos A e B:

De acordo com o PED 2014 do CMF, na semana em que os alunos aprenderam o assunto triângulos, cinco descritores (assuntos) foram apresentados:

D97 – Definir triângulo e identificar seus elementos;

D98 – Classificar um triângulo quanto aos lados;

D99 - Classificar um triângulo quanto aos ângulos;

D100 – Verificar quando é possível construir um triângulo por meio da desigualdade triangular;

D101 – Identificar as cevianas notáveis de um triângulo.



### 7.3.1.1 Atividades com o grupo A

A seguir, as atividades no laboratório de informática com o grupo A:

Aula 1:

Duração da aula: 90 minutos (2 tempos de 45 minutos).

Descritores:

D97 – Definir triângulo e identificar seus elementos;

D98 – Classificar um triângulo quanto aos lados;

D99 - Classificar um triângulo quanto aos ângulos;

D100 – Verificar quando é possível construir um triângulo por meio da desigualdade triangular.

Neste primeiro dia de aula no laboratório de informática, o professor apresentou o software Geogebra para os alunos. Este software foi instalado em todos os computadores disponibilizados para os discentes. Através de demonstrações exibidas na tela projetada pelo conjunto notebook-projetor, o professor iniciou a aula ensinando aos alunos como manusear o Geogebra. Inicialmente, mostrou cada ferramenta da barra de ferramentas. Em seguida, mostrou a Janela de Visualização, onde serão executados os desenhos geométricos e os exercícios. E então mostrou a opção “arquivo” da barra de menu.

D97 – Definir triângulo e identificar seus elementos:

Para este descritor, um exercício simples foi proposto aos alunos: construir um triângulo. O professor explicou que há várias formas de construí-lo. Foram mostradas duas delas.

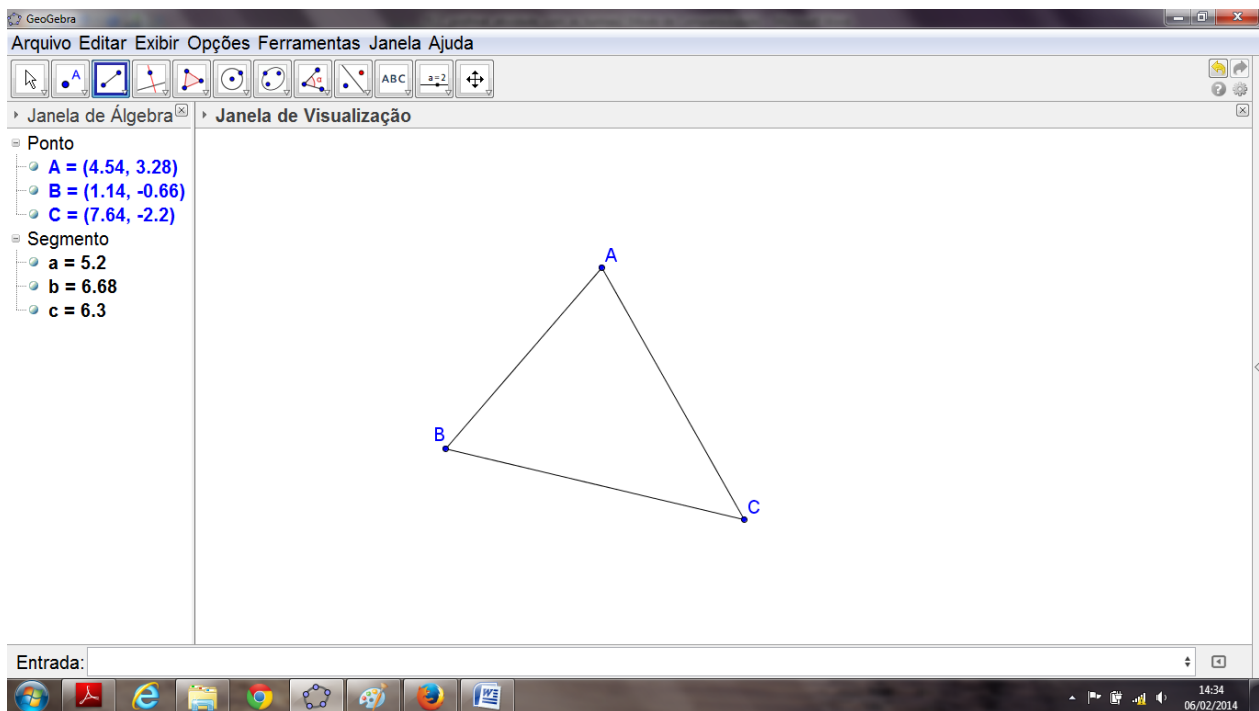
A primeira foi selecionar na barra de ferramentas a ferramenta “segmento definido por dois pontos”. Desta forma, o aluno cria, a partir de três segmentos, um triângulo qualquer.

A segunda maneira mostrada, de se construir um triângulo no Geogebra, foi através da ferramenta “polígono”. O professor mostrou que esta é a forma mais prática de construir um triângulo no Geogebra.

Através dos desenhos dos triângulos, foi mostrado aos alunos os seus elementos (vértices, lados e ângulos).

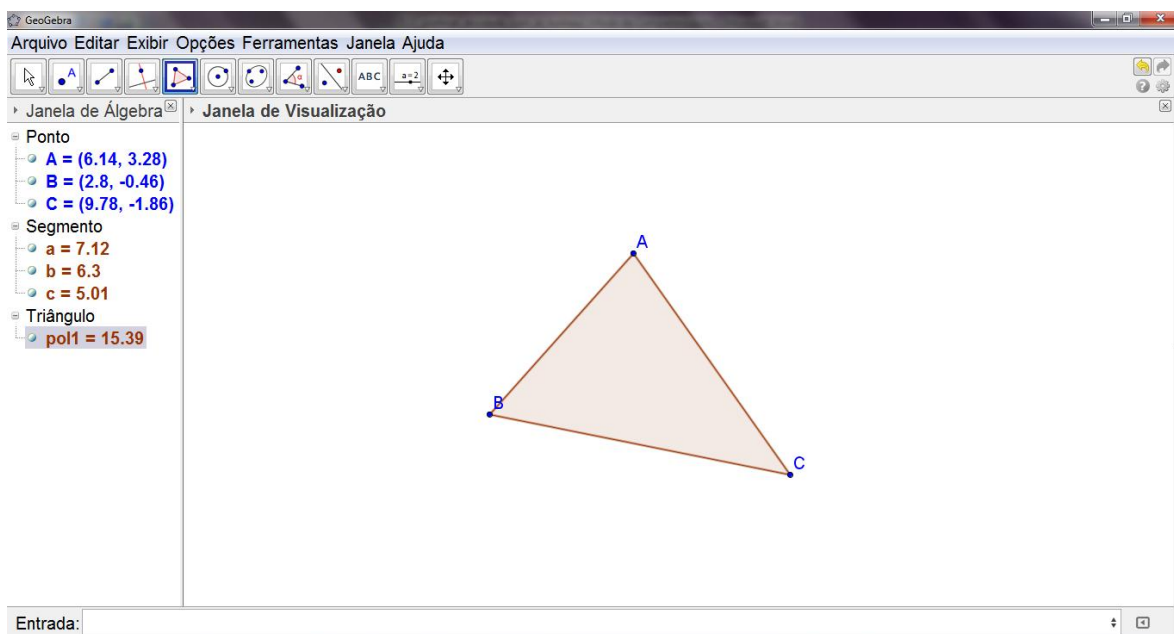


Figura 7.3 – Construção do triângulo através da ferramenta “segmento definido por dois pontos”



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.4 – Construção do triângulo através da ferramenta “polígono”



Fonte: Elaborada pelo autor

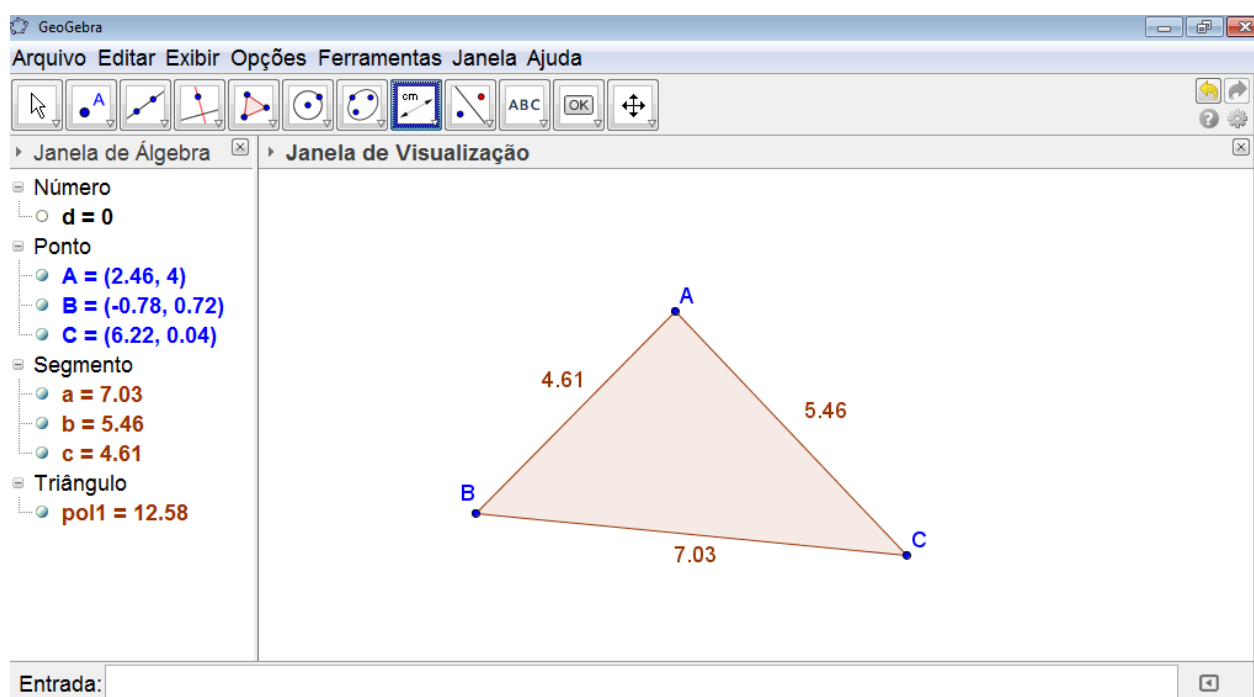
D98 – Classificar um triângulo quanto aos lados e

D99 - Classificar um triângulo quanto aos ângulos:

Para estudar estes dois descritores, o professor instruiu os alunos a deformarem seus triângulos, para que eles verificassem a classificação quanto aos lados.

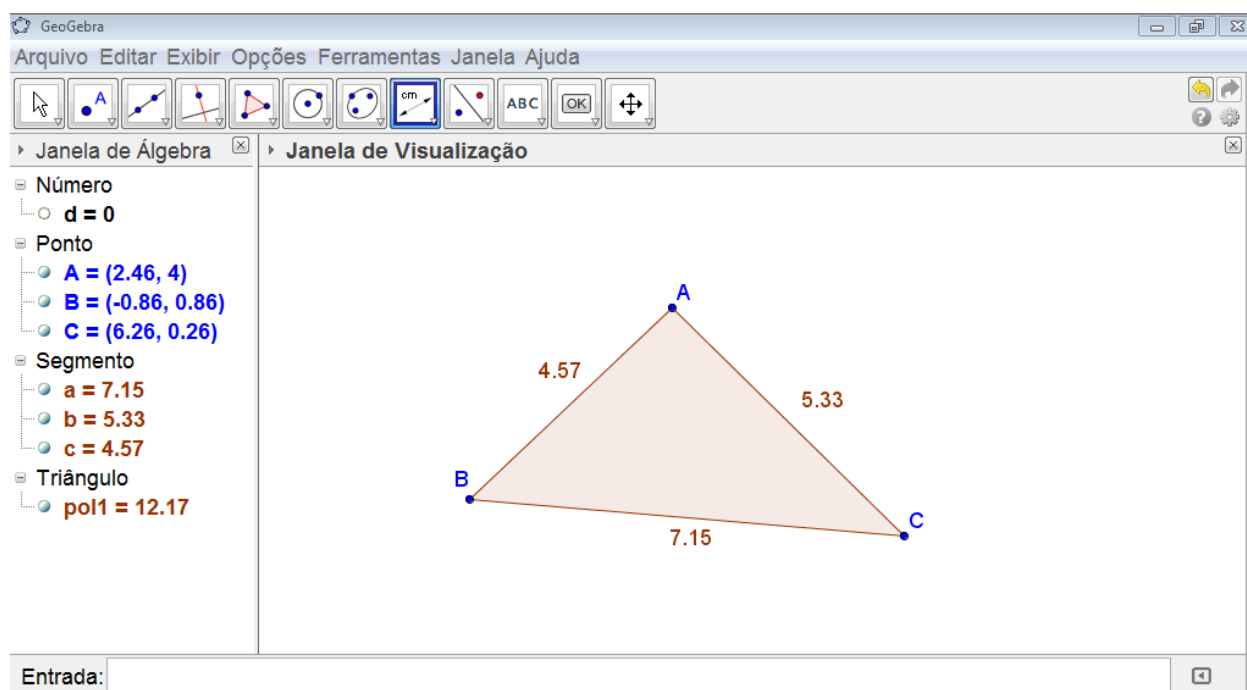
A construção do triângulo pela ferramenta “polígono” foi sugerida pelo professor, então os alunos selecionaram a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro”, em seguida, o professor orientou para que clicassem em cada segmento pertencente ao triângulo. Assim, os comprimentos dos lados do triângulo ficaram expostos na janela de visualização. Conforme o aluno deformava em tempo real o triângulo, notava que os comprimentos variavam.

Figura 7.5 – Triângulo com as medidas de seus lados



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.6 – Triângulo após sua deformação e novas medidas dos lados

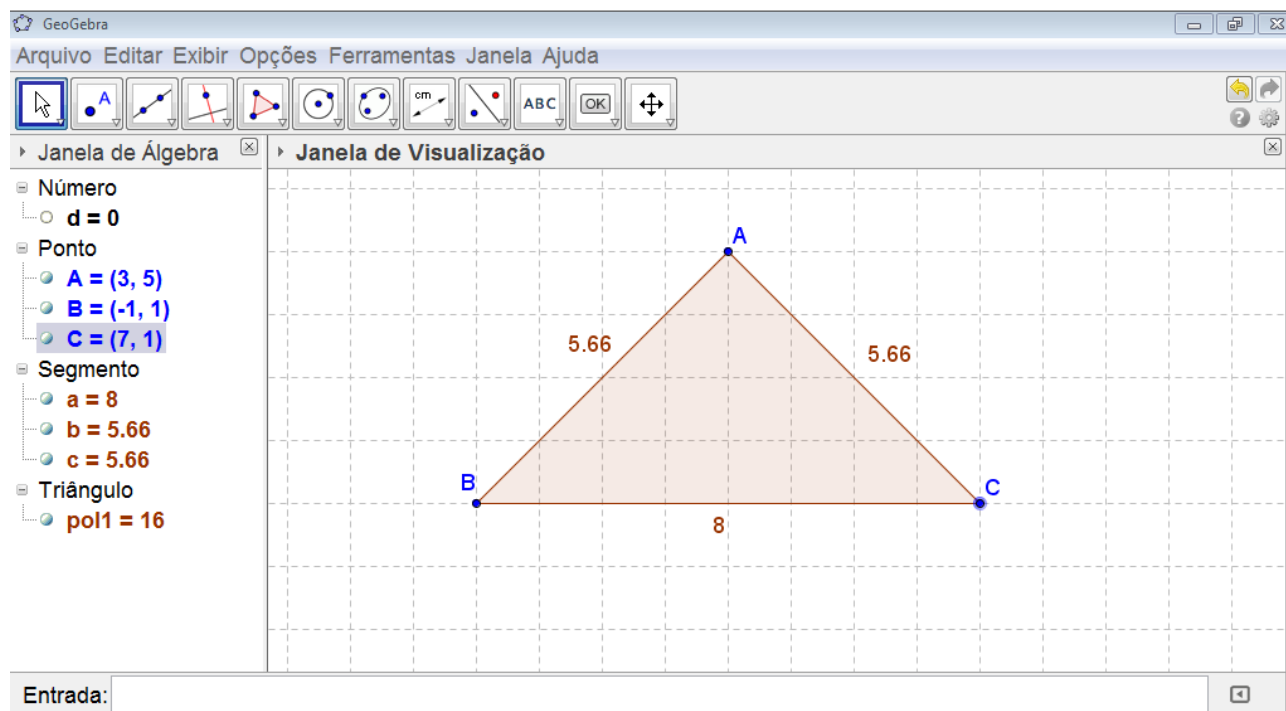


Fonte: Elaborada pelo autor

Para construir um triângulo isósceles, o professor orientou que os alunos configurassem a janela de visualização para inserir a malha quadriculada. Para isso foi orientado aos alunos que selecionassem a ferramenta “mover janela de visualização”, e então, na janela de visualização utilizar o botão direito do mouse e selecionar a opção “malha”.

Com a janela de visualização configurada com a malha, foi facilitada a construção do triângulo isósceles. A orientação foi de que os alunos alinhassem a base do triângulo com uma das linhas horizontais da malha, e então o vértice oposto a esta base fosse movimentado, de forma que as medidas dos lados mostrados na janela de visualização se tornassem idênticas.

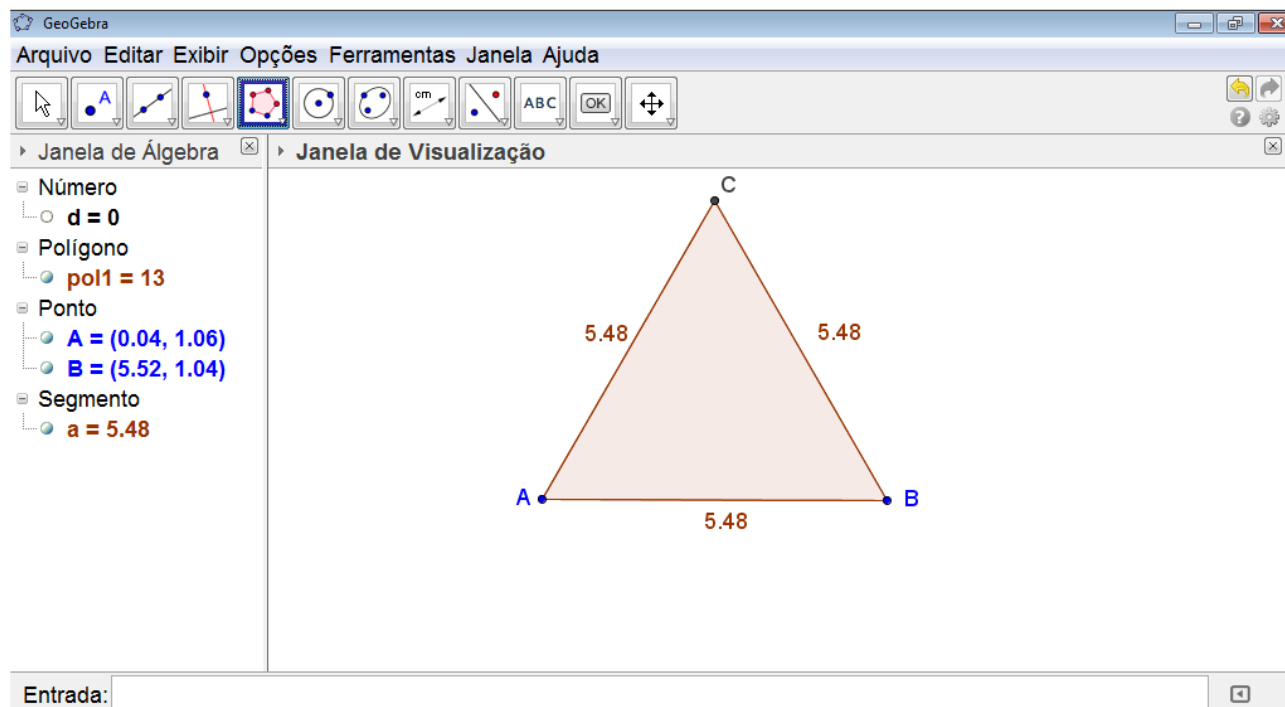
Figura 7.7 – Construção do triângulo isósceles na malha quadriculada



Fonte: Elaborada pelo autor

Para finalizar o aprendizado deste descritor (D98), para a construção do triângulo equilátero, a forma mais prática orientada para os alunos foi a de selecionar ferramenta “polígono regular”. Assim, clicando o segundo vértice do polígono na janela de visualização, aparecerá uma caixa de texto na tela para digitar o número de vértices. Desta forma o triângulo equilátero foi construído.

Figura 7.8 – Construção do triângulo equilátero

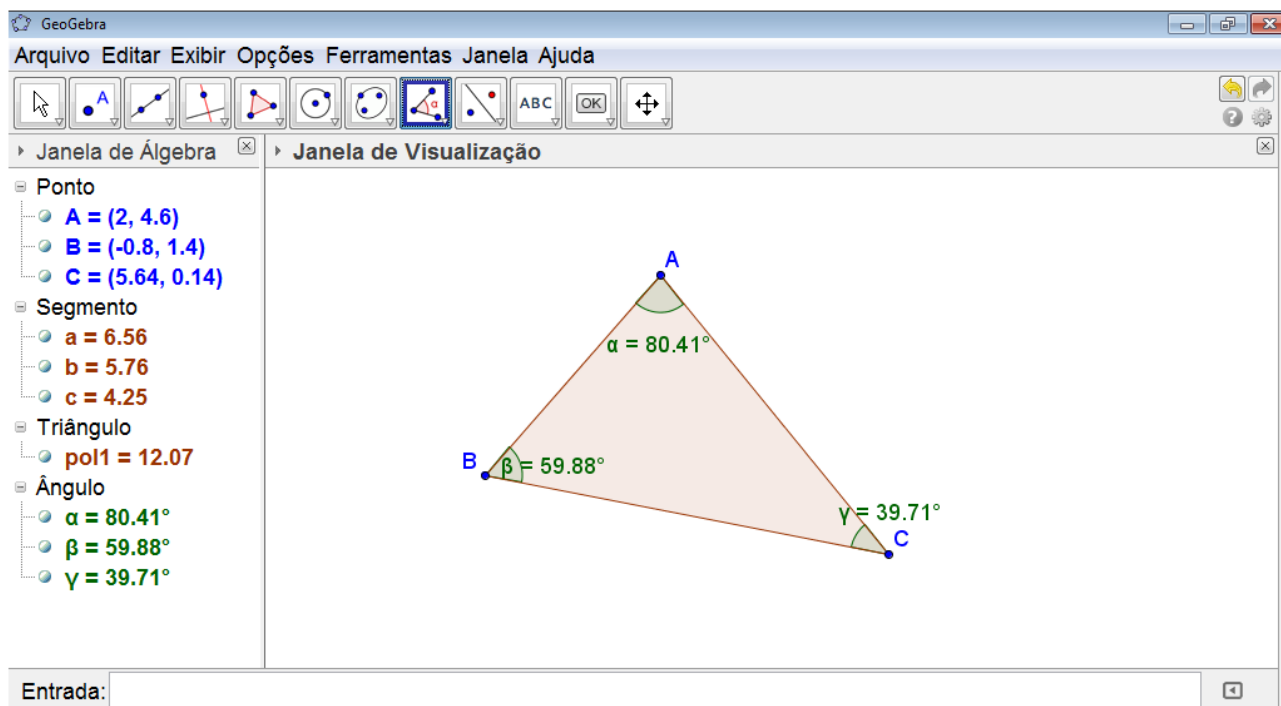


Fonte: Elaborada pelo autor

Para o descritor D99, o professor orientou para que os alunos continuassem com a janela de visualização configurada com a malha. Então os alunos foram instruídos a construir seus triângulos pela ferramenta “polígono”. O próximo passo foi de selecionar a ferramenta “ângulo”, em seguida os alunos clicaram no interior de seus triângulos, e assim foi mostrada na tela os três ângulos internos dos triângulos. Assim, para que os alunos verificassem a classificação dos triângulos quanto aos ângulos, foram deformados os triângulos e observadas as medidas dos ângulos internos. O triângulo acutângulo e o obtusângulo eram mais simples de construir, pois as medidas dos ângulos internos estavam expostas.

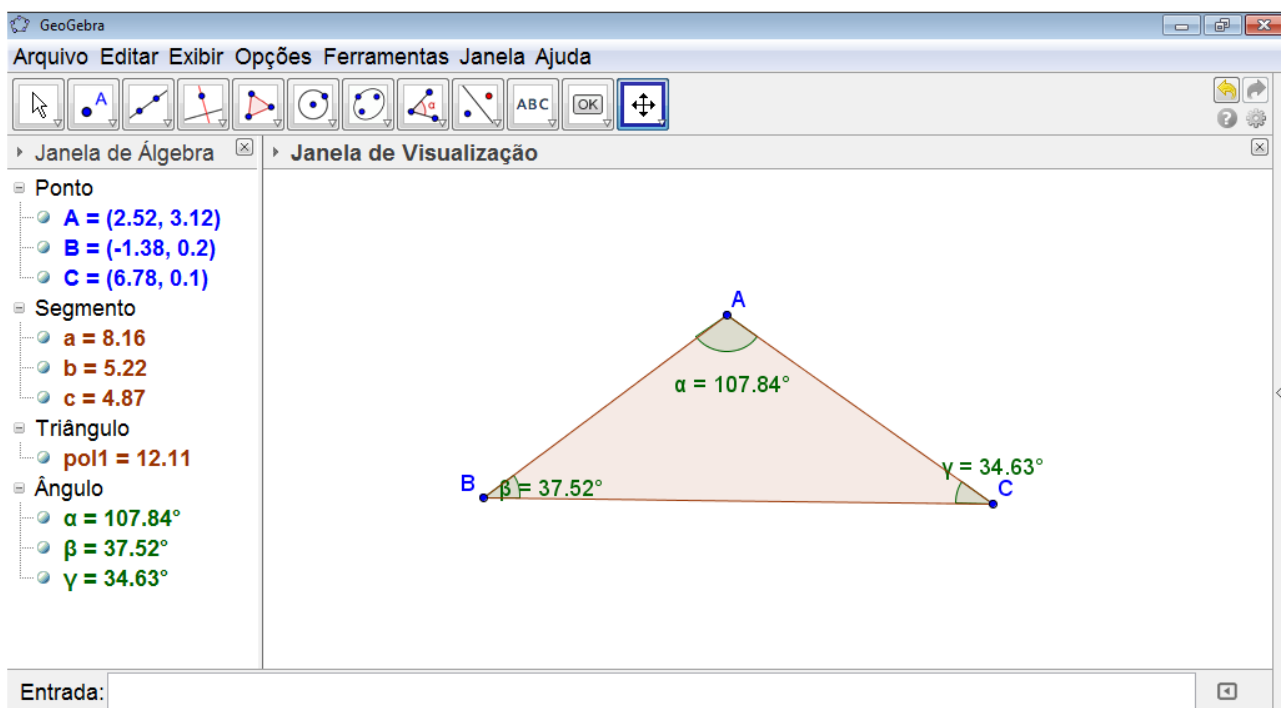
Para se construir um triângulo retângulo, bastava alinhar um dos lados horizontalmente com a malha e outro lado verticalmente com a malha. Assim, os alunos verificaram, em tempo real, as medidas dos ângulos sendo modificadas e tornando um dos ângulos internos do triângulo reto.

Figura 7.9 – Construção do triângulo acutângulo



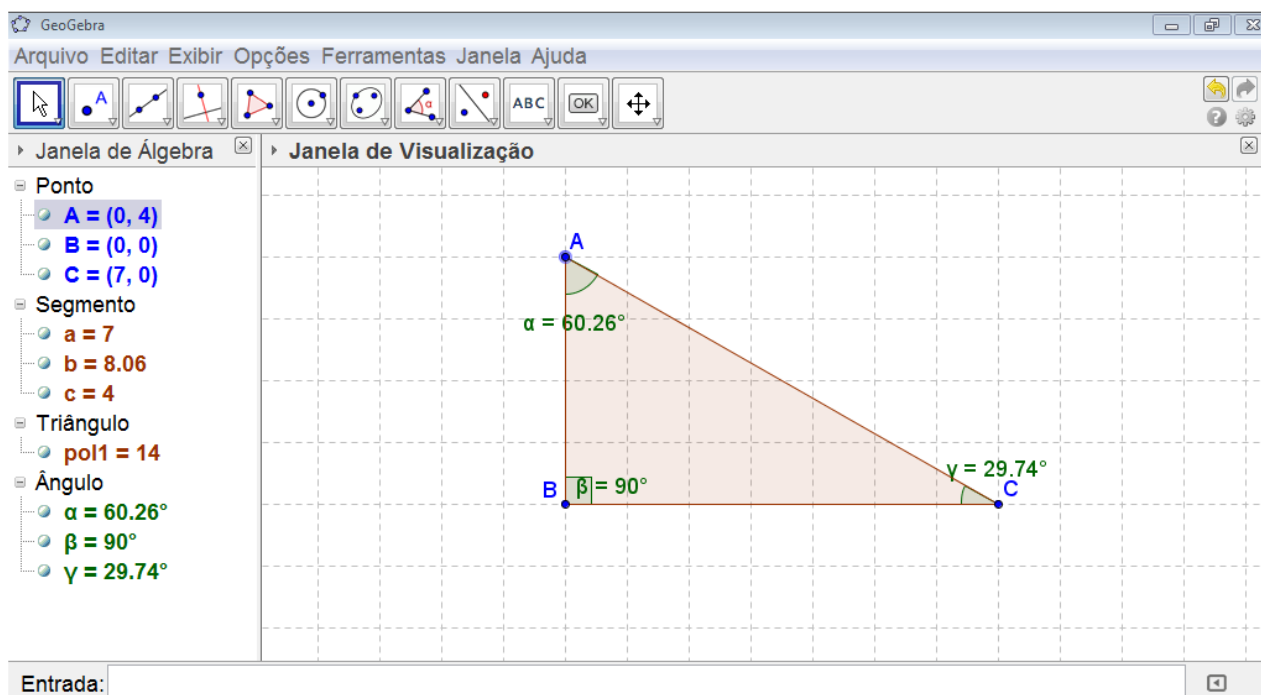
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.10 – Construção do triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.11 – Construção do triângulo retângulo



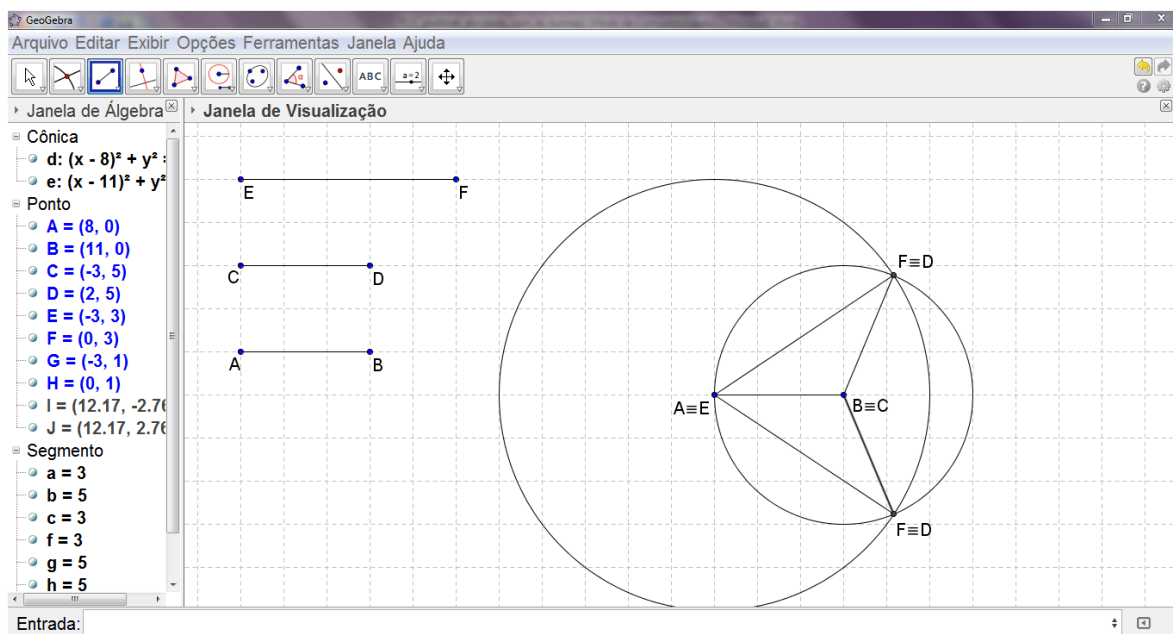
Fonte: Elaborada pelo autor

D100 – Verificar quando é possível construir um triângulo por meio da desigualdade triangular:

Para o aprendizado deste descritor, é orientado aos alunos que construam três segmentos quaisquer. O próximo passo é escolher um destes segmentos e de cada extremidade deste, traçar uma circunferência cujos raios são as medidas dos outros segmentos construídos, respectivamente, usando a ferramenta “compasso”.

1ª atividade: os alunos foram instruídos a construir três segmentos, onde se obedecia a seguinte regra: cada um desses segmentos é menor que a soma dos outros dois.

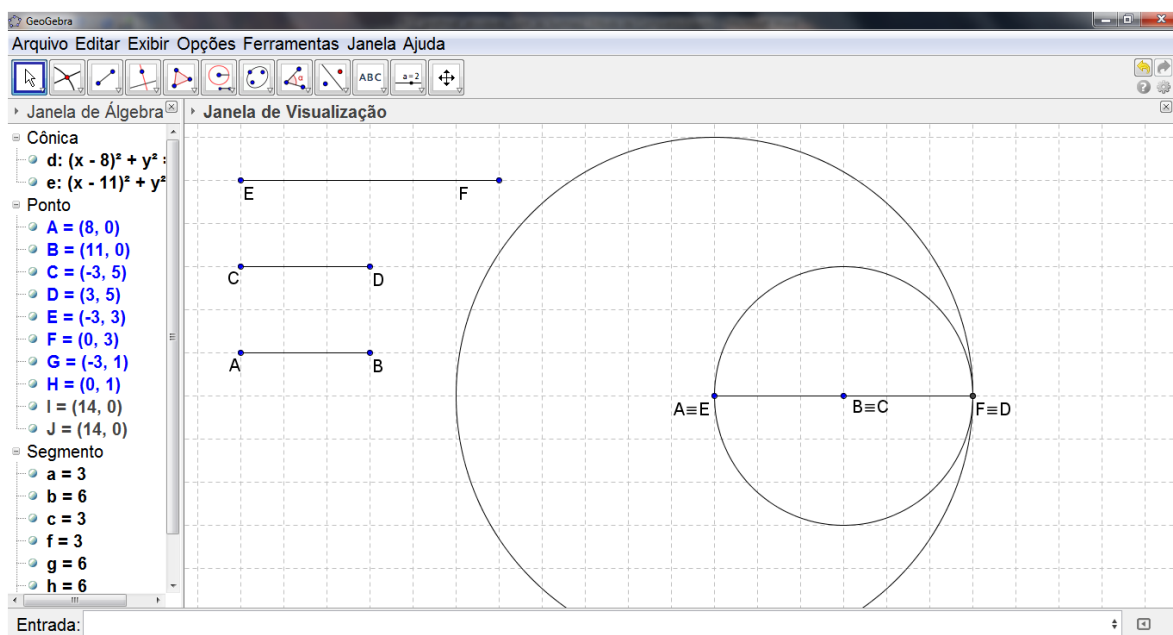
Figura 7.12 – 1ª atividade do descritor D100



Fonte: Elaborada pelo autor

2ª atividade: os alunos foram instruídos a modificar algum(ns) dos segmentos, onde se obedecia a seguinte regra: um dos segmentos é igual à soma dos outros dois.

Figura 7.13 – 2ª atividade do descritor D100

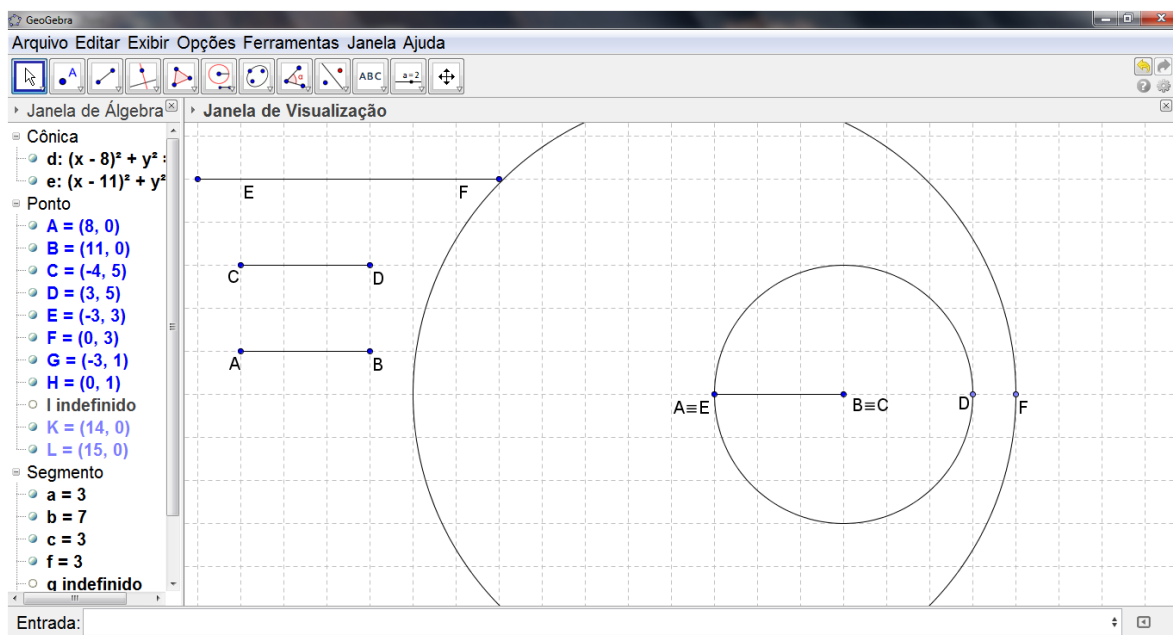


Fonte: Elaborada pelo autor



Por fim, na 3ª e última atividade deste descritor, os alunos foram instruídos a modificar algum(ns) dos segmentos, onde se obedecia a seguinte regra: um dos segmentos é maior do que a soma dos outros dois.

Figura 7.14 – 3ª atividade do descritor D100



Fonte: Elaborada pelo autor

Os alunos verificaram que só foi possível construir um triângulo quando as circunferências se interceptaram em dois pontos. Se a interseção das duas circunferências for um ou nenhum ponto, não existe triângulo com as medidas destes segmentos.

Aula 2:

D101 – Identificar as cevianas notáveis de um triângulo.

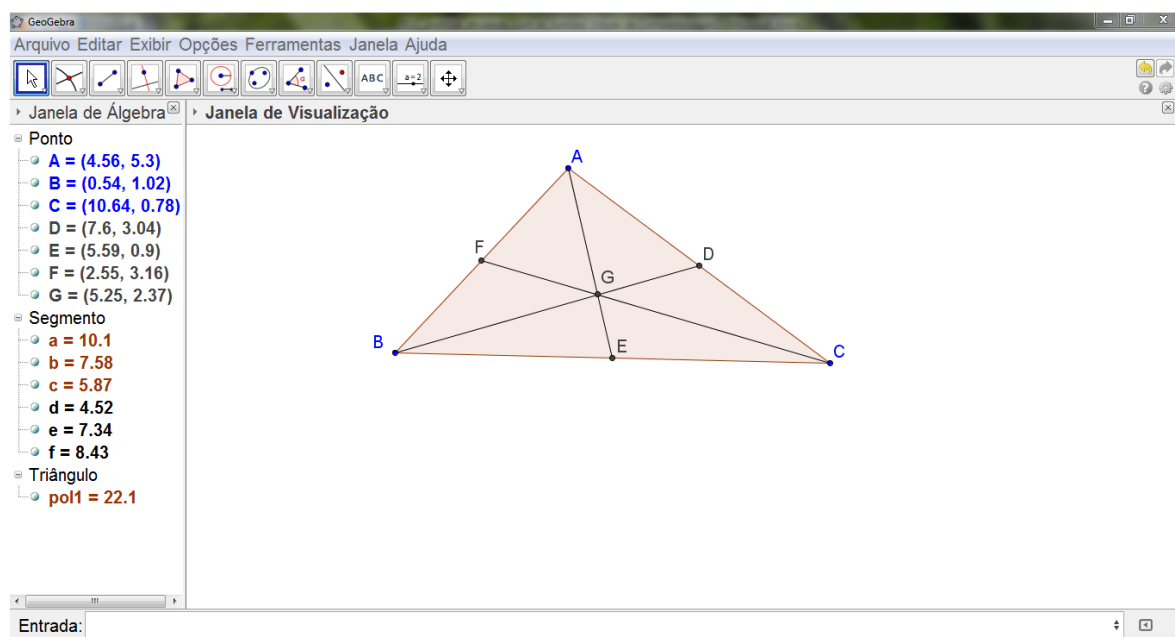
Duração da aula: 90 minutos (2 tempos de 45 minutos).

Nesta Segunda aula, os alunos aprenderão a construir as cevianas notáveis de um triângulo, as mediatrizes do triângulo e seus respectivos pontos notáveis.

Construindo as medianas e o baricentro:

Após construir um triângulo, os alunos foram instruídos a marcar o ponto médio de pelo menos dois lados do triângulo. Basta selecionar a ferramenta “ponto médio ou centro”. Em seguida, construíram dois segmentos com uma extremidade em um vértice e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto ao vértice escolhido. Ao construir estas medianas, o aluno nota que há uma interseção, é então encontrado o baricentro. Para fixar o ponto de interseção das medianas, selecionaram a ferramenta “interseção de dois objetos”.

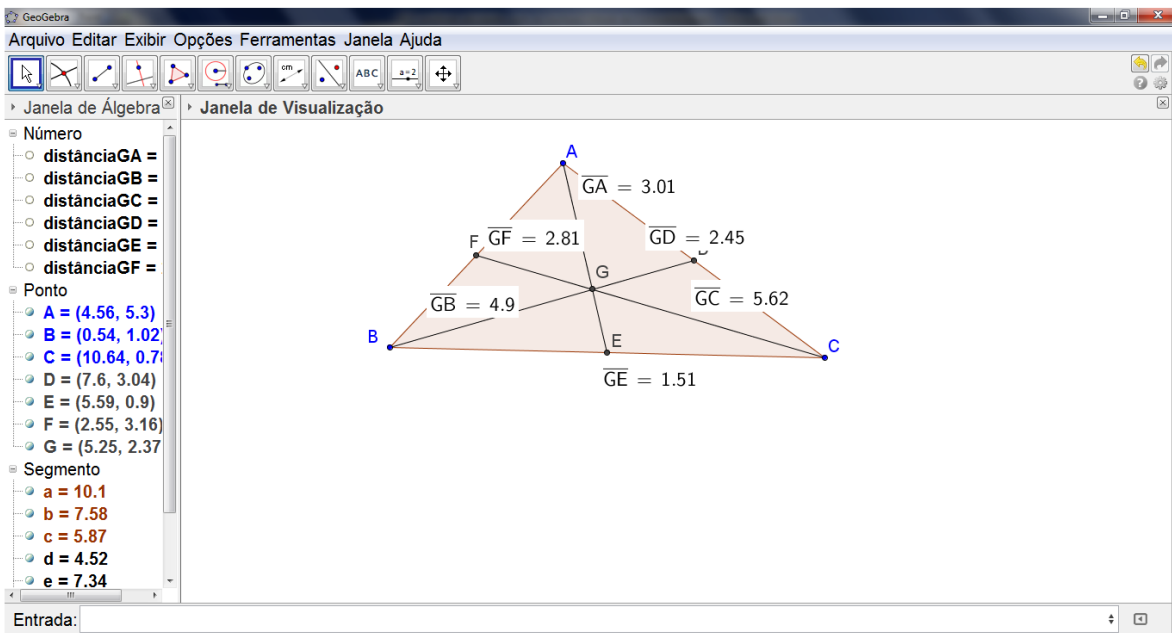
Figura 7.15 – Construção do baricentro



Fonte: Elaborada pelo autor

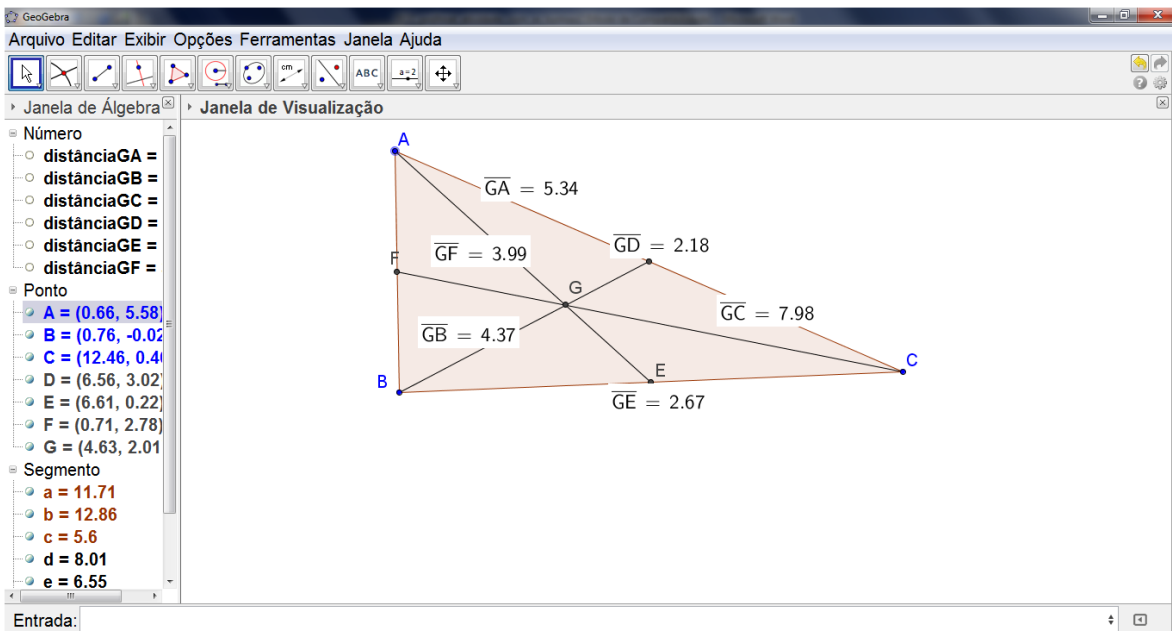
Para verificar a principal característica do baricentro, que é a de dividir cada mediana em dois segmentos, onde um é o dobro do outro, os alunos selecionaram a ferramenta “distância, comprimento ou perímetro”, e clicaram nas extremidades de cada segmento que formavam a mediana, assim, conforme deformavam o triângulo, os alunos percebiam que a razão entre os segmentos da mediana não se alterava.

Figura 7.16 – Baricentro e segmentos que compõem as medianas com suas respectivas medidas



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.17 – Triângulo modificado

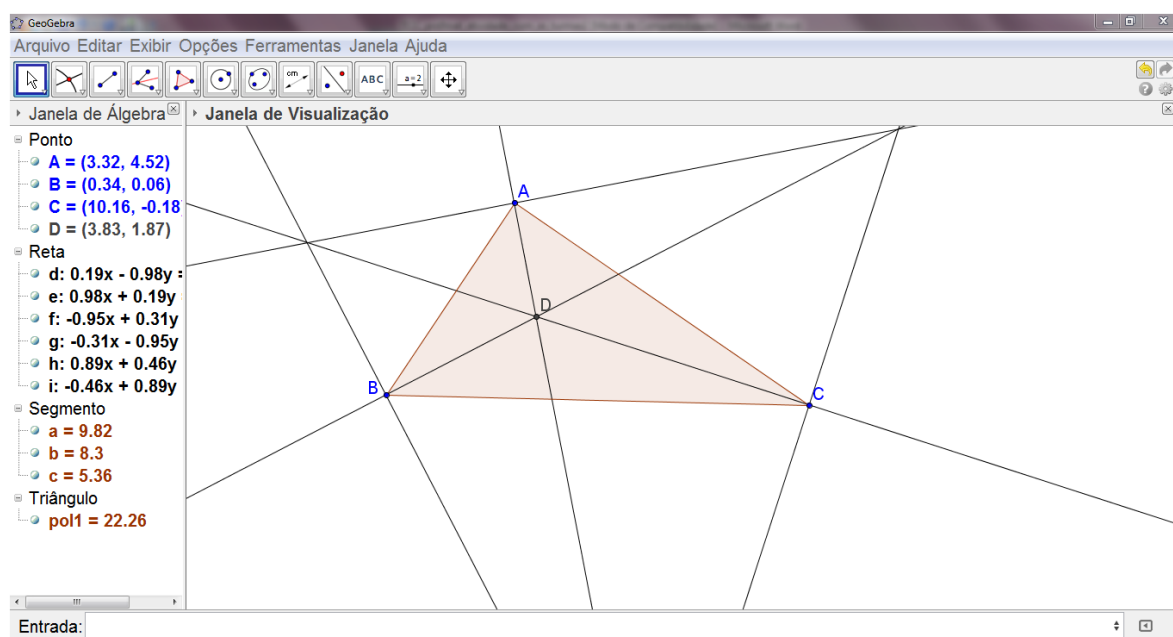


Fonte: Elaborada pelo autor

Construindo as bissetrizes internas e o incentro:

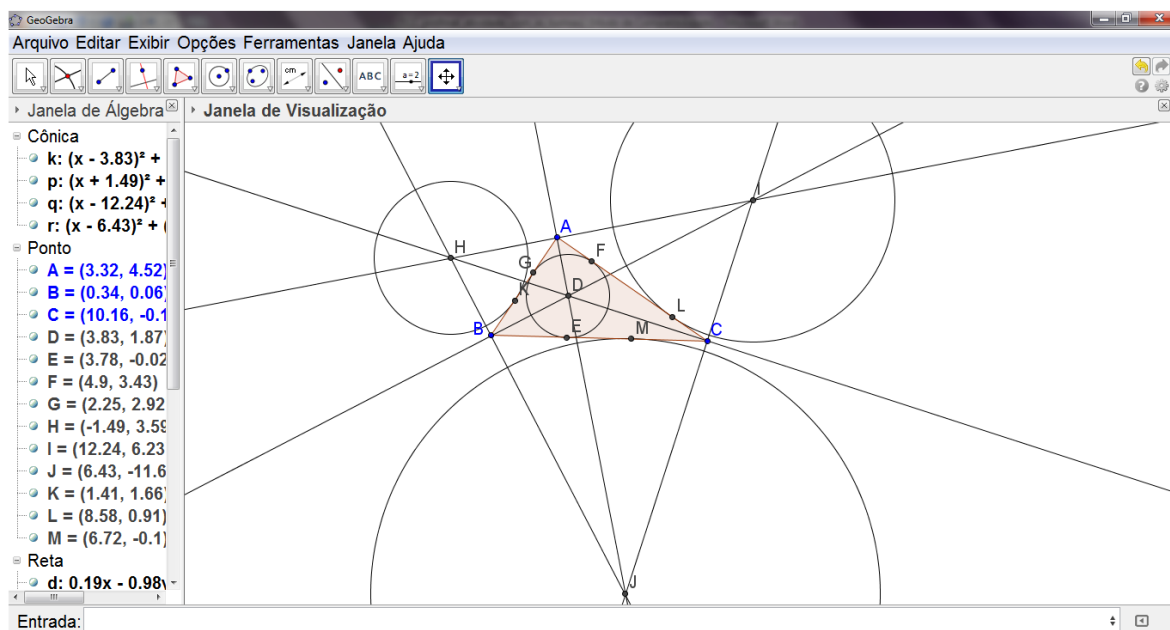
Após construir um triângulo, os alunos foram orientados a traçar as bissetrizes dos ângulos internos. Assim, os alunos com a orientação do professor, selecionaram a ferramenta “bissetriz”. Como o Geogebra não possui opção de construir bissetrizes internas, ao escolher a ferramenta “bissetriz”, é traçada a reta bissetriz do ângulo selecionado e também é traçada a reta bissetriz do seu suplementar. Foi orientado aos alunos considerar a parte da reta bissetriz que se encontrava no interior do triângulo. Desta forma, os alunos verificaram a interseção de duas bissetrizes no interior do triângulo, o incentro. O professor mostrou aos alunos, aproveitando a figura construída, os ex-incentros, encontro das bissetrizes externas ao triângulo.

Figura 7.18 – Construção do incentro



Fonte: Elaborada pelo autor

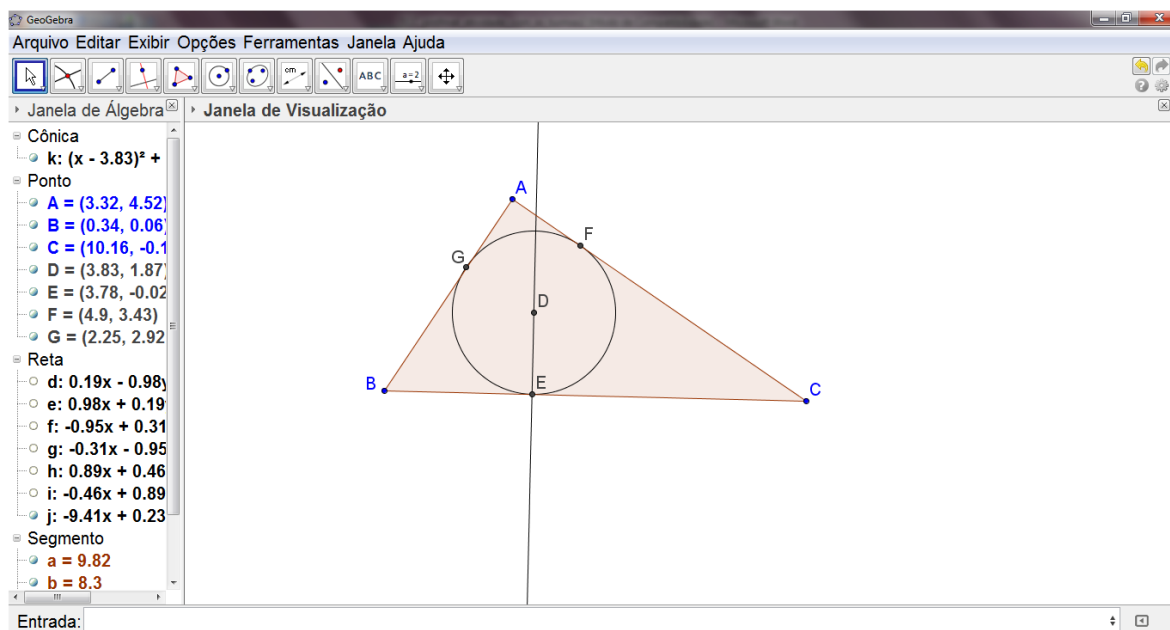
Figura 7.19 – Ex-incentros (H, I, J) do triângulo ABC



Fonte: Elaborada pelo autor

Para mostrar a principal característica do incentro, centro da circunferência inscrita no triângulo, os alunos, mediante orientação do professor, utilizaram a ferramenta “reta perpendicular”, e a partir do incentro, traçaram uma perpendicular em relação a um dos lados do triângulo. A interseção da perpendicular com o lado do triângulo escolhido foi destacada com a ferramenta “interseção de dois objetos”. Desta forma, através da ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”, os alunos desenharam a circunferência com centro no incentro e raio igual à distância do incentro ao ponto de interseção da perpendicular com o lado do triângulo. Eles perceberam que a circunferência tangencia todos os lados do triângulo, característica de uma circunferência inscrita a um polígono.

Figura 7.20 – Circunferência inscrita no triângulo e seus pontos de tangência

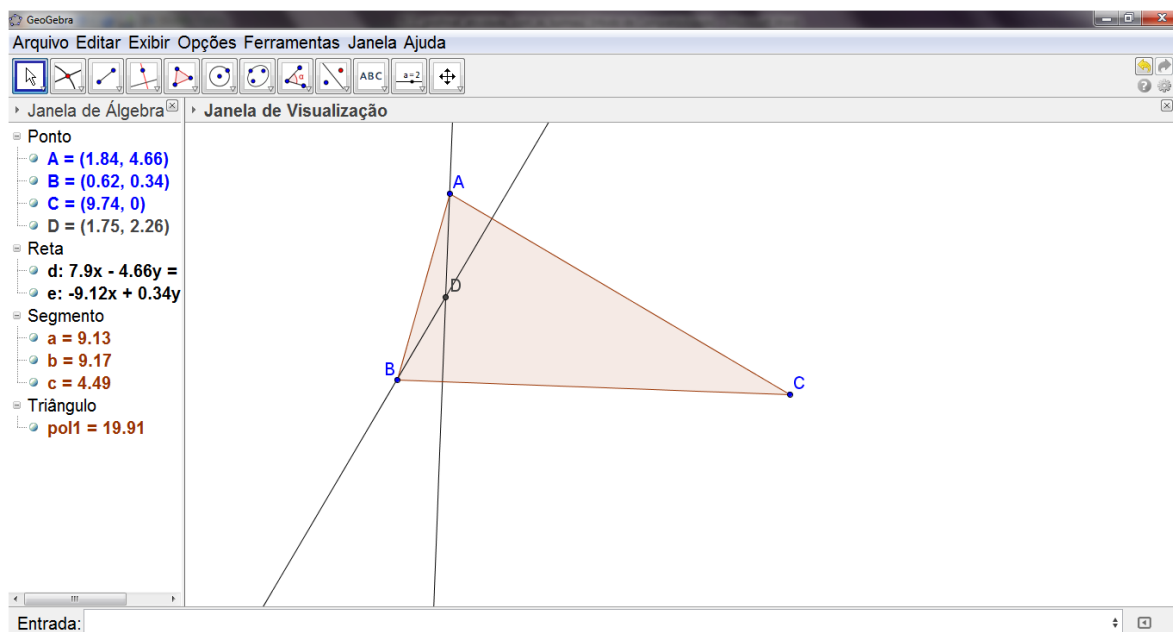


Fonte: Elaborada pelo autor

Construindo as alturas e o ortocentro:

Após construir um triângulo, os alunos foram orientados a traçar as suas alturas. Para isso, com a devida orientação, os alunos selecionaram a ferramenta “reta perpendicular” e então traçaram uma perpendicular de um vértice do triângulo em relação ao lado oposto, em seguida escolheu-se outro vértice e traçaram uma perpendicular deste vértice em relação ao seu lado oposto. A interseção dessas alturas é marcada pelos alunos com a ferramenta “interseção de dois objetos”, o ponto destacado é o ortocentro.

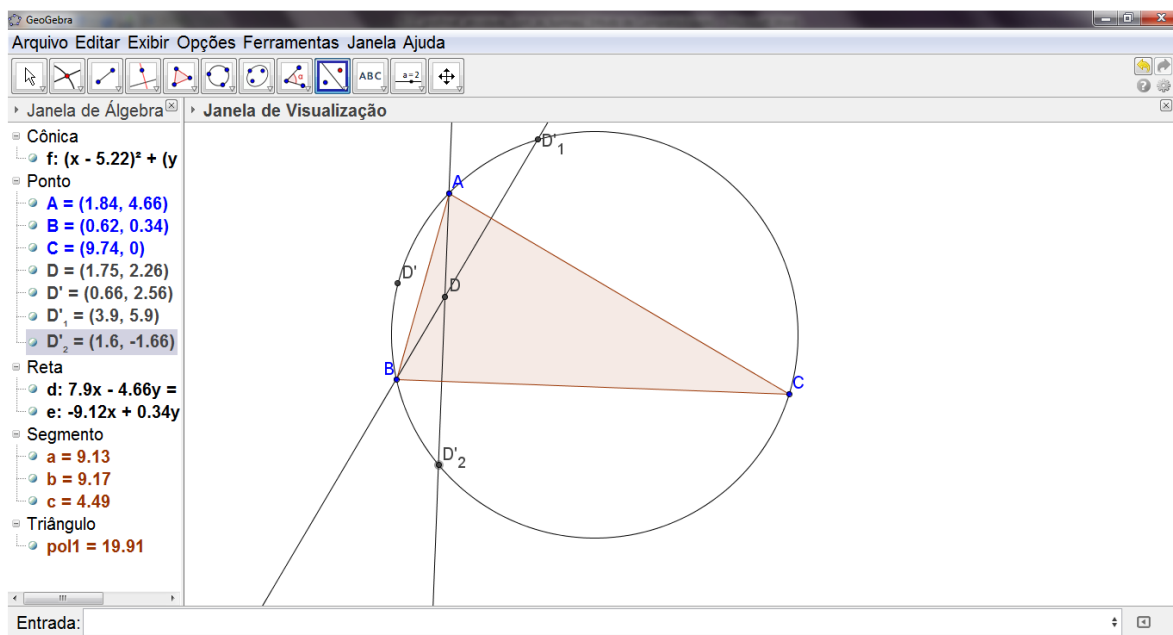
Figura 7.21 – Construção do ortocentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma característica interessante do ortocentro foi mostrada aos alunos, a de que o simétrico do ortocentro em relação a um lado pertence à circunferência circunscrita. Através da ferramenta “reflexão em relação a uma reta”, os alunos encontraram os simétricos do ortocentro em relação a cada lado do triângulo, em seguida traçaram uma circunferência circunscrita ao triângulo, utilizando a ferramenta “círculo definido por três pontos”.

Figura 7.22 – Pontos simétricos do ortocentro em relação aos lados



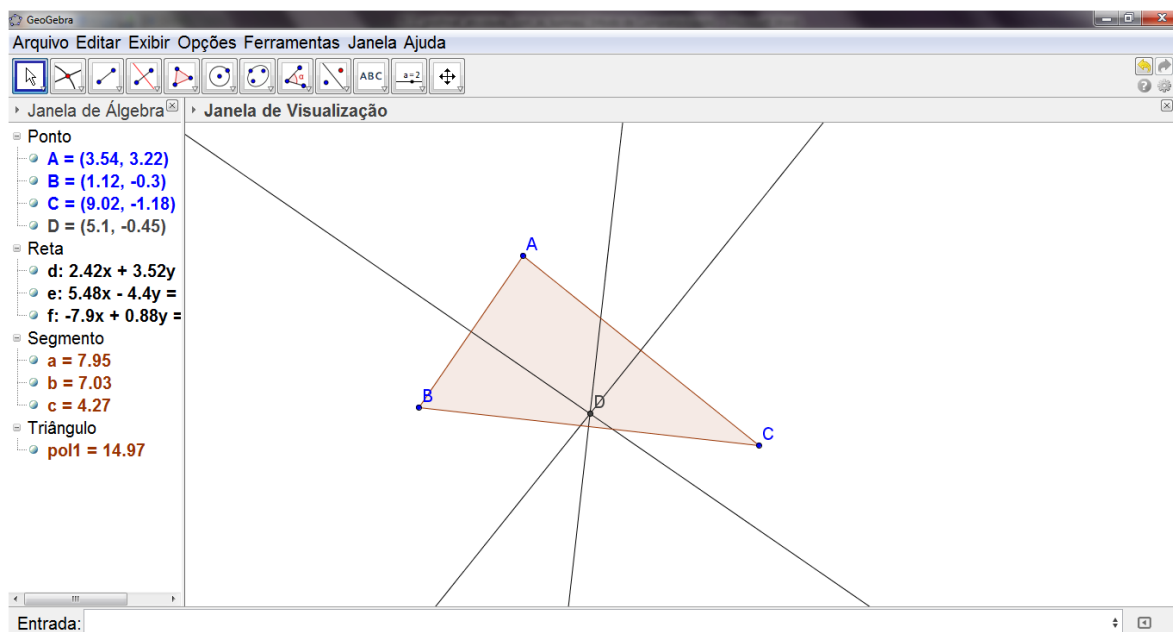
Fonte: Elaborada pelo autor

Construindo as mediatrizes e o circuncentro:

Após construir um triângulo, os alunos foram orientados a traçar as suas mediatrizes. Para isso, os alunos selecionaram a ferramenta “mediatriz” e então clicaram sobre um dos lados do triângulo, revelando sua mediatriz. Em seguida, selecionou-se outro lado do triângulo, revelando outra mediatriz. A interseção dessas duas mediatrizes é destacada pelos alunos através da ferramenta “interseção de dois objetos”. Desta forma os alunos localizaram o circuncentro do triângulo.



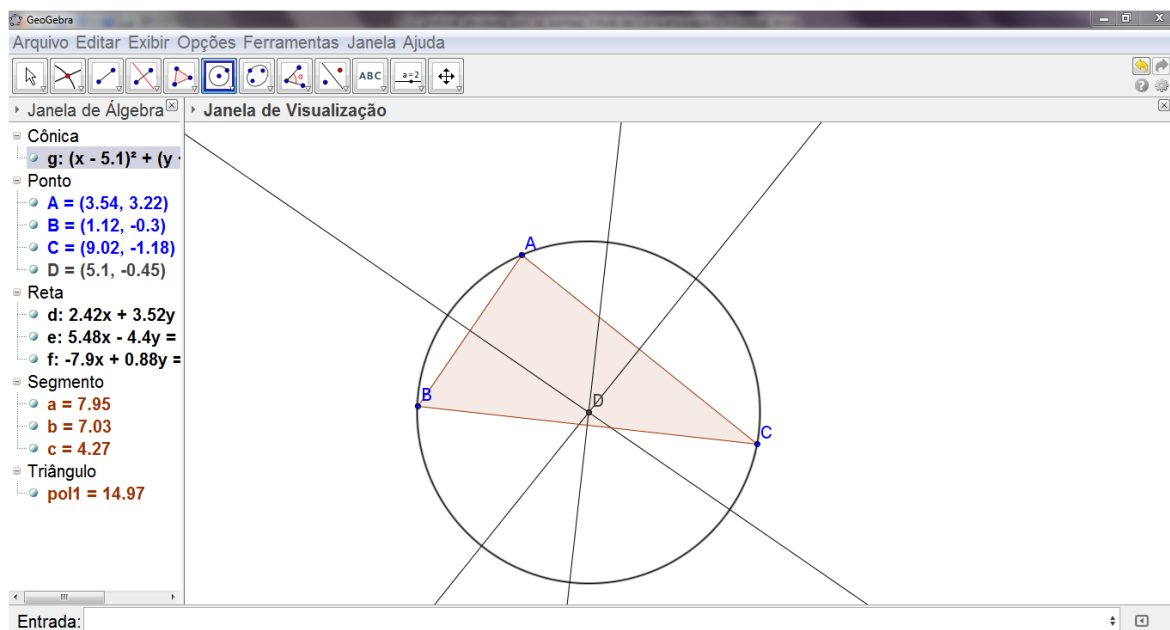
Figura 7.23 – Construção do circuncentro



Fonte: Elaborada pelo autor

Em seguida, para mostrar a principal característica do circuncentro, centro da circunferência circunscrita ao triângulo, os alunos selecionaram a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”, então clicaram sobre o circuncentro e em seguida sobre um dos vértices do triângulo. Perceberam que a circunferência criada passava pelos três vértices do triângulo, característica de uma circunferência circunscrita a um polígono.

Figura 7.24 – Circunferência circunscrita ao triângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Uma atividade interessante foi realizada com os alunos: modificar o triângulo criado em relação a sua classificação pelos ângulos. Para isso os alunos selecionaram a ferramenta “ângulo”, em seguida clicaram no interior do triângulo, revelando seus ângulos internos.

Com os ângulos internos expostos, os alunos puderam transformar o triângulo construído inicialmente em acutângulo, obtusângulo e retângulo, e assim, observar o que acontece com o circuncentro.

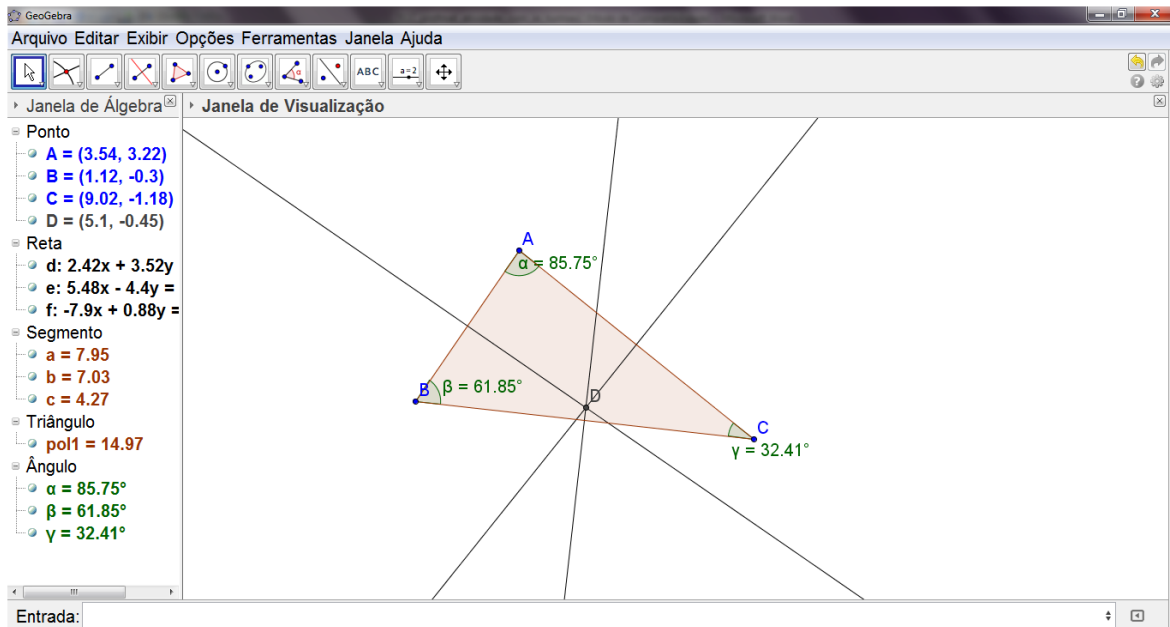
Quando o triângulo era acutângulo, os alunos notaram que o circuncentro localizava-se no interior do triângulo.

Quando o triângulo era obtusângulo, os alunos notaram que o circuncentro localizava-se no exterior do triângulo.

Quando o triângulo era retângulo, os alunos notaram que o circuncentro localizava-se sobre a hipotenusa.

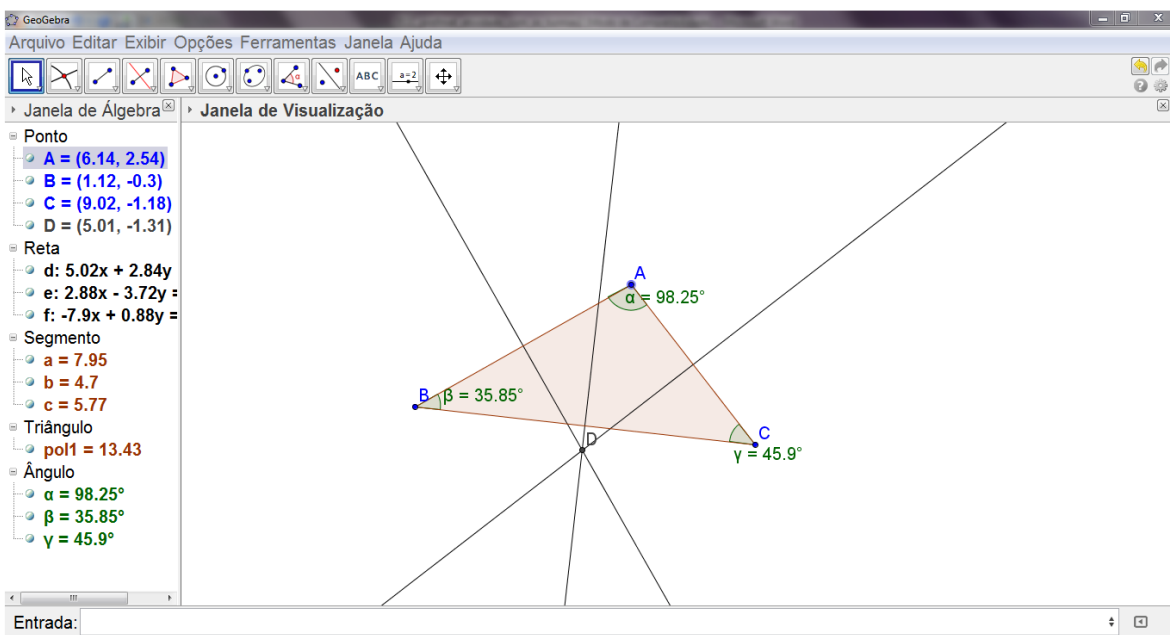
Essa possibilidade de movimentar objetos em tempo real, neste caso o de modificar triângulos, com o Geogebra, torna o ensino da geometria muito interessante.

Figura 7.25 – Circuncentro no triângulo acutângulo



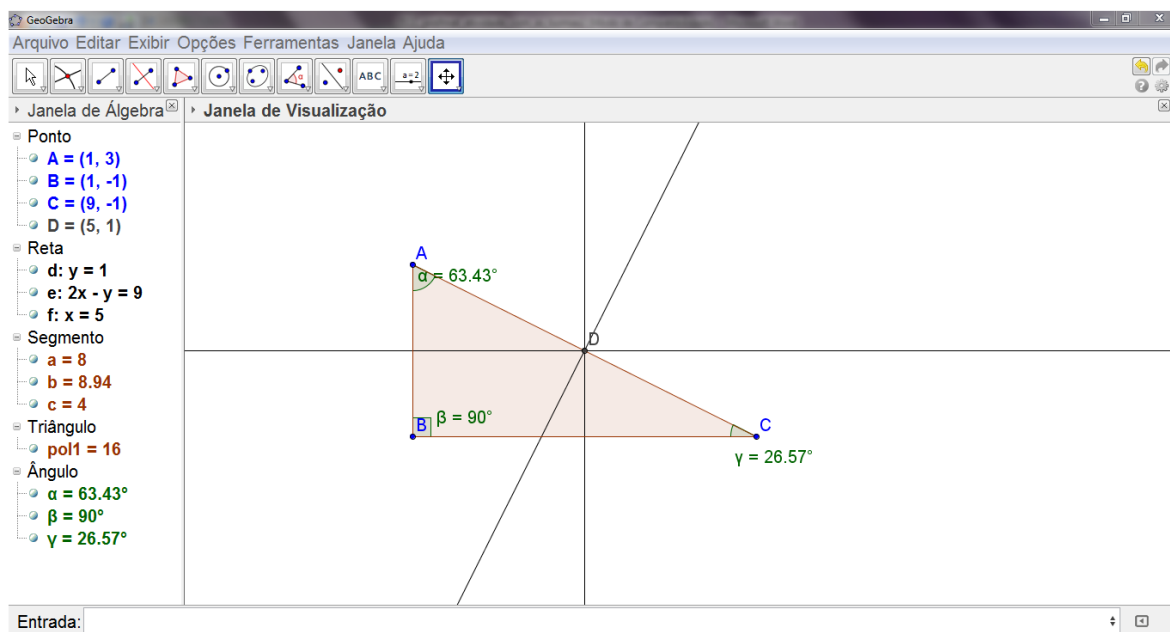
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.26 – Circuncentro no triângulo obtusângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 7.27 – Circuncentro no triângulo retângulo



Fonte: Elaborada pelo autor

Aula 3:

Duração da aula: 45 minutos (1 tempo de 45 minutos).

Neste dia foi aplicada aos alunos uma avaliação do conteúdo visto nesta semana.

Como não havia computadores suficientes para todos os 26 alunos deste grupo, a avaliação foi feita em duplas.

A avaliação foi composta de 4 questões, com nove exercícios no total (Apêndice E). Para cada exercício, a dupla de alunos utilizava uma janela do programa Geogebra, na seguinte ordem: janela 1: 1ª questão, letra a; janela 2: 1ª questão, letra b; até a janela 9: 4ª questão.

Quando a dupla de alunos terminava a avaliação, chamava o avaliador, que analisava janela por janela e lançava os graus na folha de avaliação.

### 7.3.1.2 Atividades com o grupo B

A mesma sequência de conteúdos (descritores) foi apresentada para o grupo B, ou seja:

D97 – Definir triângulo e identificar seus elementos; D98 – Classificar um triângulo quanto aos lados;

D99 - Classificar um triângulo quanto aos ângulos; D100 – Verificar quando é possível construir um triângulo por meio da desigualdade triangular; D101 – Identificar as cevianas notáveis de um triângulo;

Os alunos deste grupo não manusearam o programa Geogebra. As aulas foram ministradas em forma de palestra pelo autor, que projetou na lousa as figuras geométricas construídas com o Geogebra. A mesma carga horária destinada para o grupo A foi aplicada no grupo B, ou seja:

Aula 1:

Duração da aula: 90 minutos (2 tempos de 45 minutos)

Descritores: D97 – Definir triângulo e identificar seus elementos;

D98 – Classificar um triângulo quanto aos lados;

D99 - Classificar um triângulo quanto aos ângulos;

D100 – Verificar quando é possível construir um triângulo por meio da desigualdade triangular.

Aula 2:

D101 – Identificar as cevianas notáveis de um triângulo.

Duração da aula: 90 minutos (2 tempos de 45 minutos).

Aula 3:

Duração da aula: 45 minutos (1 tempo de 45 minutos).

Neste dia foi aplicado aos alunos uma avaliação do conteúdo visto nesta semana.

A avaliação foi realizada em duplas de alunos. As VIs aplicadas para os dois grupos foram as mesmas (verificar Apêndice E).

## 8 ANÁLISE DOS RESULTADOS DA AVALIAÇÃO APLICADA AOS GRUPOS A E B

A seguir, será analisado, questão por questão, o desempenho dos dois grupos de alunos, no teste aplicado.

1ª Questão: A finalidade desta questão era de verificar se o aluno aprendeu corretamente sobre a condição de existência de triângulos. Os resultados a seguir mostram o desempenho:

Tabela 2 – Resultados da primeira questão da avaliação

Grupo	100% de acertos	Entre 0 e 100% de acertos	0% de acertos
A	65,3%	34,7%	0%
B	62,9%	22,2%	14,9%

Fonte: Elaborada pelo autor

Verifica-se claramente que no grupo A, em sua totalidade, aprendeu o assunto, mas 34,7% do grupo, o que equivale a nove alunos, aprendeu parcialmente. As respostas destes nove alunos foram incompletas, pois a justificativa foi insatisfatória.

No grupo B, houve uma parcela de alunos que não apresentaram aprendizagem na questão. Os 14,9%, que equivale a quatro alunos, apresentaram respostas insatisfatórias, totalmente erradas.

Os 22,2% do grupo B, o que corresponde a seis alunos, responderam a questão de maneira incompleta.

2ª Questão: O objetivo desta questão era de verificar o aprendizado do aluno no assunto de desigualdade triangular.

Tabela 3 - Resultados da segunda questão da avaliação

Grupo	100% de acertos	Entre 0 e 100% de acertos	0% de acertos
A	30,8%	42,3%	26,9%
B	22,2%	44,4%	33,4%

Fonte: Elaborada pelo autor

Verifica-se, pelos dados acima, que houve alunos em ambos os grupos que não obtiveram aprendizado nesta questão. No grupo A, os 26,9%, que equivale a sete alunos, não souberam expressar a ideia que a questão exigia. 42,3 %, ou seja, onze alunos, apresentaram ideia parcial, pois não expressaram corretamente as desigualdades exigidas nesta questão, sendo assim, não desenvolveram por completo a questão. No grupo B, os 33,4%, representado por nove alunos, não souberam responder nem o mínimo que a questão exigia. 44,4%, representado por doze alunos, acertaram parcialmente, não escrevendo corretamente as desigualdades desta questão. Verifica-se, entretanto, que a porcentagem de alunos que acertaram parcialmente esta questão do grupo B foi maior que a do grupo A.

3ª Questão: Finalidade da questão: verificar o aprendizado do aluno sobre pontos notáveis do triângulo.

Tabela 4 - Resultados da terceira questão da avaliação

Grupo	100% de acertos	Entre 0 e 100% de acertos	0% de acertos
A	73,1%	26,9%	0%
B	33,3%	37,0%	29,7%

Fonte: Elaborada pelo autor

Verifica-se, nesta questão, um ótimo desempenho do grupo A, pois todos os alunos aprenderam, pelo menos de maneira parcial, o assunto desta questão. Os 26,9%, equivalente a sete alunos, erraram parcialmente esta questão, pois em alguns casos, trocaram os pontos notáveis. Onde era para traçar o circuncentro, alguns alunos traçaram o incentro. Já no grupo B, nota-se um desempenho bem inferior, em comparação com o grupo A. Os 29,7%, que representam oito alunos, não acertaram nenhum item desta questão, pois traçaram todas as cevianas e mediatrizes de maneira incorreta. Os 37,0%, que corresponde a dez alunos, erraram como os alunos do grupo A: confundiram-se ao trocar incentro com circuncentro.

4ª Questão: Aplicação dos conhecimentos sobre pontos notáveis do triângulo.

Tabela 5 - Resultados da quarta questão da avaliação

Grupo	100% de acertos	Entre 0 e 100% de acertos	0% de acertos
A	30,1%	15,4%	54,5%
B	14,8%	7,4%	77,8%

Fonte: Elaborada pelo autor

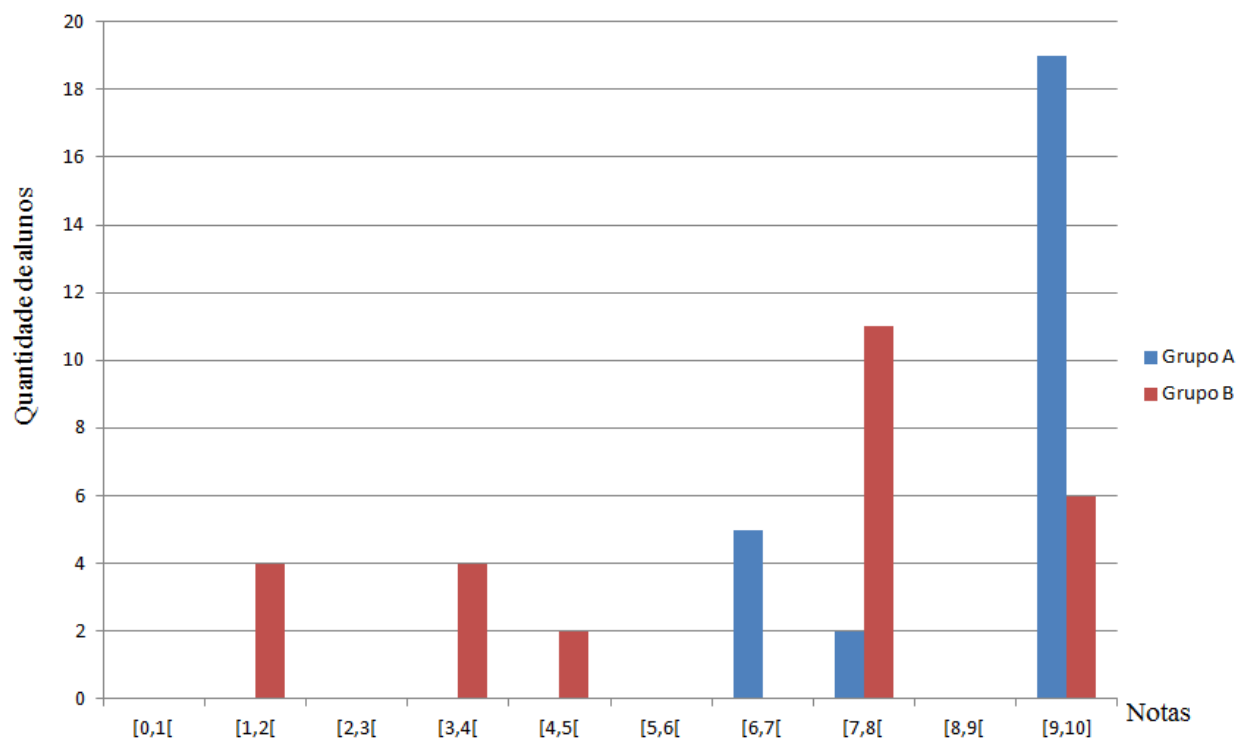
Esta foi considerada a questão mais difícil deste teste. Nota-se o desempenho razoável dos dois grupos. Mais da metade dos alunos do grupo A, ou seja, quatorze alunos, não obtiveram desempenho satisfatório nesta questão. Porém o número de alunos que acertaram a questão em sua totalidade superou os alunos que aprenderam parcialmente o assunto desta questão, respectivamente oito e quatro alunos deste grupo. No grupo B, o número de alunos que não aprenderam esta questão foi alto, 77,8%, o que equivale a vinte e um alunos. Como no grupo A, o número de alunos que aprenderam totalmente a questão superou a quantidade de alunos que aprenderam parcialmente, respectivamente quatro e dois alunos.

Esta questão foi considerada como questão bônus, ou seja, se ao aluno acertasse ganharia pontos nesta avaliação, mas se errasse não perderia pontos.



## 8.1 Comparação entre as notas da avaliação aplicada aos alunos dos grupos A e B

Gráfico 1 – Comparação dos graus dos grupos na VI aplicada



Fonte: Elaborada pelo autor

Observa-se claramente, no gráfico acima, que o desempenho do grupo A foi superior ao do grupo B. Não houve aluno do grupo 1 com grau abaixo de 5,0, e a quantidade de alunos com grau entre 9 e 10, que foi de dezenove, foi maior ao do grupo B, que foi de seis. No grupo B, dez alunos ficaram com grau abaixo de cinco, nota mínima para aprovação no CMF.

A tabela a seguir mostra outros dados, como nota média dos grupos e desvio padrão.

Tabela 6 – Coleta de dados dos grupos, a partir da avaliação aplicada

Grupos	Categoria				
	Média da turma	Desvio Padrão	Nº de alunos com grau acima da média da turma	Nº de alunos com grau abaixo da média da turma	Total de alunos
<b>A</b>	<b>8,9</b>	<b>1,2</b>	<b>19</b>	<b>7</b>	<b>26</b>
<b>B</b>	<b>6,3</b>	<b>2,9</b>	<b>17</b>	<b>10</b>	<b>27</b>

Fonte: Elaborada pelo autor

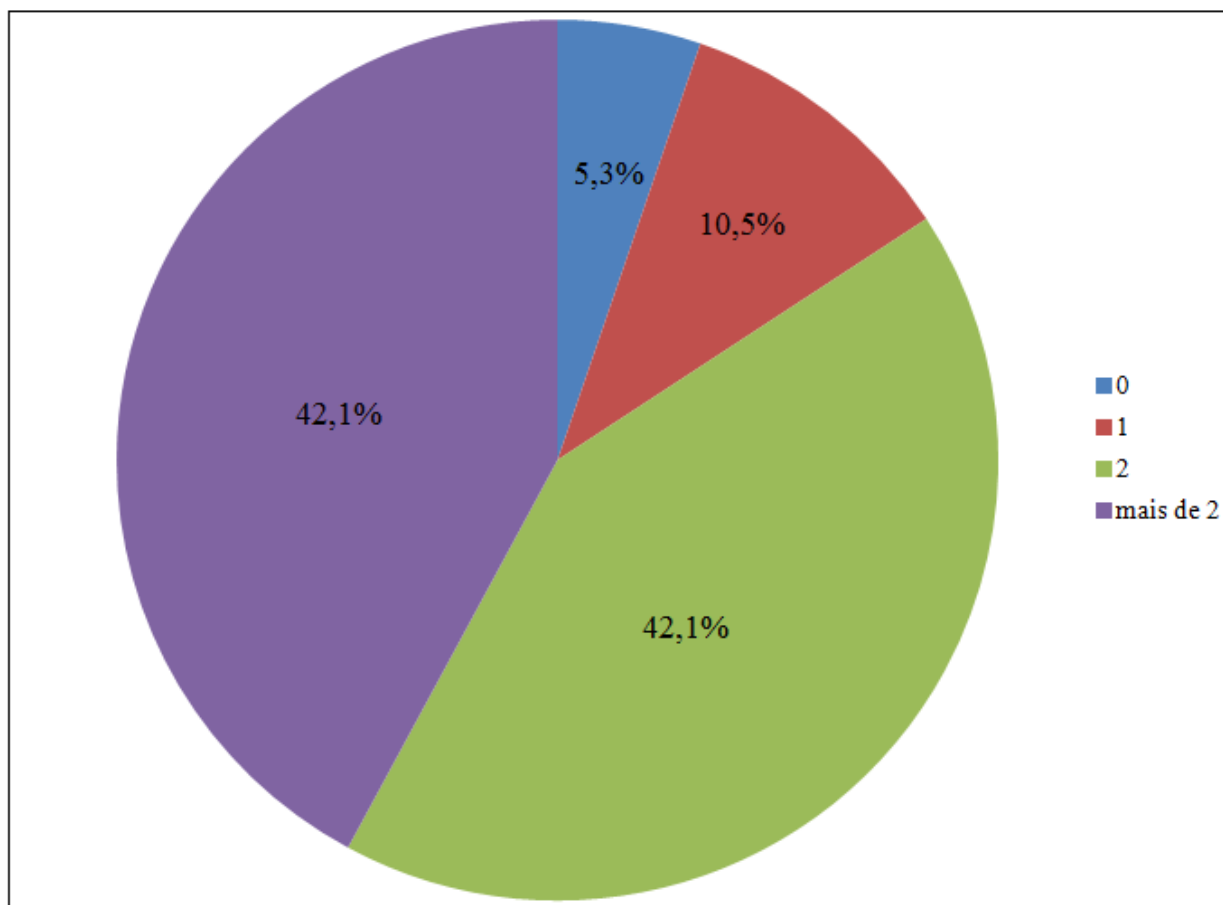
Com os dados apresentados no gráfico e nesta tabela, nota-se que em todos os aspectos o grupo A teve um melhor desempenho que o grupo B, o que corrobora que a aplicação do *software* Geogebra nas aulas foi de grande importância para o aprendizado dos alunos.

## 9 QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS DO GRUPO A

Após o último encontro com o grupo A, no laboratório de informática, foi aplicado aos alunos deste grupo um questionário com a finalidade de coletar dados sobre o seu dia-a-dia com a informática, verificar se o aluno está familiarizado com a vida digital e a sua experiência com o Geogebra.

1ª Questão: Possui quantos computadores em casa?

Gráfico 2 – Questão 1

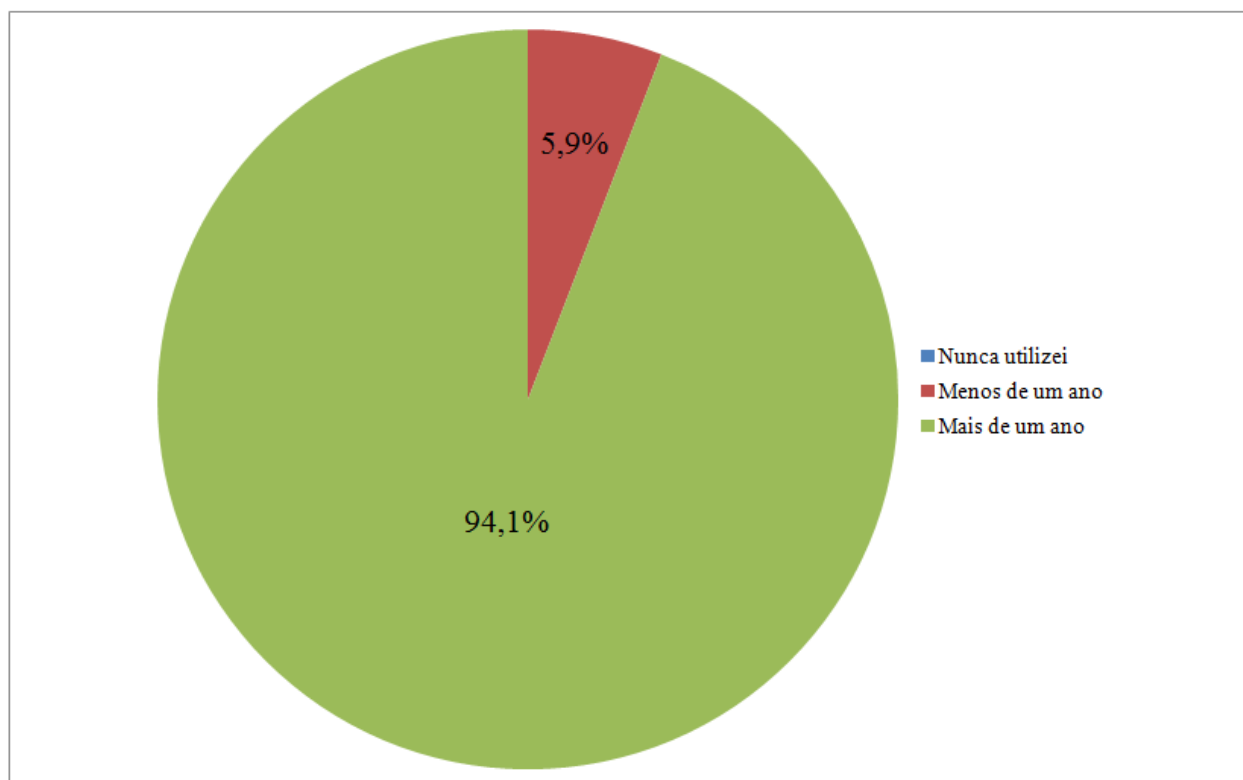


Fonte: Elaborada pelo autor

Segundo o gráfico, 94,7% dos alunos possuem pelo menos um computador em casa, o que possibilita a eles uma maior prática nestes equipamentos.

2ª Questão: Há quanto tempo utiliza computador?

Gráfico 3 – Questão 2

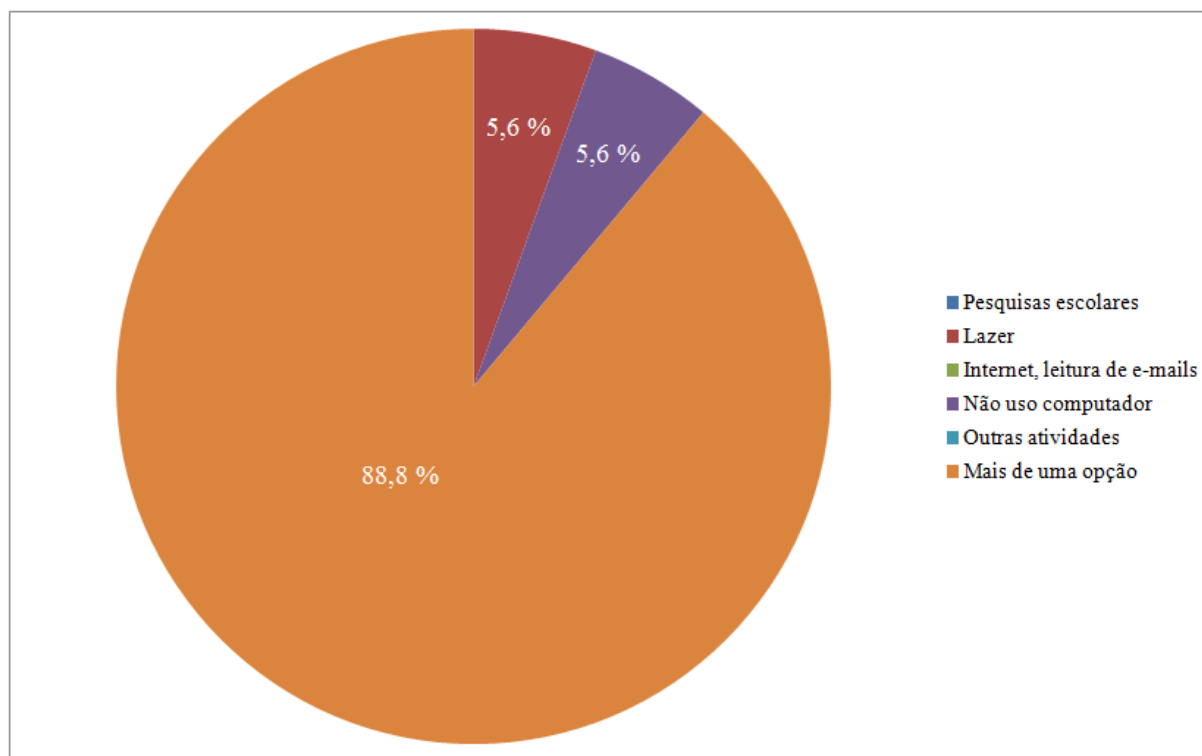


Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme mostrado neste gráfico, a grande maioria dos alunos utiliza computadores, mostrando que estes discentes estão integrados na vida digital, o que explica a facilidade no manuseio do programa Geogebra.

3ª Questão: Para qual finalidade utiliza computador?

Gráfico 4 – Questão 3



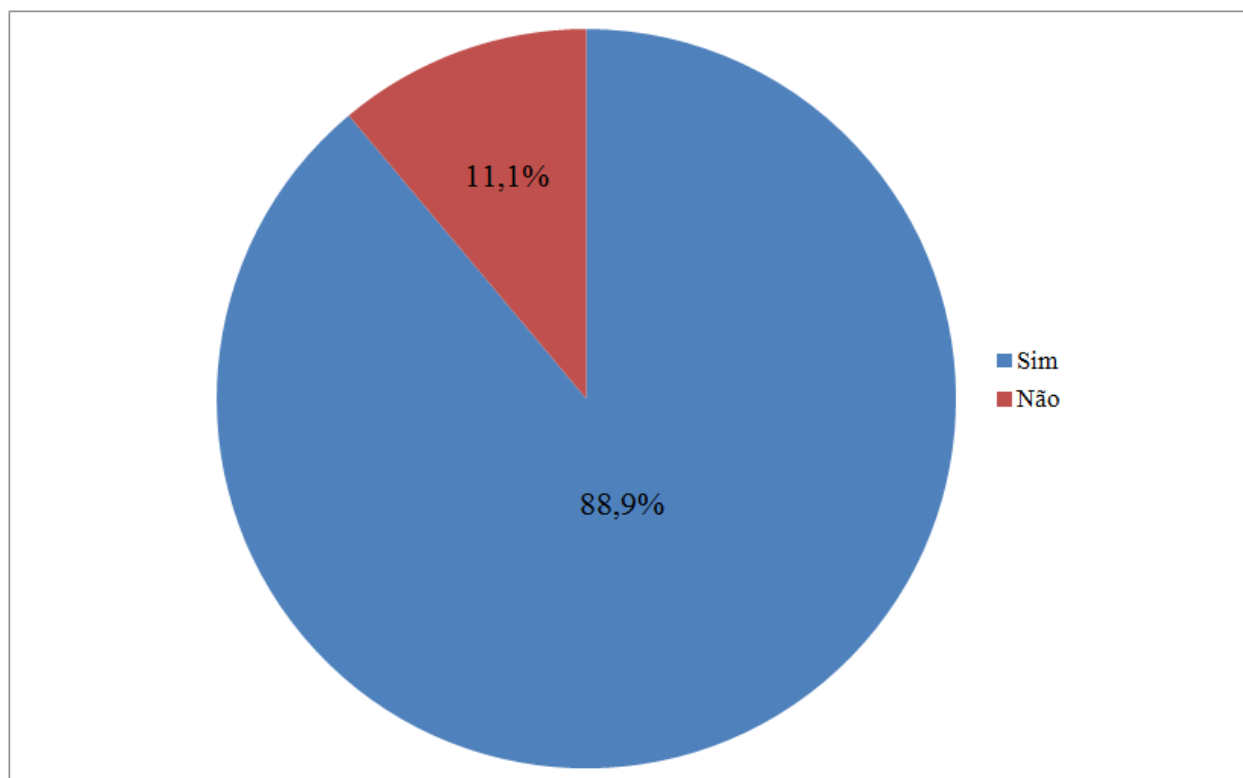
Fonte: Elaborada pelo autor

Apesar de devidamente orientados a preencherem apenas uma opção, aquela que mais se encaixava em sua realidade, diversos alunos preencheram mais de uma opção. Desta forma, para a construção deste gráfico, foi criada o tópico “mais de uma opção”.

Apenas um aluno, dos dezoito que responderam a esta pesquisa, respondeu que não utiliza computador. A grande maioria faz uso da informática para mais de uma das atividades citadas acima. Apenas cinco dos dezesseis alunos que se enquadram no gráfico como “mais de uma opção”, marcaram duas opções, que são “pesquisas escolares e lazer”. Nenhum aluno marcou apenas as opções “internet, leitura de e-mails” e “outras atividades”.

4ª Questão: Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

Gráfico 5 – Questão 4



Fonte: Elaborada pelo autor

Corroborado pela questão 3, como a interface do programa é prática, os alunos, em sua maioria, manusearam sem maiores problemas o *software* Geogebra.

Um dos dois alunos que respondeu não, aluno A1, teceu comentário, como mostrado na figura 8.1. Pelo seu comentário, verifica-se que sua resposta foi “não”, pelo fato de o aluno não ter a prática de manusear equipamentos de informática.

Figura 9.1 – Comentário do aluno A1

4 – Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

( ) Sim

Não

Comente sua resposta:

Achei difícil porque nunca tinha utilizado e eu não sei mexer muito bem no computador, só mesmo pesquisando na internet.

Fonte: Elaborada pelo autor

O outro aluno que não respondeu “sim”, aluno A2, “improvisou” mais uma opção, “mais ou menos”, como mostra a figura 9.2. Mas, para a confecção do gráfico 5, esta resposta foi computada como “não”.

Figura 9.2 – Comentário do aluno A2

4 – Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

( ) Sim

Mais ou menos

( ) Não

Comente sua resposta:

Bem, não é difícil, mas, precisa memorizar muitas coisas.

Fonte: Elaborada pelo autor

Os alunos que responderam positivamente à questão 2, e que comentaram esta questão, foram unânimes em afirmar que o Geogebra é de fácil manuseio, como mostra as figuras 9.3, 9.4 e 9.5.

Figura 9.3 – Comentário do aluno A3

4 – Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

Sim

Não

Comente sua resposta:

Fácil para aprender a digagem.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.4 – Comentário do aluno A4

4 – Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

Sim

Não

Comente sua resposta:

é fácil, muito muito simples.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.5 – Comentário do aluno A5

4 – Você achou o manuseio do programa Geogebra simples?

Sim

Não

Comente sua resposta:

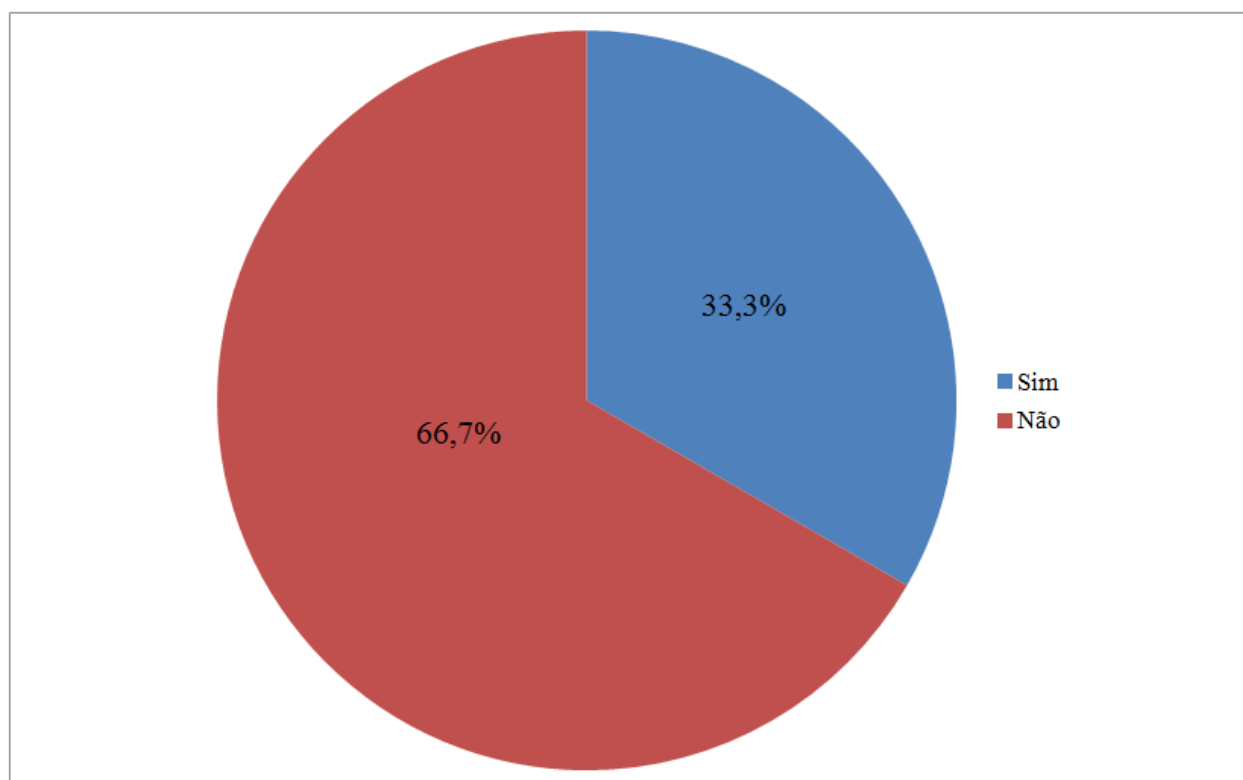
Foi um programa que de maneira simples e legal nos ajudou na compreensão da matéria.

Fonte: Elaborada pelo autor



5ª Questão: Caso possua computador, utilizou o Geogebra em casa, para o estudo do assunto triângulos?

Gráfico 6 – Questão 5

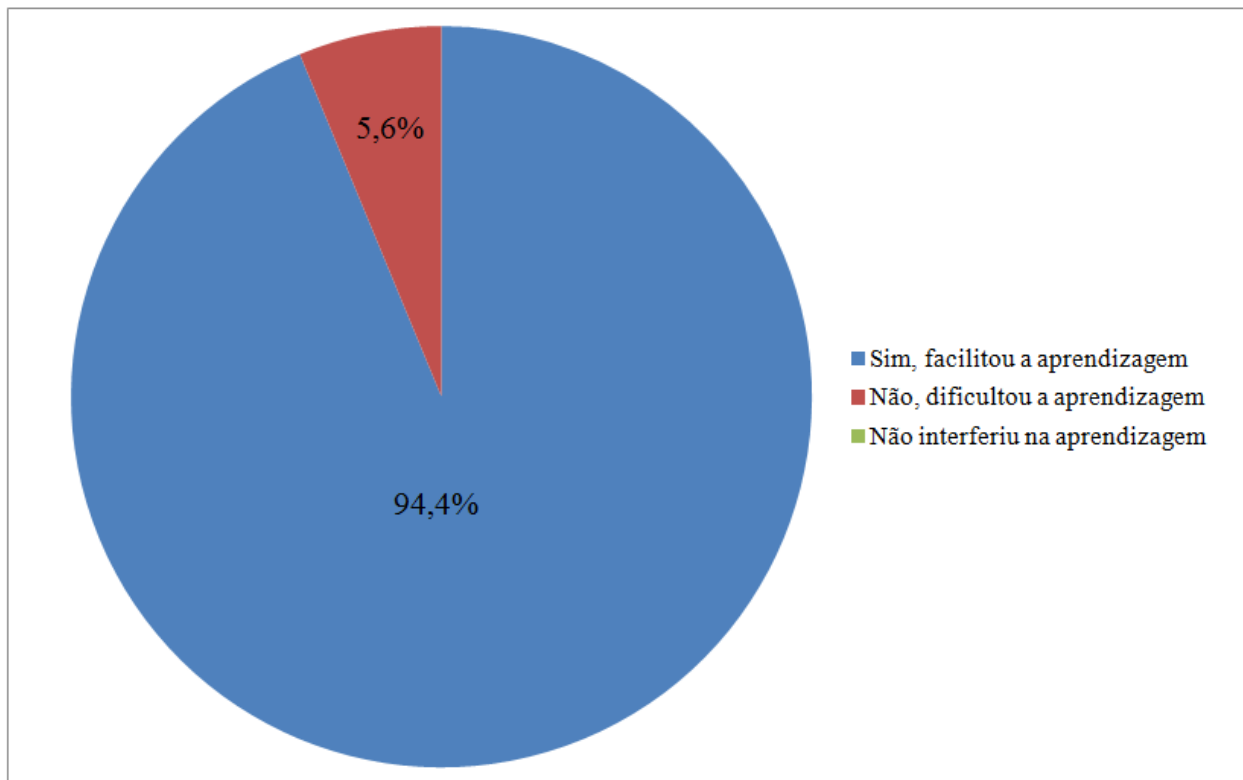


Fonte: Elaborada pelo autor

Dos dezoito alunos que responderam ao questionário, apenas seis estudaram em casa o assunto triângulos com o *software* Geogebra. O autor recomendou aos alunos, que tinham acesso à internet em casa, que acessassem o site oficial do Geogebra e que instalassem gratuitamente o programa em seus computadores.

6ª Questão: O assunto ministrado (triângulos) foi melhor compreendido com o Geogebra?

Gráfico 7 – Questão 6



Fonte: Elaborada pelo autor

Nesta questão, conforme mostra o gráfico 7, a alternativa “não interferiu na aprendizagem” não foi escolhida por nenhum aluno. Apenas um aluno respondeu “não”, aluno A6, pois sente dificuldade em manusear computadores, conforme mostra a figura 9.6. Os alunos que responderam “sim”, responderam que a aula torna-se mais dinâmica, que os alunos interagem mais, como mostra as figuras 9.7, 9.8 e 9.9.

Figura 9.6 – Comentário do aluno A6

6 – O assunto ministrado em sala de aula (triângulos) foi melhor compreendido com o Geogebra?

Sim, facilitou a aprendizagem

Não, dificultou a aprendizagem

Não interferiu na aprendizagem

Comente sua resposta:

Bem, eu acho que na prática existe uma maior compreensão. Mas, eu não tenho muita facilidade de me manusear de computador (digitar, ...)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.7 – Comentário do aluno A7

6 – O assunto ministrado em sala de aula (triângulos) foi melhor compreendido com o Geogebra?

Sim, facilitou a aprendizagem

Não, dificultou a aprendizagem

Não interferiu na aprendizagem

Comente sua resposta:

Faz com que os alunos interajam mais

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.8 – Comentário do aluno A8

6 – O assunto ministrado em sala de aula (triângulos) foi melhor compreendido com o Geogebra?

Sim, facilitou a aprendizagem

Não, dificultou a aprendizagem

Não interferiu na aprendizagem

Comente sua resposta:

Facilitou muito, a gente conseguiu colocar em prática com mais facilidade.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.9 – Comentário do aluno A9

6 – O assunto ministrado em sala de aula (triângulos) foi melhor compreendido com o Geogebra?

Sim, facilitou a aprendizagem

Não, dificultou a aprendizagem

Não interferiu na aprendizagem

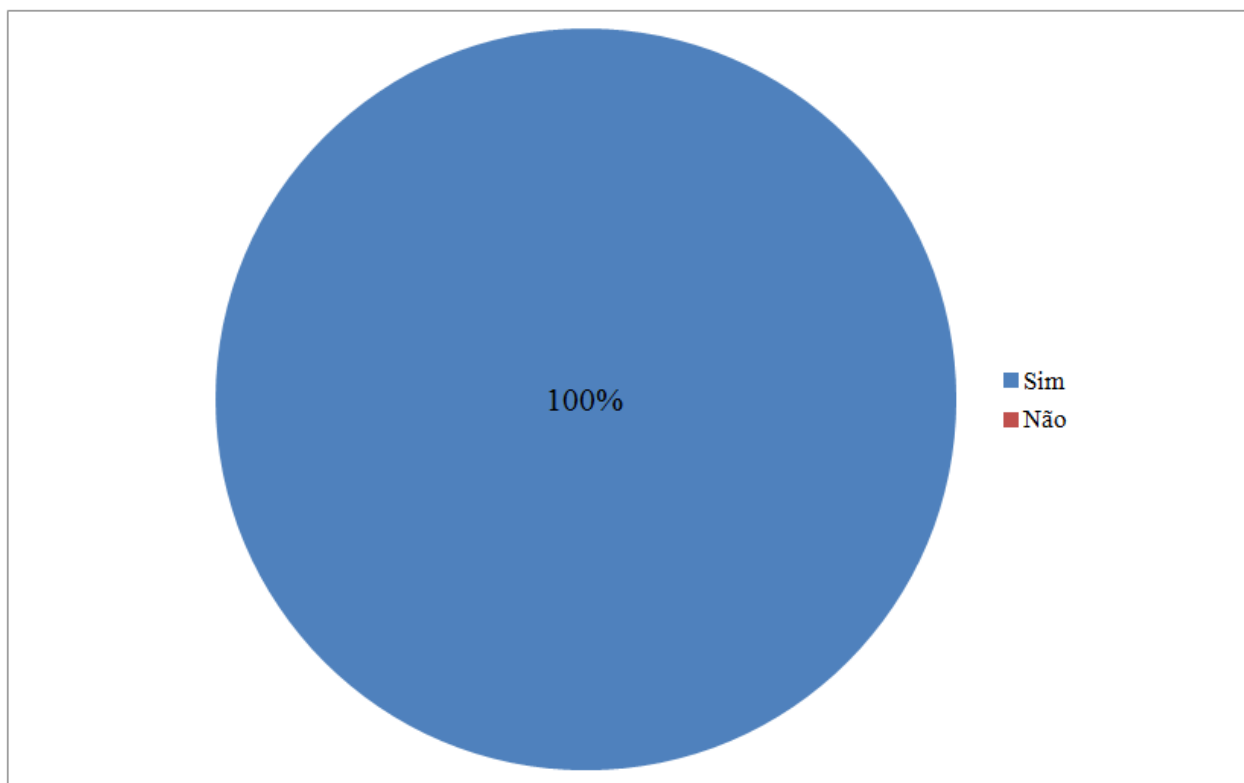
Comente sua resposta:

É mais dinâmico

Fonte: Elaborada pelo autor

7ª Questão: Acha importante a utilização de programas educativos para as aulas de matemática?

Gráfico 8 – Questão 7



Fonte: Elaborada pelo autor

Para esta questão, a resposta foi unânime. Os alunos consideram que programas educativos para as aulas de matemática são importantes para o seu aprendizado, tornando as aulas mais dinâmicas, conforme mostram as figuras 9.10, 9.11, 9.12 e 9.13.

Figura 9.10 - Comentário do aluno A10

7 - Acha importante a utilização de programas educativos para as aulas de matemática?

Sim

Não

Comente sua resposta:

*Para deixar o estudo mais produtivo.*

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.11 - Comentário do aluno A11

7 - Acha importante a utilização de programas educativos para as aulas de matemática?

Sim

Não

Comente sua resposta:

*Sim, pois facilitam a aprendizagem.*

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.12 - Comentário do aluno A12

7 - Acha importante a utilização de programas educativos para as aulas de matemática?

Sim

Não

Comente sua resposta:

Facilita a aprendizagem.

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 9.13 - Comentário do aluno A13

7 - Acha importante a utilização de programas educativos para as aulas de matemática?

Sim

Não

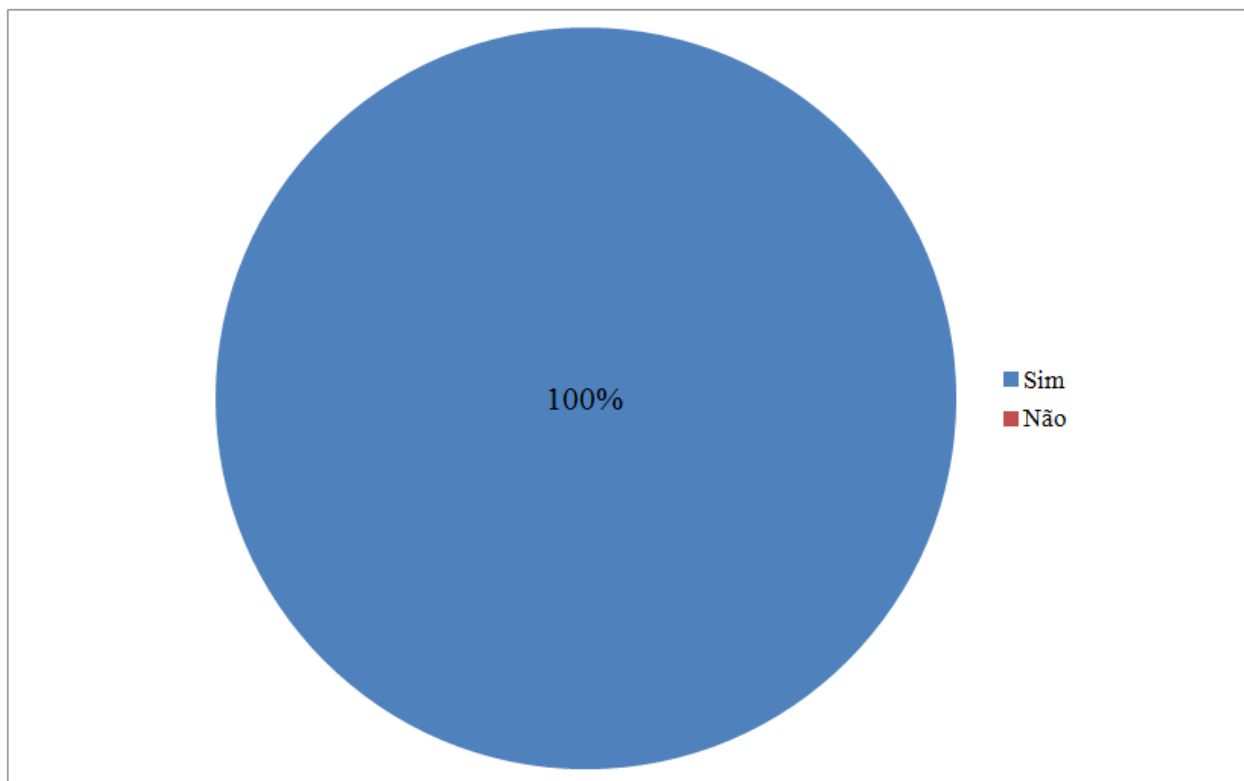
Comente sua resposta:

Pouco tem mais informações do que no livro

Fonte: Elaborada pelo autor

8ª Questão: Gostaria que fossem utilizados com mais frequência em sala de aula?

Gráfico 9 – Questão 8



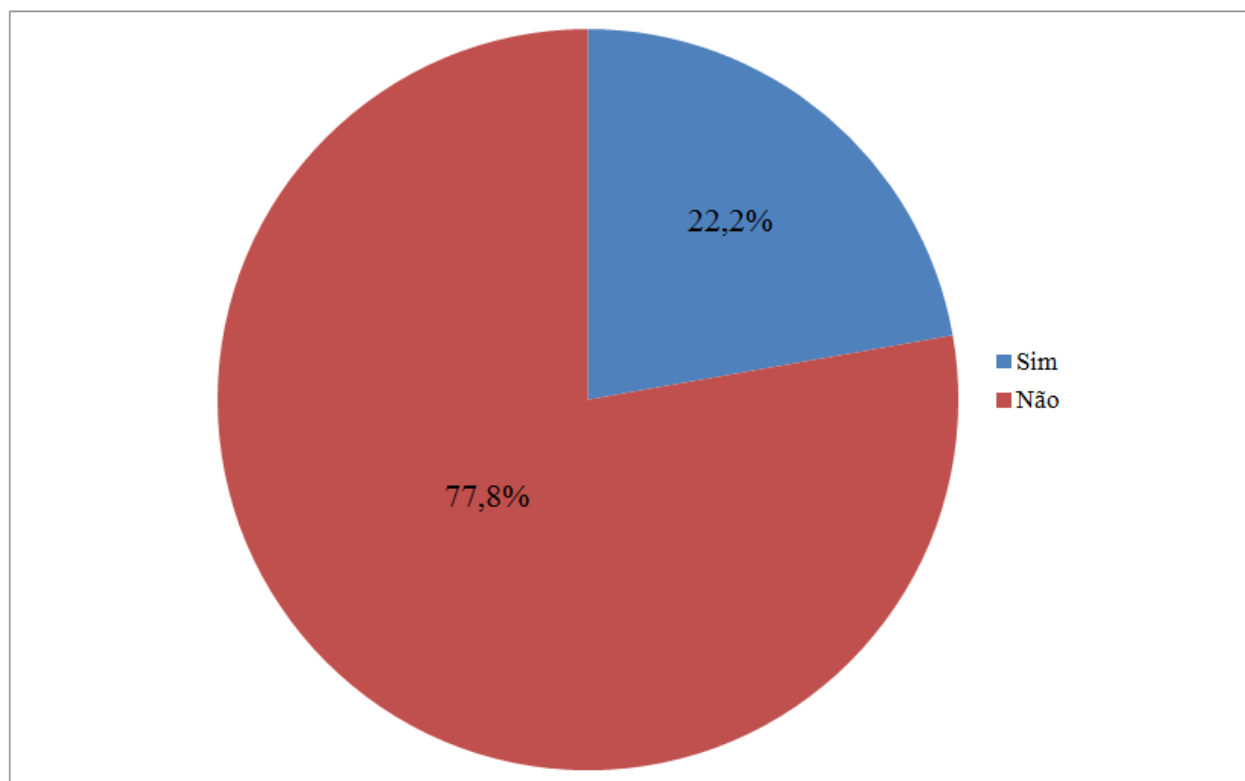
Fonte: Elaborada pelo autor

O resultado das respostas desta questão corrobora as respostas da questão anterior, ou seja, os alunos, inseridos no mundo digital, estão aceitando de maneira natural a inserção da informática na educação.



9ª Questão: Já utilizou algum programa educativo?

Gráfico 10 – Questão 9



Fonte: Elaborada pelo autor

Os alunos que responderam sim, a esta questão, já tinham estabelecido contato com algum programa educativo de diversas disciplinas.

## 10 CONCLUSÃO

O principal objetivo desta pesquisa foi apresentar a importância da implantação do software *Geogebra* para se utilizar a Geometria Dinâmica como meio auxiliar no aprendizado da Geometria, e mostrar, através de atividades em laboratório, este software educacional, onde o professor é o mediador que auxilia o aluno no processo de construção do conhecimento.

No mundo contemporâneo, a informática está presente praticamente em todas as áreas das atividades humanas. O aluno deve estar integrado ao mundo da informática para poder ter maiores chances de sucesso, tanto na vida acadêmica quanto no mercado de trabalho, pois a “alfabetização digital” é o mínimo requerido hoje em dia. Não podemos dar as costas para este grande avanço, logo devemos criar um novo paradigma na educação, que seria a inserção dos computadores em sala de aula, contanto que sejam utilizados de maneira adequada pelos alunos, e principalmente professores. O computador é apenas mais um meio auxiliar de instrução, como o quadro-negro, livro, etc. Ele não substitui de maneira alguma o professor, sendo este fundamental em sala de aula, como sempre foi.

A Geometria Dinâmica é apenas um excelente exemplo do que um computador em sala de aula é capaz de proporcionar. Com sabedoria e criatividade, diversas disciplinas também podem utilizar a informática como meio auxiliar de instrução e tornar o ensino nas escolas mais dinâmico e completo.

A escolha do software que será aplicado em sala de aula será muito importante para o ensino-aprendizagem do aluno. Existem inúmeros *softwares* utilizados na área de matemática. O professor não precisa ser um especialista em informática para ministrar aulas com a utilização de computadores, é preciso apenas dominar o software e o assunto que este tratará.

O autor espera que com este trabalho os professores, que lecionam tanto matemática quanto outras disciplinas, possam observar a grande importância do uso da Geometria Dinâmica nas salas-de-aula, e visto uma pequena demonstração do que o *software Geogebra* é capaz.

**REFERÊNCIAS:**

BALDIN, Yuriko Yamamoto; Villagra, Guillermo Antônio Lobos. **Atividades com Cabri-Géomètre II**. São Paulo : Edufscar, 2002.

COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc, 1969.

ESPÍRITU, Solimar Flores. **Puntos notables, teoría y práctica**. Lima-Perú: Lumbreras, 2012.

EVES, Howard. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula – geometria**. São Paulo : Atual, 1992.

GRAVINA, Maria Alice. **Os princípios da Geometria Dinâmica**. Disponível em: <[http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo\\_mat/curcom2/artigo/arti3.htm](http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/curcom2/artigo/arti3.htm)> Acesso 19 Mar 2014.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Analítica**. v. 7. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993.

MONTEIRO, Márcio Andrade. **Revista do professor de matemática** 55, 2004, p. 26 – 28.

NÉRI, Isaiás Cordeiro. **Geometria dinâmica**. Disponível em: <<http://www.geometriadinamica.com.br/>> Acesso 19 Mar 2014.

SANTOS, Neide. **Diferentes usos do computador na Educação**  
Disponível em: < <http://www.c5.cl/tise98/html/trabajos/interat/>> Acesso 19 Mar 2014.

SOUZA, FRANCISCO A. L. **O uso do *software* geogebra como ferramenta pedagógica no estudo de funções quadráticas em turmas de 9º ano do ensino fundamental do cmf**. 2012. 106 f. Dissertação (mestrado profissional em ensino de ciências e matemática) – Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2012.

**APÊNDICE A – SOLICITAÇÃO DE AUTORIZAÇÃO PARA APLICAR A  
PESQUISA NO COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA AO SUBDIRETOR DO CMF**



**MINISTÉRIO DA DEFESA  
EXÉRCITO BRASILEIRO  
D E C Ex - D E P A  
COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA  
(Es M do Ceará/1889)  
CASA DE EUDORO CORRÊA**

DIEx nº 06 – Sind / CMF  
EB: 64253007890/2013- 14

Fortaleza-CE, 20 de fevereiro de 2014.

**Do** 1º Ten QCO Nelson Claudiano da Silva Jr

**Ao** Sr Subdiretor de Ensino do CMF

**Assunto:** Emprego de alunos do CMF em trabalhos de pesquisa

**Anexos:** 01 (uma) Carta do Prof. Dr Jonatan Floriano da Silva

Solicito à Subdireção de Ensino do Colégio Militar de Fortaleza disponibilizar 2 (duas) turmas de alunos de 8º ano do Ensino Fundamental, em 2014, para atuarem em trabalho de pesquisa no próprio colégio, de acordo com os horários normais das turmas no turno da manhã, conforme solicitação, via carta, do Professor Dr Jonatan Floriano da Silva e do projeto de pesquisa do Professor 1º Ten Nelson Claudiano da Silva Junior.

---

NELSON CLAUDIANO DA SILVA JUNIOR - 1º TEN QCO  
Professor de Matemática do 8º ano do EF no CMF

**APÊNDICE B – CARTA DO ORIENTADOR AO SUBDIRETOR DO CMF**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA**

Fortaleza, 18 de fevereiro de 2014.

Para: Subdiretor de Ensino do Colégio Militar de Fortaleza

Prezado Sr Cel Passos,

Venho por meio desta, solicitar a esta conceituada instituição de ensino a permissão para empregar seus alunos na pesquisa “Uma abordagem introdutória ao estudo de triângulos com o *software* Geogebra”, projeto de mestrado do 1º Ten Nelson Claudiano da Silva Junior, aluno do curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da Universidade Federal do Ceará.

Ressalto que o referido projeto, além de cumprir pré-requisitos na obtenção de título de mestre ao profissional acima citado, colaborará com a prática pedagógica de outros professores de Matemática que poderão usufruir do produto final dessa pesquisa. Esse produto será um material didático, no qual serão apresentadas sugestões de desenvolvimento de atividades com a utilização do *software* educativo GeoGebra para o estudo de triângulos.

Certo de que a presente pesquisa não irá, de forma alguma, comprometer o aprendizado e a estrutura curricular das turmas de 8º ano do Ensino Fundamental do Colégio Militar de Fortaleza, solicito então sua colaboração e me coloco à disposição para eventuais esclarecimentos.

Atenciosamente,

---

Prof. Dr Jonatan Floriano da Silva

Orientador do Projeto

**APÊNDICE C – COMUNICATIVO AOS RESPONSÁVEIS PELOS ALUNOS DO  
GRUPO A, PARTICIPANTES DA PESQUISA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**DADOS DE IDENTIFICAÇÃO**

**Pesquisador:** Prof. Nelson CLAUDIANO da Silva Junior – 1º Ten.

**Título da Pesquisa:** Uma abordagem introdutória ao estudo de triângulos com o *software* Geogebra.

**Orientador:** Prof. Dr. Jonatan.

**Instituição a que pertence o Pesquisador:** Colégio Militar de Fortaleza (CMF).

**Telefone de contato do Pesquisador:** (85) 3388-7803 (Coord. do 8º ano do CMF).

**INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE E RESPONSÁVEL**

O(a) aluno(a) sob vossa responsabilidade está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa que tem como objetivo analisar se o uso do *software* educativo GeoGebra, como ferramenta auxiliar da prática pedagógica, proporciona a alunos de 8º ano do Ensino Fundamental (EF) do CMF uma melhor aprendizagem do assunto de geometria - triângulos.

A pesquisa se desenvolverá durante os horários normais das aulas de Matemática para as turmas de 8º ano do EF do CMF, no período de 24 de fevereiro a 07 de março de 2014.

Dos sete encontros previstos para esse período, três serão realizados no laboratório de informática e os demais em sala de aula. O *software* GeoGebra será utilizado como ferramenta auxiliar da prática pedagógica para os alunos que estão recebendo este termo de consentimento.

O assunto a ser estudado, triângulos, será desenvolvido normalmente de acordo com o que foi planejado no início do corrente ano letivo. Assim não se comprometerá a estrutura curricular das turmas de 8º ano do EF do CMF.

A principal colaboração do aluno para a pesquisa será no último encontro, quando ele responderá um teste (avaliação), com o qual se poderá aferir a sua aprendizagem, e um questionário sobre a utilização pedagógica de *softwares* educativos. Ao teste será atribuída uma nota a ser computada na Avaliação Parcial do 1º Bimestre.

A participação do aluno é voluntária, isto é, a qualquer momento ele pode recusar-se a responder qualquer pergunta ou desistir de participar da pesquisa sem qualquer prejuízo. Voluntariar-se nesta pesquisa não envolve riscos à saúde e não aferirá nenhum privilégio, seja ele de caráter financeiro ou de qualquer natureza.

Serão garantidos, durante qualquer etapa da pesquisa, o sigilo e a privacidade aos participantes. Na apresentação dos resultados o aluno será identificado por nome fictício, tendo a sua identificação preservada.

Fortaleza, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

---

Assinatura do responsável pela pesquisa

Declaro estar ciente deste Termo de Consentimento e estou de acordo em autorizar a participação nesta pesquisa do aluno \_\_\_\_\_ de número \_\_\_\_\_ sob a minha responsabilidade.

Fortaleza, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

---

Assinatura do responsável pelo Aluno

**APÊNDICE D – COMUNICATIVO AOS RESPONSÁVEIS PELOS ALUNOS DO  
GRUPO B, PARTICIPANTES DA PESQUISA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ  
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**DADOS DE IDENTIFICAÇÃO**

**Pesquisador:** Prof. Nelson CLAUDIANO da Silva Junior – 1º Ten.

**Título da Pesquisa:** Uma abordagem introdutória ao estudo de triângulos com o *software* Geogebra.

**Orientador:** Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

**Instituição a que pertence o Pesquisador:** Colégio Militar de Fortaleza (CMF).

**Telefone de contato do Pesquisador:** (85) 3388-7803 (Coord. do 8º ano do CMF).

**INFORMAÇÕES AO PARTICIPANTE E RESPONSÁVEL**

O(a) aluno(a) sob vossa responsabilidade está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa que tem como objetivo analisar se o uso do *software* educativo GeoGebra, como ferramenta auxiliar da prática pedagógica, proporciona a alunos de 8º ano do Ensino Fundamental (EF) do CMF uma melhor aprendizagem do assunto de geometria - triângulos.

A pesquisa se desenvolverá durante os horários normais das aulas de Matemática para as turmas de 8º ano do EF do CMF, no período de 24 de fevereiro a 07 de março de 2014.

O assunto a ser estudado, triângulos, será desenvolvido normalmente de acordo com o que foi planejado no início do corrente ano letivo. Assim não se comprometerá a estrutura curricular das turmas de 8º ano do EF do CMF.

Os alunos que estão recebendo este termo de consentimento, a princípio, não terão contato com o *software* GeoGebra. O acesso ao *software* será realizado por alunos de outra turma. No



caso de a pesquisa apontar que o uso do GeoGebra contribui para a aprendizagem dos alunos, serão desenvolvidas atividades referentes ao assunto de funções quadráticas com a utilização desse *software*.

A principal colaboração do aluno para a pesquisa será no último encontro, quando ele responderá um teste (avaliação), com o qual se poderá aferir a sua aprendizagem. Ao teste será atribuída uma nota a ser computada na Avaliação Parcial do 1º Bimestre.

A participação do aluno é voluntária, isto é, a qualquer momento ele pode recusar-se a responder qualquer pergunta ou desistir de participar da pesquisa sem qualquer prejuízo. Voluntariar-se nesta pesquisa não envolve riscos à saúde e não aferirá nenhum privilégio, seja ele de caráter financeiro ou de qualquer natureza.

Serão garantidos, durante qualquer etapa da pesquisa, o sigilo e a privacidade aos participantes. Na apresentação dos resultados o aluno será identificado por nome fictício, tendo a sua identificação preservada.

Fortaleza, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

---

Assinatura do responsável pela pesquisa

Declaro estar ciente deste Termo de Consentimento e estou de acordo em autorizar a participação nesta pesquisa do aluno \_\_\_\_\_ de número \_\_\_\_\_ sob a minha responsabilidade.

Fortaleza, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2014.

---

Assinatura do responsável pelo Aluno

**APÊNDICE E – AVALIAÇÃO APLICADA AOS ALUNOS****COLÉGIO MILITAR DE FORTALEZA  
3ª VI DE MATEMÁTICA DO 1º BIMESTRE**

NOME:

TURMA:

1ª QUESTÃO. Em cada caso, analise através de construção com régua e compasso, se é possível construir um triângulo com as medidas dos lados indicadas. Justifique cada construção.

a) 6, 10 e 18

Justifique:

---

---

b) 3, 10 e 7

Justifique:

---

---

c) 8, 4 e 6

Justifique:

---

---

d) 3, 4 e 5

Justifique:

---

---

2ª QUESTÃO. Um triângulo possui dois lados que medem 11 cm e 6 cm. Quais são as medidas possíveis para o terceiro lado desse triângulo?

Justifique.

3ª QUESTÃO. Construa um triângulo qualquer e localize o seu:

a) baricentro

c) circuncentro

d) incentro

4ª QUESTÃO. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do baricentro G. Encontre o vértice A e construa o triângulo ABC.