UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ – UFC

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES PARA CÁLCULO DE VOLUMES

NICOMEDES ALBUQUERQUE PONTES

FORTALEZA - CE

2014

NICOMEDES ALBUQUERQUE PONTES

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES PARA CÁLCULO DE VOLUMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como, requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA - CE
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Federal do Ceará

Biblioteca do Curso de Matemática

Pontes, Nicomedes Albuquerque

O Princípio de Cavaliere e suas Aplicações para o Cálculo de Volume/ Nicomedes Albuquerque Pontes. – 2014
53 f: il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Princípio de Cavalieri. 2. Sólidos geométricos. 3. Volumes I. Título.

NICOMEDES ALBUQUERQUE PONTES

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI E SUAS APLICAÇÕES PARA O CÁLCULO DE VOLUMES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como, requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Dissertação apresentada em: 26/ 04/ 2014.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo – Orientador

Universidade Federal do Ceará – UFC

____

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

Universidade Federal do Ceará – UFC

____

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira

Universidade Estadual do Ceará – UECE

A meu avô José Machado de Albuquerque (25/01/2008) por ser uma ótima pessoa e pelo exemplo de homem que foi.

In memorian

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente a meus pais, José Wilson Pontes e Terezinha de Jesus Albuquerque, a meus irmãos, Wilza Albuquerque Pontes e Daniel Albuquerque Pontes a meus avós, e a Valéria Souza, que foram pessoas mais próximas de mim e que me deram muito força para estudar.

Aos meus tios, primos e sobrinho pela boa convivência e amizade.

Agradeço também ao professor e orientar Marcelo Melo, pelas boas aulas, preocupação com os alunos, andamento da turma e ter aceitado ser meu orientador.

A todos os professores que nos ensinaram nesse curso do PROFMAT, e todos os colegas pelo espírito de equipe e de ajuda ao próximo. Em especial agradeço a Fabrício Veras e Daniel Marques que estiveram mais próximos, encorajando a juntos estudarmos cada vez mais durante o curso, e também a Tiago Gadelha e Daniel Brandão, que em muitos momentos deram aulas quando tínhamos dúvidas.

Em especial um professor que tive no ensino fundamental, Carlos Alberto, que me fez gostar da matemática e a professora da graduação na UVA, Maria José, que me fez acreditar que eu era capaz de chegar mais longe em meus estudos.

Agradeço a Áurea Galdino pelo sua grade ajuda na formatação do trabalho e pelo grande incentivo que me trouxe muita confiança. Também a Willian Sousa pela ajuda na construção das figuras.

E também a CAPES pelo incentivo financeiro, pois sem ele seria muito difícil manter os custos com as viagens.

Aos meus amigos e colegas de profissão, que sempre me incentiva e me apoiaram em vários momentos difíceis que passei durante esses dois anos.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de forma efetiva para que pudesse realizar esse objetivo.

DEDICATÓRIA

Ao meu amado e genial avô, José Machado de Albuquerque, pelas histórias que me proporcionou tantos saberes.

Também as pessoas fundamentais em minha vida, meus pais, José Wilson Pontes e Terezinha de Jesus Albuquerque, personagens principais da minha história enquanto pesquisador.

Penso noventa e nove vezes e nada descubro; deixo de pensar, mergulho em profundo silêncio - e eis que a verdade se me revela."

Albert Einstein

RESUMO

O trabalho foi construído no sentido de evidenciar o ensino inadequado do cálculo de volume no Ensino Médio onde, na maioria das vezes, são colocadas fórmulas para que alunos decorem, com o intuito de resolverem questões inerentes, sem nenhuma compreensão dos conteúdos ou como surgiram. Portanto, o objetivo desse trabalho é apresentar como axioma o Princípio de Cavalieri, para com aplicações do mesmo, gerar um encadeamento das ideias, e chegarmos às fórmulas dos volumes dos sólidos geométricos mais comuns no Ensino Médio: o prisma, o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera, destacando a forma mais clara de ensino desse conteúdo para os alunos.

Palavras-chaves: Princípio de Cavalieri, sólidos geométricos, volume.

ABSTRACT

The work was constructed in order to reveal the inadequate teaching of the volume calculation in high school where, in most cases, formulas are placed so that students memorize in order to resolve issues involved, without any understanding of the content or how they came about. Therefore, the aim of this paper is to present as an axiom the principle of Cavalieri, towards the same applications, generate a chain of ideas, and get to the formulas of the volumes of common geometric solids in high school: prism, cylinder, pyramid, cone and sphere, highlighting the clearest form of teaching that content to students.

Keywords: Principle of Cavalieri, geometric solids, volume.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As ideias iniciais desse trabalho ocorreram devido ao ensino incorreto de volume dos sólidos geométricos no Ensino Médio, onde o mesmo resume-se a fórmulas para calcular volume, sem nenhum entendimento e demonstrações, sem favorecer o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Os livros didáticos, em sua maioria não trazem as demonstrações através do Princípio de Cavalieri, e os que trazem são pouco explorados pelos professores e de qualquer forma os alunos ficam sem aprender.

Inicialmente, no capítulo 01, vamos comentar um pouco sobre a história do desenvolvimento da geometria espacial, com foco, nos volumes dos sólidos, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Posteriormente, daremos ênfase a historia de Bonaventura Cavalieri, que formulou dois princípios fundamentais para a matemática, um sobre área e o outro sobre volume, que tomados como axiomas, provam as áreas de algumas figuras planas e o volume de alguns sólidos geométricos, destaque em nosso estudo.

Em posterior, discutiremos inicialmente a ideia de volume tendo com unidade base o cubo de aresta unitária, em seguida, o volume de um bloco retangular e por último, a definição formal de volume, chegando a uma problemática que iria dificultar a continuação do ensino de volume no Ensino Médio.

Seguidamente, apresentaremos a solução para problemática do capítulo anterior, que é uso do Princípio de Cavalieri para o cálculo de volume, onde apresentaremos o mesmo como axioma, e daremos a demonstração formal em apêndice.

Para finalizar, faremos as aplicações dos Princípios de Cavalieri para chegar às fórmulas dos volumes do prisma, cilindro, pirâmide, cone e esfera, que são os sólidos apresentados aos alunos do Ensino Médio.

CAPÍTULO 01

BREVE RELATO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA ESPACIAL

Não há uma data certa para o surgimento da geometria espacial, mas os dados, segundo, Howard Eves, dizem que os babilônios do período 2000 a.C. a 1600 a.C. já eram capazes de determinar volume de paralelepípedos. Porém a Geometria teve grande evolução, por volta de 300 a.C, com o grande matemático Euclides, destacando esse assunto em sua grande obra, “Os Elementos de Euclides” dividida em 13 livros, onde o cálculo de volume é destaque no Livro XII. Os principais teoremas demonstrados nesse livro são os seguintes:

- As pirâmides e os primas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
- Todo prima triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes.
- O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.
- Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
- O volume das duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.

De forma mais precisa, os volumes dos prismas e cilindros são proporcionais à base e à altura. Tendo como volume a expressão $V = k.(base).(altura)$, onde k é constante de proporcionalidade. Já o volume da pirâmide e do cone ficaria $V = \frac{k}{3}.(base).(altura)$. Considerando o cubo de aresta 1 como unidade de volume, temos $k = 1$, ficando com as fórmulas usuais de volume. Isso confirma que Euclides, já em sua época, sabia calcular o volume desses sólidos.

Já sobre o volume da esfera, dado por Euclides, tem a expressão $V = k.R^3$, sendo R o raio da esfera. Mas não concluiu nada sobre o valor de k. Apenas depois de aproximadamente um século Arquimedes provou que $k = 4\pi/3$, completando a formula do volume da esfera.

Nos dias atuais o método mais eficiente e geral para obter volume do cilindro, cone e esfera é o cálculo infinitesimal, com integração de funções elementares. Os métodos infinitesimais que levaram à noção de integral foram iniciados por Arquimedes. Muito depois dele, no início do século XVII, o padre italiano, Bonaventura Cavalieri deu uma grande contribuição nessa área com o livro “Geometria dos Indivisíveis”.

No entanto, o Cálculo foi desenvolvido por Newton e Leibniz, sendo o primeiro considerado o criador do Cálculo, na segunda metade do século XVII. Isso a partir de trabalho iniciados por Fermat e Descarte, e mais antigamente pelos matemáticos já citados no parágrafo anterior.

CAPÍTULO 02

FALANDO DE UM GRANDE GÊNIO[1]

Imagem 1- Bonaventura Cavalieri

Bonaventura Cavaliere nasceu em Milão, Itália, em 1598 e foi batizado como Francesco Cavalieri. E em Milão passou sua infância e iniciou seus estudos. O nome Bonaventura, Cavalieri recebeu aos 15 anos, quando se juntou a ordem religiosa dos Jesuados em Milão. É considerado discípulo de Galileu e atuou como professor de matemática na Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Contribuiu com a matemática e a ciência, deixando obras abrangendo a matemática, óptica e astronomia. Foi o grande responsável pela introdução dos logaritmos na Europa.

Bonaventura se tornou um matemático muito conhecido. Porém a obra que mais o destacou, sua maior contribuição à matemática, é o tratado Geometria *indivisilibus,* publicado inicialmente em 1635. Nesse trabalho, ele apresenta métodos dos indivisíveis, tendo como inspiração Demócrito (c. 410 a.C) e Arquimedes (c. 287-212 a.C), e com maior ênfase no trabalhos e tentativas de Kepler de achar áreas e volumes de certas figuras planas e espaciais.

---

[1] Imagem retirada do livro Introdução à História da Matemática, Autor: Eves, Howard.

Dessa obra, destaca-se dois resultados sobre área e volume, chamados de Princípios de Cavalieri:

1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Os princípios de Cavalieri usados como axiomas podem resolver diversos problemas de área e volume, evitando o uso do cálculo integral moderno. Ao passo que os alunos do Ensino Médio brasileiro, que não possuem o cálculo em sua grade curricular, sejam capazes de resolver problemas de área e volume apenas com esses princípios.

CAPÍTULO 03

VOLUME A PARTIR DO BLOCO RETANGULAR

3.1. IDEIA DE VOLUME

Na sala de aula, recomenda-se que antes de definir formalmente volume, o professor deva apresentar uma ideia intuitiva e alguns exemplos para que o aluno entenda com mais facilidade o significado do volume. De forma bem prática e direta pode-se proceder da seguinte forma: “O volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado”.

A partir dessa ideia, podem ser feitas diversas comparações e cálculos de volume que provoquem a atenção do aluno:

Situação 01

Se forem pegas uma garrafa e uma panela, e deseja-se verificar qual tem maior volume, basta completar a garrafa de água e despejar na panela. Desse modo, se a água transbordar, o volume da garrafa é maior, caso contrário, o da panela é maior. Já para comparar o volume de objetos impermeáveis, pode-se utilizar um recipiente de vidro com um marcador de volume e com água até onde se queira, vamos supor para nosso exemplo que o recipiente está até a metade com água. Insere-se um objeto irregular dentro do recipiente como um parafuso, por exemplo. Logo vai aumentar o nível de água no recipiente, e assim conclui-se que esse aumento é volume do mesmo.

Situação 02

Outro experimento pode ser obtido utilizando-se um copo e uma panela: se enchermos várias vezes o copo e despejarmos na panela até enchê-la, será determinado o volume da panela. Com a unidade de medida sendo o copo, digamos que, se 10 copos cheios de água foram necessários para encher a panela, o volume da panela será 10 copos. Porém, é válido destacar que esse resultado é pouco provável porque raramente esse resultado vai ser inteiro.

Além desse problema, podem aparecer objetos muito grandes ou muito pequenos. Nesses casos, tem-se a necessidade de obter um método para o cálculo do volume, que deve ser realizado utilizando-se um objeto simples e conhecido em sua forma e dimensão. E esse objeto, tradicionalmente a unidade de volume, é o cubo, cuja aresta mede uma unidade de comprimento, denominado cubo unitário. Por exemplo, um cubo de $1\,dm$ de aresta, seu volume é chamado de decímetro cúbico (dm^3):

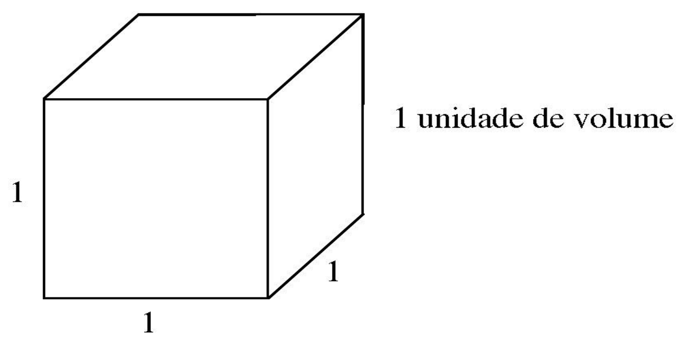


Figura 1 - Cubo unitário

A partir disso, o volume de um sólido é o número de vezes que ele contém o cubo unitário. Porém, ainda não estamos prontos para calcular volumes de qualquer sólido. Mas vamos dar mais um paço nesse estudo, pois já podemos determinar através de outros recursos da matemática o volume do bloco retangular.

3.2. O VOLUME DO BLOCO RETANGULAR

O bloco retangular (ou paralelepípedo retângulo) é um poliedro composto por 6 retângulos perpendiculares dois a dois quando adjacentes, perfeitamente determinado por suas dimensões: comprimento (a), largura (b) e altura (c).

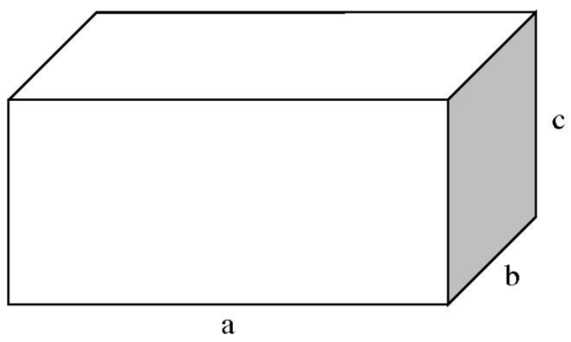


Figura 2 - Bloco Retangular

Vamos considerar um bloco retangular abaixo, de dimensões: 5 cm, 2 cm, 3 cm.

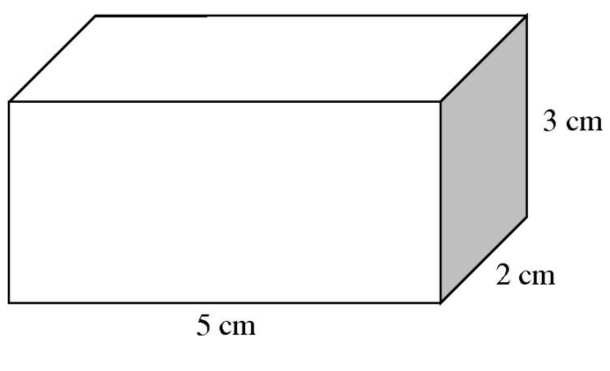


Figura 3 - Bloco Retangular de dimensões inteiras.

É fácil verificar que são necessário *30* cubos de *1* cm de aresta para formar o paralelepípedo. Pois, na primeira “camada” temos $5x2 = 10\, cubinho\ de\ areas\ 1\ cm$, e como temos três camadas de altura, o volume do bloco será $30\,cm^3$. Nesse caso, com dimensões inteiras ficou simples de verificar o volume. E se fossem de dimensões racionais. Por exemplo, vamos determinar o volume do paralelepípedo retângulo de dimensões $3{,}2\ cm, 2{,}4\ cm\ e\ 2\ cm$.

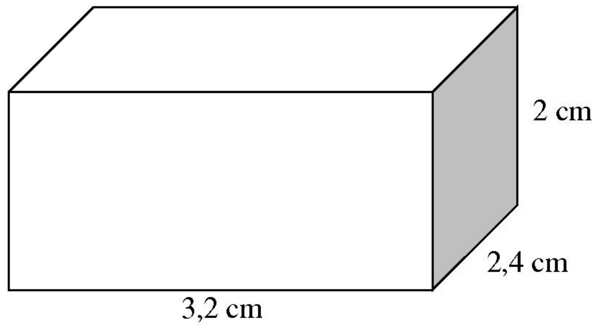


Figura 4 - Bloco Retangular de dimensões racionais.

Nesse caso, vamos dividir cada aresta do cubo unitário, que mede 1 cm, em *10* partes iguais (figura 5) e obtemos cubinhos de aresta *1/10*.

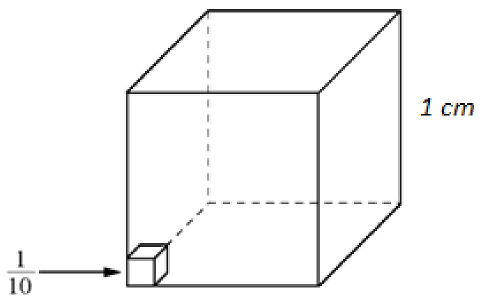


Figura 5 - Cubo de aresta 1 dividido em cubinhos de aresta 1/10.

Sendo fácil de perceber que esse cubinho é *1/1000* do cubo de aresta *1* cm, logo seu volume é v =*1/1000* cm^3. Voltando para o paralelepípedo inicial, a quantidade de cubinhos de *1/10* de aresta, para preencher o bloco retangular é: $32x24x20$ cubinhos. Como o volume do bloco é a quantidade de cubinhos que cabem nele multiplicados pelo volume de um cubinho, portanto, temos:

$$V = 32x24x20x \ \frac{1}{1000} = \frac{32}{10} \ x \ \frac{24}{10} \ x \ \frac{20}{10} = 3{,}2 \ x \ 2{,}4 \ x \ 2$$

Esses exemplos servem para mostrar que o volume do bloco retangular com dimensões racionais, é calculado com o produto das suas dimensões. Para compreensão inicial dos discentes é satisfatório, mas podemos utilizar um método mais geral, já que nesse momento ambos já estão compreendendo melhor o cálculo do volume.

Vamos utilizar um paralelepípedo retângulo qualquer de dimensões $x, y \ e \ z$ (figura 6).

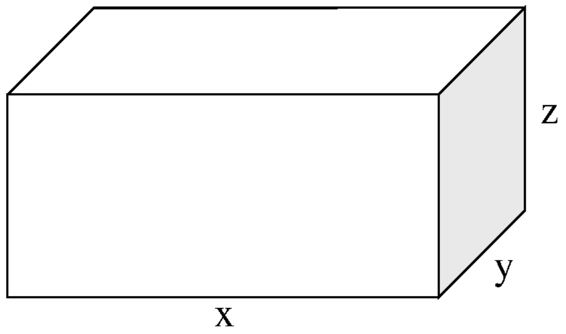


Figura 6 - Paralelepípedo Retângulo de dimensões *x, y, z.*

Consideremos o volume do bloco retangular sendo $V(x, y, z)$ e, como o cubo unitário é um bloco retangular com as três dimensões medindo*1*, temos, $V(1, 1, 1) = 1$.

Para determinar o volume do bloco retangular devemos observar que ele é proporcional a cada uma das suas dimensões, isso foi bem exemplifica nos casos anteriores. Na prática isso quer dizer que se mantivermos duas dimensões constante e multiplicarmos, por exemplo, a altura (z) por n teremos,

$$V(x, y, nz) = nV(x, y, z)$$

Como exemplo, considere um bloco de volume $V(x, y, z)$, se multiplicarmos a altura por *3* teremos o volume triplica

$$V(x, y, 3z) = 3.V(x, y, z)$$

Pelo Teorema Fundamental da Proporcionalidade (demonstração no apêndice 1), podemos garantir que esse resultado vale para quaisquer número real positivo. Isso significa que mantendo duas dimensões constantes o volume fica proporcional à terceira dimensão. Considerando um bloco retangular de dimensões reais positivas a, b, c, temos que:

$$\begin{aligned} V(a, b, c) &= V(1.a, b, c) \\ &= a.V(1, b, c) = a.V(1, b.1, c) \\ &= a.b.V(1, 1, c) = a.b.V(1, 1, c.1) \\ &= a.b.c.V(1, 1, 1) \\ &= a.b.c.1 \\ &= a.b.c \end{aligned}$$

E assim, o volume de um bloco retangular é o produto de suas dimensões. Em particular, a face que está no plano horizontal, formada por duas dimensões, será chamada de base e a outra dimensão vertical de altura. Na figura 6, as dimensões x e y formam a base e a dimensão z, altura. Como $x.y$ é área da base, é comum dizer que

$$V_{paralelepípedo\ retângulo} = (área\ da\ base).(altura)$$

3. 3. DEFINIÇÃO GERAL DE VOLUME

Já sabemos a ideia intuitiva de volume de um sólido, que é o número de vezes que ele contém o cubo unitário, isso nos levou a calcular o volume do bloco retangular. Em seguida, vamos calcular o volume de poliedros retangulares e dos sólidos mais irregulares, como o cone, por exemplo.

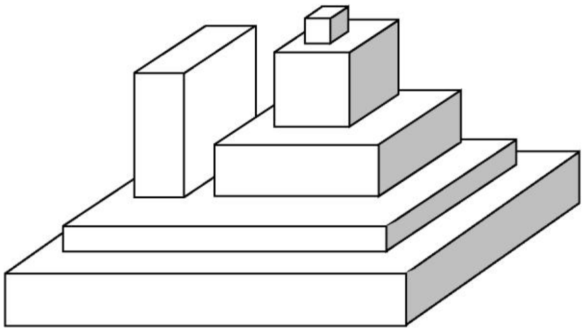


Figura 7-Poliedro Retangular.

Poliedro retangular é todo sólido formado pela união de um número finito de blocos retangulares justapostos. E seu volume é dado pela soma dos volumes dos blocos que formam esse sólido.

Considerando um sólido S para determinarmos o seu volume V_s devemos encontrar o número real que representa a quantidade de cubos unitários necessários para formar S. Se tomarmos um poliedro retangular P contido em S e considerando V_p o volume de P, temos que:

$$V_p \leq V_s$$

Imagine que acrescentamos mais blocos retangulares ao sólido P e obtemos um novo poliedro retangular P' contido em S, cujo volume é $V_{p'}$. Nesse caso ficamos com

$$V_p \leq V_{P'} \leq V_s$$

ou seja, $V_{P'}$ é uma aproximação melhor para V_s.

Observe que podemos acrescentar blocos retangulares o quanto queira, de modo que o volume dos novos poliedros retangulares, ainda contidos em S, seja cada vez mais próximo V_s. Então V_s é um número real, onde as aproximações por falta são os volumes dos poliedros retangulares contidos em S.

Em outras palavras, dado um número real $r < V_s$ podemos determinar um poliedro retangular R, cujo:

$$r < V_R \leq V_s$$

No caso anterior determinamos V_s por meio da aproximação por falta, mas também podemos utilizar a aproximação por excesso para os poliedros retangulares que contém S. Se considerarmos um poliedro retangular T que contém S, podemos encontrar um poliedro T' que contém S e:

$$V_S \leq V_{T'} \leq V_T$$

E a partir disso, podemos encontrar poliedros retangulares, contendo S, cada vez menores, de modo que seus volumes sejam números reais cujas aproximações por excesso sejam V_S .

De modo análogo ao que fizemos antes, dado um número real $r' > V_s$ podemos encontrar um poliedro retangular R' onde

$$V_s \leq V_{R'} < r'$$

Portando, de um modo geral, dados um sólido qualquer S e dois poliedros retangulares P e T. Se S contém P, e T contém S, tem-se que:

$$V_P \leq V_S \leq V_T$$

Isso quer dizer que V_S é um único número real que torna as afirmações acima verdadeiras.

3.4. PROBLEMÁTICA

Na prática, essa definição geral de volume não vai ser aplicada no Ensino Médio para calcularmos o volume, pois se pensarmos em um número que represente o volume de um sólido como uma aproximação dos poliedros regulares por falta ou por excesso, é muito complicado determinar esse número. Imagine, por exemplo, se fossemos calcular o volume de um tronco de cone como uma junção de blocos retangulares justapostos, não seria uma tarefa fácil, concordam?

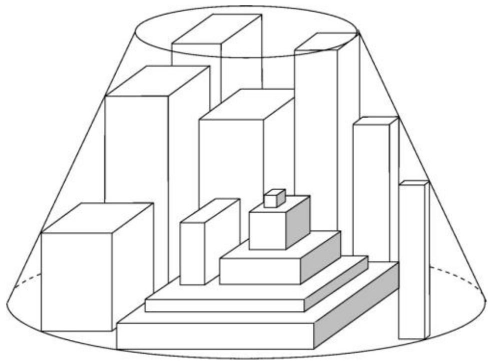


Figura 8-Tronco de Cone sendo preenchido com Blocos retangulares.

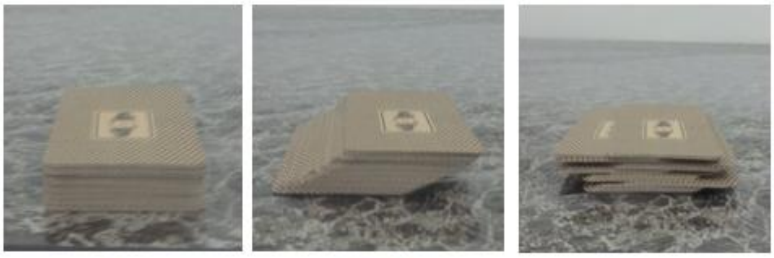
Mas, para fazer o cálculo e determinarmos fórmulas de volume de alguns sólidos conhecidos, temos uma ferramenta matemática muito eficiente, O Princípio de Cavalieri, que será abordado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 04

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI PARA O CÁLCULO DE VOLUME

Até o momento sabemos calcular o volume do bloco retangular, para irmos adiante vamos utilizar como axioma, um resultado conhecido como o Princípio de Cavalieri para o calculo de volume.

Para facilitar o entendimento desse princípio, vamos utilizar um experimento com um baralho. Inicialmente vamos deixá-lo bem organizado, na forma de um bloco retangular (imagem 2(a)), e já sabemos como calcular seu volume. Depois podemos com o auxílio de uma régua, transformá-lo em um paralelepípedo oblíquo (Imagem 2(b)). E de forma geral, podemos colocar as cartas uma sobre as outras da forma que imaginarmos (imagem 2(c)).



2(a) 2(b) 2(c)

Imagem 2 – Baralho de cartas disposto de formas distintas, mas com mesmo volume.

Sabemos que os três sólidos têm volumes iguais. De forma geral podemos considerar dois sólidos A e B (figura 9), apoiados em plano horizontal π, se um plano π' paralelo ao plano π, também horizontal por definição, corta os sólidos obtendo seções de mesma área, pelo Princípio de Cavalieri, os dois sólidos tem o mesmo volume.

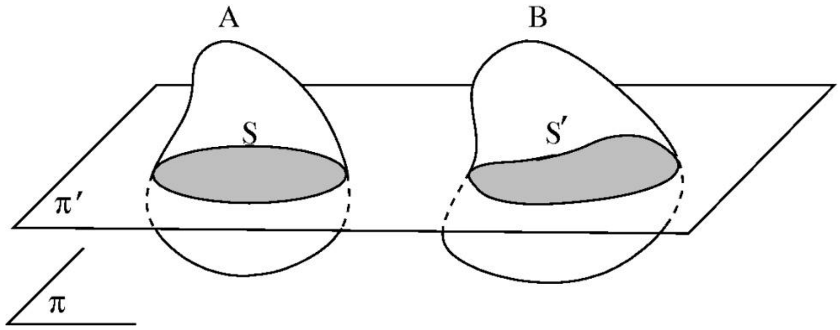


Figura 9 – Sólidos de mesmo volumes.

O princípio de Cavalieri é demonstrado com uso do cálculo, e sua demonstração se encontra no apêndice 2, porém para uso desse princípio no Ensino Médio, que é destaque nesse trabalho, vamos usá-lo como axioma.

Axioma (Princípio de Cavalieri): Consideremos dois sólidos quaisquer. Se todo plano horizontal secciona os sólidos dados obtendo áreas iguais, então seus volumes também são iguais.

Podemos aceitar com mais facilidade esse axioma através de uma justificativa bem interessante: sejam dados duas fatias de dois sólidos muito finas, de mesma altura, com áreas das bases iguais, e com volumes aproximadamente iguais. Tanto se deixa a fatia mais fina, como seus volumes ficam mais aproximados até quando se queira. E se somarmos todas as fatias obtemos que os volumes dos sólidos são iguais.

Com o auxílio desse princípio vamos ser capazes de encontrar volume de vários sólidos geométricos.

CAPÍTULO 05

APLICAÇÕES DO PRINCÍPIO DE CAVALIERI

5.1 PRISMA

Definição: Prisma é todo poliedro que possui duas bases poligonais, paralelas e congruentes, onde todos os pontos de uma das bases são ligados por segmentos congruentes e paralelos a outra base.

Outra característica dos primas é que sempre possuem paralelogramos em todas suas faces laterais. Sua nomeação é dada de acordo com a base. Por exemplo, se sua base é um pentágono, será classificado de prisma pentagonal. Um detalhe adicional, se o prisma possui as faces laterais perpendiculares às bases, é dito reto, caso contrário, dizemos que é oblíquo.

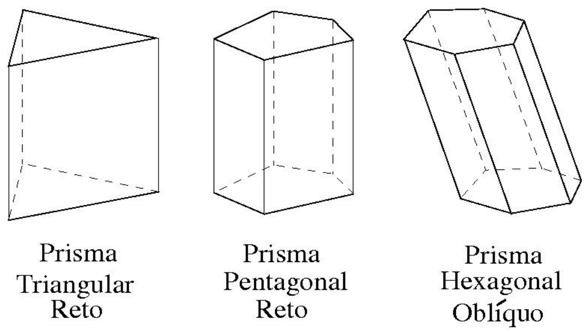


Figura 10 - Exemplos de prismas.

5.2. VOLUME DO PRISMA

Consideremos um prisma de altura h cuja base seja um polígono de área A onde essa base está contida em um plano horizontal $\propto$. Tomemos também, um paralelepípedo retângulo de altura h e área da base A, com a base contida no mesmo plano $\propto$. Para ilustrar essa situação veja figura 11.

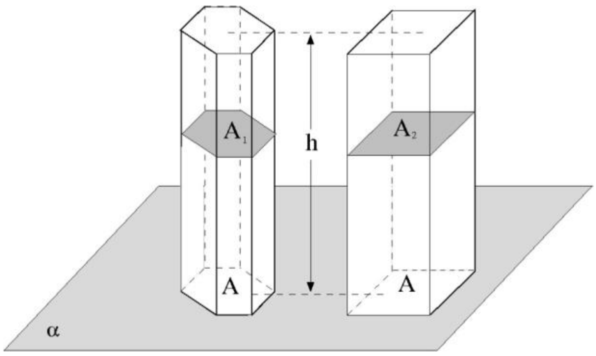


Figura 11 - Prisma e Bloco retangular de mesma área da base.

Agora imagine que esses sólidos sejam cortados por um plano paralelo a α, formando duas secções, uma no primas, de área A_1 e outra no paralelepípedo, de área A_2. Mas, um paralelepípedo também é um prisma e toda seção paralela à base é congruente com ela. E evidentemente o mesmo ocorre com o prisma dado. Portanto,

$$A = A_1 = A_2$$

e pelo Princípio de Cavaliere, temos sólidos de mesmo volume. Logo, como o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura, neste caso, o volume do prisma também é.

$$V_{prisma} = (área\ da\ bese)\ .\ (altura)$$

5.3. O CILINDRO

Definição: Cilindro é um sólido formado por duas bases congruentes e paralelas, localizadas em planos horizontais, onde todos os pontos das bases são ligados por segmentos de retas paralelos e congruentes. Por se tratar de bases e segmentos, ambos congruentes e paralelos, é comum dizer que o cilindro é formado pela base e pela geratriz. Para ilustramos, observe o cilindro na figura 12, de base B e geratriz g.

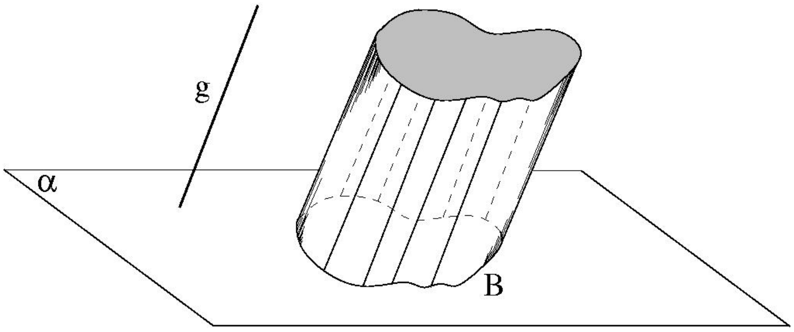


Figura 12 – Cilindro de base B e geratriz g.

É importante ressaltar que a altura e geratriz são distintas. A altura é um segmento perpendicular aos planos das bases, em outras palavras é a distância entre esses planos. A geratriz e a altura podem até serem iguais, mas isso só acontece quando temos um cilindro reto.

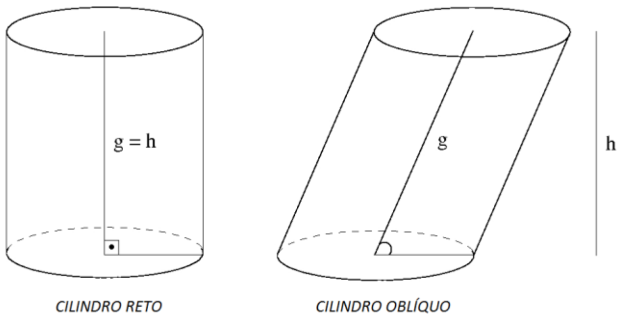


Figura 13 - Diferença de cilindro reto e oblíquo.

Um dado adicional é que, no cilindro, qualquer plano horizontal ao plano da base, determina uma secção congruente à base.

5.4. VOLUME DO CILINDRO

Considere um cilindro que tem altura h e área da base A contida em um plano horizontal $\propto$. Considere também um paralelepípedo retângulo de altura h

e área da base A, base essa, contida no mesmo plano $\propto$ da base do cilindro. Imagine um plano paralelo a $\propto$ que seccione os sólidos, o cilindro, segundo uma área A_1 e o paralelepípedo segundo uma área A_2. (para ilustrar, veja figura14).

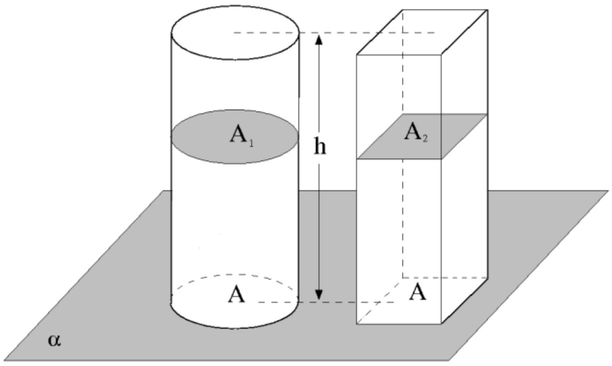


Figura 14 - Cilindro e Paralelepípedo de mesma área da base e mesma altura.

Como,

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_2 = A \end{cases} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, é possível concluir que os dois sólidos tem o mesmo volume. Já sabemos que o volume do paralelepípedo é o produto da área da base pela altura, e concluímos que o volume do cilindro é o produto da área de sua base pela altura do mesmo.

$$V_{cilindro} = (\acute{a}rea\ da\ bese)\ .\ (altura)$$

5.5 – PIRÂMIDE

Definição: Consideremos um polígono contido em um plano horizontal $\propto$, limitado pelos vértices $V_1V_2V_3V_4 \ldots V_{n-1}V_n$, esse polígono recebe o nome de base. Consideremos também um ponto V, que chamaremos de vértice, que não pertence ao plano horizontal $\propto$. Chamamos de Pirâmide a reunião dos segmentos que ligam o ponto V a todos os pontos da base.

Uma pirâmide possui triângulo em todas as suas faces laterais, e são classificadas de acordo com a base. Por exemplo, se a base for um pentágono, será chamada de pirâmide pentagonal.

Além disso, uma pirâmide pode ser dita reta, quando a projeção do vértice da pirâmide coincide com o centro da base, isso ocorre quando todas as faces laterais são triângulos congruentes e isósceles. Caso contrário, dizemos que a pirâmide é oblíqua (ver figura 15).

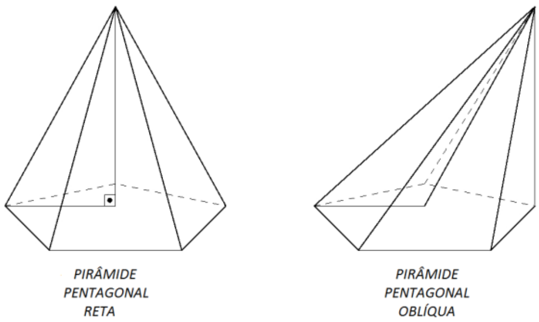


Figura 15 - Exemplo de Pirâmides.

5.6. VOLUME DA PIRÂMIDE

Antes de determinarmos o volume de uma pirâmide, precisamos de conhecimentos adicionais. Neste caso, devemos mostrar que se o vértice de uma pirâmide se move segundo um plano paralelo a base, seu volume permanece o mesmo.

Vamos utilizar um caso particular para depois prosseguirmos com mais facilidade. Consideremos uma pirâmide triangular de vértice V, base ABC e altura H (figura 16). Depois um plano paralelo à base forma uma seção $A'B'C'$.

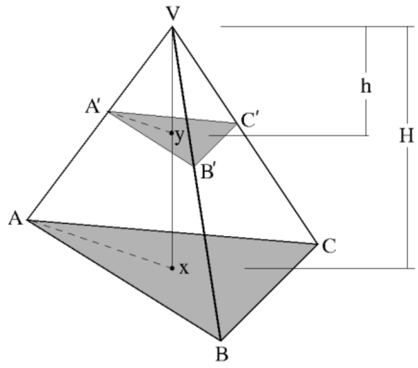


Figura 16 - Pirâmide de base ABC, altura H e secção $A'B'C'$.

Nessa pirâmide vamos destacar dois Lemas importantes para chegarmos ao cálculo do volume da pirâmide:

Lema 1: A seção $A'B'C'$ e a base ABC são figuras semelhantes, e sua razão de semelhança é $\frac{h}{H}$.

Lema 2: A razão entre a área da seção $A'B'C'$ e a área base ABC é o quadrado da razão de semelhança entre elas, nesse caso, $\left(\frac{h}{H}\right)^2$.

As demonstrações dos dois lemas estão no apêndice 03.

Teorema: Duas pirâmides de mesma base e mesma altura tem volumes iguais.

Demonstração: Consideremos duas pirâmides de mesma base triangular ABC, e mesma altura H. Tendo uma o vértice V_1 e a outro vértice V_2 como ilustra a figura 17. Imagine agora que um plano paralelo à base ABC e distando h dos vértices das pirâmides, geram secções S_1 e S_2, respectivamente, nas pirâmides de vértice V_1 e V_2.

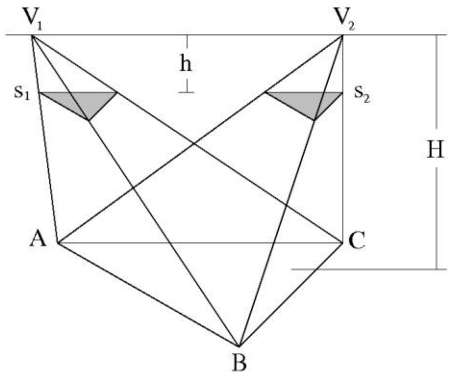


Figura 17 - Pirâmides de mesma base e mesma altura.

Seja A a área da base ABC, e sejam A_1 e A_2 as áreas das seções S_1 e S_2, respectivamente. Pelos dois lemas citados anteriormente, temos:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \\ \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, as pirâmides tem o mesmo volume, isso demonstrando o teorema.

Essa demonstração era o que faltava para determinarmos o volume da pirâmide.

Vamos inicialmente considerar e determinar o volume da pirâmide triangular para posteriormente, calcular o volume de uma pirâmide qualquer.

Teorema: o volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração: Para facilitar nosso entendimento, quando citamos, um tetraedro de vértices $A, B, C\ e\ D$ e escrevermos $D - ABC$, estamos querendo dizer que vamos considerar ABC sendo a base e D o vértice da pirâmide. Nesse caso o volume, do tetraedro pode ser representado por:

$$V(D-ABC)=V(C-ABD)=V(B-ACD)=V(A-BCD)$$

dependendo da base que escolhermos.

Consideremos agora o prisma triangular de base ABC e $A'B'C'$.

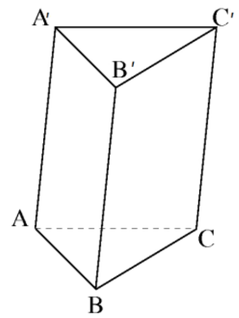


Figura 18 - **Prisma triangular de base ABC e $A'B'C'$.**

Se dividirmos o prisma em três pirâmides triangulares (ver figura 19), temos:

Pirâmide 1: $A-A'B'C'$

Pirâmide 2: $B'-ACC'$

Pirâmide 3: $B'-ABC$

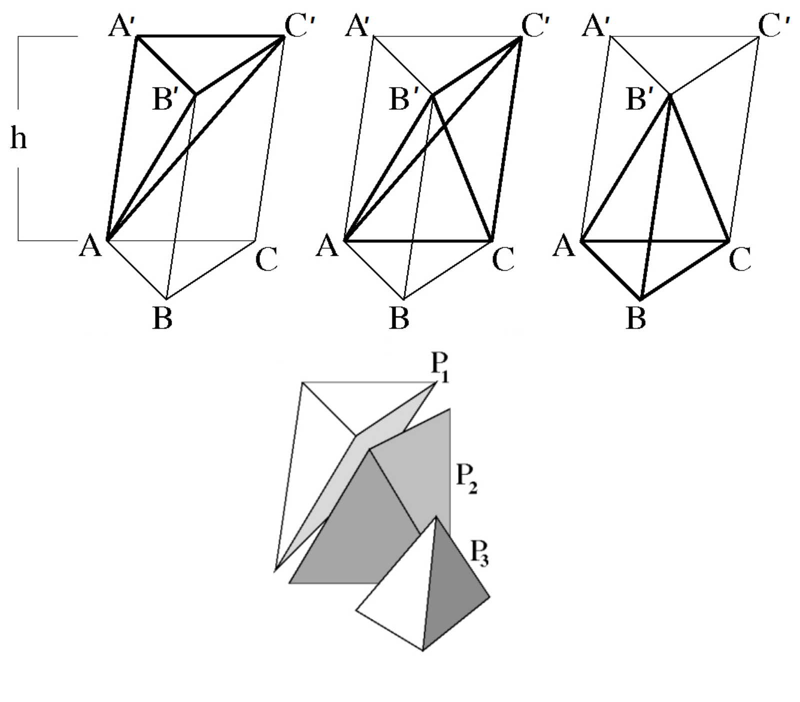


Figura 19 - Prisma Triangular repartido em 3 tetraedros de mesmo volume.

Podemos ver facilmente que o volume da pirâmide *1* é igual o volume da pirâmide 3, por se tratar de um prisma, temos que a base ABC e $A'B'C'$ são iguais e as alturas BB' e AA' também são iguais, logo pelos teoremas já destacado anteriormente, duas pirâmides de mesma área da base e mesma altura tem volume iguais. Assim:

$$V_{pirâmide\ 1} = V_{pirâmide\ 3}$$

Agora vamos fazer uma comparação entre a pirâmide *1* e a pirâmide 2. Para chegarmos a demonstração devemos fazer uma mudança do vértice da pirâmide *1*, apenas substituir o vértice A pelo B', e a pirâmide passa a ser representada por $B' - AA'C'$, ao Invés de $A - A'B'C'$ preservando, evidentemente volume da pirâmide. Já a pirâmide *2* fica sem alteração, $B^{'} - ACC'$.

Observemos que as bases das duas pirâmides tem mesma área, pois são geradas do paralelogramo $AA'CC'$, dividido pelo diagonal AC'. Além disso as pirâmides tem mesma altura, pois a mesma é a distância do vértice B' (comum as duas pirâmides) ao plano que contém o paralelepípedo $AA'CC'$ .Assim, a pirâmide *1* e pirâmide 2 tem mesmo volume.

$$V_{pirâmide\ 1} = V_{pirâmide\ 2}$$

Portanto, como:

$$\begin{cases} V_{pirâmide\ 1} = V_{pirâmide\ 3} \\ V_{pirâmide\ 1} = V_{pirâmide\ 2} \end{cases} \Rightarrow V_{pirâmide\ 2} = V_{pirâmide\ 3}$$

Concluímos assim que as três pirâmides tem volumes iguais, e obviamente, cada uma tem volume igual a um terço do volume do prisma triangular (cujo volume, é o produto da área da base pela altura), e assim concluímos que, o volume da pirâmide triangular é um terço do produto da área da base pela altura, como queríamos demonstrar.

$$V_{pirâmide\ triangular} = \frac{1}{3}.(área\ da\ base).(altura)$$

Teorema: O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da área de sua base por sua altura.

Demonstração: Como já sabemos calcular o volume de uma pirâmide triangular, vamos dividir a pirâmide qualquer em pirâmides de base triangular. Para isso, basta dividirmos a base da pirâmide em triângulos justapostos por meio das diagonais, e assim obtemos pirâmides triangulares formadas por esses triângulos e o vértice da pirâmide inicial. Veja a figura de uma pirâmide pentagonal para visualizar melhor a situação.

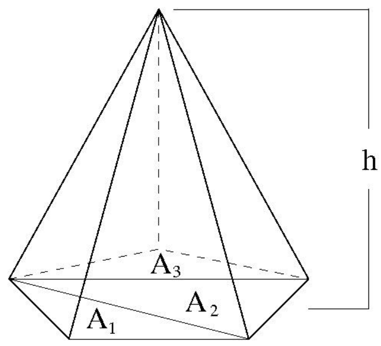


Figura 20 - Pirâmide Pentagonal dividida em três pirâmides triangulares justapostas.

Neste caso, temos que o volume da pirâmide pentagonal é:

$$V_{P_5} = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \frac{1}{3}A_3h$$

$$V_{P_5} = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3)h$$

$$V_{P_5} = \frac{1}{3}(área\ da\ base).(altura)$$

Generalizando, suponhamos que a pirâmide tenha área da base A e altura h. Imagine que a base foi dividida em n triângulos de áreas:

$$A_1A_2A_3 \ldots A_n$$

Temos que o volume da pirâmide é a soma das pirâmides de bases triangulares, ou seja,

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}A_1h + \frac{1}{3}A_2h + \frac{1}{3}A_3h + \cdots + \frac{1}{3}A_nh$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3}Ah$$

Portanto,

$$V_{Pirâmide} = \frac{1}{3}(área\ da\ base).(altura)$$

Como queríamos demonstrar.

5.7. CONE

Definição: Consideremos uma figura plana B, chamada de base, pertencente ao plano horizontal $\propto$ e um ponto V fora desse plano, chamaremos de cone a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto V a todos os pontos de B. Além disso, a altura do cone é à distância do seu vértice ao plano da base.

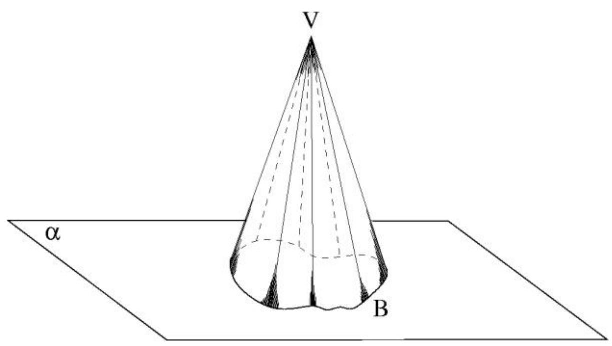


Figura 21 - Cone de base B e vértice V.

O tipo de cone mais comum é aquele cuja base é um círculo, que por sua vez, pode ser classificado como reto, quando a projeção de seu vértice na base coincide com o centro da mesma, caso contrário será oblíquo.

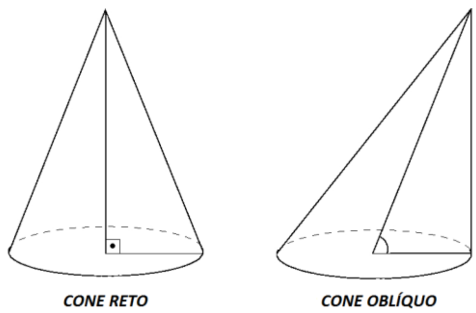


Figura 22 - Diferença de cone reto e oblíquo.

5.8. VOLUME DO CONE

Antes de encontramos o volume do cone precisamos de suportes iniciais.

Lema: Seja um cone de vértice V e base B situado em um plano horizontal $\propto$. Imagine que um plano paralelo ao plano $\propto$ gerando uma secção b, como mostra a figura 23. A distância de V ao plano $\propto$, chamaremos de H, e a distância de V à secção, de h. A partir disso tem-se a relação:

$$\frac{\acute{A}REA\ DA\ SEC\c{C}\tilde{A}O\ b}{\acute{A}REA\ DA\ BASE\ B} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Demonstração: a demonstração vai ao encontro da feita com a pirâmide, que encontra-se no apêndice 3.

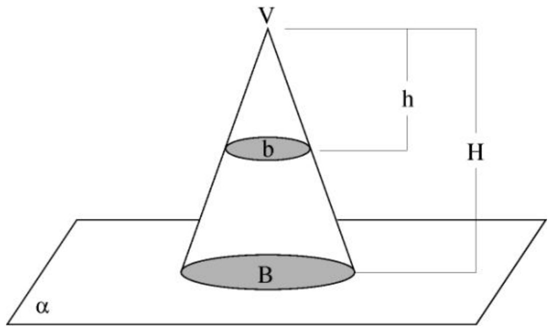


Figura 23 - Cone de Base B e altura H e secção de base b que dista h do vértice V.

Teorema: O volume do cone é um terço do produto da área da base pela altura.

Demonstração: Consideremos uma pirâmide e um cone com bases de mesma área A, localizadas no mesmo plano e os dois com a mesma altura H. Imagine que um plano paralelo ao plano, que contém a base, distando h dos vértices dos sólidos, forma com a pirâmide uma secção de área A_1, e com o cone uma secção de área A_2. Para melhorar a compreensão, veja figura 24.

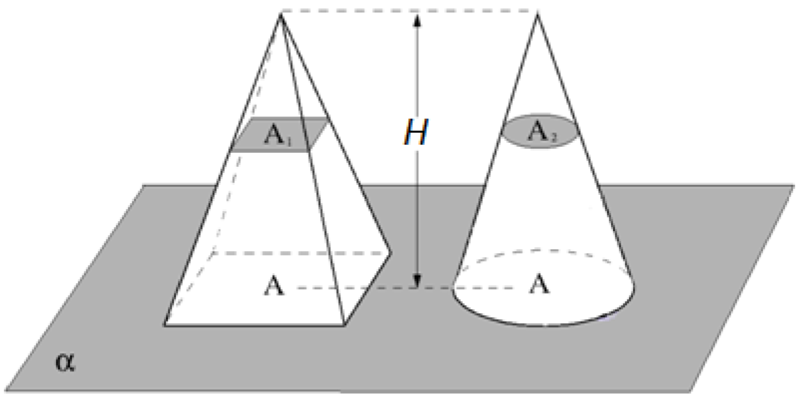


Figura 24 - pirâmide e cone de mesma área da base A e mesma altura H.

Da figura temos que:

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \\ \frac{A_2}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1}{A} = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_1 = A_2$$

Como as áreas das secções da pirâmide e do cone são iguais para todo plano paralelo ao plano da base, pelo Princípio de Cavaliere, os sólidos tem o mesmo volume, e como já sabemos calcular o volume da pirâmide, que é um terço do produto da área da base pela altura, o do cone também será.

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\,.(área\ da\ base).(altura)$$

5.9. ESFERA

Definição: Uma esfera de centro no ponto O e raio medindo R é o conjunto de pontos que estão a uma distância menor ou igual a R do centro O da esfera.

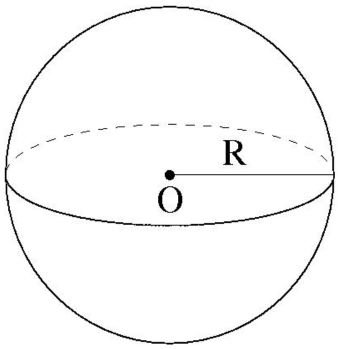


Figura 25 - Esfera de centro O e raio R.

5.10. VOLUME DA ESFERA

Teorema: O volume de uma esfera de raio R é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Demonstração: Consideremos uma esfera de raio R e centro O e um cilindro reto cuja base é um círculo de raio R e altura medindo $2R$, ambos os sólidos sobre o mesmo plano horizontal. Além disso, imaginemos que foram retirados dois cones (de raio da base R e altura R) do cilindro e que um plano horizontal, que dista h do centro da esfera, produziu secções nestes sólidos como mostra a figura 26.

Neste caso, a secção da esfera é um círculo de raio $R,$ cuja área é $\pi R,^2$, e como $R,^2 = R^2 - h^2$ temos que a área desse círculo é $\pi(R^2 - h^2)$. Por outro lado a secção do cilindro é uma coroa circular de área $\pi R^2 - \pi h^2 = \pi\ (R^2 - h^2)$. E pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que os dois sólidos tem mesmo volume.

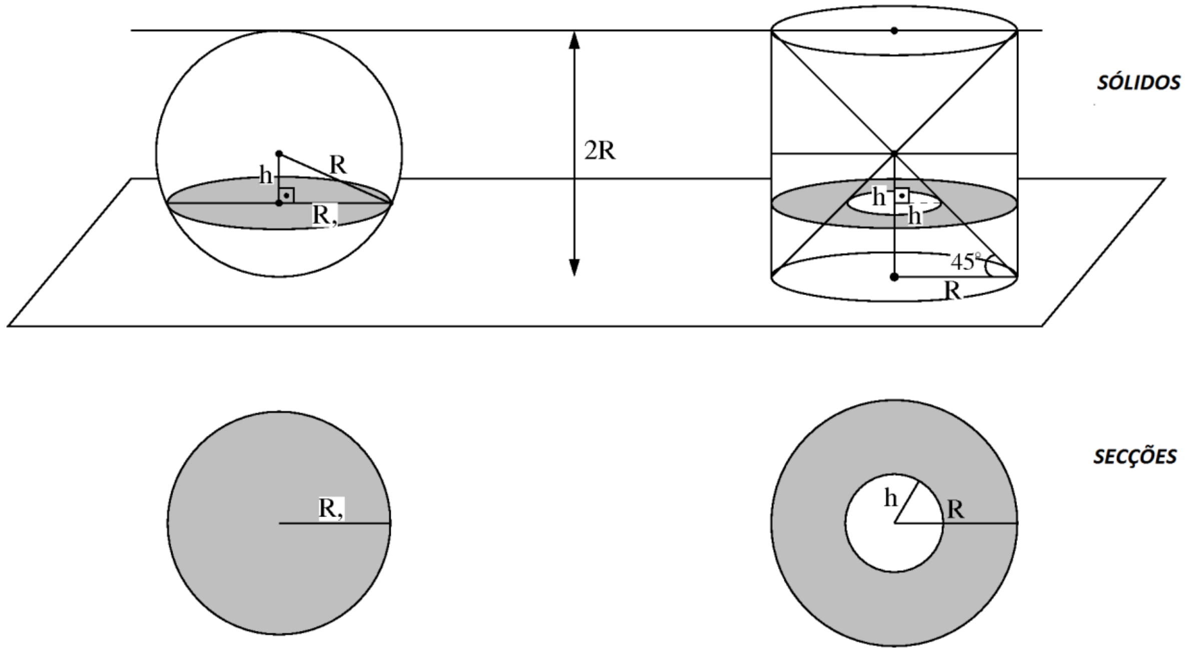


Figura 26 - Esfera de raio R e Cilindro equilátero de raio da base R retirados dois cones de raio da base e altura R.

O volume da esfera de raio R e centro O é igual ao volume de um cilindro de raio da base R menos duas vezes o volume de um cone de raio da base R e altura R. Ou seja,

$$V_{esfera} = \pi . R^2 . 2 . R - 2 . \frac{1}{3} . \pi . R^2 . R$$

$$V_{esfera} = 2\pi . R^3 - \frac{2}{3} . \pi . R^3$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} . \pi . R^3$$

Como queríamos demonstrar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao contrário do que acontece na maioria das aulas sobre volume dos sólidos no Ensino Médio, onde os alunos veem fórmulas prontas sem nenhum entendimento e justificativas, apresentamos como axioma o princípio de Cavalieri, e com suas aplicações, com auxílio de várias ilustrações, demonstramos as fórmulas dos volumes dos sólidos.

Neste trabalho mostramos um pouco de conhecimentos prévios a cerca do Princípio de Cavalieri e suas aplicações para determinar o volume dos sólidos, assim como seus processos históricos. Consideramos que dessa forma os conteúdos inerentes à disciplina, tornam-se muito atrativos, dinamizando as suas aplicabilidades, fazendo com que os alunos sintam-se instigados a pesquisar sobre os respectivos conteúdos.

Esperamos que esse trabalho ajude os professores a repensarem suas práticas no ensino dos conteúdos relativos a matemática, e principalmente respectivas ao volume, de maneira que possam proporcionar aos alunos um ensino qualitativo e com uma sequência lógica do cálculo de volumes, sempre pensando no melhor para a aprendizagem e desenvolvimento do raciocínio dos mesmos.

REFERENCIAL BIBLIOGRÁFICO

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Trad. H. H. Domingos. Campinas, SP: Unicamp, 2004.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio** – **volume 2** – **6. Ed.** – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L. **Medida e Forma em Geometria – 4. ed.** – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A. **Temas e Problemas**. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LIMA, E. L. **Meu Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

PATERLINI, R. R. **Os "Teoremas"de Cavalieri**. Revista do Professor de Matemática no. 72, 2o quadrimestre de 2010, págs. 43-47. Versão ampliada com as demonstrações dos teoremas. www.dm.ufscar.br/ ptlini/. (Acesso em 25/02/2014).

STEWART, J. **Cálculo, volume 2**. Trad. Tec. A. C. Moretti, A. C. G. Martins; Rev. Tec. H. Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

MACHADO, Antonio dos Santos, **Áreas e Volumes** – São Paulo: Atual 1998.

SOFTWARE XFIG.3.2.5C.FULL.TAR.GZ. Disponível em: www.xfig.org – Acessado em 10/02/2014.

LULA, Kariton Pereira. **“Aplicações do Principio de Cavalieri ao Cálculo de Volume e Áreas”.** Dissertação de mestrado em PROFMAT. Goiania, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE 01

Teorema Fundamental da Proporcionalidade

$$Seja\ f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, uma\ função\ com\ as\ seguintes\ propriedades:$$

1. $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
2. $f(nx) = n.f(x)\ para\ todo\ \ n \in \mathbb{N}\ e\ todo\ x \in \mathbb{R}^+$.

$Então\ f(cx) = \ c.f(x)\ para\ todo\ c\ \mathbb{R}^+ e\ todo\ x\ \mathbb{R}^+.\ Consequentimente,$
$f(x) = ax\ para\ todo\ x \in \mathbb{R}^+, com\ a = f(1)$.

Demonstração: Inicialmente, temos que para todo número racional $r = m/n$, com $m, n \in \mathbb{N}$, e todo $x \in \mathbb{R}^+$ vale

$$n.f(rx) = f(n.rx) = f(mx) = m.f(x),$$

Isso, pela propriedade 2., logo

$$f(rx) = \frac{m}{n} f(x) = r.f(x)$$

Assim, a igualdade $f(cx) = c.f(x)$ é válida quando $c \in \mathbb{Q}$.

Agora, suponhamos por absurdo que existe um $c > 0$ irracional tal que $f(cx) \neq c.f(x)$ para algum $x \in \mathbb{R}^+$. Então ou $f(cx) < c.f(x)$ ou $f(cx) > c.f(x)$. Consideremos o primeiro caso. Temos então $f(cx)/f(x) < c$. Seja r um valor racional aproximado de c, de modo que $f(cx)/f(x) < r < c$, logo $f(cx) < r.f(x) < c.f(x)$. Como $r \in \mathbb{Q}$, vale $r.f(x) = f(rx)$. Assim, podemos escrever $f(cx) < f(rx) < c.f(x)$. Em particular $f(cx) < f(rx)$. Mas como $r < c$, tem-se $rx < cx$ e, pela propriedade 1.,isso obriga $f(rx) < f(cx)$ e não $f(cx) < f(rx)$. Chegamos ao absurdo e assim não é possível $f(cx) < c.f(x)$. De modo análogo concluímos que é impossível $f(cx) > c.f(x)$. Portanto, $f(cx) = c.f(x)$ para todo $c, x \in \mathbb{R}^+$.

APÊNDICE 02

Demonstração do Princípio de Cavalieri para cálculo de volume

Para chegarmos à demonstração do Princípio de Cavalieri para volume, devemos inicialmente fazermos um estudo prévio de integrais simples, dupla e tripla.

- *Integrais Simples*

Se $f(x) \geq 0$, então a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

representa a área abaixo da curva $y = f(x)$ de a até b.

- *Integral Dupla*

Se $f(x,y) \geq 0$, então a integral dupla

$$\iint_D f(x,y)dA$$

representa o volume sob a superfície $z = f(x,y)$ acima de D.

- *Integral Tripla*

Se $f(x,y,z) \geq 0$ é a função densidade de um objeto sólido que ocupa a região E, em unidades de massa por unidade de volume, então a integral tripla

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dV$$

é a massa do sólido E. Em partícula, se a densidade $f(x,y,z) = 1$, então

$$\iiint\limits_E dV$$

representa o volume do sólido E.

Como estamos trabalhando com volume, podemos considerar sabido conhecimento sobre área, em particular, para o teorema seguinte temos:

- Se R é uma região do plano, indicaremos sua área por $A(R)$.
- $\iint_{P_z} dxdy = A(P_z)$

Se P é um sólido, indicaremos seu volume por $V(P)$.

Teorema (Princípio de Cavalieri): Seja um sistema de coordenadas cartesianas $Oxyz$, e seja P um sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja P_t a interseção de P com o plano $z = t$. Seja Q outro sólido finito delimitado por $z = 0$, $z = c > 0$ e por uma quantidade finita de gráficos de funções contínuas do tipo $y = f(x,z)$ e $x = g(y,z)$. Para cada t tal que $0 \leq t \leq c$, seja Q_t a interseção de Q com o plano $z = t$. Suponhamos que exista $k > 0$ tal que $A(P_t) = kA(Q_t)$ para todo t. Então $V(P) = k.V(Q)$.

Demonstração: Da teoria de integração de funções reais temos:

$$V(P) = \iiint_P dxdydz = \int \left[\iint_{P_z} dxdy \right] dz =$$

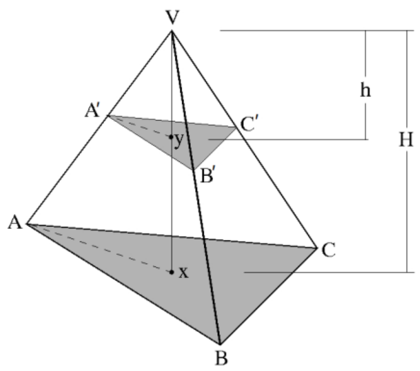
$$= \int_0^c A(P_z)dz = \int_0^c kA(Q_z)dz =$$

$$= k \int_0^c A(Q_z)dz = \cdots = k.V(Q)$$

O que demonstra a afirmação.

APÊNDICE 03

Observe a figuras abaixo para facilitar as demonstrações dos lemas seguintes.



Pirâmide de base ABC, altura H e secção $A'B'C'$.

Demonstração do Lema 01.

Devemos mostrar que os triângulos $A'B'C'$ e ABC são semelhantes e de razão r.

Sabemos que os seguimentos AB e $A'B'$ e consequentemente, os triângulos ABV e $A'B'V$ são semelhantes por AAA, então, temos

$$\frac{A'V}{AV} = \frac{B'V}{BV} = \frac{A'B'}{AB} = r \qquad (I)$$

De forma análogo, agora com os triângulos BCV e $B'C'V$, com BC e $B'C'$ sendo paralelo, temos

$$\frac{B'V}{BV} = \frac{C'V}{CV} = \frac{B'C'}{BC} = r \qquad (II)$$

E também de forma análoga com os triângulos ACV e $A'C'V$, com AC e $A'C'$ sendo paralelo, temos

$$\frac{A'V}{AV} = \frac{C'V}{CV} = \frac{A'C'}{AC} = r \qquad (III)$$

E a partir de $(I), (II) e\ (III)$, concluímos que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = r$$

Em outras palavras, os lados da base e da secção são proporcionais, portanto, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes de razão r. Falta agora mostrar que $r = \frac{h}{H}$.

Para mostrar isso, vamos considerar dois pontos sobre a perpendicular baixada do Vértice V, o ponto Y, pertencente a secção, e o ponto X, pertencente a base.

Usando como referência os triângulos BXV e $B'YV$, com os segmentos BX e $B'Y$ paralelos, segue que os triângulos são semelhantes, logo, temos:

$$\frac{YV}{XV} = \frac{B'X}{BY} = \frac{B'V}{BV} = r$$

E como os triângulos BXV e $B'YV$ são retângulos, respectivamente, em X e Y, segue que $XV = H$ e $YV = h$, logo:

$$\frac{YV}{XV} = \frac{h}{H} = r$$

Portanto os triângulos $A'B'C'$ e ABC são semelhantes e de razão $r = \frac{h}{H}$.

Demonstração do Lema 02.

Agora vamos determinar a relação entre as áreas da secção e da base da pirâmide. Sabemos que os triângulos $A'B'C'$ e ABC são semelhantes e que todos os seguimentos opostos a ângulos de mesmas medidas desses triângulos são proporcionais de razão $\frac{h}{H}$.

Seja h'' altura do triângulo $A'B'C'$ em relação a base $B'C'$ e h' altura do triângulo ABC em relação a base BC. Então a razão entre as áreas dos triângulos $A'B'C'$ e ABC será:

$$\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}.B'C'.h''}{\frac{1}{2}.BC.h'} = \frac{B'C'.h''}{BC.h'}$$

E como $\frac{B'C'}{BC} = \frac{h''}{h'} = \frac{h}{H}$, temos:

$$\frac{A_{A'B'C'}}{A_{ABC}} = \frac{h}{H}.\frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2$$

Como queríamos demonstrar.